Geometrija adjungiranih funktora

Blagojević, Boris

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Boris Blagojević

GEOMETRIJA ADJUNGIRANIH FUNKTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zoran Škoda

Zagreb, veljača 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Geometrijski prostori nekoga tipa, recimo glatke mnogostrukosti ili algebarske sheme, obično čine kategoriju. Objekte u tim kategorijama (prostore) možemo poistovjetiti s jedinstvenim morfizmima u terminalni objekt (točku), a iskustvo je pokazalo da mnoga svojstva prostora imaju poopćenje na sve morfizme kategorije. Pojam afine sheme na primjer poopćava se na pojam afinoga morfizma, i to na takav način da je algebarska shema $(X, \mathscr{O}_X)$ nad poljem k afina ako i samo ako je afin morfizam $(X, \mathscr{O}_X) \to \operatorname{Spec} k$ u spektar polja (terminalnu k-shemu), a općeniti afini morfizam $f : X \to Y$ možemo intuitivno shvatiti kao "svežanj" afinih shema $f^{-1}(y)$, po jedne za svaku točku $y \in Y$. Francuski matematičar Alexander Grothendieck je naglašavao da se algebarska geometrija i slične discipline trebaju proučavati u ovom *relativnome* kontekstu, gdje se umjesto samo svojstava objekata proučavaju svojstva svih morfizama. Operacije na objektima poopćavaju se u teoriji kategorija na operacije na morfizmima, a klase morfizama s "dobrim" svojstvima obično će biti zatvorene na "dobre" operacije, kao i na kompoziciju.

Morfizmi prostora tipično induciraju funktore na kategorijama geometrijskih objekata nad njima. Ako je na primjer $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje topoloških prostora, onda su definirani funktori povlaka $f^* : \mathrm{Fas}_Y \to \mathrm{Fas}_X$ i potiska $f_* : \mathrm{Fas}_X \to \mathrm{Fas}_Y$ duž morfizma f, gdje je s Fas_X označena kategorija snopova skupova nad X, i funktor f^* lijevo je adjungiran funktoru f_*. Općenito u geometriji, funktore tipa f^* zovemo funktorima inverzne, a tipa f_* funktorima direktne slike. Ponekad postoje i dodatni funktori direktne i inverzne slike (npr. funktor $f_!$ direktne slike s kompaktnim nosačem) i tipično su i oni karakterizirani adjunkcijama poput $f_! \dashv f^* \dashv f_* \dashv f^!$. Svojstva morfizama (npr. je li morfizam otvoreno preslikavanje) mogu se karakterizirati u terminima ovih induciranih funktora, i pri tome su bitna svojstva tzv. *svojstva egzaktnosti*: čuvanje i reflektiranje određenih limesa, vjernost, adjungiranost, i slično, dakle u prvom redu kako se funktor ponaša u odnosu na *univerzalne konstrukcije*.

Također, "ljepljenje" struktura, npr. vektorskih svežnjeva nad fiksnim geometrijskim prostorom, isto možemo formulirati u terminima funktora među kategorijama svežnjeva nad pojedinim elementima pokrivača. To je Grothendieckova metoda silaska (eng. descent, v. [18]) koja je ostala izvan okvira ovoga rada. Uvjeti za metodu silaska su također izraženi u terminima egzaktnosti određenoga funktora, a tehnički rezultat koji je suština tih uvjeta je Barr–Beckov teorem o monadičnosti.

U ovome radu obrađen je u prvom redu uvod u teoriju kategorija (prva tri poglavlja), s naglaskom na univerzalne konstrukcije: reprezentabilnost, limese, Kanova proširenja i posebno, adjungirane funktore, koji su tema 3. poglavlja. Tu su uključeni i netrivijalni opći i posebni teorem o adjungiranom funktoru, kao i standardni ali ključni rezultat o desnoj odnosno lijevoj egzaktnosti adjungiranih funktora. U 4. poglavlju dan je pregled osnovnog jezika monoidalnih i obogaćenih kategorija, kao i kratki opis pojma bikategorije. Bikategorije, koje poopćavaju monoidalne kategorije i aksiomatiziraju svojstva morfizama među morfizmima ("2-morfizama"), prva su stepenica u poopćenju obične teorije kategorija na bogatu teoriju viših kategorija. Poglavlje 5 posvećeno je monadama, koje su u uskoj vezi s adjungiranim funktorima, i ističu jednu posebnu klasu adjungiranih funktora s dodatnim svojstvima egzaktnosti – monadične funktore. Ranije spomenuti Barr–Beckov teorem, koji daje nužne i dovoljne uvjete monadičnosti, glavni je rezultat ovoga poglavlja.

U posljednjem, 6. poglavlju, obrađujemo adjungirane funktore u kontekstu Abelovih kategorija, te dajemo karakterizaciju adjungiranih funktora između kategorija modula nad nekomutativnim prstenom s jedinicom (Eilenberg–Wattsov teorem). Zatim je pokazano da homomorfizmi ili posebno plosnati homomorfizmi prstenova induciraju adjungirane funktore (afine i plosnate morfizme) između kategorija modula koji imaju posebno jednostavnu geometrijsku karakterizaciju u terminima egzaktnosti. Komutativni prstenovi su u algebarskoj geometriji dualni afinim shemama, a kategorija modula nad prstenom ekvivalentna je kategoriji kvazikoherentnih snopova nad njegovim spektrom. Dakle, spomenute se karakterizacije mogu prenijeti na opće algebarske sheme i Abelove kategorije kvazikoherentnih snopova nad njima, a poklapanje funktorijalne i klasične defincije daje Serreov kriterij o afinosti. U nekomutativnoj geometriji prema Rosenbergu ([15]), gdje su kvazikoherentni snopovi polazišna točka, funktorijalne se karakterizacije uzimaju kao definicija. Budući da je u radu obrađena općenito situacija nekomutativnoga prstena, izložen je na kraju i pojam Moritine ekvivalencije, koji je ključan u nekomutativnom kontekstu.

Konačno, na kraju ovoga rada zahvaljujem se svome mentoru, doc. dr. sc. Zoranu Škodi na prijedlogu ove teme, kao i na svom trudu, konzultacijama i savjetima. Također se zahvaljujem svojim roditeljima na stalnoj i bezuvjetnoj podršci.

Poglavlje 1

Kategorije

1.1 Skupovi u teoriji kategorija

Jedna od glavnih primjena teorije kategorija je proučavanje odnosa između klasa matematičkih struktura, poput klase svih topoloških prostora ili klase svih grupa, no ove dvije i mnoge druge slične klase ne čine skup u ZFC aksiomima, čak ni ako se ograničimo na neku potkolekciju reprezentanata klasa izomorfizama.

Općenito, ako je K neograničena klasa kardinalnih brojeva, a C takva klasa da možemo definirati funkcijsku relaciju φ po kojoj elementima od K injektivno odgovaraju elementi od C, onda C nije skup: ako bi C bio skup, po shemi aksioma zamjene bi to bio i K, no tada bi unija U od K imala kardinalitet strogo manji od nekog od elemenata od K, što je nemoguće. Po Cantorovom teoremu klasa svih kardinala jeste neograničena, i u standardnim primjerima, poput spomenutih grupa ili topoloških prostora, očito je da postoje strukture proizvoljno velikoga kardinaliteta. Iz Löwenheim–Skolemovog teorema slijedi da isto svojstvo imaju sve strukture opisane teorijom prvog reda koja ima ijedan beskonačan model.

Ovo ograničenje predstavlja probleme za rad strogo u okvirima aksioma ZFC aksioma koji uz određena ograničenja na teoriju redovito nisu posebno supstantivne prirode, već su čisto formalni, i zapravo se često ignoriraju. Ovdje ćemo ipak dati kratki pregled problematike, i opisati rješenje koje se koristi u radu.

Svaku klasu skupova možemo poistovjetiti s njenim definirajućim predikatom, što omogućava da vršimo neke rudimentarne operacije na njima, ili ekvivalentno možemo s klasama raditi formalno u na primjer u von Neumann–Bernays–Gödelovoj teoriji skupova, no tako nam svejedno ostaju dvije vrste objekata – skupovi i prave klase – od kojih na jednoj ne možemo vršiti sve operacije koje možemo na prvoj: budući da su elementi klase nužno skupovi, ne postoji partititvni skup prave klase, pa onda ni skupovi funkcija između njih.

Jedno standardno rješenje ovoga problema dobiva se korištenjem **Grothendieckovih univerzuma**. Grothendieckov univerzum je skup $\mathcal{U}$ koji zadovoljava:

- $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ i $X \in \mathcal{F}$ povlači $X \in U$
- $X \in \mathcal{U}$ povlači $\mathcal{P}X \in \mathcal{U}$
- ako je $I \in \mathcal{U}$, a $\{X_i\}_{i \in I}$ familija skupova u $\mathcal{U}$, onda je i $\bigcup_{i \in I} X_i \in \mathcal{U}$.

Elemente od $\mathcal{U}$ možemo zvati **malima**, a skupove koji nisu elementi od $\mathcal{U}$ **velikim skupovima**. Ovako definirana kolekcija $\mathcal{U}$ zatvorena je na sve skupovno teorijske operacije (produkte, funkcijske skupove, podskupove...) koje su i same indeksirane skupovima u $\mathcal{U}$, a klase poput svih malih grupa su jednostavno podskupovi od $\mathcal{U}$, dakle obični (veliki) skupovi. Ako je skup $\mathcal{U}$ neprazan, onda nužno sadrži skup V_ω svih hereditarno konačnih skupova, a ako sadrži beskonačan skup, odnosno ako je neprebrojiv (kako se Grothendieckov univerzum obično i definira), onda sadrži i svaki skup koji se u uobičajenoj matematičkoj praksi promatra, i to iz jednostavnoga razloga: skup $\mathcal{U}$ s naslijeđenom relacijom $\in \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ je model ZFC aksioma. Posebno je postojanje takvoga skupa strogo jače od ZFC teorije i ne može se dokazati u njoj, no ipak se u radu s kategorijama često pretpostavlja i još jača tvrdnja: da je svaki univerzum $\mathcal{U}$ element drugoga univerzuma $\mathcal{V}$ (**Grothendieckov aksiom o univerzumima**). Ovaj aksiom omogućava maksimalnu fleksibilnost, koja nama ipak neće trebati, a dolazi uz određene komplikacije. Zato ćemo se ograničiti na postojanje samo dva neprebrojiva univerzuma $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, takva da je $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, i elemente od $\mathcal{U}$ ćemo zvati malim, a elemente od $\mathcal{V}$ velikim skupovima. Skupove koji nisu elementi od $\mathcal{V}$ ćemo u prvom redu izbjegavati, a u nuždi zvati **vrlo velikima**. Razlozi za uvođenje dodatnih pretpostavki, i to upravo ovih, su sljedeći:

- možemo se fokusirati na skupove jednoga univerzuma ($\mathcal{U}$), i time ćemo sigurno obuhvatiti sve objekte od interesa iz primjena
- možemo formirati lokalno male kategorije skupova iz $\mathcal{U}$, i one će se nalaziti u $\mathcal{V}$; posebno možemo formirati kategoriju Set malih skupova
- možemo formirati kategoriju funktora između dviju takvih kategorija; ona se također nalazi u $\mathcal{V}$, ali nije nužno više lokalno mala
- možemo formirati (vrlo veliku) kategoriju Set velikih skupova i posebno za svaku kategoriju iz prethodne točke reći da se skup morfizama između dva objekta nalazi u njoj
- po potrebi, možemo govoriti i o kategoriji Cat svih velikih kategorija.

U skladu s ovim ciljevima kada u tekstu govorimo o na primjer kategoriji grupa mislimo na male grupe, a pod "kategorija" mislimo u pravilu na određeni element od $\mathcal{V}$. Jedine iznimke su vrlo velike kategorije Set i Cat, koje su (do na dodatnu strukturu) podskupovi od $\mathcal{V}$ i "lokalno velike" (skupovi morfizama između dva objekta nalaze se u Set), i možemo implicitno pretpostaviti da su elementarni pojmovi poput produkta, funktora ili prirodne transformacije (u osnovi sve osim funktorskih kategorija) definirani i za njih, i izbjeći nespretne lokucije poput "funkcijska relacija koja je funktor do na probleme veličine".

Opis dan u ovim terminima lako se relativizira, tj. prevodi u tretman baziran na Grothendieckovom aksiomu univerzuma: samo treba umjesto malih kategorija čitati $\mathcal{U}$-male, a umjesto lokalno malih $\mathcal{U}$-kategorije za proizvoljan univerzum $\mathcal{U}$.

S druge strane, ako se ograničimo na lokalno male kategorije, dakle i na funktorske kategorije s malom domenom (v. propoziciju 1.7.4) većina će se rezultata uz više pažnje moći izreći i u nekom konzervativnom proširenju ZFC teorije. Za detaljan pregled različitih skupovno teorijskih pristupa kategorijama i njihovih relativnih prednosti i mana vidi [16].

Konačno, zanimljivo je pitanje upotrebe aksioma izbora u teoriji kategorija, bilo kao indikatora nekonstruktivnosti dokaza, bilo kao prepreke poopćenjima. Naime bez obzira na status aksioma izbora za skupove, postoje općenitiji konteksti u kojima se može raditi teorija kategorija (tzv. **interne kategorije**) u kojima aksiom izobra nekada sigurno neće vrijediti. Zato je korisno znati da je jedini kategorijski rezultat dobiven eksplicitno upotrebom izbora lema 1.9.2, koja je ipak iskorištena implicitno na velikom broju mjesta budući da se na njoj zasniva karakterizacija adjungiranoga funktora lokalnim uvjetom (3.1.1), i karakterizacija ekvivalencije kategorija preko slabe ekvivalencije (3.3.6).

Primijetimo kao prvo da u konkretnoj situaciji često nema nikakve potrebe za aksiomom izbora. Nećemo na primjer tvrditi da postoji funktor $\times : \mathrm{Set} \times \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ zato što u svakoj točki univerzalni stožac postoji, pa možemo odabrati neki i tako konstruirati funktor, kada možemo eksplicitno zapisati jednu kanonsku familiju univerzalnih stožaca.

Aksiom izbora ipak jeste nužan i to u punoj snazi za konstrukciju nekih jakih ekvivalencija, na primjer između kategorije i njenoga kostura[1]. No čak i kada je upotreba aksioma izbora zaista nužna, primijetimo da su svaka dva različita rezultat $\eta : \mathrm{Id} \Rightarrow GF$ i $\eta' : \mathrm{Id} \Rightarrow GF'$ konstrukcije u lemi 1.9.2 izomorfna u kategoriji $(\mathrm{Id} \downarrow [\mathscr{C}, \mathscr{C}])$ i to na jedinstven način. Dakle aksiom izbora je nužan samo za postojanje traženog funktora i prirodne transformacije, ne i za njihov konačni oblik, i zapravo se može i potpuno izbjeći prikladnim oslabljenjem pojma funktora. Vidi [12] za definiciju i detalje.

[1] Ako je $f : A \to B$ surjektivna funkcija, onda se na očit način može definirati nova struktura kategorije na A tako da diskretna kategorija B bude kostur od A, a f slaba ekvivalencija. Postojanje jake ekvivalencije ekvivalentno je tada postojanju prereza od f, dakle i aksiomu izbora.

1.2 Kategorije i dualnost

Kategorija $\mathscr{C}$ sastoji se od:

- skupa $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ **objekata** od $\mathscr{C}$
- za svaki par (A, B) objekata u $\mathscr{C}$ skupa $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ **morfizama** sa A u B
- za svaku trojku A, B, $C \in \mathscr{C}$ objekata u $\mathscr{C}$ funkcije

$$\circ_{ABC} : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

  koju nazivamo **kompozicijom** i koja je asocijativna, dakle zadovoljava

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

  za sve morfizme f, g, h u $\mathscr{C}$ za koje su sve kompozicije definirane
- **identitete** $\mathrm{id}_B \in \mathrm{Hom}(B, B)$ za svaki objekt B od $\mathscr{C}$, koja zadovoljava

$$\mathrm{id}_B \circ f = f \qquad\qquad g = g \circ \mathrm{id}_B$$

  za sve objekte A i C i morfizme $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$.

Za skupove morfizama (**hom skupove**) ćemo pretpostavljati da su u parovima disjunktni, a skup svih morfizama označavati s $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$. Umjesto $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ pisat ćemo i $f : A \to B$, a umjesto $C \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ pisati $C \in \mathscr{C}$. Kompoziciju ćemo često izostavljati, pa umjesto $g \circ f$ pisati gf.

Morfizam $f : A \to B$ nazivamo **izomorfizmom** ako postoji $g : B \to A$ takav da je $g \circ f = \mathrm{id}_A$, a $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Takav g je jedinstven, i označavamo ga s f^{-1}; tvrdnju da su A i B izomorfni, tj. da postoji izomorfizam između njih, pišemo $A \cong B$.

Za kategoriju $\mathscr{D}$ takvu da je $\mathrm{Ob}\,\mathscr{D} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ i $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ za sve objekte A i B kažemo da je **potkategorija** od $\mathscr{C}$. Za potkategoriju $\mathscr{D}$ kažemo da je **puna** ukoliko je $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$, a da je **iscrpna** ako sadrži sve $\mathscr{C}$-objekte koji su izomorfni nekom objektu u $\mathscr{D}$. U pravilu nije smanjenje općenitosti pretpostaviti da radimo s iscrpnom potkategorijom.

Primjer 1.2.1. Standardni i motivacijski primjeri kategorija su kategorije Set skupova, Ring i CRing prstenova i komutativnih prstenova s jedinicom, Grp i Ab grupa i abelovih grupa, Vect_k vektorskih prostora nad poljem k, Mod_R desnih modula nad prstenom R, Top topoloških prostora, i druge, sve s uobičajenim klasama funkcija kao morfizmima.

U svim ovim primjerima su objekti skupovi s dodatnom strukturom, a morfizmi posebne funkcije između tih skupova, no to naravno ne mora biti slučaj. U kategoriji hTop na primjer su objekti topološki prostori, a morfizmi klase homotopski ekvivalentnih neprekidnih preslikavanja.

Primjer 1.2.2. Još su apstraktniji, ali i vrlo bitni, sljedeći elementarni primjeri kategorija:

1. Za kategoriju kažemo da je **diskretna** ako su jedini morfizmi identitete. Svaki skup možemo shvatiti kao diskretnu kategoriju čiji su objekti elementi toga skupa. Skupove odnosno diskretne kategorije s 0, 1, 2, 3... objekata ćemo jednostavno i označavati s 0, 1, 2, 3, itd.
2. Općenitije, kategoriju P takvu da skup $\mathrm{Hom}(x, y)$ nema više od jednoga elementa za nijedne x, $y \in P$ možemo poistovjetiti s predurеđenim skupom[2] čiji su elementi objekti od P, a $x \leqslant y$ vrijedi ako postoji morfizam $x \to y$. Uočimo da ako je i $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, onda su x i y nužno izomorfni, dakle u ovim terminima parcijalno uređenim skupovima odgovaraju predurеđaji u kojima su svi izomorfni objekti i jednaki. Predurеđaje koji odgovaraju ordinalima 2, 3, 4... označavat ćemo s $\vec{2}$, $\vec{3}$, $\vec{4}$ itd.
3. Kategorije sa samo jednim objektom odgovaraju monoidima: ako je $*$ jedini objekt kategorije, onda je ona u potpunosti određena skupom $\mathrm{Hom}(*, *)$, koji je monoid uz kompoziciju. Grupe odgovaraju kategorijama s jednim objektom u kojima su svi morfizmi invertibilni.
4. Svakom usmjerenom grafu G možemo pridružiti **slobodnu kategoriju** nad G, u kojoj su objekti vrhovi, a morfizmi putevi u G. Grafu $* \longrightarrow \star \longrightarrow \bullet$ na primjer odgovara kategorija $\vec{3}$. Općenitije, na isti način možemo pridružiti slobodnu kategoriju i svakom usmjerenom multigrafu. Npr. grafu $\circlearrowright \bullet$ odgovara monoid $(\mathbb{N}, +)$.

Jedno bitno svojstvo aksioma kategorija je što su u određenome smislu simetrični. Ako u kategoriji $\mathscr{C}$ "obrnemo" sve morfizme i kompoziciju, tj. definiramo $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}^{\mathrm{op}} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$, i $g \circ_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ_{\mathscr{C}} g$, tada je i nova kompozicija asocijativna i ima lijeve i desne identitete. Dakle, i $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ je kategorija – **dualna kategorija** od $\mathscr{C}$ – pa svaki općeniti teorem teorije kategorija vrijedi i u $\mathscr{C}$ i u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$. No svaka tvrdnja o objektima i morfizmima kategorije $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ je istovremeno i tvrdnja koju nazivamo **dualnom** o objektima i morfizmima kategorije $\mathscr{C}$, pa svakim teoremom potencijalno paralelno dokazujemo dvije stvari i to u ostatku teksta u pravilu nećemo više isticati.

Kao primjer dualnosti, definirajmo jedan od fundamentalnih pojmova: **terminalni objekt** kategorije $\mathscr{C}$, kao objekt T takav da za svaki drugi objekt $C \in \mathscr{C}$

[2] Razlika između predurеđaja i parcijalnoga uređaja je u tome što predurеđaj ne mora biti antisimetričan. Za dva elementa predurеđaja za koje vrijedi i $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ možemo pisati da je $x \approx y$. Ta relacija je relacija ekvivalencije, i kvocijentira predurеđaj do parcijalnog uređaja.

postoji jedinstveni morfizam $!_C : C \to T$. Posebno, id_T je jedini morfizam $T \to T$, pa slijedi:

Propozicija 1.2.3. Između svaka dva terminalna objekta neke kategorije postoji *jedinstven* izomorfizam.

Sada definirajmo **inicijalni objekt** kao dualni pojam: objekt I u $\mathscr{C}$ je inicijalan ako je terminalan u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, ili eksplicitno, ako za svaki $C \in \mathscr{C}$ postoji jedinstveni morfizam $!_C : I \to C$. Budući da je morfizam f izomorfizam u $\mathscr{C}$ ako i samo ako je izomorfizam u $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ (kažemo da je izomorfizam **autodualan** pojam) automatski slijedi i dual prethodne propozicije:

Propozicija 1.2.4. Između svaka dva inicijalna objekta neke kategorije postoji jedinstven izomorfizam.

Ukoliko za dualni pojam ne navedemo poseban naziv, pretpostavit ćemo da se on tvori prefiksom ko- (npr. umjesto inicijalan mogli bismo reći i koterminalan).

Primjer 1.2.5. Inicijalni i terminalni objekti će nam biti vrlo bitni u ostatku teksta, iako su u kategorijama koje smo dosad spomenuli uglavnom trivijalni:

1. u Set je inicijalni objekt prazan skup, a terminalan je svaki jednočlan skup; slična je situacija i u Top.
2. u Grp, Ab i Mod_R se terminalni i inicijalni objekti podudaraju: to su trivijalne (jednočlane) grupe i moduli
3. u Ring i CRing terminalan objekt je trivijalni prsten s jednim elementom, ali inicijalni objekt je $\mathbb{Z}$
4. u predurеđaju su inicijalni i terminalni objekti, ukoliko postoje, minimumi i maksimumi

Objekt koji je, kao u primjeru 2, i inicijalan i terminalan, nazivamo **nul-objektom**. Ukoliko kategorija $\mathscr{A}$ ima nul-objekt $0_{\mathscr{A}}$, onda za objekte $A, B \in \mathscr{A}$ možemo definirati nul morfizam $0_{AB} : A \to B$ kao jedinstveni morfizam $A \to 0 \to B$. Nul-morfizam je uvijek apsorbirajuć element za kompoziciju, tj. vrijedi $0 \circ f = 0$ i $f \circ 0 = 0$ za svaki morfizam f.

1.3 Funktori

Funktor sa kategorije $\mathscr{C}$ u kategoriju $\mathscr{D}$ zadan je funkcijom $F : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ i funkcijama $F_{AB} : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$, za svake A, $B \in \mathscr{C}$, takvima da je $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$, i da za sve morfizme $f : A \to B$ i $g : B \to C$ u $\mathscr{C}$ vrijedi

$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. Drugim riječima, funktori preslikavaju komutativne dijagrame u komutativne dijagrame. Primijetimo da ukoliko za tim nema potrebe, argument funktora obično ne pišemo u zagradama.

Budući da čuva identitete, svaki funktor je zapravo dovoljno zadati samo na morfizmima, no u praksi se često radi upravo obratno, i definira djelovanje funktora samo na objektima. To je svakako neprecizno, budući da je funktor na taj način jedinstveno određen samo u iznimnim slučajevima, no u slučajevima kada postoji samo jedno proširenje na morfizme koje je poznato i smisleno u kontekstu to je ipak prirodna konvencija, i na postojanje takvoga proširenja možemo uputiti tako da kažemo da je neko preslikavanje na objektima **funktorijalno**.

Funktore sa $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ u $\mathscr{D}$ ponekad nazivamo i **kontravarijantnim funktorima** sa $\mathscr{C}$ u $\mathscr{D}$. Eksplicitno, kontravarijantni funktor $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ svakom $\mathscr{C}$-morfizmu $f : A \to B$ pridružuje neki morfizam $Ff : FB \to FA$ u $\mathscr{D}$.

Kompozicija dvaju funktora je također funktor, i na svakoj kategoriji $\mathscr{C}$ imamo trivijalni funktor $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ koji je identiteta za tu kompoziciju. Slijedi da možemo govoriti o (velikoj) kategoriji Cat malih kategorija, ili (vrlo velikoj) kategoriji $\textsc{Cat}$ velikih kategorija u kojima su morfizmi funktori.

Primjer 1.3.1.

1. Svaki vektorski prostor je posebno i Abelova grupa, a svaki linearni operator je aditivan. To pridruživanje definira funktor $\mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Ab}$. Na sličan način, "zaboravljanjem" dijelova strukture dobivamo i funktor Top $\to$ Set ili niz funktora $\mathrm{Vect}_k \to \mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$.
2. Konstrukciju partitivnoga skupa, dakle funkciju $\mathcal{P} : \mathrm{Ob}(\mathrm{Set}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{Set})$ možemo proširiti do funktora na dva različita načina: kovarijantno tako da funkciji $f : X \to Y$ pridružimo sliku $f^{\to} : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$, ili kontravarijantno tako da joj pridružimo prasliku $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$.
3. Ako je $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktor, onda imamo i funktor $F^{\mathrm{op}} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ koji i na objektima i na morfizmima djeluje isto kao F. Na taj način i preslikavanje $(-)^{\mathrm{op}} : \textsc{Cat} \to \textsc{Cat}$ postaje funktor.
4. Ključan primjer funktora su **hom funktori**. Za svaki objekt C neke kategorije $\mathscr{C}$ možemo definirati **kovarijantni hom funktor** $\mathrm{Hom}(C, -) : \mathscr{C} \to \textsc{Set}$, tako da svakom objektu A pridružimo skup $\mathrm{Hom}(C, A)$, a svakom morfizmu $f : A \to B$ funkciju $f \circ - : \mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(C, B)$. Dualan pojam je **kontravarijantni hom funktor** $\mathrm{Hom}(-, C) : C^{\mathrm{op}} \to \textsc{Set}$.

Za funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ćemo reći da je **vjeran** ukoliko su za sve objekte A, B od $\mathscr{C}$ funkcije $F_{AB} : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$ injektivne. Ukoliko su te funkcije surjektivne, kažemo da je F **pun**, a ukoliko su bijektivne, da je **potpuno vjeran**.

Potpuno vjerne funktore nazivamo i ulaganjima, iz razloga koje ćemo navesti kada budemo govorili o ekvivalenciji kategorija (v. odjeljak 3.3.3).

Uređeni par $(\mathscr{D}, U)$ kategorije i vjernoga funktora $U : \mathscr{D} \to \mathrm{Set}$ nazivamo **konkretnom kategorijom**, budući da objekt $A \in \mathscr{D}$ možemo poistovjetiti sa skupom UA s nekom dodatnom strukturom, a morfizme $\mathrm{Hom}(A, B)$ s nekim podskupom skupa funkcija sa UA u UB. Funktor U nazivamo i **zaboravnim funktorom**, budući da "zaboravlja" spomenutu implicitnu strukturu nad skupom UA. Općenitije, ako je zadan vjeran funktor $U : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, možemo govoriti o kategoriji **konkretnoj nad kategorijom** $\mathscr{C}$.

Za funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ kažemo da **čuva** neko kategorijsko svojstvo morfizma f u $\mathscr{C}$ ako Ff ima isto to svojstvo u kategoriji $\mathscr{D}$. Morfizam f ima neko svojstvo **apsolutno** ukoliko ga čuva svaki funktor, a reći ćemo da F**-ima** neko svojstvo, ukoliko Ff ima to svojstvo. Kažemo da F **reflektira** svojstvo nekog morfizma g u $\mathscr{D}$ ako $Ff = g$ povlači da f ima isto to svojstvo. Analogne nazive koristimo za svojstva dijagrama morfizama.

Na primjer, svaki funktor čuva komutativne dijagrame i izomorfizme, dok ih potpuno vjerni funktori i reflektiraju. Općenitije, za funktor koji reflektira izomorfizme kažemo da je **konzervativan**.

Primjer 1.3.2. Zaboravni funktor $\mathrm{Ab} \to \mathrm{Grp}$ je potpuno vjeran, dok zaboravni funktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ nije pun, ali je konzervativan. Zaboravni funktor $\mathrm{Top} \subseteq \mathrm{Set}$ nije ni pun ni konzervativan, budući da postoje neprekidne bijekcije koje nisu homeomorfizmi.

Možemo definirati i pojam **slike** funktora $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ kao najmanju potkategoriju koja sadrži slike svih morfizama iz $\mathscr{C}$. Ako je F pun, slika ne sadrži drugih morfizama osim onih oblika Ff, $f \in \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}$, ali ako nije, lako se vidi[3] da skup $F(\mathrm{Mor}\,\mathscr{C})$ ne mora biti zatvoren na kompoziciju.

1.4 Produkt kategorija

Produkt kategorija $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ je kategorija $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ čiji su objekti uređeni parovi (C, D), $C \in \mathscr{C}$, $D \in \mathscr{D}$. Morfizmi između parova (C, D) i (C', D') su parovi morfizama (f, g), gdje je $f : C \to C'$, $g : D \to D'$, a kompozicija parova morfizama je definirana po komponentama.

Projekcije $\pi_1 : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ i $\pi_2 : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ su funktorijalne, i imaju sljedeće ključno svojstvo: za svaka dva funktora $F : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ i $G : \mathscr{A} \to \mathscr{D}$ možemo

[3] dovoljno je na primjer promatrati za $\mathscr{C}$ kategoriju $* \longrightarrow \bullet \longleftarrow \star$

na jedinstven način definirati funktor $(F,G) : \mathscr{A} \to \mathscr{C} \times \mathscr{D}$ tako da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{A} \arrow[dl, bend right, "F"'] \arrow[d, dashed, "{(F,G)}"] \arrow[dr, bend left, "G"] & \\ & \mathscr{C} \times \mathscr{D} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathscr{C} & & \mathscr{D}. \end{tikzcd}$$

Jasno je i da je svaki funktor $H : \mathscr{A} \to \mathscr{C} \times \mathscr{D}$ takvoga oblika, budući da je $H = (\pi_1 H, \pi_2 H)$, pa slijedi da su funktori na produkt kategorija potpuno opisani bijekcijom

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{A}, \mathscr{C} \times \mathscr{D}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{A}, \mathscr{C}) \times \mathrm{Hom}(\mathscr{A}, \mathscr{D}).$$

S druge strane, ako je $H : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ funktor *sa* produkta kategorija, onda su $H(A,-) : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ i $H(-,B) : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$ također funktori, za fiksne objekte $A \in \mathscr{A}$ i $B \in \mathscr{B}$, i vrijedi $H(A,-)B = H(-,B)A$. Dakle, H je funktor "u oba argumenta". Obratno, lako se dokazuje sljedeća propozicija:

Propozicija 1.4.1. Ako su dane familije $(F_B : \mathscr{A} \to \mathscr{C})_{B \in \mathscr{B}}$ i $(G_A : \mathscr{B} \to \mathscr{C})_{A \in \mathscr{A}}$ funktora onda je funktor $H : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ dobro definiran sa $H(A,-) = G_A$ i $H(-,B) = F_B$, $A \in \mathscr{A}$ i $B \in \mathscr{B}$, ako i samo ako je $G_A B = F_B A$, za sve objekte A i B, i ako za sve morfizme $f : A \to A'$ i $g : B \to B'$ komutira

$$\begin{tikzcd} F_B A = G_A B \arrow[r, "G_A g"] \arrow[d, "F_A f"'] & G_A B' = F_{B'} A \arrow[d, "F_{B'} f"] \\ F_B A' = G_{A'} B \arrow[r, "G_{A'} g"] & G_{A'} B' = F_{B'} A'. \end{tikzcd}$$

Funktore sa produkta dviju kategorija nazivamo i **bifunktorima**. Kako je kompozicija morfizama asocijativna, iz gornje propozicije odmah slijedi da kovarijantne i kontravarijantne hom funktore sa neke kategorije $\mathscr{C}$ možemo ujediniti u bifunktor $\mathrm{Hom} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \textsc{Set}$, ili $\mathrm{Hom} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ ukoliko je $\mathscr{C}$ lokalno mala.

Konačno, i funktore $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ i $G : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ sa različitim domenama možemo zamijeniti jednim funktorom $F \times G : \mathscr{C} \times \mathscr{C}' \to \mathscr{D} \times \mathscr{D}'$, definiranim ili eksplicitno na prirodan način, ili ekvivalentno kao $(F\pi_1, G\pi_2)$, gdje su π_1 i π_2 projekcije sa $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$. Tako i sam produkt kategorija postaje bifunktor $\times : \textsc{Cat} \times \textsc{Cat} \to \textsc{Cat}$.

Primjer 1.4.2. Ako su R, S i T proizvoljni prstenovi, onda je tenzorski produkt nad S funktor $\otimes_S : {}_R\mathrm{Mod}_S \times {}_S\mathrm{Mod}_T \to {}_R\mathrm{Mod}_T$ kovarijantan u oba argumenta.

1.5 Koma kategorije

Ako su dana dva funktora $F : \mathscr{A} \to \mathscr{C} \leftarrow \mathscr{B} : G$ sa zajedničkom kodomenom možemo formirati tzv. **koma**[4] **kategoriju** $(F \downarrow G)$ čiji su objekti uređene trojke (A, B, h), $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$, $h : FA \to GB$, a morfizam između objekata (A, B, h) i (A', B', h') je uređeni par (f, g) $\mathscr{A}$-morfizma i $\mathscr{B}$-morfizma takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "h"'] & FA' \arrow[d, "h'"] \\ GB \arrow[r, "Gg"] & GB'. \end{tikzcd}$$

Primijetimo da jednakost morfizama u $(F \downarrow G)$ znači njihovu jednakost u $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, a ne samo jednakost njihovih slika u $\mathscr{C}$. Posebno, možemo definirati funktor $P : (F \downarrow G) \to \mathscr{A}$ sa $P(f, g) = f$, i analogno funktor $Q : (F \downarrow G) \to \mathscr{B}$.

Ova općenita i apstraktna konstrukcija se najčešće koristi u nekim posebnijim slučajevima. Najjednostavnije primjere dobivamo ako uzmemo funktore $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ i inkluziju $C : 1 \to \mathscr{C}$ elementa $C \in \mathscr{C}$; kategoriju $(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \downarrow C)$, koja se označava i s $(\mathscr{C} \downarrow C)$ ili $\mathscr{C}/C$, nazivamo **kategorijom objekata nad** C. Dualno, kategoriju $(C \downarrow \mathscr{C})$ nazivamo kategorijom **objekata *pod*** C. Nama će često trebati nešto općenitija situacija i kategorija $(C \downarrow G)$ **morfizama na funktor** $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sa objekta $C \in \mathscr{C}$. Eksplicitno, objekti u njoj su $\mathscr{C}$-morfizmi $f : C \to GD$, a morfizam između objekata $f : C \to GD$ i $f' : C \to GD'$ je $\mathscr{D}$-morfizam $g : D \to D'$ takav da komutira trokut

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ GD \arrow[rr, "Gg"'] & & GD'. \end{tikzcd}$$

Još jedna posebna vrsta koma kategorija je $(\mathrm{Id}_C \downarrow \mathrm{Id}_C)$ koju nazivamo **kategorijom morfizama** kategorije $\mathscr{C}$.

Primjer 1.5.1.

1. Ako je T terminalni objekt u kategoriji $\mathscr{C}$, onda je $\mathscr{C}/T \cong \mathscr{C}$.
2. Kategorija $\mathrm{pSet} := (* \downarrow \mathrm{Set})$ je kategorija skupova s istaknutom točkom, u kojoj su morfizmi funkcije koje tu točku čuvaju. Slično definiramo kategoriju pTop, pomoću koje možemo na primjer govoriti o fundamentalnoj grupi kao funktoru $\pi_1 : \mathrm{pTop} \to \mathrm{Grp}$.

[4]eng. comma category, opisni naziv prema starijoj notaciji (F, G)

3. Za komutativan prsten R, komutativne R-algebre možemo definirati kao objekte kategorije $(R \downarrow \mathrm{CRing})$. Posebno imamo $(\mathbb{Z} \downarrow \mathrm{CRing}) \cong \mathrm{CRing}$, tj. svaki komutativni prsten je komutativna $\mathbb{Z}$-algebra na jedinstven način.

1.6 Monomorfizmi i podobjekti

Napomena. U ovom ćemo odjeljku uvesti neke elementarne pojmove koji se koriste kroz ostatak rada, i paralelno neke pojmove čija svojstva i definicija ovisiti o ovise o rezultatima 2. poglavlja.

Morfizam $f : A \to B$ u kategoriji $\mathscr{C}$ ćemo nekada nazivati i **generaliziranim elementom** od B. Na primjer, elementi skupa X su u bijekciji sa generaliziranim elementima sa 1 u X. S druge strane ako je X topološki prostor, onda na ovaj način dobivamo jako malo informacija (samo točke prostora), ali zato proučavanjem generaliziranih elemenata s drugih prostora, npr. sa S_1 u X (petlji), možemo saznati i neka topološka svojstva.

Svaki morfizam $f : C \to D$ preslikava generalizirane elemente od C u generalizirane elemente od D postkompozicijom. Ukoliko je f na ovaj način injektivan na generaliziranim elementima, nazivamo ga **monomorfizmom**. Drugim riječima je funkcija $\mathrm{Hom}(A, f)$ injekcija za svaki objekt $A \in \mathscr{C}$. Algebarski, to svojstvo znači da je f skrativ slijeva, tj. ako je $fg = fh$ za neke morfizme $g, h : A \to C$, onda je $g = h$. Dualan pojam je **epimorfizam**.

Svi vjerni funktori reflektiraju epimorfizme (i dualno monomorfizme) pa slijedi da je u konkretnoj kategoriji svaka surjekcija epi, no trivijalno je dati primjer konkretne kategorije s nesurjektivnim epimorfizmom, pa obrat ne vrijedi. Štoviše, nesurjektivne epimorfizme je lako naći i u nekim "prirodnim" kategorijama, poput Ring (v. primjer 1.6.5), pa posebno upozoravamo da kategorijska terminologija nije nužno u skladu s tradicionalnom, po kojoj su epimorfizmi surjektivni po definiciji. Iz ovih, a i drugih razloga dodaju se na pojmove mono- i epimorfizama neki dodatni zahtjevi koji im osiguravaju bolja svojstva.

Za epimorfizam $f : C \to D$ kažemo da je **ekstremalan epimorfizam** ako su jedini monomorfizmi $A \to D$ kroz koje se faktorizira izomorfizmi. U terminima koje ćemo uskoro uvesti, f se ne faktorizira kroz nijedan pravi podobjekt od D.

Kažemo da je f **regularan epimorfizam** ako je koujednačitelj nekog para morfizama. Iz univerzalnoga svojstva koujednačitelja slijedi da je svaki regularni epimorfizam i ekstremalan.

Kažemo da je f **rascijepljeni epimorfizam** ili **retrakcija** ukoliko ima desni inverz, tj. ako postoji $g : D \to C$ takav da je $fg = \mathrm{id}_D$. Dualan pojam je **rascijepljeni**

monomorfizam ili **prerez**. Primijetimo da je retrakcija f koujednačitelj morfizama id_C i gf, pa slijedi da je svaka retrakcija i regularna.

Propozicija 1.6.1. Neka je $f : C \to D$ morfizam u kategoriji $\mathscr{C}$. Ekvivalentno je:

1. f je rascijepljen epimorfizam
2. f je apsolutan epimorfizam
3. f je surjektivan na generaliziranim elementima.

Dokaz. (1) očito povlači (2), a (2) povlači (3): posebno je $\mathrm{Hom}(A, f)$ je surjekcija za svaki $A \in \mathscr{C}$. Prerez od f je upravo generalizirani element kojega f preslikava u identitetu, dakle i (3) povlači (1). □

Vezu između dosad promatranih vrsta morfizama možemo sažeti:

Propozicija 1.6.2. U svakoj kategoriji vrijede sljedeće implikacije:

1. svaki izomorfizam je prerez
2. svaki prerez je regularan monomorfizam
3. svaki regularni monomorfizam je ekstremalan
4. svaki ekstremalni monomorfizam je monomorfizam

Dakle, svaki izomorfizam je i mono i epi, ali za razliku od kategorije Set, općenito ne mora svaki morfizam koji je i mono i epi biti izomorfizam, pa uvodimo poseban naziv – **bimorfizam** – za njih. Kategoriju u kojoj je svaki bimorfizam izomorfizam nazivamo **balansiranom**, i primijetimo odmah jedno korisno svojstvo takvih kategorija:

Propozicija 1.6.3. Ako je kategorija $\mathscr{C}$ balansirana onda je svaki vjeran funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i konzervativan.

Dokaz. Vjerni funktori reflektiraju monomorfizme i epimorfizme, dakle i bimorfizme. Dakle ako je slika $\mathscr{C}$-morfizma bi- ili posebno izomorfizam, onda on mora biti bi-, pa onda i izomorfizam u $\mathscr{C}$. □

Sljedeći rezultat je očit, ali upravo on osigurava da se bimorfizmi i izomorfizmi u mnogim primjerima kategorija poklapaju:

Propozicija 1.6.4. Ako je monomorfizam istovremeno i ekstremalan epimorfizam, onda je izomorfizam.

Ova propozicija i propozicija 1.6.2 pokazuju da ukoliko bimorfizam ima bilo koje od jačih svojstava koje smo promatrali, onda je nužno i izomorfizam. Budući da u mnogim kategorijama svi mono- ili epimorfizmi neka od tih svojstava imaju automatski, slijedi da su one nužno balansirane.

Primjer 1.6.5.

1. Monomorfizmi u Set su točno injekcije i svi s nepraznom domenom su rascijepljeni. Epimorfizmi su točno surjekcije, a da je svaki rascijepljen je ekvivalentno aksiomu izbora.
2. Inkluzija $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ je bimorfizam u Ring, i posebno je primjer neekstremalnoga monomorfizma i epimorfizma.
3. U kategoriji Haus Hausdorffovih prostora su monomorfizmi neprekidne injekcije, a ekstremalni su točno ako su (do na izomorfizam) inkluzije potprostora. Budući da je potprostor Hausdorffovog prostora Hausdorffov, a Haus puna potkategorija od Top, slijedi da se ujednačitelji računaju isto kao u Top (v. primjer 2.1.5), pa su regularni monomorfizmi potprostori određeni s $f = g$ za neki paralelni par neprekidnih funkcija f i g. No takvi podskupovi Hausdorffovih prostora su nužno zatvoreni, pa slijedi da je potprostor Hausdorffovog prostora koji nije zatvoren primjer monomorfizma koji je ekstremalan, ali ne i regularan.
4. U Abelovoj kategoriji su svi monomorfizmi i epimorfizmi regularni po definiciji, ali primjere nerascijepljenih daje svaki nerascijepljeni egzaktni niz, na primjer u Ab:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

Monomorfizam $A \hookrightarrow C$ u kategoriji $\mathscr{C}$ je objekt u kategoriji $\mathscr{C}/C$. Lako se vidi da je kategorija svih monomorfizama s kodomenom C preduređaj, i da je svaki morfizam sa $A \hookrightarrow C$ u neki drugi monomorfizam $B \hookrightarrow C$ i sam monomorfizam $A \hookrightarrow B$ u $\mathscr{C}$. Pripadni parcijalno uređeni skup označavamo sa $\operatorname{Sub} A$, i njegove objekte nazivamo **podobjektima** od A; dualni pojam nazivamo **kvocijentnim objektom**. Za kategoriju takvu da je $\operatorname{Sub} C$ mal skup za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ reći ćemo da je **wp**[5] **kategorija**.

1.7 Prirodne transformacije

Neka su dani funktori $F, F' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Familiju morfizama $\{\alpha_C : FC \to F'C\}_{C \in \mathscr{C}}$ nazivamo **prirodnom transformacijom** sa funktora F u funktor F' ukoliko za svaki

[5] eng. *well-powered*, u smislu postojanja "dobroga *power seta*", tj. maloga skupa podobjekata

morfizam $f : C \to C'$ u $\mathscr{C}$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & FC' \arrow[d, "\alpha_{C'}"] \\ F'C \arrow[r, "F'f"] & F'C', \end{tikzcd}$$

i pišemo kratko da je $\alpha : F \Rightarrow F'$.

Na prirodne transformacije možemo gledati kao na morfizme između funktora. Doista, ako su dana tri funktora $F, F', F'' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i prirodne transformacije $\alpha : F \Rightarrow F'$ i $\alpha' : F' \Rightarrow F''$, možemo definirati $(\alpha' \circ \alpha)_C = \alpha'_C \circ \alpha_C$, i $\alpha' \circ \alpha : F \Rightarrow F''$ će biti prirodna transformacija. Jasno je da uz tako definiranu kompoziciju prirodne transformacije možemo uzeti za morfizme kategorije čiji su objekti svi funktori sa $\mathscr{C}$ u $\mathscr{D}$, koju nazivamo **kategorijom funktora** i označavamo sa $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ ili sa $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. Skup $\mathrm{Hom}_{[\mathscr{C},\mathscr{D}]}(F, F')$ svih prirodnih transformacija između funktora F i F' označavat ćemo i sa $\mathrm{Nat}(F, F')$.

Ovakvu kompoziciju prirodnih transformacija ćemo uvijek označavati eksplicitno s $\circ$ i nazivamo je i **vertikalnom kompozicijom**. Ukoliko su naime dani funktori $F, F' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G, G' : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, i prirodne transformacije $\alpha : F \Rightarrow F'$ i $\beta : G' \Rightarrow G'$, tada su općenito prirodne i transformacije

$$\begin{aligned} G\alpha &:= \{G\alpha_C\}_{C \in \mathscr{C}} : GF \Rightarrow GF' \\ \beta F &:= \{\beta_F C\}_{C \in \mathscr{C}} : GF \Rightarrow G'F, \end{aligned}$$

pa onda i transformacija $\beta F' \circ G\alpha = G'\alpha \circ \beta F : GF \Rightarrow G'F'$ koju nazivamo **horizontalnom kompozicijom** transformacija α i β i označavamo s $\beta * \alpha$, ili nekada jednostavno s $\beta\alpha$. Horizontalna kompozicija je također asocijativna i zajedno s vertikalnom kompozicijom zadovoljava tzv. **zakon zamjene**:

$$(\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha) = (\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha), \tag{1.1}$$

pri čemu je $\beta' : G' \Rightarrow G''$, $G'' : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, a ostale transformacije dane kao prije. Drugim riječima, zakon zamjene govori da sljedeći dijagram prikazuje jednoznačno određenu prirodno transformaciju $GF \Rightarrow G''F''$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \mathscr{C} \arrow[r] \arrow[r, bend left=70, "F"] \arrow[r, bend right=70, "F''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\alpha'"] & \mathscr{D} \arrow[r] \arrow[r, bend left=70, "G"] \arrow[r, bend right=70, "G''"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta'"] & \mathscr{E}. \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Primijetimo da možemo i obratno gore definirane transformacije $F\alpha$ i βG iskazati preko horizontalne kompozicije: $F\alpha = \mathrm{id}_F * \alpha$, a $\beta G = \beta * \mathrm{id}_G$.

Na skupu $\mathrm{Nat}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ totalno su definirane i horizontalna i vertikalna kompozicija. Općenita je primjedba ("Eckmann-Hiltonov argument") da se dvije monoidalne operacije na istom skupu koje zadovoljavaju zakon zamjene kao u (1.1) moraju podudarati i biti komutativne. U ovom konkretnom slučaju se jedinice podudaraju a priori, pa imamo:

$$\alpha \circ \beta = (\alpha * \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} * \beta) = (\alpha \circ \mathrm{id}) * (\mathrm{id} \circ \beta) = \alpha * \beta,$$

a zatim

$$\alpha \circ \beta = (\mathrm{id} \circ \alpha) \circ (\beta \circ \mathrm{id}) = \beta \circ \alpha.$$

Dakle, $\mathrm{Nat}(\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ je komutativni monoid s kompozicijom prirodnih transformacija kao operacijom.

Primjer 1.7.1.

1. $\mathrm{Hom}(f, -) := \{\mathrm{Hom}(f, C)\}_{C \in \mathscr{C}}$ je prirodna transformacija sa $\mathrm{Hom}(C, -)$ u $\mathrm{Hom}(D, -)$ za svaki morfizam $f : D \to C$ u nekoj kategoriji $\mathscr{C}$.
2. Algebarske operacije su primjer prirodnih transformacija. Pretpostavimo da je za svaki objekt C neke konkretne kategorije $(\mathscr{C}, U)$ zadana n-arna operacija $\omega_C : (UC)^n \to UC$, i to tako da je za svaki morfizam $f : C \to D$ Uf homomorfizam za tu operaciju, tj. da za sve $x_1, \ldots, x_n \in UC$ vrijedi $\omega_D(Uf(x_1), \ldots, Uf(x_n)) = Uf(\omega_C(x_1, \ldots, x_n))$. No to upravo znači da je $\omega_D \circ (Uf)^n = Uf \circ \omega_C$, dakle da je ω prirodna transformacija $U^n \Rightarrow U$. Obratno, jasno je da svaka prirodna transformacija $U^n \Rightarrow U$ zadaje n-arnu operaciju usklađenu s morfizmima kategorije $\mathscr{C}$.
3. Kanonska inkluzija vektorskog prostora u bidual je prirodna transformacija $\mathrm{Id} \Rightarrow (-)^{**}$, pri čemu je $(-)^* : \mathrm{Vect}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_k$ funktor dualizacije.
4. Svakom prstenu R možemo pridružiti grupu $\mathrm{Gl}_n R$ regularnih $n \times n$ matrica i grupu $R^\times$ jedinica. Ove dvije konstrukcije se na očit način proširuju do funktora $\mathrm{Ring} \to \mathrm{Grp}$, a determinanta je prirodna transformacija $\det : \mathrm{Gl}_n \Rightarrow (-)^\times$.

Naravno, u kategoriji funktora možemo govoriti o izomorfizmima i monomorfizmima, koje ćemo prikladno zvati **prirodnim izomorfizmima**, odnosno **monomorfizmima**. Korisna je sljedeća jednostavna propozicija:

Propozicija 1.7.2. Prirodna transformacija je izomorfizam ako i samo ako joj je svaka komponenta izomorfizam. Prirodna transformacija je monomorfizam ako joj je svaka komponenta monomorfizam.

Uvjetni obrat (drugog dijela) ove tvrdnje je sadržaj korolara 2.3.2.

Ako su dani funktori $F : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ i $G : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ onda funkciju

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CAT}}(F, G) : \mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{D}) \to \mathrm{Hom}(\mathscr{C}', \mathscr{D}')$$

možemo proširiti do bifunktora $[F, G] : [\mathscr{C}, \mathscr{D}] \to [\mathscr{C}', \mathscr{D}']$ tako za svaku prirodnu transformaciju $\alpha : H \Rightarrow H'$, $H, H' \in [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ definiramo $[F, G]\alpha := F\alpha G$.

Drugim riječima, umjesto uobičajenoga hom funktora

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CAT}}(-, -) : \mathrm{CAT}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{CAT} \to \mathrm{SET}$$

dobivamo bogatiju strukturu funktora

$$[-, -] : \mathrm{CAT}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{CAT} \to \mathrm{CAT}.$$

Štoviše, on je u vezi s produktom kategorija koja poopćuje klasičnu bijekciju

$$Z^{X \times Y} = \mathrm{Hom}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)) = (Z^Y)^X$$

skupova: ako fiksiramo prvi argument nekog bifunktora $H : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ dobivamo funktor sa $\mathscr{B}$ u $\mathscr{C}$, i lako se vidi da je $H(f, -)$ prirodna transformacija sa $H(A, -)$ na $H(A', -)$ za svaki morfizam $f : A \to A'$ u $\mathscr{A}$. Obratno, ako je zadan funktor $H : \mathscr{A} \to [\mathscr{B}, \mathscr{C}]$, prirodnost od Hf je upravo ono što trebamo da bi dobro definirali bifunktor sa $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ u $\mathscr{C}$ (propozicija 1.4.1). Dakle, skup $\mathrm{Hom}(\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{C})$ je u bijekciji sa $\mathrm{Hom}(\mathscr{A}, [\mathscr{B}, \mathscr{C}])$, a vrijedi i jača tvrdnja.

Propozicija 1.7.3. Za proizvoljne kategorije $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ je $[\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{C}] \cong [\mathscr{A}, [\mathscr{B}, \mathscr{C}]]$, prirodno u $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ i $\mathscr{C}$.

Dokaz. Funktorijalnost gore opisane bijekcije, i prirodnost u sva tri argumenta lako je raspisati. Alternativno, funktor Ev opisan dalje u tekstu očito zadovoljava uvjete (duala) teorema 3.1.1, pa slijedi prirodnost u $\mathscr{A}$ i $\mathscr{C}$, a ostale tvrdnje su općeniti rezultat u monoidalno zatvorenim kategorijama (v. odjeljak 4.4). □

Kako je i $\mathscr{A} \times \mathscr{B} \cong \mathscr{B} \times \mathscr{A}$ također prirodno u $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$, imamo zapravo

$$[\mathscr{A}, [\mathscr{B}, \mathscr{C}]] \cong [\mathscr{A} \times \mathscr{B}, \mathscr{C}] \cong [\mathscr{B} \times \mathscr{A}, \mathscr{C}] \cong [\mathscr{B}, [\mathscr{A}, \mathscr{C}]],$$

pri čemu funktoru $H_1 : \mathscr{A} \to [\mathscr{B}, \mathscr{C}]$ odgovaraju redom funktori H_2, H_3 i H_4 takvi da za svaki $A \in \mathscr{A}$ i $B \in \mathscr{B}$ vrijedi

$$(H_1 A)B = H_2(A, B) = H_3(B, A) = (H_4 B)A,$$

i u daljnjem s jednoga na drugi često prelazimo prešutno.

Prirodnu transformaciju $(\alpha^2_{AB})_{A,B} : H_2 \Rightarrow H_2$ ovi izomorfizmi preslikavaju u $((\alpha^1_{AB})_B)_A : H_1 \Rightarrow H_1$, i slično za $\alpha^3 : H_3 \Rightarrow H_3$ i $\alpha^4 : H_4 \Rightarrow H_4$. Posebno je transformacija α između bifunktora $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ prirodna ako i samo ako je prirodna "u svakom argumentu", tj. ako je za svaki $A \in \mathscr{A}$ prirodna familija $(\alpha_{AB})_{B \in \mathscr{B}}$ i za svaki $B \in \mathscr{B}$ familija $(\alpha_{AB})_{A \in \mathscr{A}}$, što je lako provjeriti i direktno.

U korespondenciji iz propozicije 1.7.3 identiteti $\mathrm{Id} : [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \to [\mathscr{B}, \mathscr{C}]$ odgovara **funktor evaluacije**

$$\begin{aligned} \mathrm{Ev} &: [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}, \\ \mathrm{Ev} &: (\alpha, f) \mapsto F'f \circ \alpha_B = \alpha_{B'} \circ Ff, \end{aligned}$$

gdje je $\alpha : F \Rightarrow F'$ prirodna transformacija između funktora $F, F' : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$, a $f : B \to B'$ morfizam u $\mathscr{B}$. Za fiksan $B \in \mathscr{B}$ funktor $\mathrm{Ev}(-, B) : [\mathscr{B}, \mathscr{C}] \to \mathscr{C}$ evaluacije u točki B označavamo i sa Ev_B.

Slično, funktoru $\mathrm{Id} \times ! : \mathscr{C} \times \mathscr{D} \to \mathscr{C} \times 1 \cong \mathscr{C}$ konstantnom u drugom argumentu odgovara **dijagonalni funktor** $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathscr{D}}$, koji svakom objektu $C \in \mathscr{C}$ pridružuje konstantni funktor $C \circ ! : \mathscr{D} \to 1 \to \mathscr{C}$, a svakom morfizmu u $\mathscr{C}$ odgovarajuću konstantnu prirodnu transformaciju. Lako se vidi da je taj funktor vjeran i injektivan na objektima, dakle $\mathscr{C}$ možemo shvatiti kao potkategoriju od $\mathscr{C}^{\mathscr{D}}$.

Konačno, primijetimo da ako su kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ male, to je naravno i $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, pa se sve gore rečeno može ograničiti na male kategorije i kategoriju Cat. No isto ne vrijedi za *lokalno* male kategorije: čim je kategorija $\mathscr{C}$ velika, $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ u pravilu neće ostati lokalno mala (npr. trivijalno ako je X velik skup, onda jedinstveni funktor $X \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ima 2^X različitih endomorfizama). Zato je korisna sljedeća primjedba:

Propozicija 1.7.4. Ako je kategorija $\mathscr{C}$ mala, a $\mathscr{D}$ lokalno mala, tada je i $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ lokalno mala kategorija.

Dokaz. Za funktore $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ prirodna transformacija $\alpha : F \Rightarrow G$ dana je funkcijom $\alpha_- : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to K$, gdje je $K := \bigcup_{C \in \mathscr{C}} \mathrm{Hom}(FC, GC)$ po pretpostavci mal skup. Dakle, $\mathrm{Nat}(F, G) \subseteq K^{\mathscr{C}}$, pa je $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$ lokalno mala. □

Primjer 1.7.5.

1. Za diskretne kategorije X i Y funktorska kategorija Y^X je naravno jednaka uobičajeno definiranom skupu Y^X svih funkcija sa X u Y.
2. Slično, ako su P i Q predurađaji, onda je to i Q^P, i odgovara standardnom uređaju na skupu monotonih funkcija: ako su $f, g : P \to Q$ monotone, onda je $f \leqslant g$ ako i samo ako je $f(x) \leqslant g(x)$ za sve $x \in P$.
3. Ako je M monoid, kategorija Set^M je točno kategorija M-skupova.

4. Ako je G grupa, kategorija Vect_k^G je kategorija k-linearnih reprezentacija grupe G.
5. Za proizvoljnu kategoriju $\mathscr{C}$, kategorija $\mathscr{C}^{\vec{2}}$ je kategorija morfizama od $\mathscr{C}$.

1.8 Yonedina lema

Za lokalno malu kategoriju $\mathscr{C}$ bifunktor $\mathrm{Hom} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ po prethodnom odjeljku određuje funktor

$$\begin{aligned} Y &: \mathscr{C} \to [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \\ Y &: C \mapsto \mathrm{Hom}(-, C). \end{aligned}$$

Štoviše, uskoro će biti jasno da je za svaki funktor $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ i objekt $C \in \mathscr{C}$ skup $\mathrm{Nat}(YC, F)$ uvijek mal. Dakle, možemo govoriti o bifunktoru

$$N := \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \xrightarrow{Y^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}} [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]^{\mathrm{op}} \times [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \xrightarrow{\mathrm{Nat}} \mathrm{Set},$$

i Yonedina lema tvrdi da je on prirodno izomorfan funktoru

$$\mathrm{Ev} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}] \to \mathrm{Set}.$$

Teorem 1.8.1 (Yonedina lema)**.** Neka je dana lokalno mala kategorija $\mathscr{C}$, funktor $F : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, i objekt $C \in \mathscr{C}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \vartheta_{C,F} &: \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, C), F) \cong FC, \\ \vartheta_{C,F}(\alpha) &= \alpha_C(\mathrm{id}_C), \\ [\vartheta_{C,F}^{-1}(x)]_{C'}(f) &= Ff(x), \end{aligned} \tag{1.3}$$

gdje je $\alpha : \mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow F$, $x \in FC$, $f : C' \to C$. Izomorfizam $\vartheta_{C,F}$ prirodan je i u C i u F.

Dokaz. Da je gornja definicija izomorfizma ϑ "prava" jasno je iz dijagrama

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_C"] & \mathrm{Hom}(C, C) \arrow[r, "- \circ f"] \arrow[d, "\alpha_C"] & \mathrm{Hom}(C', C) \arrow[d, "\alpha'_C"] \\ & FC \arrow[r, "Ff"] & FC', \end{tikzcd}$$

budući da za svaku prirodnu transformaciju $\alpha : \mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow F$ vrijedi

$$\alpha_{C'}(f) = Ff(\alpha_C(\mathrm{id}_C)),$$

tj. cijela je određena samo svojom vrijednošću u id_C. Dakle, ϑ je doista bijekcija, s inverzom danim kao u (1.3). Preostaje provjeriti prirodnost.

Ako je $f : C' \to C$ proizvoljan morfizam onda za svaku prirodnu transformaciju $\alpha : \mathrm{Hom}(-, C) \Rightarrow F$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
[\vartheta_{C',F} \circ \mathrm{Nat}(Yf, F)](\alpha) &= \vartheta_{C',F}(\alpha \circ \mathrm{Hom}(-, f)) \\
&= (\alpha \circ \mathrm{Hom}(-, f))_C(\mathrm{id}_{C'}) \\
&= \alpha_{C'}(f) \\
&= Ff(\alpha_C(\mathrm{id}_C)) \\
&= [\mathrm{Ev}(f, F) \circ \vartheta_{C,F}](\alpha),
\end{aligned}$$

pa slijedi da je $\vartheta_{C,F}$ prirodna u C.

Ako je s druge strane dana prirodna transformacija $\beta : F \Rightarrow F'$ između funktora $F, F' : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, onda je:

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ev}(C, \beta) \circ \vartheta_{C,F}](\alpha) &= \beta_C(\alpha_C(\mathrm{id}_C)), \\
[\vartheta_{C,F'} \circ \mathrm{Nat}(YC, \beta)](\alpha) &= \beta_C(\alpha_C(\mathrm{id}_C)),
\end{aligned}$$

pa imamo prirodnost i u F. □

Posebno, ako stavimo $F = \mathrm{Hom}(-, C')$, onda je po gornjem teoremu

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}(-, C), \mathrm{Hom}(-, C')) = \mathrm{Nat}(YC, YC') \cong \mathrm{Hom}(C, C'), \tag{1.4}$$

a izomorfizam ϑ^{-1} je upravo djelovanje funktora Y na $\mathrm{Hom}(C, C')$. Dakle, vrijedi sljedeći korolar:

Korolar 1.8.2. Funktor Y je potpuno vjeran. Posebno, $YC \cong YC'$ povlači $C \cong C'$, za sve objekte C, C' u $\mathscr{C}$.

Funktor Y se iz toga razloga obično naziva **Yonedinim ulaganjem**.

Kako potpuno vjerni funktori reflektiraju komutativne dijagrame, slijedi da je transformacija $\alpha : F \Rightarrow F'$ između funktora $F, F' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ prirodna ako i samo ako je $Y\alpha$ prirodna, dakle vrijedi i sljedeći korolar:

Korolar 1.8.3. Ako su dane dvije kategorije $\mathscr{D}$ i $\mathscr{C}$ i ako je $Y : \mathscr{C} \to [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ Yonedino ulaganje, onda je funktor $[-, Y] : [\mathscr{D}, \mathscr{C}] \to [\mathscr{D}, [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]]$ potpuno vjeran. Posebno, ako za dva funktora $G, G' : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ vrijedi $YG \cong YG'$, onda je i $G \cong G'$.

Napomena. Ako kategorija $\mathscr{C}$ nije lokalno mala, možemo konstruirati (vrlo veliku) kategoriju $[\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$, i isti argument pokazuje da se $\mathscr{C}$ ulaže u nju. Dakle, kategorija ne mora nužno biti lokalno mala da bismo na funktore s nje primijenili rezultate ovoga odjeljka, i zato se ni u ostatku teksta, gdje se na njih redovito pozivamo, nećemo ograničavati na lokalno male kategorije (i implicitno na funktorske kategorije s isključivo malom domenom), iako to u pravilu ni ne bi bio velik gubitak općenitosti.

1.9 Reprezentabilnost i univerzalni morfizmi

Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ nazivamo **reprezentabilnim** ako je izomorfan nekom hom funktoru, tj. ako postoji objekt $R \in \mathscr{C}$ i prirodni izomorfizam $\varphi : \mathrm{Hom}(R, -) \cong F$ kojega nazivamo **reprezentacijom** funktora F. Po Yonedinoj lemi izomorfizmu φ odgovara element $r := \varphi(\mathrm{id}_R) \in FR$ kojega nazivamo **univerzalnim elementom** reprezentacije φ, i vrijedi $\varphi(f) = Ff(r)$, za svaki morfizam $f : R \to C$.

Ako je dan funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ i objekt $C \in \mathscr{C}$, onda se univerzalni element $\eta : C \to GC^*$ reprezentacije $\mathrm{Hom}(C^*, -) \cong \mathrm{Hom}(C, -) \circ G = \mathrm{Hom}(C, G-)$ naziva **univerzalnim morfizmom** sa C na G. Eksplicitno, bijekcija hom-skupova koju dobivamo u ovome slučaju znači da za svaki morfizam $f : C \to GD$, $D \in \mathscr{D}$ postoji jedinstven morfizam $\tilde{f} : C^* \to D$ takav da komutira:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & GC^* \arrow[d, "G\tilde{f}"] \\ & GD. \end{tikzcd}$$

Drugim riječima, η je inicijalni objekt u kategoriji $(C \downarrow G)$. Vrijedi i obratno:

Propozicija 1.9.1. Neka je dan funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ i $C \in \mathscr{C}$. Ekvivalentno je:

1. C^* reprezentira funktor $\mathrm{Hom}(C, G-)$, a η je univerzalni element reprezentacije.
2. $\eta : C \to GC^*$ je inicijalni morfizam na G,

Prirodni izomorfizam $\varphi : \mathrm{Hom}(C^*, -) \cong \mathrm{Hom}(C, G-)$ zadan je sa $\varphi_D(g) = Gg \circ \eta$ za svaki $g : C^* \to D$.

Dokaz. Treba samo primijetiti da je $\varphi_D(g) = \mathrm{Hom}(C, Gg)\eta$, tj. upravo je prirodna transformacija koja po Yonedinoj lemi odgovara elementu $\eta \in \mathrm{Hom}(C, GC^*)$, a njena bijektivnost je točno ekvivalentna inicijalnosti od η. $\square$

Posebno, kako je $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(1, -) \cong \mathrm{Id}_{\mathsf{Set}}$, univerzalni morfizam sa 1 na F je točno univerzalni element reprezentacije funktora F.

Kao što ćemo vidjeti u 3. poglavlju, od velike su važnosti situacije gdje inicijalni morfizam na funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ postoji sa svakog objekta $C \in \mathscr{C}$. I prije nego što obradimo adjungirane funktore, bit će nam korisna sljedeća lema:

Lema 1.9.2. Ako za svaki objekt C u $\mathscr{C}$ postoji inicijalni morfizam na funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, onda postoji funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i prirodna transformacija $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow GF$ takva da je upravo $\eta_C : C \to GFC$ inicijalni morfizam sa C na G.

Dokaz. Izaberimo za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ inicijalni morfizam $\eta_C : C \to GFC$. Funktor F možemo definirati na morfizmu $f : C \to C'$ kao jedinistveni morfizam $Ff : FC \to FC'$ za koji komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[d, "f"'] & GFC \arrow[d, "GFf"] \\ C' \arrow[r, "\eta'_C"] & GFC'. \end{tikzcd}$$

Koristeći jedinstvenost gornje faktorizacije, lako se vidi da je F doista funktor, a η je prirodna po definiciji od F. □

Primjer 1.9.3.

1. Mnogi zaboravni funktori su reprezentabilni: $\mathsf{Top} \to \mathsf{Set}$ reprezentiran je jednotočkovnim prostorom, $\mathsf{Mod}_R \to \mathsf{Set}$ sa R, a $\mathsf{Ring} \to \mathsf{Set}$ sa $\mathbb{Z}[X]$.
2. Funktor $\mathcal{P} : \mathsf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ reprezentiran je skupom 2.
3. Preslikavanje $W \mapsto \mathrm{Hom}(U, V; W)$ koje vektorskom prostoru W pridružuje skup bilinearnih preslikavanja s $U \times V$ u W je funktorijalno i reprezentirano je s $U \otimes V$. Univerzalni element je funkcija $\otimes : U \times V \to U \otimes V$.

Poglavlje 2

Limesi

2.1 Stošci i definicija limesa

Svaki funktor $F : J \to \mathscr{C}$ element je kategorije $\mathscr{C}^J$, a preko funktora $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^J$ je to i konstantni funktor ΔC, za svaki objekt C u $\mathscr{C}$. Morfizme $\Delta C \Rightarrow F$ sa slike od Δ na F nazivamo **stošcima** nad F sa vrhom u C, intuitivno zato što prirodne transformacije sa ΔC na F i izgledaju kao takvi komutativni stošci: familija funkcija $(\gamma_j : C \to F_j)_{j \in J}$ je stožac ako za svaki morfizam $f : j \to k$ u J komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\gamma_j"'] \arrow[dr, "\gamma_k"] & \\ F_j \arrow[rr, "Ff"] & & F_k. \end{tikzcd}$$

Morfizme stožaca nad F definiramo naravno kao morfizme u kategoriji $(\Delta \downarrow F)$. Eksplicitno, morfizam sa stošca $\gamma' : \Delta C' \Rightarrow F$ na stožac $\gamma : \Delta C \Rightarrow F$ dan je morfizmom $\varphi : C' \to C$ takvim da za svaki $j \in J$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\gamma_j"'] & & C' \arrow[dl, "\gamma'_j"] \\ & F_j. & \end{tikzcd}$$

Ukoliko postoji, terminalni stožac $\pi : \Delta \varprojlim F \Rightarrow F$ nazivamo i **graničnim**, i kažemo da je $(\varprojlim F, \pi)$ **limes** funktora F. Dualno, kažemo da je $(\varinjlim F, \iota)$ **kolimes** od F ukoliko je $\iota : F \Rightarrow \Delta \varinjlim F$ inicijalni kostožac sa F.

Ako za neku kategoriju $\mathscr{C}$ postoje limesi svih funktora s kategorije J (koje u ovom kontekstu nazivamo i **dijagramima** (oblika J)), onda se po lemi 1.9.2 limes proširuje do funktora $\varprojlim : \mathscr{C}^J \to \mathscr{C}$ koji prirodnoj transformaciji $\alpha : F \Rightarrow F'$ pridružuje jedinstven morfizam $\varprojlim \alpha$ takav da za svaki $j \in J$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} \varprojlim F \arrow[r, "\varprojlim \alpha"] \arrow[d, "\pi_j"'] & \varprojlim F' \arrow[d, "\pi'_j"] \\ F_j \arrow[r, "\alpha_j"] & F'_j, \end{tikzcd}$$

pri čemu su $\pi : \Delta \varprojlim F \Rightarrow F$ i $\pi' : \Delta \varprojlim F' \Rightarrow F'$ granični stošci. Alternativno, uvijek se možemo ograničiti na funktor $\varprojlim$ s potkategorije od $\mathscr{C}^J$ za koju limesi postoje.

Sljedeća lema i korolar daju odmah ograničenje na postojanje "prevelikih" produkata (v. odjeljak 2.4.1) pa onda i limesa općenito:

Lema 2.1.1. Ako je $\mathscr{C}$ kategorija koja ima sve produkte veličine $\kappa := |\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}|$, onda je $\mathscr{C}$ nužno preduređaj.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da uvjeti teorema vrijede i da $\mathscr{C}$ nije preduređaj, tj. da postoje dva različita morfizma $f, g : A \to B$ u $\mathscr{C}$. Po pretpostavci, postoji produkt $\prod_{j\in\kappa} B$, pa je po propoziciji 2.2.2

$$\left|\mathrm{Hom}\Big(A, \textstyle\prod_{j\in\kappa} B\Big)\right| = \left|\textstyle\prod_{j\in\kappa} \mathrm{Hom}(A, B)\right| \geqslant 2^\kappa,$$

što je, po Cantorovom teoremu, u kontradikciji s $|\mathrm{Mor}\,\mathscr{C}| = \kappa$. □

Korolar 2.1.2. Kategorija $\mathscr{C}$ je preduređaj čim zadovoljava jedan od sljedećih uvjeta:

- ima sve limese
- mala je i ima sve male limese
- konačna je i ima sve konačne limese.

Dakle, iako je postojanje (ko)limesa općenito vrlo bitno, nema pretjeranoga smisla govoriti o kategorijama u kojima postoje svi limesi, već kažemo da je kategorija **potpuna** ukoliko ima sve male limese, tj. limese svih funktora sa malom domenom, a **konačno potpuna** ukoliko ima sve konačne limese.

Nadalje, uvodi se pojam **neprekidnoga** funktora kao funktora koji čuva male limese. Preciznije, kažemo da funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ čuva limes funktora $F : J \to \mathscr{D}$ ako svaki granični stožac $(\varprojlim F, \pi)$ preslikava u graničan stožac $(G \varprojlim F, G\pi)$.

Očita je ali i korisna sljedeća tvrdnja o prirodnim transformacijama između neprekidnih funktora:

Propozicija 2.1.3. Ako je dan funktor $F : J \to \mathscr{D}$ koji ima limes $(\varprojlim F, \pi)$ i funktori $G, G' : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ koji taj limes čuvaju, onda za svaku prirodnu transformaciju $\beta : G \Rightarrow G'$ vrijedi $\beta_{\varprojlim GF} = \varprojlim \beta F$.

Za G kažemo da **stvara** limes od F ukoliko limes od F postoji kad i limes od GF, i ako G i čuva i reflektira limese od F. Ako je na primjer kategorija $\mathscr{C}$ potpuna i G stvara limese, onda je potpuna i $\mathscr{D}$, a (D, δ) je limes od F ako i samo ako je $(GD, G\delta)$ limes od GF.

Napomena. Postoji i pojam **jedinstvenoga stvaranja** limesa: G stvara limes od F jedinstveno, ako ga stvara i ako za svaki granični stožac od GF postoji točno jedan granični stožac od F koji se po G preslikava u njega. Štoviše, neki autori podrazumijevaju da "stvara" znači "stvara jedinstveno", no mi taj pojam nećemo koristiti uopće, budući da nije invarijantan na ekvivalenciju (v. odjeljak 3.3.3).

Propozicija 2.1.4. Ako limes funktora $F : J \to \mathscr{D}$ postoji, i konzervativan funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ ga čuva, onda ga i reflektira, dakle i stvara.

Dokaz. Ako je $(\varprojlim F, \pi)$ limes od F, a (D, δ) neki drugi stožac kojega G preslikava u granični, onda su njihove slike po G izomorfne, pa budući da je G konzervativan, izomorfni su i sami. □

Primjer 2.1.5. Potpuno vjerni funktori reflektiraju limese. Posebno, ako je funktor $U : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ inkluzija pune potkategorije, i $F : J \to \mathscr{D}$ takav da limes $(\varprojlim UF, \pi)$ postoji i vrijedi $\varprojlim UF \in \mathscr{D}$, onda je to nužno i limes funktora F. Naravno, ako $\varprojlim UF$ nije u $\mathscr{D}$ ili ne postoji, onda nam reflektiranje ne govori ništa o $\varprojlim F$. Npr. u reflektivnim potkategorijama (3.3.2) inkluzija stvara limese, ali se kolimesi u potkategoriji u pravilu računaju drugačije.

Funktor između konačno potpunih kategorija koji čuva konačne limese nazivamo i **lijevo egzaktnim**, i dualno definiramo **desno egzaktne** funktore. Funktore koji su i lijevo i desno egzaktni nazivamo **egzaktnima**. Ovi pojmovi su bitni u Abelovim kategorijama, iz kojih i dolazi termini.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\lambda"] & & T \\ & \mathrm{Id} \arrow[ul, "\eta^S"] \arrow[ur, "\eta^T"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} SS \arrow[r, "\lambda\lambda"] \arrow[d, "\mu^S"'] & TT \arrow[d, "\mu^T"] \\ S \arrow[r, "\lambda"] & T \end{tikzcd}$$

2.2 Limesi u kategoriji Set

Ako je $(\varprojlim F, \pi)$ limes funktora $F : J \to \mathscr{C}$, onda po propoziciji 1.9.1 odmah dobivamo da je to i reprezentacija funktora $\mathrm{Nat}(\Delta -, F)$, i obratno, da ako je $\mathrm{Nat}(\Delta C, F) \cong \mathrm{Hom}(C, \varprojlim F)$ prirodno u C, onda je univerzalni element reprezentacije granični stožac na F. Ova korespondencija nam omogućava da na jednostavan način opišemo limese skupova.

Propozicija 2.2.1. Kategorija Set je potpuna.

Dokaz. Primijetimo prvo da ako za neku kategoriju J svaki dijagram $F : J \to \mathrm{Set}$ ima limes, onda na razini objekata mora vrijediti:

$$\varprojlim F \cong \mathrm{Hom}(1, \varprojlim F) \cong \mathrm{Nat}(\Delta 1, F), \tag{2.1}$$

dakle trebamo još pokazati da je $\mathrm{Nat}(\Delta X, F) \cong \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Nat}(\Delta 1, F))$. No to je jasno: ako je dana prirodna transformacija $\xi = (\xi_j : X \to F_j)_{j \in J} = ((\xi_j(x))_{x \in X})_{j \in J}$, onda je $((\xi_j(x) : 1 \to F_j)_{j \in J})_{x \in X}$ funkcija sa X u $\mathrm{Nat}(\Delta 1, F)$ i obratno, budući da je ξ prirodna ako i samo ako je "prirodna po točkama". Prirodnost ove korespondencije je očita, a identiteti $\mathrm{id}_{[\Delta 1, F]}$ po njoj odgovara familija $(\pi_j : \mathrm{Nat}(\Delta 1, F) \to F_j)_{j \in J}$, definirana s $\pi_j(\alpha) = \alpha_j$ za svaku prirodnu transformaciju $\alpha : \Delta 1 \Rightarrow F$ i $j \in J$. $\square$

Kako je funktor $\Delta 1$ terminalni objekt u Set^J, $\mathrm{Nat}(\Delta 1, F)$ je ništa drugo nego skup globalnih elemenata od F, i primijetimo da se može opisati sasvim jednostavno i eksplicitno:

$$\varprojlim F = \Big\{ (x_j)_j \in \prod_{j \in J} F_j : f(x_j) = x_k, \text{ za sve morfizme } f : j \to k \Big\}. \tag{2.2}$$

Zapravo, limese u Set smo mogli definirati ovakvom formulom, a limesi u drugim kategorijama se kao što ćemo vidjeti mogu definirati preko njih, za što je ključna sljedeća propozicija:

Propozicija 2.2.2. Kovarijantni hom funktor čuva sve limese.

Dokaz. Neka je $F : J \to \mathscr{C}$ funktor s limesom $(\varprojlim F, \pi)$, C proizvoljan objekt u $\mathscr{C}$, a $(\varprojlim \mathrm{Hom}(C, F-), \pi')$ limes funktora $\mathrm{Hom}(C, F-)$ dan kao u propoziciji 2.2.1.

Primijetimo prvo da su stošci sa 1 na funktor $\mathrm{Hom}(C, F-)$ u prirodnoj korespondenciji sa stošcima sa C na F. Dakle, imamo da je

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(C, F-) = \mathrm{Nat}(\Delta 1, \mathrm{Hom}(C, F-)) \cong \mathrm{Nat}(\Delta C, F) \cong \mathrm{Hom}(C, \varprojlim F)$$

prirodno u C. Eksplicitno, morfizmu $f : C \to \varprojlim F$ odgovara stožac $(\pi_j f : C \to F_j)_j$, tj. element $(\pi_j f)_j$ limesa. Slijedi da je gornji izomorfizam i izomorfizam stožaca $(\varprojlim \mathrm{Hom}(C, F-), \pi')$ i $(\mathrm{Hom}(C, \varprojlim F), \mathrm{Hom}(C, \pi))$, dakle nužno je graničan i stožac $(\mathrm{Hom}(C, \varprojlim F), \mathrm{Hom}(C, \pi))$. $\square$

Po upravo dokazanome, ako postoji limes $(\varprojlim F, \pi)$ funktora $F : J \to \mathscr{C}$, onda $\varprojlim F$ reprezentira funktor $C \mapsto \varprojlim \mathrm{Hom}(C, F-)$, a granični stožac π je točno univerzalni element te reprezentacije. Obratno, ako imamo reprezentaciju $\mathrm{Hom}(-, L) \cong \mathrm{Nat}(\Delta-, F)$, njen univerzalni element je točno terminalni morfizam na F. Dakle, vrijedi sljedeći korolar:

Korolar 2.2.3. Funktor $F : D \to \mathscr{C}$ ima limes ako i samo ako je reprezentabilan funktor

$$\begin{aligned}(\mathrm{Lim}\, F)(C) &:= \varprojlim \mathrm{Hom}(C, F-) \\ &= \mathrm{Nat}(\Delta 1, \mathrm{Hom}(C, F-)) \\ &\cong \mathrm{Nat}(\Delta C, F).\end{aligned}$$

Odgovarajući granični stožac na F dan je univerzalnim elementom reprezentacije.

Duali ovih rezultata nam odmah omogućavaju da izračunamo i kolimese u kategoriji Set. Ako kolimes funktora $F : J \to \mathrm{Set}$ postoji, onda zadovoljava

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\varinjlim F, X) &\cong \varprojlim \mathrm{Hom}(F-, X) \\ &= \{(g_j)_j \in \prod_{j \in J} \mathrm{Hom}(F_j, X) \ : \ g_j = g_k \circ Ff, \quad \forall f : j \to k\}\end{aligned}$$

No familije $(g_j)_j \in \prod_j \mathrm{Hom}(F_j, X)$ u bijekciji su s funkcijama $g \in \mathrm{Hom}(\coprod_j F_j, X)$ s disjunktne unije $\coprod_j F_j = \bigcup_j (F_j \times \{j\})$, a uvjet $g_j = g_k \circ Ff$, za sve $f : j \to k$ zadovoljen je ako i samo ako je $g(a, j) = g(b, k)$ čim postoji $f : j \to k$ takav da je $Ff(a) = b$. Dakle, imamo dalje:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(\varinjlim F, X) &\cong \{g \in \mathrm{Hom}(\textstyle\coprod_j F_j, X) \ : \ g(a, j) = g(b, k), \quad (a, j) \sim (b, k)\} \\ &\cong \mathrm{Hom}({\textstyle\coprod_j F_j}/{\sim}, X),\end{aligned} \tag{2.3}$$

pri čemu je relacija $\sim$ najmanja ekvivalencija definirana spomenutim relacijama: $(a, j) \sim (b, k)$ ako postoji $f : j \to k$ takav da je $Ff(a) = b$.

Korolar 2.2.4. Kategorija Set je kopotpuna. Kolimes funktora $F : J \to \mathrm{Set}$ dan je formulom (2.3).

2.3 Limesi u kategorijama funktora

U ovom odjeljku nam je cilj dati dovoljan uvjet za postojanje limesa funktora $H : J \to [\mathscr{C}, \mathscr{D}]$, gdje su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ proizvoljne kategorije. Označimo sa $\tilde{H} : \mathscr{C} \to [J, \mathscr{D}]$ funktor sa zamijenjenim argumentima, i pretpostavimo da za svaki $C \in \mathscr{C}$ postoji limes $(\varprojlim \tilde{H}_C, \pi^C)$ funktora $\tilde{H}_C$. Tada je dobro definiran funktor $\varprojlim$ na slici od $\tilde{H}$, a $\pi^C : \Delta \varprojlim \tilde{H}_C \Rightarrow H_C$ je prirodna u C (lema 1.9.2).

Propozicija 2.3.1. Neka su dane kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ i funktor $H : J \to \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$. Ako funktor $\tilde{H}_C := (H-)(C) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ ima limes $(\varprojlim \tilde{H}_C, \pi^C)$ za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$, onda i funktor H ima limes $(\varprojlim H, \pi)$, pri čemu je $\varprojlim H : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ kompozicija $\varprojlim \circ \tilde{H}$, a $(\pi_j)_C = \pi_j^C$, za svaki $j \in J$, $C \in \mathscr{C}$.

Dokaz. Ako je $\varphi : \Delta F \Rightarrow H$ stožac na H, onda je za fiksan $C \in \mathscr{C}$ familija morfizama $\varphi_j^C := (\varphi_j)_C : FC \to H_j C$ stožac na $\tilde{H}_C$, pa postoji jedinstven morfizam $\hat{\varphi}_C : FC \to \varprojlim \tilde{H}_C$ takav da vrijedi $\varphi_j^C = \pi_j^C \circ \hat{\varphi}_C$. Dakle, ako pokažemo da je $\hat{\varphi}_C$ prirodna u C, imat ćemo jedinstvenu faktorizaciju stošca φ kroz π. No za svaki morfizam $f : C \to C'$ u $\mathscr{C}$ u dijagramu

$$
\begin{tikzcd}
FC \arrow[rrr, "Ff"] \arrow[dr, "\varphi_j^C"] \arrow[dd, "\hat{\varphi}_C"'] & & & FC' \arrow[dl, "\varphi_j^{C'}"'] \arrow[dd, "\hat{\varphi}_{C'}"] \\
& H_j C \arrow[r, "H_j f"'] & H_j C' & \\
\varprojlim \tilde{H}_C \arrow[ur, "\pi_j^C"'] \arrow[rrr, "\varprojlim \tilde{H}_f"'] & & & \varprojlim \tilde{H}'_C \arrow[ul, "\pi_j^{C'}"]
\end{tikzcd}
$$

po pretpostavci komutiraju sve unutrašnje stranice, pa slijedi da je

$$\pi_j^{C'} \circ \varprojlim \tilde{H}_f \circ \hat{\varphi}_C = \pi_j^{C'} \circ \hat{\varphi}_{C'} \circ Ff$$

za svaki $j \in J$. Dakle mora biti i $\varprojlim \tilde{H}_f \circ \hat{\varphi}_C = \hat{\varphi}_{C'} \circ Ff$, tj. $\hat{\varphi}$ je prirodna. □

Posebno, ako kategorija $\mathscr{D}$ ima sve limese funktora sa J, onda ih ima i $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$, a funktor Ev_C ih čuva za svaki $C \in \mathscr{C}$. Možemo reći da se limes funktora $H : J \to \mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ računa po točkama, tj. da vrijedi

$$(\varprojlim_j H_j)C = \varprojlim_j H_j C.$$

Korolar 2.3.2. Ako kategorija $\mathscr{D}$ ima povlake, onda je prirodna transformacija $\alpha : F \Rightarrow F$ između funktora $F, F' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ monomorfizam ako i samo ako je monomorfizam svaka njena komponenta $\alpha_C : FC \to F'C$, $C \in \mathscr{C}$.

Dokaz. Jedan smjer je propozicija 1.7.2, a drugi slijedi iz propozicije 2.4.8. □

Naravno, ako je kategorija $\mathscr{D}$ potpuna, slijedi da je i $\mathscr{D}^{\mathscr{C}}$ potpuna, pa za $\mathscr{D} = \mathrm{Set}$ imamo:

Korolar 2.3.3. Kategorija $[\mathscr{C}, \mathrm{Set}]$ je potpuna i kopotpuna za svaku kategoriju $\mathscr{C}$.

Korolar 2.3.4. Za lokalno malu kategoriju $\mathscr{C}$ Yonedino ulaganje $Y : \mathscr{C} \to [\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set}]$ je neprekidan funktor

Dokaz. Za svaki $C \in \mathscr{C}$ je $\mathrm{Ev}_C \circ Y = \mathrm{Hom}(C, -)$, pa tvrdnja slijedi iz propozicije 2.3.1 i neprekidnosti hom funktora (propozicija 2.2.2). □

2.4 Primjeri limesa

2.4.1 Produkti

Limes funktora sa diskretne kategorije (dakle zapravo familije objekata) nazivamo **produktom**. Ako je $(C_j)_{j \in J}$ familija objekata u $\mathscr{C}$, za limes funktora $j \mapsto C_j$ pišemo i $\prod_{j \in J} C_j$. Produkt dvaju ili nekoliko objekata označavamo i s $\times$, npr. $A \times B \times C$. Produkt konstantne familije $j \mapsto C$ označavamo i s C^J, npr. u C^2. Ako su dani morfizmi $f : C \to A$ i $g : C \to B$, onda inducirani morfizam na produkt označavamo s $(f, g) : C \to A \times B$. Morfizam $(\mathrm{id}, \mathrm{id}) : A \to A \times A$, ili općenitije analogno definirani morfizam $A \to A^J$ nazivamo **dijagonalom** i označavamo s Δ.

Primijetimo da je produkt prazne familije objekata terminalni objekt, a za produkt jednočlane možemo uzeti upravo njen jedini element. Posebno imamo $C^1 \cong C$ i $C^0 \cong T$, gdje je T terminalni objekt.

Ako je $(A \times B, (\pi_A, \pi_B))$ produkt para objekata (A, B), a $(B \times A, (\pi'_B, \pi'_A))$ produkt para (B, A), onda je to očito i $(A \times B, (\pi_B, \pi_A))$, a inducirani morfizam $(\pi_B, \pi_A) : A \times B \to B \times A$ je izomorfizam. Nadalje, lako se vidi da su za svaka tri objekta A, B, $C \in \mathscr{C}$ i $(A \times B) \times C$ i $A \times (B \times C)$ produkti trojke (A, B, C), pa postoje jedinstveni izomorfizmi

$$(A \times B) \times C \cong A \times B \times C \cong A \times (B \times C)$$

koji komutiraju s projekcijama.

I općenito je produkt uvijek komutativan i asocijativan u ovome smislu, i posebno je terminalni objekt kao produkt prazne familije do na izomorfizam jedinični element za produkt. Iz toga slijedi da u kategoriji svi konačni produkti postoje čim postoje binarni produkti i terminalni objekt.

Produktu dualan pojam je **koprodukt**. Kao i za produkt uvodimo posebne oznake $\coprod_{j \in J} C_j$ za koprodukt familije $(C_j)_{j \in J}$, $A \sqcup B$ ili $A + B$ za koprodukt objekata A i B i $C^{\sqcup J}$ ili $J \cdot C$ za koprodukt konstantne familije. Morfizam $A \sqcup B \to C$ induciran morfizmima $f : A \to C$ i $g : B \to C$ označavamo s $[f, g]$, a morfizam $[\mathrm{id}, \mathrm{id}] : A \sqcup A \to A$ označavamo s ∇ i nazivamo **kodijagonalom**.

Primjer 2.4.1.

1. Produkti skupova, kategorija, grupa, modula, prstenova i topoloških prostora su svi primjeri produkta u odgovarajućim kategorijama.
2. Koprodukt u Set je disjunktna unija skupova. Slično dobivamo i koprodukt u Top, ako kažemo da je podskup disjunktne unije prostora X i Y otvoren ako je unija otvorenoga skupa iz X i otvorenoga skupa iz Y.
3. Koprodukt modula i posebno Abelovih grupa je dan direktnom sumom, i za konačne familije se podudara s produktom. U kategoriji Grp situacija je bitno drugačija, i koprodukt je dan slobodnim produktom grupa.
4. Koprodukt komutativnih prstenova dan je tenzorskim produktom (kao $\mathbb{Z}$-algebri).
5. Produkti i koprodukti u preduređaju su infimumi i supremumi.

2.4.2 Ujednačitelji

Limes para paralelnih morfizama, tj. funktora sa kategorije $\bullet \rightrightarrows \star$ nazivamo **ujednačiteljem**. Ako je $f, g : C \to D$ paralelni par morfizama, primijetimo da je stožac $(\pi_C : E \to C, \pi_D : E \to D)$ određen prvom komponentom, budući da mora vrijediti $\pi_D = f\pi_C = g\pi_C$; u skladu s time, ujednačitelj poistovjećujemo s morfizmom $\pi_C : E \to C$ (ili nepreciznije objektom E), a označavamo ga s $\mathrm{eq}(f, g)$. Iz univerzalnoga svojstva slijedi da je taj morfizam uvijek mono, tj. podobjekt, i zapravo možemo reći da je najveći podobjekt od C na kojemu se f i g podudaraju. Dualan pojam zovemo koujednačiteljem, i pišemo $\mathrm{coeq}(f, g)$

Ukoliko kategorija ima nul-objekt, ujednačitelj morfizma $f : A \to B$ i nul-morfizma $0 : A \to B$ zovemo **jezgrom** od f i označavamo s $\ker f$. Dualno definiramo **kojezgru** $\mathrm{coker}\, f$.

Primjer 2.4.2. Ujednačitelj para funkcija $f, g : X \to Y$ u Set je podskup na kojemu se te funkcije podudaraju. Kao i produkti, i ujednačitelji se konstruiraju isto u mnogim drugim konkretnim kategorijama, što je fenomen koji ćemo objasniti kasnije.

Primjer 2.4.3. Koujednačitelj para funkcija je kvocijent skupa Y po ekvivalenciji generiranoj relacijama $f(x) = g(x)$, za svaki $x \in X$. Slično, u Grp je koujednačitelj kvocijent normalnom grupom generiranom elementima $f(x)g(x)^{-1}$. Analogna tvrdnja vrijedi i za module, ali primijetimo da tu ujednačitelje i koujednačitelje možemo izraziti preko jezgri i kojezgri, npr. $\mathrm{coeq}(f, g) = \mathrm{coker}(f - g)$

Produkti i ujednačitelji su limesi koje je često najjednostavnije opisati, pa je zato za dokazivanje potpunosti neke kategorije zna biti vrlo praktična sljedeća propozicija:

Propozicija 2.4.4. Ako kategorija ima konačne produkte i ujednačitelje parova morfizama, onda ima i sve konačne limese. Ako kategorija ima i sve male produkte, onda je potpuna.

Dokaz. Iz eksplicitne konstrukcije opisane formulom (2.2) vidimo da tvrdnja vrijedi u Set, budući da je $\varprojlim F$ dan kao ujednačitelj

$$\varprojlim F \hookrightarrow \textstyle\prod_{i \in J} F_i \rightrightarrows \textstyle\prod_{f : j \to k} F_k,$$

gdje su morfizmi u produkt inducirani familijama funkcija $(x_i)_i \mapsto f x_j$, odnosno $(x_i)_i \mapsto x_k$ za svaki morfizam $f : j \to k$ u J. Tvrdnja za općenite kategorije sada slijedi iz korolara 2.2.3. □

2.4.3 Povlak

Ako su dani morfizmi $f : A \to C$ i $g : B \to C$ u kategoriji $\mathscr{C}$, onda limes odgovarajućega dijagrama (s kategorije $* \longrightarrow \bullet \longleftarrow \star$) nazivamo **povlakom**. Povlak je zadan objektom, kojega ćemo označavati s $A \times_C B$ i zvati i **fibriranim produktom** objekata A i B nad C , i morfizmima π_A i π_B takvima da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} A \times_C B \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"] & C. \end{tikzcd}$$

Morfizam π_A ćemo nekad zvati i **povlakom od** g **duž morfizma** f, i pisati f^*B za $A \times_C B$ i f^*g za π_A.

Dualan pojam ćemo zvati **potisak** (eng. pushout). Ukoliko su dani morfizmi $f : C \to A$ i $f : C \to B$, za potisak ćemo pisati $A \sqcup_C B$ i zvati ga i **amalgiranom sumom** nad C.

Primijetimo da je povlak morfizama f i g upravo njihov produkt u $\mathscr{C}/C$. Sukladno tome je i fibrirani produkt nad terminalnim objektom uvijek obični produkt. Slično, lako se vidi da je za par morfizama $f, g : A \to B$ povlak od (id, f) i $(\mathrm{id}, g) : A \to A \times B$ upravo ujednačitelj od A i B. Dakle, propoziciju 2.4.4 možemo izreći i u nešto drugačijem obliku:

Korolar 2.4.5. Kategorija koja ima terminalni objekt i povlake ima i sve konačne limese.

Za svaki morfizam $f : A \to B$ se preslikavanje $(p : E \to B) \mapsto (f^*p : f^*E \to A)$ proširuje do funktora $f^* : \mathscr{C}/B \to \mathscr{C}/A$: za svaki morfizam φ sa p na $p' : E' \to B$ postoji jedinstven morfizam $f^*\varphi$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[rrr] \arrow[dr, "f^*p"] \arrow[dd, dashed, "f^*\varphi"'] & & & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dd, "\varphi"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B & \\
f^*E' \arrow[rrr] \arrow[ur, "f^*p'"'] & & & E' \arrow[ul, "p'"]
\end{tikzcd}$$

u kojem su trapezi povlaci. Štoviše, lako je pokazati da se funktor f^* i restringira na funktor $f^* : \mathrm{Sub}\, B \to \mathrm{Sub}\, A$:

Propozicija 2.4.6. Ako je morfizam $i : B' \hookrightarrow B$ monomorfizam, onda je i povlak $f^*i : f^*B' \to A$ monomorfizam za morfizam svaki $f : A \to B$.

Dokaz. Označimo s F povlak od f duž i, i neka su $x, y : X \to f^*B'$ takvi da je $f^*i \circ x = f^*i \circ y =: g$. Posebno je i $fg = iFx = iFy$, pa jer je i mono slijedi $Fx = Fy =: h$. No sada $fg = ih$ povlači $x = y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, shift left, "x"] \arrow[dr, shift right, "y"'] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& f^*B' \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f^*i"'] & B' \arrow[d, "i"] \\
& A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

□

Povlak para istih morfizama $f : A \to B$ nazivamo **jezgrenim parom** od f. U kategoriji Set, to je skup $\{(a,b) \in A \times A : f(a) = f(b)\}$. Ukoliko je f injekcija, onda je jezgreni par slika dijagonale $\Delta : A \to A \times A$. I općenito odmah iz definicija slijedi:

Propozicija 2.4.7. Morfizam $f : A \to B$ u kategoriji $\mathscr{C}$ je monomorfizam ako i samo ako je dijagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

povlak, tj. ako identitete čine jezgreni par od f.

Dakle, monomorfizme možemo karakterizirati preko limesa, pa ih neprekidni funktori čuvaju:

Korolar 2.4.8. Funktor koji čuva povlake čuva i monomorfizme.

Primjer 2.4.9. Povlak morfizama $f : A \to C$ i $g : B \to C$ u Set dan je naravno skupom $A \times_C B := \{(a,b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$ s očitim projekcijama. Primijetimo da su vlakna funkcije $f\pi_A = g\pi_B : A \times_C B \to C$ upravo produkti vlakana funkcija f i g, što opravdava naziv "fibrirani produkt".

Alternativno povlak funkcije $\pi : E \to B$ duž $f : A \to B$ možemo opisati kao skup $f^*E := \coprod_{a \in A} \pi^{\leftarrow}\{f(a)\}$. Tada je očito da je vlakno funkcije $f^*\pi$ u točki $a \in A$ upravo vlakno funkcije π u $f(a)$, dakle možemo reći da je svežanj $\pi : E \to B$ "povučen" po f na svežanj $f^*\pi : f^*E \to A$. Ova perspektiva je posebno korisna za fibrirane svežnjeve u topologiji i diferencijalnoj geometriji.

Primjer 2.4.10. Ako je $A \subseteq X$ potprostor topološkoga prostora X, onda je potisak inkluzije $A \to X$ duž terminalnoga morfizma $A \to 1$ upravo kvocijent X/A.

2.5 Kofinalni funktori

Lako je pokazati da je kolimes nekoga niza $\mathbb{N} \to \mathscr{C}$ (tzv. induktivni ili direktni limes) jednak kolimesu svakoga podniza $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \to \mathscr{C}$. Općenitije, za podskup I usmjerenoga skupa J kažemo da je **kofinalan** ako je svaki element iz J manji ili jednak nekome elementu iz I. Očito je svaki beskonačni podskup od $\mathbb{N}$ kofinalan, i opet vrijedi da se prelaskom na kofinalni podskup ne mijenja kolimes funktora, analogno kao što se limes hiperniza u topologiji ne mijenja prelaskom na kofinalan pothiperniz.

Ovu situaciju možemo poopćiti i na kategorije koje nisu predurеđaji, i ne moramo se ograničiti samo na potkategorije, već možemo promatrati proizvoljne funktore $F : I \to J$. Za takav funktor kažemo da je **inicijalan**[1] ako je za svaki objekt $j \in J$ kategorija $(F \downarrow j)$ povezana, pri čemu kategoriju zovemo **povezanom** ako odgovarajući *neusmjereni* graf ima *točno jednu* komponentu povezanosti. Dualan pojam nazivamo **kofinalnim** funktorom, i lako se vidi da se on u slučaju predurеđaja svodi na funktor čija je slika kofinalan podskup u klasičnom smislu.

Teorem 2.5.1. Neka je $F : I \to J$ inicijalan funktor, a $G : J \to \mathscr{C}$ proizvoljan. Funktor G ima limes $(\varprojlim G, \tilde{\pi})$ ako i samo ako je $(\varprojlim G, \tilde{\pi}F)$ limes funktora GF.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da postoji limes $(\varprojlim GF, \pi)$ funktora GF. Po pretpostavci je za svaki $j \in J$ kategorija $(F \downarrow j)$ povezana i posebno neprazna. Dakle, postoji neki morfizam $s_j : F_i \to j$, i možemo definirati

$$\tilde{\pi}_j := \varprojlim GF \xrightarrow{\pi_i} GF_i \xrightarrow{Gs_j} G_j.$$

Dokažimo da definicija $\tilde{\pi}$ ne ovisi o izboru morfizama s_j. Neka je dan neki drugi morfizam $s'_j : F_{i'} \to j$ takav da postoji morfizam $f : i \to i'$ sa s_j na njega. Tada desni trokut u dijagramu

$$\begin{tikzcd}
& GF_i \arrow[dd, "GFf"] \arrow[dr, "Gs_j"] & \\
\varprojlim GF \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_{i'}"'] & & G_j \\
& GF_{i'} \arrow[ur, "Gs'_j"'] &
\end{tikzcd}$$

komutira po pretpostavci, a lijevi zato što je π stožac, dakle je $Gs_j \circ \tilde{\pi}_i = Gs'_j \circ \tilde{\pi}_{i'}$. Po tranzitivnosti, ta jednakost vrijedi i za s_j i s'_j povezane proizvoljnim putem u $(F \downarrow j)$, pa onda i za sve morfizme u njoj. Posebno, ako je dan morfizam $g : j \to j'$

[1] Terminologija je vrlo nekonzistentna; funktore koje nazivam inicijalnim odnosno kofinalnima, neki zovu inicijalnim i finalnima, neki kokofinalnim i kofinalnim, a neki finalnim i kofinalnim. Svaki od ovih izbora je opravdan, ali meni se činilo najboljim zadržati termin "kofinalan" tako da odgovara tradicionalnom pojmu za uređene skupove, i uzeti "inicijalan" umjesto nezgrapnoga "kokofinalan" i protuintuitivnoga "finalan". Nedostatak ovog odabira je što inicijalan funktor u ovome smislu ne znači funktor koji je inicijalan objekt u određenoj kategoriji, kako bi se moglo očekivati.

u J onda su za $s_j : F_i \to j$ i $s_{j'} : F_{i'} \to j'$ i $s_{j'}$ i gs_j objekti u $(F \downarrow j')$, pa komutira

$$\begin{tikzcd} & \varprojlim GF \arrow[dl, bend right, "\pi_i"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_{i'}"] \arrow[ddl, dashed, "\tilde{\pi}_j"] \arrow[ddr, dashed, "\tilde{\pi}_{j'}"'] & \\ GF_i \arrow[d, "Gs_j"'] & & GF_{i'} \arrow[d, "Gs_{j'}"] \\ G_j \arrow[rr, "Gg"'] & & G_{j'}, \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

tj. $\tilde{\pi}$ je stožac nad G. Nadalje, za $i \in I$ u definiciji morfizma $\tilde{\pi}_{Fi}$ možemo uzeti $s_{Fi} = \mathrm{id}_{Fi}$, pa slijedi da je $\tilde{\pi}F = \pi$, kao što smo i htjeli.

Ako je dan neki drugi stožac $\gamma : \Delta C \Rightarrow G$, onda je γF stožac na GF pa se faktorizira kroz π, tj. postoji $\hat{\gamma} : C \to \varprojlim G$ takav da je $\gamma F = \pi \circ \Delta\hat{\gamma}$. Iz dijagrama (2.4) se odmah vidi da onda vrijedi i $\gamma = \tilde{\pi} \circ \Delta\hat{\gamma}$, a svaka druga faktorizacija stošca γ kroz $\tilde{\pi}$ bi davala i drugu faktorizaciju stošca γF kroz $\tilde{\pi}F = \pi$, što bi bilo u kontradikciji s graničnošću od π. Dakle, $(\varprojlim GF, \tilde{\pi})$ je doista limes funktora G.

Obratno, ako je $(\varprojlim G, \tilde{\pi})$ limes od G, onda je $\tilde{\pi}F =: \pi$ stožac nad GF. Svaki drugi stožac $\gamma : \Delta C \Rightarrow GF$ se konstrukcijom s početka dokaza proširuje na jedinstven način do stošca $\tilde{\gamma} : \Delta C \Rightarrow G$ takvoga da je $\tilde{\gamma}F = \gamma$. Sada lagano slijedi jedinstvena faktorizacija stošca γ kroz π. □

Napomena. Može se pokazati da je inicijalnost funktora $F : I \to J$ ne samo dovoljna nego i nužna da bi G i GF imali iste limese (ukoliko ijedan postoji) za svaki funktor $G : J \to \mathscr{C}$. Vidi na primjer propoziciju 2.5.2. u [8].

2.6 Generatori

Svaki morfizam $f : C \to D$ u kategoriji $\mathscr{C}$ očito je jedinstveno određen generaliziranim elementima od C, tj. ako je $gx = fx$ za sve morfizme $x : A \to C$, onda je i $g = f$ (dovoljno je uzeti $x = \mathrm{id}_C$). **Generator**[2] kategorije $\mathscr{C}$ je objekt $S \in \mathscr{C}$ takav da su morfizmi jedinstveno određeni već i na S-elementima, tj. eksplicitno, takav da ako za paralelni par morfizama $f, g : C \to D$ vrijedi $fx = gx$ za sve $x : S \to C$, onda je $f = g$. Ekvivalentno možemo reći da je generator takav objekt $S \in \mathscr{C}$ da je funktor $\mathrm{Hom}(S, -)$ vjeran.

[2] Drugi (i opisniji) naziv za generator je **separator**, dok je termin generator prikladan u kategorijama s koproduktima (v. propoziciju 2.6.1). No budući da je to upravo slučaj koji ćemo promatrati, držat ćemo se tradicionalne terminologije.

Općenitije je **familija generatora** $\{S_i\}_{i\in I}$ takav podskup objekata od $\mathscr{C}$ da za svaki paralelni par morfizama $f, g : C \to D$ vrijedi $f = g$ čim je $fx = gx$ za sve $i \in I$ i $x : S_i \to C$. Ekvivalentno je tražiti da funktori $\mathrm{Hom}(S_i, -)$ budu **zajednički vjerni**, tj. da $\mathrm{Hom}(S_i, f) = \mathrm{Hom}(S_i, g)$ za sve $i \in I$ povlači $f = g$.

Primijetimo da ukoliko kategorija $\mathscr{C}$ ima koprodukte, onda za svaku familiju objekata $\{S_i\}_{i\in I}$ i za svaki objekt C postoji istaknut morfizam κ, definiran tako da za svaki $i \in I$ i $f : S_i \to C$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[d, "\iota_{(i,f)}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \coprod\limits_{\substack{i\in I \\ f\in \mathrm{Hom}(S_i,C)}} S_i \arrow[r, "\kappa"'] & C. \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

Lako se vidi da vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 2.6.1. Za familiju objekata $\{S_i\}_{i\in I}$ u kategoriji s koproduktima $\mathscr{C}$ ekvivalentno je:

- $\{S_i\}_{i\in I}$ je familija generatora za $\mathscr{C}$
- morfizam κ definiran dijagramom (2.5) je epimorfizam.

Ako je $\{S_i\}_{i\in I}$ takva familija generatora da ni za jedan objekt C od $\mathscr{C}$ ne postoji pravi podobjekt $A \hookrightarrow C$ kroz kojega se faktoriziraju svi S_i-elementi od C, onda je nazivamo **ekstremalnom familijom generatora**. Odmah iz definicije slijedi da ukoliko kategorija $\mathscr{C}$ ima koprodukte je familija generatora ekstremalna ako i samo ako je i epimorfizam κ ekstremalan.

Konačno, definirat ćemo **jaku familiju generatora** kao familiju generatora $\{S_i\}_{i\in I}$ takvu da je familija funktora $\{\mathrm{Hom}(S_i, -)\}_{i\in I}$ **zajednički konzervativna**, tj. da je morfizam f u $\mathscr{C}$ izomorfizam ako je $\mathrm{Hom}(S_i, f)$ izomorfizam za svaki $i \in I$. Primijetimo da ukoliko $\mathscr{C}$ ima ujednačitelje, uvjet da funktori $\mathrm{Hom}(S_i, -)$ budu i zajednički vjerni je suvišan:

Propozicija 2.6.2. Ako je $\mathscr{C}$ kategorija s ujednačiteljima, a $\{F_i : \mathscr{C} \to \mathscr{D}_i\}_{i\in I}$ zajednički konzervativna familija funktora koji čuvaju ujednačitelje, onda je ta familija i zajednički vjerna.

Dokaz. Neka je dan paralelan par morfizama $f, g : C \to D$ u $\mathscr{C}$ takav da je $F_i f = F_i g$, za sve $i \in I$, a $e : E \to C$ njegov ujednačitelj. Kako je po pretpostavci je $F_i e$ ujednačitelj para $F_i f = F_i g$, $F_i e$ je nužno izomrofizam za svaki $i \in I$. Dakle i ujednačitelj e je izomorfizam, iz čega slijedi da je $f = g$. $\square$

Propozicija 2.6.3. Svaka jaka familija generatora je ekstremalna.

Dokaz. Neka je $\{S_i\}_{i\in I}$ jaka familija generatora i neka je $m : A \hookrightarrow C$ monomorfizam takav da se svaki morfizam $S_i \to C$ faktorizira kroz m. Tada je funkcija $\mathrm{Hom}(S_i, m)$ surjektivna, a budući da je m monomorfizam i injektivna je, za svaki $i \in I$. Kako funktori $\mathrm{Hom}(S_i, m)$ zajednički reflektiraju izomorfizme, slijedi da je i m izomorfizam. □

Propozicija 2.6.4. Ako lokalno mala kategorija $\mathscr{C}$ ima malu ekstremalnu familiju generatora, i ako svaka dva podobjekta u njoj imaju presjek, onda je $\mathscr{C}$ wp kategorija.

Dokaz. Neka je C proizvoljan objekt od $\mathscr{C}$, a $\{S_i\}_{i\in I}$ mala ekstremalna familija generatora. Dokazat ćemo da je uz pretpostavke teorema svaki podobjekt od C jedinstveno određen S_i-elementima od C koji se faktoriziraju kroz njega. Kako je skup S_i-elemenata od C mal, slijedit će da je mal i skup $\mathrm{Sub}\, C$.

Ako su $m : A \hookrightarrow C$ i $n : B \hookrightarrow C$ dva različita podobjekta od C, onda je njihov presjek $A \cap B$ različit od barem jednoga od njih, pretpostavimo bez smanjenja općenitosti od A. Posebno je dakle $A \cap B \hookrightarrow A$ pravi podobjekt od A, pa postoji $i \in I$ i S_i-element $x : S_i \to A$ od A koji se ne faktorizira kroz $A \cap B \hookrightarrow A$.

$$\begin{tikzcd}
S_i \arrow[drr, bend right, "x"'] & & \\
& A \cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook, "n"] \\
& A \arrow[r, hook, "m"] & C
\end{tikzcd}$$

Po univerzalnome svojstvu povlaka onda slijedi da se mx ne može faktorizirati kroz n. □

Poglavlje 3

Adjungirani funktori

3.1 Osnovna svojstva adjungiranih funktora

Za par funktora $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ kažemo da je **adjungiran** ako postoji prirodan izomorfizam bifunktora $\varphi : \mathrm{Hom}(F-,-) \cong \mathrm{Hom}(-,G-)$. Za funktor F kažemo da je **lijevo adjungiran** (funktoru G), a za G da je **desno adjungiran**. Pišemo i $F \dashv G$ ili $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$. Par $(F \dashv G, \varphi)$ adjungiranih funktora i određenoga **adjunkcijskog izomorfizma** nazivamo **adjunkcijom**.

Alternativno, pokazat ćemo da adjunkciju $F \dashv G$ možemo ekvivalentno zadati parom prirodnih transformacija $\eta : \mathrm{Id}_C \Rightarrow GF$ i $\varepsilon : FG \Rightarrow \mathrm{Id}_D$ takvh da vrijede tzv. identitete trokuta:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GFG \arrow[d, "G\varepsilon"'] & G \arrow[l, "\eta G"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ G. & \end{tikzcd}$$

U ovom slučaju govorit ćemo o adjunkciji $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$, i prirodnu transformaciju η zvati **jedinicom**, a ε **kojedinicom** te adjunkcije.

Teorem 3.1.1. Za funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

1. postoji adjunkcija $(F \dashv G, \varphi)$
2. postoji adjunkcija $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$
3. za svaki objekt C u $\mathscr{C}$ kategorija $(C \downarrow G)$ ima inicijalni objekt
4. za svaki objekt C u $\mathscr{C}$ funktor $\mathrm{Hom}(C, G-)$ je reprezentabilan

Svaki adjunkcijski izomorfizam φ jedinstveno određuje jedinicu i kojedinicu adjunkcije $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ i obratno. U tvrdnji (3), adjunkciju možemo konstruirati tako da univerzalni morfizmi budu upravo jedinica adjunkcije, a u tvrdnji (4) tako da adjunkcijski izomorfizam φ_C bude dan upravo repreznetacijom funktora $\mathrm{Hom}(C, G-)$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ označimo sa $\eta_C := \varphi_{C,FC}(\mathrm{id}_{FC})$ univerzalni element reprezentacije $\varphi_{C,-} : \mathrm{Hom}(FC, -) \cong \mathrm{Hom}(C, G-)$, pa je po propoziciji 1.9.1

$$\varphi_{C,D}(g : FC \to D) = Gg \circ \eta_C. \tag{3.1}$$

Kako je φ prirodna u C, za svaki morfizam $f : C \to C'$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\mathrm{id}_{FC'}"] & \mathrm{Hom}(FC', FC') \arrow[r, "-\circ Ff"] \arrow[d, "\varphi_{C',FC'}"] & \mathrm{Hom}(FC, FC') \arrow[d, "\varphi_{C,FC'}"] \\ & \mathrm{Hom}(C', FGC') \arrow[r, "-\circ f"] & \mathrm{Hom}(C, FGC'), \end{tikzcd}$$

tj. vrijedi $\eta_{C'} \circ f = \varphi_{C,FC'}(Ff) = GFf \circ \eta_C$, dakle η je prirodna transformacija.

Dualno, iz $\psi := \varphi^{-1}$, dobivamo prirodnu transformaciju $\varepsilon_D := \psi_{GD,D}(\mathrm{id}_{GD})$, i vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{GD} &= \varphi_{GD,D}(\psi_{GD,D}(\mathrm{id}_{GD})) \\ &= \varphi_{GD,D}(\varepsilon_D) = (G\varepsilon \circ \eta G)_D, \end{aligned}$$

a druga identiteta trokuta je opet dualna.

(2) $\Rightarrow$ (1): Po Yonedinoj lemi je transformacija $\varphi_{C,D}$ definirana kao u (3.1) prirodna u D, i dualno je $\psi_{C,D}(f : C \to GD) := \varepsilon_D \circ Ff$ je prirodna u C. Nadalje,

$$\varphi_{C,D}(\psi_{C,D}(f)) = \varphi_{C,D}(\varepsilon_D \circ Ff) = G\varepsilon_D \circ GFf \circ \eta_C = G\varepsilon_D \circ \eta_{GD} \circ f = f,$$

za svaki morfizam $f : C \to GD$, a $\psi_{C,D} \circ \varphi_{C,D} = \mathrm{id}$ je dualna tvrdnja. Dakle, $\varphi_{C,D} = \psi_{C,D}^{-1}$, pa kako je φ prirodna u D, a ψ u C, moraju obje biti prirodne u oba argumenta.

(1) $\Rightarrow$ (3) i (3) $\Leftrightarrow$ (4) je tvrdnja propozicije 1.9.1.

(3) $\Rightarrow$ (1): Za objekt $C \in \mathscr{C}$ označimo s η_C neki inicijalni objekt u $(C \downarrow G)$ i konstruirajmo funktor F kao u lemi 1.9.2.

Kako je η_C inicijalan, $\varphi_{C,D}(g : FC \to D) := Gg \circ \eta_C$ je izomorfizam funktora $\mathrm{Hom}(FC, -)$ i $\mathrm{Hom}(C, G-)$. Prirodnost u C je komutativnost dijagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(FC', D) \arrow[r, "-\circ Ff"] \arrow[d, "\varphi_{C',D}"] & \mathrm{Hom}(FC, D) \arrow[d, "\varphi_{C,D}"] \\ \mathrm{Hom}(C', GD) \arrow[r, "-\circ f"] & \mathrm{Hom}(C, GD), \end{tikzcd}$$

za svaki morfizam $f : C \to C'$. On komutira jer za svaki $g \in \mathrm{Hom}(FC', D)$ vrijedi

$$\varphi_{C,D}(g \circ Ff) = Gg \circ GFf \circ \eta_C = Gg \circ \eta_{C'} \circ f = \varphi_{C',D}(g) \circ f.$$

□

Dakle dvije definicije adjunkcije koje smo dali su ekvivalentne i podaci jedne jedinstveno određuju podatke druge. U skladu s time možemo po potrebi govoriti i o adjunkciji $(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon)$, pri čemu su adjunkcijski izomorfizam φ i jedinica i kojedinica vezani kao u dokazu teorema. Primijetimo i da je $(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon)$ adjunkcija ako i samo ako je to i $(G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}, \varphi^{-1}, \varepsilon, \eta)$, što omogućava da dualiziramo sve tvrdnje o adjungiranim funktorima. Posebno, dualiziraju se uvjeti (3) i (4) prethodnoga teorema, koje pokazuju da od "lokalnoga" postojanja univerzalnoga morfizma, odnosno reprezentacije funktora u svakoj točki kategorije, možemo konstruirati "globalni" adjunkcijski izomorfizam i par adjungiranih funktora. Ovo je situacija koju smo imali u poglavlju 2: ako kategorija $\mathscr{C}$ ima limese svih dijagrama s neke kategorije $\mathscr{C}$, onda je funktor $\varprojlim$ desno adjungiran funktoru $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^J$, i dualno je kolimes lijevo adjungiran.

Korolar 3.1.2. Ako su dani funktori

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \underset{G'}{\overset{F'}{\rightleftarrows}} \mathscr{E},$$

i ako je $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ i $(F' \dashv G', \eta', \varepsilon')$, onda je i $(F'F \dashv GG', G\eta'F \circ \eta, \varepsilon' \circ F'\varepsilon G')$

Dokaz. Vrijedi $\mathrm{Hom}(F'FC, E) \cong \mathrm{Hom}(FC, G'E) \cong \mathrm{Hom}(C, GG'E)$, prirodno u $C \in \mathscr{C}$ i $E \in \mathscr{E}$, dakle $F'F$ je lijevo adjungiran funktoru GG'. Jedinicu adjunkcije dobivamo uvrštavanjem $E = F'FC$ u gornju jednakost, kojedinicu dualno. □

Propozicija 3.1.3. Desno adjungirani funktori čuvaju sve limese.

Dokaz. Neka je zadan funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$, adjunkcija $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$, i funktor $K : J \to \mathscr{D}$ s limesom $(\varprojlim K, \pi)$. Za svaki objekt C u $\mathscr{C}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(C, G \varprojlim K) &\cong \mathrm{Hom}(FC, \varprojlim K)\\ &\cong \varprojlim \mathrm{Hom}(FC, K-) \cong \mathrm{Nat}(\Delta FC, K)\\ &\cong \varprojlim \mathrm{Hom}(C, GK-) \cong \mathrm{Nat}(\Delta C, GK),\end{aligned}$$

dakle $G \varprojlim K$ je limes od GK na razini objekata. Označimo $L := \varprojlim K$ i uzmimo $C := GL$. Po izomorfizmu

$$\mathrm{Hom}(GL, GL) \cong \mathrm{Hom}(FGL, \varprojlim K) \cong \mathrm{Nat}(\Delta FGL, K) \cong \mathrm{Nat}(\Delta GL, GK)$$

identiteta se preslikava:

$$\mathrm{id}_{GL} \longmapsto \varepsilon_L \longmapsto (\pi_j \varepsilon_L)_j \longmapsto (G\pi_j \circ G\varepsilon_L \circ \eta_{GL})_j = (G\pi_j)_j = G\pi$$

dakle $(G \varprojlim K, G\pi)$ je limes funktora GK. $\square$

Ova jednostavna propozicija daje možda i najkorisnije svojstvo adjungiranih funktora. Problem njenoga obrata, dakle pitanja kada su neprekidni funktori adjungirani je složeniji i o njemu govore teoremi o adjungiranom funktoru, koje dokazujemo kasnije.

Propozicija 3.1.4. Neka je $(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ par adjungiranih funktora.

1. G je vjeran ako i samo ako je ε_D epimorfizam za svaki $D \in \mathscr{D}$,
2. G je pun ako i samo ako je ε_D prerez za svaki $D \in \mathscr{D}$,
3. G je potpuno vjeran ako i samo ako je ε_D izomorfizam za svaki $D \in \mathscr{D}$.

Dokaz. Za sve A, $B \in \mathscr{D}$, prirodna transformacija

$$\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{G} \mathrm{Hom}(GA, GB) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}(FGA, B)$$

jednaka je transformaciji $\mathrm{Hom}(\varepsilon_A, B)$, koja je injektivna za svaki A ako i samo ako je ε_A epimorfizam, a surjektivna ako i samo ako je ε_A rascijepljen monomorfizam (propozicija 1.6.1). Budući da je φ bijekcija, slijedi tvrdnja propozicije. $\square$

3.2 Morfizmi adjunkcija

Propozicija 3.2.1. Za svaki par $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $(F' \dashv G', \eta', \varepsilon') : \mathscr{C}' \to \mathscr{D}'$ adjunkcija prirodno su izomorfni funktori

$$\mathrm{Nat}(F'-, -F), \mathrm{Nat}(-G, G'-) : [\mathscr{C}, \mathscr{C}'] \times [\mathscr{D}, \mathscr{D}']^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}.$$

Dokaz. Za fiksne funktore $K : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ i $L : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ svakoj prirodnoj transformaciji $\alpha : F'K \Rightarrow LF$ možemo pridružiti transformaciju $\bar{\alpha} : KG \Rightarrow G'L$ danu dijagramom

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow\varepsilon"] & \mathscr{C} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \mathscr{C}' \arrow[d, "F'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "\Swarrow\eta'"] & \\
& \mathscr{D} \arrow[r, "L"'] & \mathscr{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathscr{C}',
\end{tikzcd}$$

odnosno algebarski s $\bar{\alpha} = G'L\varepsilon \circ G'\alpha G \circ \eta' KG$.

Obratno, svakoj transformaciji $\beta : KG \Rightarrow G'L$ možemo pridužiti prirodnu transformaciju $\bar{\beta} : F'K \Rightarrow LF$ danu s

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Nearrow\eta"'] & \mathscr{D} \arrow[r, "L"] \arrow[d, "G"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow\beta"] & \mathscr{D}' \arrow[d, "G'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] & \\
& \mathscr{C} \arrow[r, "K"'] & \mathscr{C}' \arrow[r, "F'"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Nearrow\varepsilon'"] & \mathscr{D}',
\end{tikzcd}$$

pa je transformacija $\bar{\bar{\alpha}}$ tada

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\Swarrow\eta"] & & & \\
\mathscr{D} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Swarrow\varepsilon"] & \mathscr{C} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \mathscr{C}' \arrow[d, "F'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\Swarrow\eta'"] & \\
& \mathscr{D} \arrow[r, "L"'] & \mathscr{D}' \arrow[r, "G'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Swarrow\varepsilon'"] & \mathscr{C}' \arrow[d, "F'"] \\
& & & \mathscr{D}',
\end{tikzcd}$$

odnosno je po identitetama trokuta jednaka α. Analogno dobivamo i $\bar{\bar{\beta}} = \beta$.

Prirodnost u K i L očita je iz dijagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D} \arrow[r, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\Swarrow\varepsilon"] & \mathscr{C} \arrow[r, "K"] \arrow[r, bend left=60, "K'"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow\kappa"] \arrow[d, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\alpha"] & \mathscr{C}' \arrow[d, "F'"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\Swarrow\eta"] & \\
& \mathscr{D} \arrow[r, "L"] \arrow[r, bend right=60, "L'"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow\lambda"] & \mathscr{D}' \arrow[r, "G'"'] & \mathscr{C}'.
\end{tikzcd}$$

$\square$

Trojke (K, L, α) kao u dokazu propozicije nazivamo **morfizmom adjunkcija** $(F' \dashv G', \eta', \varepsilon')$ i $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$. Ako je dana i treća adjunkcija $(F'' \dashv G'', \eta'', \varepsilon'') : \mathscr{C}'' \to \mathscr{D}''$, funktori $K' : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}''$ i $L' : \mathscr{D}' \to \mathscr{D}''$, i prirodna transformacija $\alpha' : F''K' \Rightarrow L'F'$, onda je trojka $(K'K, L'L, L'\alpha \circ \alpha'K)$ morfizam sa adjunkcije $F'' \dashv G''$ u $F \dashv G$, dakle možemo govoriti o **kategoriji adjunkcija** $\mathrm{Adj_l}$. No analogno smo mogli definirati morfizam s $F \dashv G$ u $F' \dashv G'$ i kao trojku (K, L, β), i konstruirati kategoriju $\mathrm{Adj_r}$. Prethodna propozicija daje bijekciju između morfizama kategorija $\mathrm{Adj_l}$ i $\mathrm{Adj_r}$, i lako se vidi da je $\overline{\alpha \circ \alpha'} = \bar{\alpha}' \circ \bar{\alpha}$.

Korolar 3.2.2. Kategorije $\mathrm{Adj_l}$ i $\mathrm{Adj_r}$ kontravarijantno su izomorfne.

Korolar 3.2.3. Ako je $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ par adjungiranih funktora, onda je $[F, -] \dashv [G, -]$ i $[-, F] \dashv [-, G]$.

Dokaz. Slijedi direktno uvrštavanjem $F = G = \mathrm{Id}$, odnosno $F' = G' = \mathrm{Id}$ u propoziciju 3.2.1. ☐

Propozicija 3.2.4. Ako su dane adjunkcije

$$(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon), (F' \dashv G', \varphi', \eta', \varepsilon') : \mathscr{C} \to \mathscr{D},$$

onda postoji bijekcija $\mathrm{Nat}(F', F) \cong \mathrm{Nat}(G, G')$ takva da $\alpha : F' \Rightarrow F$ odgovara prirodnoj transformaciji $\beta : G \Rightarrow G'$ ako i samo ako komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F-, -) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\alpha, -)"'] & \mathrm{Hom}(-, G-) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(-, \beta)"] \\
\mathrm{Hom}(F'-, -) \arrow[r, "\varphi'"] & \mathrm{Hom}(-, G'-).
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Dokaz. Bijekciju $\mathrm{Nat}(F', F) \cong \mathrm{Nat}(G, G')$ dobivamo uvrštavanjem $K = \mathrm{Id}$, $L = \mathrm{Id}$ u propoziciju 3.2.1, i eksplicitno je dana s $\alpha \mapsto \bar{\alpha} = G'\varepsilon \circ G'\alpha G \circ \eta' G$.

Budući da su φ i φ' izomorfizmi, za svaku transformaciju α po Yonedinoj lemi odgovara jedinstvena prirodna transformacija $\beta : G \Rightarrow G'$ takva da komutira dijagram (3.2), i praćenjem morfizma $\mathrm{id} : GD \to GD$ odmah dobivamo

$$\begin{aligned}
\beta = \mathrm{Hom}(-, \beta)(\mathrm{id}) &= \varphi'(\mathrm{Hom}(\alpha G, -)(\varphi^{-1}(\mathrm{id}))) \\
&= \varphi'(\varepsilon \circ \alpha G) = G'\varepsilon \circ G'\alpha G \circ \eta G' = \bar{\alpha}.
\end{aligned}$$

☐

Kako je korespondencija $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ i funktorijalna, posebno je α izomorfizam ako i samo ako je $\bar{\alpha}$ izomorfizam, pa slijedi i da su svaka dva funktora G, G' adjungirana nekom fiksnom funktoru F izomorfna.

Propozicija 3.2.5. Neka je dan funktor $F : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ takav da za svaki $B \in \mathscr{B}$ postoji adjunckija $(F_B \dashv G_B, \varphi^B)$, pri čemu je F_B funktor $F(-, B) : \mathscr{A} \to \mathscr{C}$. Tada postoji funktor $G : \mathscr{B}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{A}$ takav da je $G_B = G(B, -)$, a izomorfizam

$$\varphi^B_{AC} : \mathrm{Hom}(F(A, B), C) \cong \mathrm{Hom}(A, G(B, C))$$

prirodan je u sva tri argumenta.

Dokaz. Funktor G određen je na objektima i $\mathscr{C}$-morfizmima iz zahtjeva propozicije, dakle potrebno ga je još samo odrediti na morfizmima u $\mathscr{B}$. No za svaki $\mathscr{B}$-morfizam $g : B \to B'$ je $F(-, g) : F(-, B) \Rightarrow F(B', B)$ prirodna transformacija kojoj po prethodnoj propoziciji funktorijalno odgovara transformacija $G(g, -) : G(B', -) \Rightarrow G(B, -)$, i to upravo tako da φ^B_{AC} bude prirodna u B. $\square$

3.3 Primjeri adjungiranih funktora

3.3.1 Slobodni funktori

Ako je $(\mathscr{C}, U)$ konkretna kategorija, i ako postoji lijevo adjungiran funktor $F \dashv U$, onda F nazivamo **slobodnim funktorom**. Općenitije za morfizam $\eta : X \to UC$ (tj. češće neprecizno za sam C) kažemo da je **slobodan nad** X ukoliko je univerzalni morfizam s X na U.

Ako postoji slobodan funktor $\mathrm{Set} \to \mathscr{C}$ iz propozicije 3.1.3 slijedi da U komutira s limesima, i također da je reprezentabilan, jer imamo:

$$U \cong \mathrm{Hom}(1, U-) \cong \mathrm{Hom}(F1, -),$$

dakle zaboravni je funktor reprezentiran slobodnim objektom nad jednočlanim skupom. Budući da je F vjeran, po propoziciji 3.1.4 je kojedinica epimorfizam, dakle svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ je kvocijent $\varepsilon_C : FUC \to C$ slobodnoga objekta.

Primjer 3.3.1.

1. Slobodne grupe, Abelove grupe, i moduli općenito su standardni primjeri. Posebno, vektorski prostori su svi slobodni budući da imaju bazu.
2. U kategoriji CAlg_R komutativnih algebri nad komutativnim prstenom R slobodan objekt nad skupom $\mathcal{S}$ je prsten $R[\mathcal{S}]$ polinoma s nepoznanicama iz skupa $\mathcal{S}$.
3. U kategoriji Top slobodan objekt nad skupom X je prostor X snabdjeven indiskretnom topologijom $\mathcal{P}X$. Primijetimo da je funktor $U : \mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$ u ovome slučaju i *desno* adjungiran, funktoru koji skupu X pridružuje prostor X snabdjeven diskretnom topologijom.

I u slučaju zaboravnih funktora u kategorije osim Set, dakle konkretnih kategorija u općenitijem smislu, možemo govoriti o slobodnome funktoru.

Primjer 3.3.2. Tenzorska algebra je slobodna algebra nad vektorskim prostorom. Vanjska algebra nekog vektorskog prostora je slobodna alternirajuća algebra nad njime.

3.3.2 Refleksije

Refleksijom ćemo zvati funktor lijevo adjungiran potpuno vjernom funktoru. Posebno, po propoziciji 3.1.4 slijedi da će kojedinica adjunkcije biti izomorfizam. Punu potkategoriju takvu da je inkluzija desno adjugnirana nazivamo **reflektivnom**. Refleksije i reflektivne potkategorije su do na ekvivalenciju (v. sljedeći odjeljak) iste, tako da nam je bez smanjenja općenitosti dovoljno govoriti o potkategorijama.

Primjer 3.3.3.

1. Ab je reflektivna u Grp, refleksija je abelianizacija $G \mapsto G/[G, G]$. Na sličan način su kategorije simetričnih i alternirajućih algebri reflektivne u kategoriji svih algebri.
2. T_0 prostori su reflektivni u Top, refleksija je Kolmogorljev kvocijent. Slična je i refleksija predurеđaja na parcijalno uređene skupove.
3. Torzijske Abelove grupe su koreflektivne u Ab. Korefleksija je dana pridruživanjem $A \mapsto T(A)$, gdje je $T(A)$ grupa torzijskih elemenata od A.
4. Grupe su i reflektivna i koreflektivna potkategorija kategorije monoida. Korefleksija je dana grupom invertibilnih elemenata monoida, a refleksija se konstruira slično kao polje razlomaka integralne domene, slobodnim dodavanjem invertibilnih elemenata.

Propozicija 3.3.4. Neka je $U : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ reflektivna potkategorija. Funktor $F : J \to \mathscr{D}$ ima kolimes ako i samo ako funktor UF ima kolimes.

Dokaz. Označimo s R refleksiju $R \dashv U$. Ako funktor UF ima kolimes $(\varinjlim UF, \iota)$, onda ga R budući da je desno adjungiran čuva, tj. prevodi u kolimes od $RUF \cong F$. □

Propozicija 3.3.5. Inkluzija reflektivne potkategorije stvara sve limese.

Dokaz. Tvrdnja će slijediti kasnije kao korolar monadičnosti funktora s refleksijom (v. primjer 5.5.3) no nije teško dati ni elementaran dokaz (v. na primjer u [5]). □

Slijedi da su reflektivne i koreflektivne potkategorije potpunih kategorija potpune, a kopotpunih kategorija kopotpune. Štoviše, znamo i točno kako se ti (ko)limesi računaju.

3.3.3 Ekvivalencija

Adjungirana ekvivalencija kategorija $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ je adjunkcija $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ takva da su i jedinica i kojedinica izomorfizmi. Primijetimo odmah da ako je $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ adjungirana ekvivalencija kategorija $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$, onda je $(G \dashv F, \varepsilon^{-1}, \eta^{-1})$ adjungirana ekvivalencija kategorija $\mathscr{D}$ i $\mathscr{C}$, dakle definicija je simetrična.

Funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ takav da postoji $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ sa svojstvom da je $GF \cong \mathrm{Id}_C$ i $FG \cong \mathrm{Id}_D$ zvat ćemo **ekvivalencijom** kategorija, a kategorije $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ **ekvivalentnima**. Očito je svaka adjungirana ekvivalencija i ekvivalencija, kao i potpuno vjerna i esencijalno surjektivna, no vrijede i obrati:

Propozicija 3.3.6. Neka je $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funktor. Ekvivalentno je

1. postoji $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ takav da je $F \dashv G$ adjungirana ekvivalencija
2. F je ekvivalencija kategorija
3. F je potpuno vjeran i esencijalno surjektivan

Dokaz. Očito (1) povlači (2) i (3). Dokažimo da i (2) povlači (3). Označimo s G funktor takav da postoje izomorfizmi $\eta : \mathrm{Id}_C \cong GF$ i $\varepsilon : FG \cong \mathrm{Id}_C$. Posebno za svaki morfizam $f : A \to B$ komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ GFA & \xrightarrow{GFf} & GFB, \end{array}$$

tj. vrijedi $f = \eta^{-1} \circ GFf \circ \eta$, pa F mora biti vjeran. Dualno, G je vjeran. Uzmimo sada $g : FA \to FB$, i vodeći se prethodnim dijagramom definirajmo $f := \eta^{-1} \circ Gg \circ \eta$. Slijedi da je $Gg = GFf$, pa kako je G vjeran, $g = Ff$, tj. F je i pun.

Sada pretpostavimo da je F potpuno vjeran i esencijalno surjektivan, i konstruirajmo adjungiranu ekvivalenciju $F \dashv G$. Objekt $D \in \mathscr{D}$ je po pretpostavci izomorfan s FGD za neki objekt $GD \in \mathscr{C}$; označimo taj izomorfizam s $\varepsilon : GFD \to D$. Ako je sada $g : FC \to D$ neki morfizam u $\mathscr{D}$, i $\hat{g} : C \to FD$ takav da je $F\hat{g} = g \circ \varepsilon^{-1}$ očito komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} FGD \arrow[r, "\varepsilon"] & D \\ FC. \arrow[u, "F\hat{g}"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Ako je $f : C \to GD$ drugi morfizam takav da komutira gornji dijagram, onda jer je ε izomorfizam slijedi da je $Ff = F\hat{g}$, pa jer je F vjeran i $f = \hat{g}$.

Dakle, za svaki $D \in \mathscr{D}$ možemo konstruirati univerzalni morfizam s F na D, pa po teoremu 3.1.1 slijedi da je F lijevo adjungiran. Kojedinica adjunkcije je izomorfizam po konstrukciji, a jedinica je izomorfizam po propoziciji 3.1.4, jer je F potpuno vjeran po pretpostavci. $\square$

Primijetimo da ako u gornjoj konstrukciji krenemo od ekvivalencije kategorija $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ sa zadanim izomorfizmima $\eta : \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \to GF$ i $\varepsilon : FG \to \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, možemo konstruirati adjungiranu ekvivalenciju $F \dashv G$ s jedinicom η ili kojedinicom ε.

Iz ove propozicije vidimo da je intuitivno jedina razlika između ekvivalentnih kategorija u broju izomorfnih objekata, posebno, ekvivalentne kategorije imaju izomorfne kosture (v. primjer 3.3.7). Budući da su sva svojstva objekata u kategorijama kojima baratamo invarijantna na izomorfizam, i da se u pravilu ne referiraju na strogu jednakost objekata, slijedi da će ih ekvivalencije kategorija čuvati, i da ekvivalentne kategorije imaju ista kategorijska svojstva. Od svojstava koja promatramo očito nije invarijantna na ekvivalenciju veličina, ali zato možemo govoriti o **esencijalno malim** kategorijama, tj. kategorijama ekvivalentnim malim kategorijama. Također nije invarijantan pojam potkategorije, no to nam neće biti bitno, jer ga koristimo samo iz praktičnih razloga (npr. u "potkategorija bestorzijskih grupa" i slično). Pune kategorije su s druge strane ekvivalentne potpuno vjernim funktorima: svaki potpuno vjerni funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ uspostavlja ekvivalenciju između $\mathscr{D}$ i slike od G, što i opravdava termin "ulaganje" koji za njih koristimo. Posebno je svaka refleksija do na ekvivalenciju inkluzija reflektivne potkategorije. I općenito se svaka adjunkcija između kategorija restringira makar i trivijalno na ekvivalenciju određenih potkategorija: onih na kojima je jedinica, odnosno kojedinica izomorfizam. Konačno, pojam slike funktora možemo zamijeniti invarijantnim pojmom **esencijalne slike**, pod čime mislimo na najmanju iscrpnu potkategoriju koja sadrži slike svih morfizama po tome funktoru. Tako i tvrdnja da objekt pripada odnosno ne pripada slici nekog funktora ili potkategoriji postaje invarijantan na ekvivalenciju.

Primjer 3.3.7.

1. Izomorfne kategorije su ekvivalentne; ako je $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ izomorfizam, onda je $(F \dashv F^{-1}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ adjungirana ekvivalencija.

2. Svakoj kategoriji možemo pridružiti **kostur**: kategoriju čiji su objekti klase izomorfizama njenih objekata. Svaka kategorija je ekvivalentna svome kosturu. Kostur kategorije skupova (do na izomorfizam) je potkategorija kardinala, a ordinali su kostur kategorije dobro uređenih skupova. Slično je kostur kategorije Vect_k (veliki) skup $\{k^\kappa : \kappa \text{ mali kardinal}\}$. Kostur preduređaja je odgovarajući parcijalno uređeni skup.
3. Kategorija afinih mnogostrukosti nad algebarski zatvorenim poljem k s regularnim preslikavanjima kao morfizmima ekvivalentna je dualu kategorije reduciranih konačno generiranih k-algebri. Ovakve ekvivalencije kategorije i dualne kategorije nazivamo **dualnošću**. Općenitije, kategorija afinih shema se upravo definira tako da bude dualna kategoriji CRing.

3.3.4 Galoisove koneksije

Galoisove koneksije su adjungirani funktori između preduređaja. Konktreno, **monotonom Galoisovom koneksijom** između preduređaja P i Q nazivamo svaki adjungirani par $f \dashv g : P \to Q$. Naravno, u ovome kontekstu je pojam adjunkcije puno lakše opisati i karakterizirati: f i g su adjungiran par ako i samo ako vrijedi

$$f(x) \leqslant y \iff x \leqslant g(y),$$

za sve x iz P i y iz Q.

Stariji je pojam **antitone Galoisove koneksije**, koji možemo karakterizirati adjunkcijom $f \dashv g : P \to Q^{\mathrm{op}}$, tj. sa

$$y \leqslant f(x) \iff x \leqslant g(y),$$

za $x \in P$, $y \in Q$.

Primjer 3.3.8.

1. Prvi primjer Galoisove koneksije došao je iz Galoisove teorije: korespondencija podgrupa Galoisove grupe i međuproširenja je antitona Galoisova koneksija, koja se ograničava na izomorfizam parcijalno uređenih podskupova normalnih međuproširenja i normalnih podgrupa.
2. Ako je k algebarski zatvoreno polje, onda pridruživanje $U \subseteq k^n \mapsto I(U)$ skupa ideala koji se poništavaju na U i pridruživanje $I \subseteq \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n] \mapsto V(I)$ skupa na kojem se poništavaju polinomi u I čine antitonu Galoisovu koneksiju, koja se restringira na izomorfizam između radikalnih ideala i algebarskih skupova.

3. Za svaku funkciju $f : X \to Y$ imamo (u odnosu na inkluziju) monotona preslikavanja $f^{\to} : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ i $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}Y \to \mathcal{P}X$, i vrijedi $f^{\to} \dashv f^{\leftarrow}$. Nadalje, postoji i treća monotona funkcija $f_! : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}Y$ zadana za $A \subseteq X$ s $f_!(A) := \{y \in Y : f^{\leftarrow}\{y\} \subseteq A\}$, i vrijedi $f^{\leftarrow} \dashv f_!$. Posebno slijedi da praslika komutira i s limesima i s kolimesima, tj. i s presjecima i s unijama, a za sliku samo da komutira s unijama.

3.3.5 Kanova proširenja

Za proizvoljnu kategoriju $\mathscr{E}$ svaki funktor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ inducira funktor

$$F^* := [F, \mathscr{E}] : [\mathscr{D}, \mathscr{E}] \to [\mathscr{C}, \mathscr{E}].$$

Ukoliko postoji, lijevo adjungiran funktor funktoru F^* označavamo s Lan_F i zovemo **lijevim Kanovim proširenjem** duž F. Dualno govorimo o **desnom Kanovom proširenju** $F^* \dashv \mathrm{Ran}_F$.

Kao i inače kod adjungiranih funktora, možemo promatrati slučaj kada univerzalni morfizam $\eta : H \Rightarrow F^* \mathrm{Lan}_F H = \mathrm{Lan}_F H \circ F$ postoji samo za jedan objekt $H \in [\mathscr{D}, \mathscr{E}]$, i tada govorimo o lijevom Kanovom proširenju funktora H duž F i pišemo isto $\mathrm{Lan}_F H$. Eksplicitno, imamo transformaciju

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "H"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathscr{E} \\ & \mathscr{D} \arrow[ur, "\mathrm{Lan}_F H"'] & \end{tikzcd}$$

takvu da za svaki drugi funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ i transformaciju $\alpha : H \Rightarrow GF$, postoji jedinstvena $\hat{\alpha} : \mathrm{Lan}_F H \Rightarrow G$ takva da je $\alpha = F\hat{\alpha} \circ \eta$. Odgovarajuća bijekcija hom-skupova je

$$\mathrm{Nat}(H, FG) \cong \mathrm{Nat}(\mathrm{Lan}_F H, G).$$

Kanova proširenja su i općenito koristan pojam, a neki važni primjeri adjungiranih funktora su upravo globalno definirana Kanova proširenja Iz čisto formalne perspektive, vidjet ćemo da imamo i dovoljne uvjete za postojanje Kanovih proširenja puno praktičnije od općenitih teorema koje ćemo obraditi kasnije.

Teorem 3.3.9. Neka su zadani funktori $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $H : \mathscr{C} \to \mathscr{E}$, i neka je kategorija $\mathscr{C}$ mala. Ako je kategorija E kopotpuna, onda postoji lijevo Kanovo proširenje od H duž F.

Dokaz se može naći u [10]. Posebno, za $\mathscr{E} = \mathrm{Set}$ dobivamo da postoje i lijeva i desna Kanova proširenja

Primjer 3.3.10.

1. Lijevo proširenje funktora $F : J \to \mathscr{C}$ duž funktora $J \to 1$ upravo je kolimes of F. Dualno je limes desno proširenje.
2. Primjer 3.3.8.3 je primjer Kanovih proširenja. Za funkciju $f : X \to Y$ funktor $f^{\leftarrow}$ izomorfan je funktoru $f^* = [f, \vec{2}] : [Y, \vec{2}] \to [X, \vec{2}]$, i već smo pokazali da je i lijevo i desno adjungiran.
3. Za svaki homomorfizam grupa $f : H \to G$ funktor $f^* : \mathrm{Vect}_k^H \to \mathrm{Vect}_k^G$ je restrikcija reprezentacija. Njemu lijevo adjungirani funktor, tj. lijevo Kanovo proširenje duž f, naziva se indukcijom reprezentacija.

3.4 Teoremi o adjungiranom funktoru

Da bi se konstruirao lijevo adjungiran funktor funktoru $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ po teoremu 3.1.1 dovoljno je za svaki $C \in \mathscr{C}$ pronaći inicijalni objekt u kategoriji $(C \downarrow G)$. Zato ćemo prvo dati nužan i dovoljan uvjet za postojanje inicijalnoga objekta u potpunim kategorijama.

Razlog zbog kojega u potpunim kategorijama možemo reći nešto više o postojanju inicijalnoga objekta je što je inicijalni objekt zapravo primjer i limesa: jedinstveni morfizmi s inicijalnoga objekta u svaki drugi objekt kategorije su terminalni stožac na identitetu. Naravno, taj je limes u pravilu velik, ali ako u potpunoj i lokalno maloj kategoriji $\mathscr{C}$ pronađemo malu kofinalnu potkategoriju $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{C}$, onda znamo da postoji limes $\varprojlim \mathcal{S} = \varprojlim(\mathrm{Id}_{\mathscr{C}})|_{\mathcal{S}}$, i zbog kofinalnosti je jednak $\varprojlim \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$, tj. inicijalnome objektu.

Ako kategorija $\mathscr{C}$ ima povlake, njene kofinalne potkategorije imaju vrlo jednostavan opis. Ako je $\mathcal{S}$ kofinalna, onda je za svaki $C \in \mathscr{C}$ skup $(\mathcal{S} \downarrow C)$ neprazan, tj. za svaki $C \in \mathscr{C}$ postoji objekt $S \in \mathcal{S}$ i morfizam $S \to C$. Općenito, ovakve skupove objekata u nekoj kategoriji nazivamo **slabo incijalnima**.

Obratno, ako pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ slabo inicijalan skup u $\mathscr{C}$ lako se vidi da je odgovarajuća puna potkategorija kofinalna, tj. da je za svaki $C \in \mathscr{C}$ kategorija $(\mathcal{S} \downarrow C)$ povezana. Naime, ako su $S \to C$ i $S' \to C$ morfizmi sa $\mathcal{S}$ na C, onda po pretpostavci postoji i morfizam $S'' \to P$ sa $\mathcal{S}$ na njihov povlak P, i imamo put od

S do S':

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S \arrow[dr] & S'' \arrow[u] \arrow[l, dashed] \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & S' \arrow[dl] \\ & C. & \end{tikzcd}$$

Dakle, upravo smo dokazali sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.4.1. Potpuna, lokalno mala kategorija $\mathscr{C}$ ima inicijalni objekt ako i samo ako postoji mali slabo inicijalan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathscr{C}$.

Napomena. Primijetimo da je produkt $\prod \mathcal{S}$ svih objekata u $\mathcal{S}$ slabo inicijalan, pa slijedi da je već i puna potkategorija od $\mathscr{C}$ generirana s $\prod \mathcal{S}$ inicijalna u $\mathscr{C}$. Dakle, inicijalni objekt iz propozicije dan je eksplicitno limesom te inkluzije, tj. ujednačiteljem svih endomorfizama produkta objekata od $\mathcal{S}$.

Sljedeće pitanje je kada kategorija $(C \downarrow G)$ zadovoljava uvjete gornje propozicije, u prvom redu, kada je potpuna?

Lema 3.4.2. Ako je funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ neprekidan, onda za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ projekcija $Q : (C \downarrow G) \to \mathscr{D}$ stvara limese.

Dokaz. Neka je C objekt u $\mathscr{C}$, a $F : J \to (C \downarrow G)$ neki funktor. Promatramo niz

$$J \xrightarrow{F} (C \downarrow G) \xrightarrow{Q} \mathscr{D} \xrightarrow{G} \mathscr{C}.$$

Pretpostavimo da postoji limes $(\varprojlim QF, \pi)$ funktora QF; zbog neprekidnosti od G je tada $(G \varprojlim QF, G\pi)$ limes funktora GQF.

Za svaki objekt $j \in J$ označimo sa $\varphi_j : C \to GF_j$ njegovu sliku po F. Slika morfizma $h : j \to k$ u J je morfizam u $(C \downarrow G)$, tj. komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_j"'] \arrow[dr, "\varphi_k"] & \\ GF_j \arrow[rr, "GFh"'] & & GF_k, \end{tikzcd}$$

pa je φ je stožac na GQF, i faktorizira se jedinstveno određenim morfizmom $\hat{\varphi}$ kroz granični stožac $G\pi$. Dakle, za svaki $h : j \to k$ u J komutira dijagram

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "\hat{\varphi}"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_j"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_k"] & \\
& G\varprojlim QF \arrow[dl, "G\pi_j"'] \arrow[dr, "G\pi_k"] & \\
GF_j \arrow[rr, "GFh"'] & & GF_k,
\end{tikzcd}
\tag{3.3}
$$

pa slijedi da su, kao prvo, π_j morfizmi u $(C \downarrow G)$, a kao drugo, čine stožac sa $\hat{\varphi} : C \to G\varprojlim QF$ na F. Sljedeće dokazujemo da je on graničan.

Neka je dan objekt $f : C \to GD$ u $(C \downarrow G)$ i stožac α s njega na F. Posebno, komutira dijagram analogan prethodnome, i štoviše, vrijedi $Fh \circ \alpha_j = \alpha_k$, tj. α je stožac sa D na QF. Označimo sa $\hat{\alpha}$ jedinstveni morfizam $D \to \varprojlim QF$ koji faktorizira α kroz π; za svaki $h : j \to k$ u J komutira sljedeći dijagram:

$$
\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "f"] \arrow[dddl, bend right, "\varphi_j"'] \arrow[dddr, bend left, "\varphi_k"] & \\
& GD \arrow[d, "G\hat{\alpha}"] \arrow[ddl, bend right, "G\alpha_j"'] \arrow[ddr, bend left, "G\alpha_j"] & \\
& G\varprojlim QF \arrow[dl, "G\pi_j"'] \arrow[dr, "G\pi_k"] & \\
GF_j \arrow[rr, "GFh"'] & & GF_k.
\end{tikzcd}
$$

Kako je $\hat{\varphi}$ bio jedinstven takav da komutira dijagram (3.3), slijedi da je $G\hat{\alpha} \circ f = \hat{\varphi}$, tj. da je $\hat{\alpha}$ morfizam sa f na $\hat{\varphi}$ u $(C \downarrow G)$, i da je morfizam sa stošca α na stožac π nad F. Lako se vidi i da je $\hat{\alpha}$ jednistveno određen tim uvjetima.

Dakle, limes od F postoji, i Q ga čuva. Kako je funktor Q konzervativan, po propoziciji 2.1.4 stvara limese. □

Posebno, ako je kategorija $\mathscr{D}$ potpuna, onda je to i $(C \downarrow G)$ za svaki C u $\mathscr{C}$. Drugi uvijet u propoziciji 3.4.1 je postojanje slabo inicijalnoga skupa; u kategoriji $(C \downarrow G)$ to znači da postoji mal skup morfizama $\{f_i : C \to GD_i\}_{i \in \mathcal{S}}$ u $\mathscr{C}$ takav da se svaki morfizam $f : C \to GD$ faktorizira kroz neki f_i, tj. postoji $i \in \S$ i $g : D_i \to D$ takvi da je $f = Gg \circ f_i$. Ovaj zahtjev naziva se i **uvjetom na skup rješenja**.

Teorem 3.4.3 (Freyd)**.** Funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ s lokalno male i potpune kategorije je desno adjungiran ako i samo ako je neprekidan i ako je za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ zadovoljen uvjet na skup rješenja.

Dokaz. Skup rješenja za objekt $C \in \mathscr{C}$ je slabo inicijalan skup u kategoriji $(C \downarrow G)$. Kako je po prethodnoj lemi ta kategorija i potpuna, po propoziciji 3.4.1 slijedi da $(C \downarrow G)$ ima inicijalni objekt za svaki $C \in \mathscr{C}$, pa je G desno adjungiran.

Obratno, desno adjungirani funktori su neprekidni po propoziciji 3.1.3, a jedinica adjunkcije osigurava postojanje jednočlanog skupa rješenja. □

Ovaj teorem naziva se i *općim* teoremom o adjungiranom funktoru, ili skraćeno GAFT[1] zato što daje nužne i dovoljne uvjete za postojanje adjungiranoga funktora u vjerojatno najširoj mogućoj klasi kategorija. Posebni teorem o adjungiranom funktoru ("SAFT") i njegove varijacije s druge strane daju dovoljne uvjete na nešto užim klasama, ali ih je zato često lakše provjeriti od tehničkoga uvjeta na skup rješenja.

Teorem 3.4.4. Neka su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ lokalno male kategorije, i neka je $\mathscr{D}$ potpuna wp kategorija s malim skupom kogeneratora. Funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ je desno adjungiran ako i samo ako je neprekidan.

Dokaz. Pretpostavimo da funktor G čuva male limese i konstruirajmo za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ skup rješenja iz uvjeta općeg teorema o adjungiranom funktoru. Neka je $D \in \mathscr{D}$, $f : C \to GD$ neki morfizam u $\mathscr{C}$, a $\{S_i\}_{i \in I}$ familija koja kogenerira $\mathscr{D}$. Promotrimo vanjski kvadrat u sljedećem dijagramu (koristimo da G čuva limese):

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "\eta_f"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& GS \arrow[r, hook, dashed, "G\iota"] \arrow[d, dashed, "Gf'"] & \prod_i (GS_i)^{\mathrm{Hom}(C,GS_i)} \arrow[d, "G\sigma"] \\
& GD \arrow[r, hook, "G\delta"] & \prod_i (GS_i)^{\mathrm{Hom}(D,S_i)},
\end{tikzcd}$$

pri čemu su γ i δ kanonski morfizmi definirani kao u dijagramu (2.5) a σ morfizam takav da je $\pi_g \sigma = \pi_{Gg \circ f}$, za svaki morfizam $g : D \to S_i$. Dakle, $G\delta \circ f = G\sigma \circ \gamma$ po konstrukciji, pa se f faktorizira kroz povlak GS morfizama $G\delta$ i $G\sigma$ (unutarnji kvadrat), tj. posebno postoji morfizam $\eta_f : C \to GS$ takav da je $Gf' \circ \eta_f = f$. Kako je δ monomorfizam, onda je to po propoziciji 2.4.6 i ι, i možemo pretpostaviti

[1] General Adjoint Functor Theorem

da se uvijek nalazi u nekom fiksnom skupu S_C reprezentanata podobjekata od $\prod_i S_i^{\mathrm{Hom}(C,GS_i)}$. Dakle, svaki morfizam $f : C \to GD$ se faktorizira na traženi način kroz neki morfizam u skupu $\coprod_{S \in S_C} \mathrm{Hom}(C, GS)$, koji je mal po pretpostavkama teorema. □

Napomena. Nešto jača verzija ovoga teorema, gdje se ne pretpostavlja da je $\mathscr{D}$ nužno wp kategorija, već da samo ima presjeke svih familija podobjekata a G ih čuva, dokazana je u [10].

Korolar 3.4.5. Neka su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ lokalno male kategorije, i neka je $\mathscr{D}$ potpuna kategorija s malim skupom kogeneratora i malim skupom ekstremalnih generatora. Funktor $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ je desno adjungiran ako i samo ako je neprekidan.

Dokaz. Slijedi iz prethodnog teorema i propozicije 2.6.4. □

Korolar 3.4.6. Neka je $\mathscr{C}$ potpuna lokalno mala kategorija s malim skupom kogeneratora. Ako je $\mathscr{C}$ wp kategorija ili ima mali skup ekstremalnih generatora, onda je $\mathscr{C}$ i kopotpuna.

Dokaz. Kategorija $\mathscr{C}$ je kopotpuna ako je za svaku malu kategoriju J funktor $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^J$ desno adjungiran. No iz teorema 2.3.1 slijedi da je funktor Δ neprekidan, a $\mathscr{C}$ i $\mathscr{C}^J$ zadovoljavaju uvjete posebnog teorema o adjungiranom funktoru. □

Primjer 3.4.7. Pokažimo da inkluzija CompHaus → Top zadovoljava uvjete posebnog teorema o adjungiranom funktoru, tj. da je kategorija kompaktnih Hausdorffovih prostora reflektivna u Top. Refleksija je, naravno, Stone–Čechova kompaktifikacija.

Kako je Top potpuna, a CompHaus puna potkategorija, ona će bit potpuna čim je zatvorena na limese u Top. No zatvorenost na produkte slijedi iz Tihonovljevoga teorema, a zatvorenost na ujednačitelje je očita. Nadalje, Urysonova lema povlači da je $[0, 1]$ kogenerator: ako su $f, g : X \to Y$ dvije različite neprekidne funkcije i $x \in X$ takav da je $f(x) \neq g(x)$, onda postoji neprekidna funkcija $h : Y \to [0, 1]$ takva da je $h(f(x)) = 0$, a $h(g(x)) = 1$.

Ako je X topološki prostor u kojem neprekidne funkcije razlikuju točke ("$T_{2^1/_2}$") onda iz univerzalnosti slijedi da je jedinica adjunkcije injektivna. Ako je štoviše X potpuno regularan, što je klasični slučaj kada se proučava Stone–Čechova kompaktifikacija, onda opet iz univerzalnosti jedinice slijedi da X nužno ima točno potprostornu topologiju u odnosu na kompaktifikaciju.

Poglavlje 4

Monoidalne i obogaćene kategorije

Napomena. U ovom poglavlju dajemo samo površan pregled najosnovnijih pojmova obogaćene teorije kategorija. Potpuniji tretman može se naći u [9].

4.1 Monoidalne kategorije

Mnoge poznate kategorije prirodno su opremljene funktorijalnim binarnim operacijama, poput produkta skupova $\times : \mathrm{Set} \times \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ ili tenzorskog produkta grupa $\otimes : \mathrm{Ab} \times \mathrm{Ab} \to \mathrm{Ab}$. Nadalje, u praksi kada s tim operacijama radimo, tretiramo ih kao da su asocijativne i kao da imaju jedinični element, iako znamo da formalno gledano za standardne konstrukcije osim u trivijalnim slučajevima ne vrijedi ni $(X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$ za skupve X, Y, Z ni $A \otimes \mathbb{Z} = A$ za Abelovu grupu A, već da su ti objekti samo *izomorfni* na kanonski način. Monoidalne kategorije apstrahiraju i formaliziraju pojam binarne operacije koja je asocijativna i ima jedinicu do na "kanonski" izomorfizam.

Monoidalna kategorija $\mathscr{C}$, za koju $(\mathscr{C}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ zadana je sljedećim podacima:

- kategorijom $\mathscr{C}$
- bifunktorom $\otimes : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (**monoidalni produkt**)
- istaknutim objektom $I \in \mathscr{C}$ (**jedinični objekt**)
- prirodnim izomorfizmom $\alpha_{ABC} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$ (**asocijator**)
- prirodnim izomorfizmima $\lambda_C : I \otimes C \to C$ (**lijevi unitor**) i $\rho_C : C \otimes I \to C$ (**desni unitor**)

Nadalje, zahtijevamo da ti prirodni izomorfizmi zadovoljavaju određene **koherencijske uvjete**. Asocijator i unitori osiguravaju da su izomorfni svi produkti koji bi po asocijativnosti i jediničnosti bili jednaki, a koherencija je zahtjev da svi izomorfizmi konstruirani pomoću asocijatora i unitora budu jednaki, dakle da doista uvijek postoji jedan, kanonski izomorfizam. Mac Laneov teorem o koherenciji (v. u [10] za dokaz i precizan iskaz) pokazuje da je za to dovoljno tražiti da komutiraju peterokut

$$\begin{tikzcd}
& ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[dl, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "\alpha"'] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[d, "\alpha"] \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

i trokut

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho\otimes\mathrm{id}"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}$$

za sve A, B, C i D u $\mathscr{C}$.

Monoidalnu kategoriju u kojoj su asocijatori i unitori identitete, dakle su i u koherencijski uvijeti ispunjeni trivijalno nazivamo **strogom**.

Za monoidalnu kategoriju kažemo da je **simetrična** ukoliko je opremljena prirodnim izomorfizmom $\sigma_{AB} : A \otimes B \to B \otimes A$ takvime da komutira šesterokut

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes (B \otimes C) \arrow[r, "\sigma"] & (B \otimes C) \otimes A \arrow[dr, "\alpha"] & \\
(A \otimes B) \otimes C \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\sigma\otimes\mathrm{id}"'] & & & B \otimes (C \otimes A) \\
& (B \otimes A) \otimes C \arrow[r, "\alpha"'] & B \otimes (A \otimes C), \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

trokut

$$\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr, "\rho"'] & & I \otimes A \arrow[dl, "\lambda"] \\
& A, &
\end{tikzcd}$$

i da vrijedi $\sigma_{BA}\sigma_{AB} = \mathrm{id}_{A \otimes B}$, za sve A, B i C iz $\mathscr{C}$.

Teorem koherencije u ovome slučaju neprecizno govoreći pokazuje da postoji jedinstven kanonski morfizam s monoidalnog produkt nekog niza objekata u produkt neke permutacije toga niza.

Primjer 4.1.1.

1. Monoidalna kategorija je autodualan pojam; ako je $\mathscr{C}$ monoidalna kategorija s monoidalnim produktom $\otimes$, onda je to i $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ s produktom
$$\otimes^{\mathrm{op}} : (\mathscr{C} \times \mathscr{C})^{\mathrm{op}} \cong \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}^{\mathrm{op}}.$$
2. Diskretne monoidalne kategorije (nužno stroge) ekvivalentne su monoidima.
3. Svaka kategorija s konačnim produktima je simetrična monoidalna. Koherencijske zahtjeve za kanonske izomorfizme dovoljno je provjeriti postkomponirane svakom od projekcija, kada su trivijalni. Posebno je monoidalna kategorija svaki predurеđaj s konačnim infimumima ili supremumima.
4. Kategorija R-R-bimodula nad nekim prstenom R s bifunktorom $\otimes_R$ čini monoidalnu kategoriju (nesimetričnu za netrivijalan R). Ako je R komutativan, onda se kategorija Mod_R modula nad R ulaže u ${}_R\mathrm{Mod}_R$ i čini simetričnu potkategoriju nje.

5. Kategorija End$\mathscr{C}$ endofunktora na $\mathscr{C}$ s kompozicijom funktora kao množenjem primjer je strogo monoidalne kategorije.

Monoidalni funktor (F, φ) između monoidalnih kategorija $(\mathscr{C}, \otimes, I)$ i $(\mathscr{D}, \odot, J)$ dan je funktorom $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, transformacijom $\varphi_{A,B} : FA \odot FB \to F(A \otimes B)$, gdje su $A, B \in \mathscr{C}$, prirodnom u oba argumenta i morfizmom $\varphi : J \to FI$ u $\mathscr{D}$ takvima da komutiraju dijagrami

$$\begin{tikzcd} & FA \odot J \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \odot \varphi"] \\ FA & FA \odot FJ \arrow[d, "\varphi"] \\ & F(A \otimes I) \arrow[ul, "F\rho"] \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} J \odot FA \arrow[d, "\varphi \odot \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ FJ \odot FA \arrow[d, "\varphi"'] & FA \\ F(I \otimes A) \arrow[ur, "F\lambda"'] & \end{tikzcd} ,$$

$$\begin{tikzcd} (FA \odot FB) \odot FC \arrow[r, "\varphi \odot \mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] & F(A \otimes B) \odot FC \arrow[r, "\varphi"] & F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[d, "F\alpha"] \\ FA \odot (FB \odot FC) \arrow[r, "\mathrm{id} \odot \varphi"] & FA \odot F(B \otimes C) \arrow[r, "\varphi"] & F(A \otimes (B \otimes C)). \end{tikzcd}$$

Ako su prirodna transformacija monoidalnoga funktora izomorfizmi, onda ga nazivamo **jakim**, a ako su identitete, onda kažemo da je **strog**.

Primjer 4.1.2.

1. Morfizmi monoida su, naravno, strogi monoidalni funktori između odgovarajućih diskretnih monoidalnih kategorija.
2. Ako su $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ kategorije s konačnim produktima, a F funktor koji te limese čuva, onda je F jaki monoidalni funktor s $(\mathscr{C}, \times)$ u $(\mathscr{D}, \times)$.
3. Ako je R prsten, onda je zaboravni funktor ${}_R\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$ monoidalan. Morfizam $\mathbb{Z} \to R$ je jedinstveno određen, a $\varphi_{MN} : M \otimes N \to M \otimes_R N$ za R-bimodule M i N je kanonski kvocijent.
4. Zaboravni funktor $(\mathrm{Ab}, \otimes, \mathbb{Z}) \to (\mathrm{Set}, \times, 1)$ je monoidalan: morfizam $1 \to \mathbb{Z}$ je element $0 \in \mathbb{Z}$, a za Abelove grupe A, B je $A \times B \to A \otimes B$ upravo tenzorski produkt $\otimes$ elemenata.

4.2 Monoidi

Asocijativnost množenja i postojanje jediničnoga elementa za binarnu operaciju m na skupu M mogu se lako izreći i bez eksplicitnoga pozivanja na elemente: asocijativnost je komutativnost dijagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \times M) \times M \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m\times \mathrm{id}"'] & & M \times (M \times M) \arrow[d, "\mathrm{id}\times m"] \\
M \times M \arrow[dr, "m"'] & & MM \arrow[dl, "m"] \\
& M, &
\end{tikzcd}$$

a jedinični element je element $e : 1 \to M$ takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
M \times 1 \arrow[r, "m\times e"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & M \times M \arrow[d, "m"] & 1 \times M \arrow[l, "e\times m"'] \arrow[dl, "\lambda^{-1}"] \\
& M. &
\end{tikzcd}$$

Sada je očito da se **monoid** može definirati u proizvoljnoj monoidalnoj kategoriji jednostavno tako da u gornjim dijagramima zamijenimo kartezijev produkt u Set i njegovu jedinicu 1 proizvoljnom monoidalnom strukturom.

Nadalje, možemo definirati morfizam između monoida (M, m, e) i (M', m', e') u monoidalnoj kategoriji $(\mathscr{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ kao morfizam $f : M \to N$ takav da komutiraju dijagrami

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & M \arrow[d, "f"] \\
& M'.
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes M \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m"'] & M' \otimes M' \arrow[d, "m'"] \\
M \arrow[r, "f"] & M'
\end{tikzcd}$$

Dakle, svi monoidi u $\mathscr{C}$ čine kategoriju Mon$(\mathscr{C}, \otimes)$. Po koherenciji se morfizmi λ, $\rho : I \otimes I \to I$ podudaraju, pa jedinični objekt ima kanonsku strukturu monoida (I, v, id), gdje je v neki od unitora. Ako je dan drugi monoid (M, m, e), onda je $e : I \to M$ zapravo morfizam monoida, i očito je i jedinstven takav, pa slijedi da je (I, v, id) inicijalni objekt u Mon$(\mathscr{C}, \otimes)$.

Slično možemo direktno prevesti definiciju **lijevog djelovanje monoida** M u $\mathscr{C}$ na neki objekt $A \in \mathscr{C}$ kao morfizma $a : M \otimes A \to A$ takvog da komutiraju

$$\begin{tikzcd} I \otimes A \arrow[r, "e\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M \otimes A \arrow[d, "a"] \\ & A, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (M\otimes M)\otimes A \cong M \otimes (M \otimes A) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes a"] \arrow[d, "m\otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes A \arrow[d, "a"] \\ M \otimes A \arrow[r, "a"] & M. \end{tikzcd}$$

Morfizam a tj. nepreciznije objekt A nazivamo i **lijevim modulom** nad monoidom M. Na prirodan način definira se i morfizam modula (A, a) i (B, b) nad M kao morfizam $f : A \to B$ takav da komutira

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "a"'] & M \otimes B \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

pa možemo govoriti o kategoriji ${}_M\mathrm{Mod}$ lijevih modula nad M. Također možemo definirati i **desne module** i kategoriju ${}_M\mathrm{Mod}$ desnih modula, kao i **bimodule**. Eksplicitno, struktura M-N-bimodula na objektu A dana je lijevim modulom $l : M \otimes A \to A$ i desnim modulom $r : A \otimes M \to A$ takvima da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} (M\otimes A)\otimes N \cong M \otimes (A \otimes N) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes r"] \arrow[d, "l\otimes \mathrm{id}"'] & M \otimes A \arrow[d, "l"] \\ A \otimes N \arrow[r, "r"] & A. \end{tikzcd}$$

Primijetimo da je monoid (M, m, e) uvijek M-bimodul na kanonski način, s lijevim i desnim djelovanjem m.

Ukoliko je kategorija simetrična, svakom monoidu (M, m, e) možemo pridružiti **suprotni monoid** M^{op} tako da množenje $m : M \otimes M \to M$ zamijenimo kompozicijom $m\sigma$, i imamo $\mathrm{Mod}_{M^{\mathrm{op}}} \cong {}_M\mathrm{Mod}$. Za monoid kažemo da je **komutativan** ukoliko je $M = M^{\mathrm{op}}$.

Konačno, ključno svojstvo monoidalnih funktora je da svaki monoidalni funktor $(F, \varphi) : (\mathscr{C}, \otimes, I) \to (\mathscr{D}, \otimes, J)$ preslikava monoide u $\mathscr{C}$ u monoide u $\mathscr{D}$. Ako je (M, m, e) monoid u $\mathscr{C}$, onda možemo definirati morfizme $Fe \circ \varphi : J \to FI \to FM$ i $Fm \circ \varphi : FM \otimes FM \to F(M \otimes M) \to FM$, uz koje se lako provjeri da FM postaje monoid. Općenitije, F inducira funktor $F : \mathrm{Mon}(\mathscr{C}, \otimes) \to \mathrm{Mon}(\mathscr{D}, \otimes)$, kao i, na analogan način, funktor $F : \mathrm{Mod}_M \to \mathrm{Mod}_{FM}$, za svaki monoid M u $\mathscr{C}$.

Primjer 4.2.1.

1. Monoidi u $(\mathrm{Set}, \times)$ su naravno ekvivalentni običnim monoidima, a moduli nad njima su djelovanja monoida.
2. Monoidi u $(\mathrm{Top}, \times)$ su topološki monoidi, tj. oni za koje je množenje neprekidno u oba argumenta.
3. U $(\mathrm{Cat}, \times)$ monoidalni objekti su (male) strogo monoidalne kategorije.
4. Za komutativan prsten R su monoidi u $(\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$ R-algebre, a moduli nad njima su upravo moduli nad algebrama.

4.3 Obogaćene kategorije

Obogaćene kategorije poopćuju obične kategorije tako što se hom skupovi zamjenjuju **hom objektima** neke kategorije $\mathscr{E}$. Naravno, kako bismo i dalje mogli govoriti o asocijativnoj operaciji kompozicije i identiteti za nju zahtijevat ćemo da kategorija $\mathscr{E}$ bude monoidalna. Dakle, **obogaćena kategorija** $\mathscr{C}$ nad monoidalnom kategorijom $(\mathscr{E}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ (kraće: $\mathscr{E}$-kategorija) sastoji se od sljedećih podataka:

- skupa $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ objekata
- $\mathscr{E}$-objekta $\mathrm{Hom}(A, B)$ za svaki par (A, B) objekata od $\mathscr{C}$
- morfizma $\mathrm{id}_A : I \to \mathrm{Hom}(C, C)$ za svaki objekt C od $\mathscr{C}$
- morfizma $\circ_{ABC} : \mathrm{Hom}(B, C) \otimes \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ za svaku trojku (A, B, C) objekata od $\mathscr{C}$,

nadalje, operacija $\circ$ je asocijativna, a id_A je lijeva identiteta za $\circ_{AAB}$ i desna za $\circ_{BAA}$ (tj. komutiraju očiti dijagrami).

Obogaćeni funktor F između dviju $\mathscr{E}$-kategorija $\mathscr{C}$ i $\mathscr{D}$ zadan je funkcijom $F : \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$ i familijom morfizama $F_{AB} : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(FA, FB)$ za svaki par objekata (A, B) u $\mathscr{C}$ takvom da je $F_{AA} \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{FA}$ i da za sve A, B i C u $\mathscr{C}$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(B,C) \otimes \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F\otimes F"'] & \mathrm{Hom}(A,C) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Hom}(FB,FC) \otimes \mathrm{Hom}(FA,FB) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{Hom}(FA,FC).
\end{tikzcd}$$

Konačno, **obogaćena prirodna transformacija** α između dva paralelna $\mathscr{E}$-funktora F i G je dana familijom morfizama $\alpha_A : I \to \mathrm{Hom}(FA, GA)$ takvom da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[dl, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "\rho^{-1}"] & \\
I \otimes \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\alpha_B \otimes F"'] & & \mathrm{Hom}(A,B) \otimes I \arrow[d, "G \otimes \alpha_A"] \\
\mathrm{Hom}(FB,GB) \otimes \mathrm{Hom}(FA,FB) \arrow[dr, "\circ"'] & & \mathrm{Hom}(GA,GB) \otimes \mathrm{Hom}(FA,GA) \arrow[dl, "\circ"] \\
 & \mathrm{Hom}(FA,GB). &
\end{tikzcd}$$

Posebno možemo govoriti i o obogaćenim funktorskim kategorijama.

Za svaku monoidalnu kategoriju $\mathscr{E}$ postoji trivijalna $\mathscr{E}$-kategoriju $\mathscr{I}$ takva da je $\mathrm{Ob}\,\mathscr{I} = 1$, a $\mathrm{Hom}(1,1) = I$. Funktor $[\mathscr{I}, -] : \mathrm{C}\textsc{at}[\mathscr{E}] \to \mathrm{C}\textsc{at}$ pridružuje $\mathscr{E}$-kategoriji $\mathscr{C}$ kategoriju koju označavamo s $\mathscr{C}_0$, i takvu da je $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_0 = \mathrm{Ob}\,C$, a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_0}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(I, \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B))$.

Primjer 4.3.1.

1. Set-katgorije su lokalno male kategorije.
2. Postojanje nul-objekta ekvivalentno je obogaćenju nad pSet.
3. Predurеđaj je kategorija obogaćena nad $(\vec{2}, \times)$. Obogaćeni funktori su točno monotona preslikavanja, a prirodna transformacija između funktora f i g je relacija $f \leqslant g$.

Kategorije obogaćene nad kategorijom modula $(\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$ nad komutativnim prstenom R nazivamo R**-linearnima**. Eksplicitno svaki hom-skup ima strukturu R-modula, kompozicija je R-bilinearna, a funktori i prirodne transformacije R-linearni. Posebno $\mathbb{Z}$-linearne kategorije nazivamo i **predaditivnima**.

Primjer 4.3.2.

1. Za komutativan R je kategorija Mod_R R-linearna, i isto vrijedi za R-algebre. Ako je R nekomutativan, onda je $Z(R)$-algebra, svaki R-modul i $Z(R)$-modul, a kategorija Mod_R je $Z(R)$-linearna.
2. $\mathbb{Z}$-linearna verzija korespondencije između monoida i kategorija s jednim objektom je ekvivalencija kategorije Ring s kategorijom predaditivnih kategorija s jednim objektom. Posebno je $[R, \mathrm{Ab}] \cong \mathrm{Mod}_R$.

4.4 Monoidalno zatvorene kategorije

Za monoidalnu kategoriju $(\mathscr{C}, \otimes, I, \alpha, \rho, \lambda)$ kažemo da je **desno monoidalno zatvorena** ukoliko funktor $- \otimes C$ ima desno adjungiran funktor $[C, -]$ za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$, odnosno da je **lijevo monoidalno zatvorena** ako je funktor $C \otimes -$ lijevo adjungiran. Ukoliko je $\mathscr{C}$ simetrična, lijeva i desna zatvorenost su ekvivalentne.

Po definiciji i propoziciji 3.2.5 za svaka tri objekta A, B, $C \in \mathscr{C}$ desno monoidalno zatvorene kategorije vrijedi $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \cong \mathrm{Hom}(A, [B, C])$ prirodno u sva tri argumenta. Štoviše, za svaki objekt D vrijedi i

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(D, [A, [B, C]]) &\cong \mathrm{Hom}(D \otimes A, [B, C]) \\ &\cong \mathrm{Hom}((D \otimes A) \otimes B, C) \\ &\cong \mathrm{Hom}(D \otimes (A \otimes B), C) \\ &\cong \mathrm{Hom}(D, [A \otimes B, C]),\end{aligned}$$

pa po Yonedinoj lemi slijedi da je i $[A \otimes B, C] \cong [A, [B, C]]$ prirodno u A, B i C.

Ključno svojstvo zatvorenih monoidalnih kategorija je što su na prirodan način obogaćene same nad sobom: objekt $[A, B]$ možemo uzeti za objekt morfizama sa A u B. Morfizmu id_A po bijekciji

$$[-] : \mathrm{Hom}(A, B) \cong \mathrm{Hom}(I \otimes A, B) \cong \mathrm{Hom}(I, [A, B])$$

odgovara morfizam $[\mathrm{id}]_A : I \to [A, B]$; nadalje, ako s ev označimo kojedinicu adjunkcije $- \otimes C \dashv [C, -]$, onda morfizmu

$$[B, C] \otimes [A, B] \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}} [B, C] \otimes B \xrightarrow{\mathrm{ev}} C$$

po adjunkciji odgovara morfizam

$$c : [B, C] \otimes [A, B] \longrightarrow [A, C].$$

Nije teško provjeriti da $\mathscr{C}$ uz kompoziciju c i jedinicu [id] postaje $\mathscr{C}$-kategorija, i da za svaki par morfizama $f : A \to B$ i $g : B \to C$ vrijedi

$$[g \circ f] = c \circ ([g] \otimes [f]) \circ u^{-1},$$

gdje je u neki od unitora.

Kategoriju koja je zatvorena za kartezijski produkt nazivamo **kartezijski zatvorenom kategorijom**. Za objekte A i B kartezijski zatvorene kategorije $\mathscr{C}$ umjesto $[A, B]$ pišemo i B^A, i nazivamo ga i **eksponencijalnim objektom**.

Sve jednakosti osnovne kardinalne aritmetike, dakle aritmetike na kosturu kategorije Set, posljedica su apstraktnih svojstava adjunkcije $+ \dashv \Delta \dashv \times$ koja karakterizira zbrajanje i množenje, i adjunkcije $- \times B \dashv -^B$ koja definira eksponenciranje, pa se poopćuju na prirodne izomorfizme u svim kartezijski zatvorenim kategorijama. Izomorfizam $(A+B) \times C \cong A \times C + B \times C$ na primjer slijedi odmah iz lijeve adjungiranosti množenja, dok $C^{A+B} \cong C^A \times C^B$ slijedi iz

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(D, C^{A+B}) &\cong \mathrm{Hom}(D \times (A+B), C) \\
&\cong \mathrm{Hom}(D \times A + D \times B, C) \\
&\cong \mathrm{Hom}(D \times A, C) \times \mathrm{Hom}(D \times B, C) \\
&\cong \mathrm{Hom}(D, C^A) \times \mathrm{Hom}(D, C^B) \\
&\cong \mathrm{Hom}(D, C^A \times C^B).
\end{aligned}$$

Ako $\mathscr{C}$ ima inicijalni objekt 0, onda je po koneprekidnosti $0 \times A \cong 0$, a iz Yonedine leme dobivamo i $A^0 \cong 1$.

Primjer 4.4.1. U mnogim kategorijama funktor $\mathrm{Hom} : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ dobivamo zato što svaki hom skup objekata u $\mathscr{C}$ ima i sam prirodnu strukturu $\mathscr{C}$-objekta, i redovito je upravo unutrašnji hom funktor za neku monoidalnu strukturu. Tako je za komutativan prsten R u kategoriji Mod_R grupa $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ R-linearnih preslikavanja između modula M i N uvijek i sama R-modul, s množenjem definiranim po točkama, i unutrašnji je hom u kategoriji $(\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$.

Slično je kategorija Cat kartezijski zatvorena, kao i njene potkategorije Set, Preset i Poset skupova, preduređenih, odnosno parcijalno uređenih skupova.

Primjer 4.4.2. U svakoj simetričnoj monoidalno zatvorenoj kategori $(\mathscr{C}, \otimes)$ postoji važna klasa adjunkcija. Ako su A, B i P objekti od $\mathscr{C}$, onda je

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, [B, P]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, [A, P]) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}([A, P], B)$$

iz čega slijedi da je funktor $[-, P]$ desno adjungiran funktoru $[-, P]^{\mathrm{op}}$. Primjeri su funktor dualizacije $(-)^* : \mathrm{Vect}_k^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Vect}_k$ koji je izomorfan funktoru $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ i funktor $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ koji je izomorfan funktoru 2^-.

4.5 Bikategorije

U kategoriji Cat, budući da je obogaćena nad Cat, možemo govoriti o 0-morfizmima (objektima), 1-morfizmima (funktorima) i 2-morfizmima (prirodnim transformacijama), dakle kategorija Cat je u određenom smislu dvodimenzionalna. Općenito, svaku kategoriju $\mathscr{B}$ obogaćenu nad Cat (ili po potrebi Cat) nazivamo

strogom 2-kategorijom. Za objekte A, B, C od $\mathscr{B}$ je unutrašnja kompozicija $* : [B,C] \times [A,B] \to [A,C]$ bifunktor koji određuje kompoziciju 1-morfizama i **horizontalnu kompoziciju** 2-morfizama. S druge strane, kompozicija $\circ$ u svakoj od kategorija $[A,B]$ definira **vertikalnu kompoziciju** 2-morfizama. Po funktorijalnosti od $*$, ove dvije kompozicije zadovoljavaju analogon zakona zamjene opisanoga dijagramom 1.2.

Primjer 4.5.1. Svaka lokalno mala 1-kategorija obogaćena je nad Set, pa dakle i nad Cat tako da se za jedini 2-morfizam uzme jednakost 1-morfizama.

Primjer 4.5.2. Ako je $\mathscr{B}$ monoidalna kategorija s jednim objektom $\bullet$, onda je potpuno opisana kategorijom $\mathscr{C} = [\bullet, \bullet]$, a horizontalna kompozicija $*$ čini $\mathscr{C}$ strogom monoidalnom kategorijom. Obratno, svaka je stroga monoidalna kategorija na ovaj način zadana 2-kategorijom s jednim objektom.

Budući da smo vidjeli da je stroga definicija monoidalne kategorije adekvatna samo u malom broju slučajeva, ovaj jednostavni primjer ističe i bitan problem strogih 2-kategorija. Kao što je u 1-kategoriji nepotrebno (i redovito nemoguće) zahtijevati jednakost 0-morfizama, kada postoje netrivijalni 1-izomorfizmi između njih, tako će nas i u 2-kategoriji jednakost 1-morfizama zanimati samo do na 2-izomorfizam. Posebno bismo umjesto asocijativnosti i postojanja jediničnog elementa za horizontalnu kompoziciju $*$ trebali tražiti samo asocijativnost i jediničnost do na koherentne 2-izomorfizme, koji poopćuju asocijator i unitore iz definiciju monoidalne kategorije. Sistematičan tretman bikategorija daleko nadilazi okvire ovoga rada, ali već i na temelju ovoga nepreciznoga opisa možemo dati neke jednostavne primjedbe i primjere.

Neke konstrukcije koje smo proučavali u 2-kategoriji Cat ključno ovise o tome da su objekti od Cat kategorije, dakle i sami se sastoje od objekata i morfizama, a 2-morfizmi su dani posebnim familijama tih morfizama. S druge strane, definicija adjunkcije jedinicom i kojedinicom prevodi se direktno u svaku bikategoriju, budući da samo zahtijeva da određene kompozicije dvaju 2-morfizama budu jednake identiteti, a dokaz poput na primjer onoga u propoziciji 3.2.1 se očito direktno prevodi, budući da ovisi samo o zakonu zamjene i identitetama trokuta (i dovoljno jakoj koherenciji za općenite bikategorije). Slično vrijedi i za monade, koje su tema sljedećega poglavlja.

Nadalje, čak i ako radimo samo sa strogim 2-kategorijama, mnogi funktori od interesa između njih nisu strogo obogaćeni nad Cat. Ako je na primjer $\mathscr{C}$ kategorija s povlacima, onda svaki $\mathscr{C}$-morfizam $f : A \to B$ definira funktor $f^* : \mathscr{C}/B \to \mathscr{C}/A$, i očito je $\mathrm{id}_* \cong \mathrm{Id}$, a može se provjeriti da vrijedi i $(g \circ f)^* \cong f^* \circ g^*$ za svaki $g : B \to C$. No općenito nemamo ni jednakost $\mathrm{id}_* = \mathrm{Id}$ (npr. za $\mathscr{C} = \mathrm{Set}$ i povlak konstruiran kao podskup produkta), dakle ne možemo govoriti o strogom funktoru $\mathscr{C} \to \mathrm{CAT}$, ali ovo preslikavanje, budući da je "funktorijalno do na 2-izomorfizam", možemo nazvati 2-funktorom.

Primjer 4.5.3.

1. Monoidalna kategorija bimodula samo je jedan objekt veće bikategorije, Bimod, koja će nam biti bitna u poglavlju 6. Objekti bikategorije Bimod su prstenovi, 1-morfizam između prstenova R i S je R-S-bimodul, a 2-morfizam između bimodula je uobičajeni homomorfizam bimodula (lijevo R- i desno S-linearno preslikavanje). Horizontalna kompozicija dana je tenzorskim produktom bimodula i očito nije stroga.
2. Svakom topološkom prostoru T možemo pridružiti bikategoriju čiji su objekti točke od T, 1-morfizmi putevi u T, a 2-morfizmi homotopije između puteva.

Poglavlje 5

Monade

5.1 Monade i morfizmi monada

Monada na kategoriji $\mathscr{C}$ je uređena trojka (T, μ, η) endofunktora $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ i prirodnih transformacija $\eta : \mathrm{Id} \to T$ i $\mu : T^2 \to T$ takvih da je T monoid u strogoj monoidalnoj kategoriji $(\mathrm{End}\,\mathscr{C}, \circ)$ s množenjem μ i jedinicom η. Eksplicitno, komutiraju sljedeći dijagrami:

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & T, & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TT \arrow[dr, "\mu"'] & TTT \arrow[l, "\mu T"'] \arrow[r, "T\mu"] & TT \arrow[dl, "\mu"] \\ & T. & \end{tikzcd}$$

Analogno definiramo i morfizam monada na $\mathscr{C}$ kao morfizam monoida u $\mathrm{End}\, C$, a odgovarajuću kategoriju označavat ćemo s $\mathrm{Mon}_{\mathscr{C}}$.

Prije nego što kažemo bilo što drugo o monadama, pokazat ćemo da je svakom paru adjungiranih funktora pridružena monada, što je ujedno i jedan od razloga za važnost adjungiranih funktora, i izvor mnogobrojnih primjera monada.

Propozicija 5.1.1. Neka $(F \dashv G, \eta, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ adjunkcija. Funktor $GF : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ je monada na $\mathscr{C}$ s jedinicom η i množenjem $\mu := G\varepsilon F$. Ako je $(F \dashv G', \eta', \varepsilon')$ neka druga adjunkcija, onda je odgovarajuća monada $(G'F, \mu', \eta')$ izomorfna monadi (GF, μ, η).

Dokaz. Jediničnost od η slijedi iz identiteta trokuta za adjunkciju $F \dashv G$. Asocijativnost množenja je prirodnost od $G\varepsilon F$:

$$\begin{array}{ccc} GFGFGF & \xrightarrow{GFG\varepsilon F} & GFGF \\ {\scriptstyle G\varepsilon FGF}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G\varepsilon F} \\ GFGF & \xrightarrow{G\varepsilon F} & GF. \end{array}$$

Za drugi dio, identiteti $\mathrm{id} : F \Rightarrow F$ odgovara po propoziciji 3.2.4 izomorfizam $\beta = G'\varepsilon \circ \eta' G : G \Rightarrow G'$, i lako se provjeri da je βF morfizam monada. □

U sljedećem odjeljku pokazujemo da vrijedi i obrat: svaka monada može se na ovaj način dobiti od adjunkcije.

Primjer 5.1.2.

1. Monada na predurеđaju P zadana je monotonom funkcijom $m : P \to P$ takvom da je $\mathrm{id} \leqslant m$ i $m \circ m \leqslant m$, iz čega uz prvu nejednakost slijedi i $m \approx m \circ m$. Na podurеđajima partitivnog skupa $(\mathcal{P}X, \subseteq)$ nekoga skupa X to su upravo tri najosnovnija svojstva koja tražimo od svake operacija da bi je smatrali nekim oblikom zatvarača: npr. topološkog zatvarača, linearne ljuske, σ-algebre generirane familijom skupova, itd.
2. Kovarijantnom funktoru partitivnoga skupa možemo dati strukturu monade: jedinica je inkluzija $X \to \mathcal{P}X$ zadana s $x \mapsto \{x\}$, a množenje je operacija $\mathcal{P}\mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ koja familiji podskupova od X pridružuje njihovu uniju.
3. Slična je i monada koja dolazi od adjunkcije $F \dashv U : \mathrm{Set} \to \mathrm{Mon}$. Slobodni monoid nad skupom A je skup svih riječi nad alfabetom A s konkatenacijom kao množenjem. Jedinica monade je trivijalna inkluzija alfabeta u skup riječi, a množenje konkatenacija niza riječi u jednu.

Monade (zapravo komonade) prvi su puta definirane u homološkoj algebri, u kojoj su važne zbog činjenice da svaka komonada inducira tzv. simplicijalni funktor.

Označimo s Δ kategoriju nepraznih konačnih ordinala, koja se u ovome kontekstu naziva **simplicijalna kategorija**. Svaki morfizam simplicijalne kategorije dan je kompozicijom morfizama dviju jednostavnih familija: **rubnih** i **degeneracijskih** preslikavanja, koje su karakterizirane određenim algebarskim identitetama. Rubno preslikavanje $\delta_i^n : [n-1] \to [n]$ dano je jedinstvenom injektivnom funkcijom u Δ takvom da i nije u slici od δ_i^n, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $i \in [n]$ a $[n]$ standardna oznaka za ordinal $n+1 \in \Delta$. Degeneracijsko preslikavanje $\sigma_i^n : [n+1] \to [n]$ dano je jedinstvenom surjekcijom u Δ za koju je $\sigma(i) = \sigma(i+1) = i$. Dakle, svaki funktor

$\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathscr{C}$ u neku kategoriju $\mathscr{C}$ zadan je nizom $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ objekata, i morfizmima $\partial_i^n : F_n \to F_{n-1}$, $\sigma_i^n : F_n \to F_{n+1}$ koji zadovoljavaju odgovarajuće identitete. Ovakvi funktori nazivaju se **simplicijalnim objektima** u $\mathscr{C}$, a kategorija $[\Delta^{\mathrm{op}}, \mathscr{C}]$ označava se i sa $\mathrm{Sim}\,\mathscr{C}$. Ako simplicijalni objekt F ima proširenje $F' : \Delta_a \to \mathscr{C}$ na kategoriju Δ_a *svih* konačnih ordinala, onda to proširenje nazivamo **augmentiranim** simplicijalnim objektom, i ono je zadano objektom $F_{-1} \in \mathscr{C}$ i morfizmom $\varepsilon : F_0 \to F_{-1}$ (**augmentacijom**) takvim da je $\varepsilon\partial_0^1 = \varepsilon\partial_1^1$.

Ako je dana komonada (G, δ, ε) na $\mathscr{C}$, onda možemo definirati niz funktora $G_n := G^{\circ n+1}$ i prirodne transformacije

$$\partial_i^n = G^i \varepsilon G^{n-1} : G_n \to G_{n-1},$$
$$\sigma_i^n = G^i \delta G^{n-1} : G_n \to G_{n+1},$$

i odmah iz svojstava δ i ε se pokazuje da je na ovaj način konstruiran simplicijalni objekt $G_\bullet : \Delta^{\mathrm{op}} \to [\mathscr{C}, \mathscr{C}]$, odnosno ekvivalentno, funktor $\mathscr{C} \to \mathrm{Sim}\,\mathscr{C}$. Nadalje, ovaj simplicijalni objekt je i augmentiran: budući da je $\varepsilon \circ G\varepsilon = \varepsilon \circ \varepsilon G = \varepsilon\varepsilon$, slijedi da je $\varepsilon : G \to \mathrm{Id}$ augmentacija. O detaljima ove konstrukcije i uvodno o njenoj ulozi u homologiji može se pročitati u [10].

5.2 Moduli nad monadom

Ako je (T, μ, η) monada na kategoriji $\mathscr{C}$ onda par (M, α) pri čemu je α morfizam $TM \to M$ nazivamo **modulom nad monadom** T ili T**-modulom**[1] ukoliko je $\Delta\alpha : T \circ \Delta M \to \Delta M$ modul nad monoidom T. Dakle, komutira dijagra:

$$\begin{tikzcd}
TTM \arrow[r, "T\alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & TM \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[l, "\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\
TM \arrow[r, "\alpha"] & M,
\end{tikzcd}$$

a morfizam modula $\alpha : TM \to M$ i $\beta : TN \to N$ dan je morfizmom $f : M \to N$ takvim da komutira

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\alpha"'] & TN \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "f"] & N.
\end{tikzcd}$$

[1] alternativni naziv je T-algebra

Kategorija svih modula nad monadom T naziva se **Eilenberg-Mooreova kategorija** i označavat ćemo je sa $\mathscr{C}^T$ ili sa Mod_T.

Uočimo odmah da postoji vjeran funktor $U^T : \mathscr{C}^T \to \mathscr{C}$ koji T-modul (M, α) šalje u objekt M i da je U^T i konzervativan, budući da je f morfizam T-modula ako i samo ako je to i f^{-1}.

S druge strane iz definicije monade slijedi da je (TC, μ_C) T-modul za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ (to su upravo komponente djelovanja $\mu : T^2 \to T$ monoida T na samoga sebe), a prirodnost od μ znači da je Tf morfizam s T-modula (TC, μ_C) u (TD, μ_D) za svaki $f : C \to D$. Dakle, možemo definirati i funktor $F^T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^T$ na objektima s $C \mapsto (TC, \mu_C)$, a na morfizmima s $f \mapsto Tf$, i vrijedi $U^T F^T = T$.

Ako je T-modul izomorfan modulu $\mu_C : TTC \to TC$, nazivamo ga i **slobodnim T-modulom**, što opravdava sljedeća propozicija.

Propozicija 5.2.1. Funktor F^T lijevo je adjungiran funktoru U^T, a T je monada pridružena ovoj adjunkciji.

Dokaz. Za svaki T-modul $\alpha : TM \to M$ označimo $\varepsilon_\alpha = \alpha$. Iz definicije T-modula slijedi da je α morfizam s modula (TM, μ_M) u modul (M, α), a iz definicije morfizma T-modula slijedi da je ovako definirana familija morfizama prirodna. Lako je provjeriti da vrijede i identitete trokuta, dakle $(F^T \dashv U^T, \eta, \varepsilon)$ jeste adjunkcija. Kako je $U^T \varepsilon F^T = \mu$, T je upravo njoj pridružena monada. □

Nadalje, možemo definirati **Kleislijevu kategoriju** $\mathscr{C}_T$ monade $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ s objektima $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}_T = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ i morfizmima $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, TB)$. Kompozicija $\mathscr{C}_T$-morfizama $f : A \to B$ i $g : B \to C$ je $\mathscr{C}$-morfizam

$$A \xrightarrow{\ f\ } TB \xrightarrow{\ Tg\ } TTC \xrightarrow{\ \mu\ } TC.$$

Iz asocijativnosti i prirodnosti od μ slijedi da je tako definirana kompozicija asocijativna, i da je $\mathscr{C}_T$-identiteta na A $\mathscr{C}$-morfizam $\eta : A \to TA$. Dobro su definirani i funktor $U_T : \mathscr{C}_T \to \mathscr{C}$ sa $U_T(f : A \to B) = \mu \circ Tf$ i funktor $F_T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_T$ sa $F_T(f : A \to B) = \eta f$. Dakle, opet je $U_T F_T = T$ i vrijedi:

Propozicija 5.2.2. Funktor F_T lijevo je adjungiran funktoru U_T, a T je monada pridružena adjunkciji.

Dokaz. Rutinska provjera pokazuje da je transformacija $\varepsilon : U_T F_T \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{C}_T}$ takva da je morfizam $\varepsilon_M : TM \to M$ dan $\mathscr{C}$-morfizmom id_M prirodna, zadovoljava identitete trokuta, i vrijedi $U_T \varepsilon F_T = \mu$. □

Dakle za svaku monadu T na nekoj kategoriji $\mathscr{C}$ smo konstruirali dva adjungirana para $F_T \dashv U_T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}_T$ i $F^T \dashv U^T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^T$ koja generiraju T, i kao što ćemo vidjeti, oni su redovito bitno različiti, tj. kategorije $\mathscr{C}_T$ i $\mathscr{C}^T$ nisu ekvivalentne. Postavlje se pitanje što možemo reći o proizvoljnoj adjunkciji $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ koja generira T. Pokazat ćemo da su Kleislijeva i Eilenberg-Mooreova konstrukcija u određenome smislu ekstremalne takve adjunkcije.

Primjer 5.2.3. Ako je $(R \dashv U, \eta, \varepsilon) : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ reflektivna potkategorija, onda je množenje $\mu = U\varepsilon R$ pripadne monade izomorfizam: za ovakve monade kažemo da su **idempotentne**. Obratno, ako je (T, μ, η) idempotentna monada na $\mathscr{C}$, onda iz jediničnosti od η slijedi da su i $T\eta$ i ηT inverzi od μ i posebno jednaki. Ako je $\alpha : TM \to M$ modul, po prirodnosti komutira

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta T = T\eta"'] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{id} = T(\alpha\eta)"] & M \arrow[d, "\eta"] \\ TTM \arrow[r, "T\alpha"] & TM, \end{tikzcd}$$

dakle $\alpha = \eta^{-1}$, i posebno je izomorfizam modula (M, α) i (TM, μ). Slijedi da je svaki modul slobodan, tj. da je svaki modul u esencijalnoj slici funktora F^T. No onda iz $\mu = U^T \varepsilon F^T$ imamo da je kojedinica ε adjunkcije $F^T \dashv U^T$ izomorfizam na cijeloj kategoriji $\mathscr{C}^T$, dakle da je funktor U^T potpuno vjeran. Vidimo da su idempotentne monade i refleksije, odnosno reflektivne potkategorije zapravo ekvivalentni pojmovi.

Primjer 5.2.4. Zaboravni funktor pSet $\to$ Set je desno adjungiran, a pridružena monada je funktor $P = - \sqcup \{*\}$. Funkcije $X \to PY$ točno odgovaraju parcijalnim funkcijama s X u Y, i Kleislijeva kategorija Set_P izomorfna je kategoriji parcijalnih funkcija. Slično je Kleislijeva kategorija monade $\mathcal{P} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ iz primjera 5.1.2 kategorija multifunkcija s prikladno definiranom kompozicijom. Ovakvi primjeri monada i odgovarajućih Kleislijevih kategorija vrlo su korisni u funkcijskom programiranju, gdje služe za jednostavno modeliranje tipova funkcija i osim onih koje jezik direktno podržava (npr. funkcija koje ovise o globalnom stanju ili nedeterminističkih funkcija). Vidi [13], gdje je razvijena ova ideja.

5.3 Funktori usporedbe

Ako su $F \dashv G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $F' \dashv G' : \mathscr{C} \to \mathscr{D}'$ dvije adjunkcije koje generiraju istu monadu T, onda funktor $K : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ nazivamo **morfizmom adjunkcija monade T** ukoliko komutiraju dijagrami

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathscr{D}' \arrow[dl, "G'"] \\ & \mathscr{C} & \end{tikzcd} \qquad \text{i} \qquad \begin{tikzcd} \mathscr{D} \arrow[rr, "K"] & & \mathscr{D}' \\ & \mathscr{C} \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "F'"'] & \end{tikzcd}.$$

Primijetimo prvo da takav funktor ima automatski i sljedeća dodatna svojstva:

Lema 5.3.1. Neka su dane adjunkcije $(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ i $(F' \dashv G', \varphi', \eta', \varepsilon') : \mathscr{C} \to \mathscr{D}'$ koje generiraju istu monadu T na $\mathscr{C}$, i neka je $K : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$ morfizam tih adjunkcija. Tada vrijedi

$$\begin{array}{ccc} G'K = G & \eta = \eta' & \varphi'(Kg) = \varphi(g) \\ KF = F' & K\varepsilon = \varepsilon' K & K\psi(f) = \psi'(f), \end{array}$$

pri čemu su ψ i ψ' inverzi redom od φ i φ', a $f : C \to GD$ i $g : F'C \to D'$ proizvoljni morfizmi.

Dokaz. Jednakosti $G'K = G$, $KF = F'$ i $\eta = \eta'$ vrijede po definiciji. Slijedi

$$\varphi'(Kg) = G'Kg \circ \eta' = Gg \circ \eta = \varphi(g),$$

pa onda i $K\psi(f) = \psi'(f)$, odakle za $f = \mathrm{id}_{GD} = \mathrm{id}_{G'K}$ dobivamo $K\varepsilon = \varepsilon' K$. $\square$

Tvrdimo da je u kategoriji adjunkcija koje daju monadu T Kleislijeva konstrukcija inicijalan, a Eilenberg-Mooreova terminalan objekt.

Propozicija 5.3.2. Neka je $(F \dashv G, \varphi, \eta, \varepsilon) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ adjunkcija, a (T, μ, η) pridružena monada. Postoje jedinstveni funktori $J : \mathscr{C}_T \to \mathscr{D}$ i $K : \mathscr{D} \to \mathscr{C}^T$ koji su morfizmi pripadnih adjunkcija monade T. Funktor J je ulaganje.

Dokaz. Neka su ε_T i $\varphi_T = \psi_T^{-1} = \mathrm{id}$ kojedinica i adjunkcijski izomorfizmi Kleislijeve adjunkcije konstruirane u propoziciji 5.2.2, a ε^T i $\varphi^T = (\psi^T)^{-1}$ podaci Eilenberg-Mooreove adjunkcije iz propozicije 5.2.1. Konačno, stavimo $\psi := \varphi^{-1}$.

Funktor J mora zadovoljavati $\psi(f) = J\psi_T(f) = Jf$ za svaki $\mathscr{C}_T$-morfizam $f : A \to B$, iz čega slijedi da je jedinstveno određen i potpuno vjeran. S druge strane lako je provjeriti da $Jf := \psi(f) = \varepsilon F \circ Ff$ doista jeste dobro definiran funktor.

Za funktor K, primijetimo da po definiciji od ε^T za $D \in \mathscr{D}$, KD mora biti modul $U^T\varepsilon^T K : U^T F^T U^T KD \to U^T KD$, što budući da je $U^T \varepsilon^T K = U^T K\varepsilon = G\varepsilon$, povlači da je K jedinstveno zadan na objektima, dok $U^T K = G$ jedinstveno određuje K na morfizmima. Opet, lako se provjeri da $G\varepsilon_D$ doista jeste T-modul za svaki $D \in \mathscr{D}$, da je Gg morfizam T-modula za svaki $g : D \to D'$, i da je K definiran sa $KD = G\varepsilon_D$, $Kg = Gg$ funktor. $\square$

Posebno ako primijenimo tvrdnju teorema na adjunkciju $F^T \dashv U^T$, dobivamo potpuno vjeran funktor $I : \mathscr{C}_T \to \mathscr{C}^T$ koji svakom objektu A Kleislijeve kategorije pridružuje slobodni modul (TA, μ) u C^T.

Korolar 5.3.3. Kleislijeva kategorija monade T je ekvivalentna kategoriji slobodnih T-modula.

Primjer 5.3.4. Za trivijalnu monadu $\mathrm{Id} : \mathrm{Set} \to \mathrm{Set}$ Kleislijeva i Eilenberg-Mooreova kategorija se naravno podudaraju (sa Set), no istu monadu ipak induciraju i netrivijalne adjunkcije, npr. i adjunkcija $F \dashv U : \mathrm{Set} \to \mathrm{Top}$.

5.4 Limesi u kategorijama modula

Propozicija 5.4.1. Neka je (T, μ, η) monada na kategoriji $\mathscr{C}$, a $K : J \to \mathscr{C}^T$ funktor takav da T i TT čuvaju kolimes funktora $U^T K$. Tada U^T stvara kolimes od K.

Dokaz. Stavimo $U := U^T$ i označimo sa $\kappa_j := K_j : TUK_j \to UK_j$, $j \in J$ strukturni morfizam modula K_j, a s $\iota_j : UK_j \to \varinjlim UK$ kolimes funktora UK. Budući da je $\kappa : TUK \Rightarrow UK$ prirodna transformacija i da je po pretpostavci $T\iota$ kolimes od TUK, postoji jedinstven morfizam $\varinjlim \kappa$ takav da za sve $j \in J$ komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} TUK_j \arrow[r, "\kappa_j"] \arrow[d, "T\iota_j"'] & UK_j \arrow[d, "\iota_j"] \\ T\varinjlim UK \arrow[r, "\varinjlim \kappa"] & \varinjlim UK. \end{tikzcd}$$

Tvrdimo da je $\varinjlim \kappa$ T-modul i da je $\iota : K \Rightarrow \Delta \varinjlim \kappa$ kolimes od K. Budući da za svaki $j \in J$ komutiraju svi unutrašnji kvadrati dijagrama

$$\begin{tikzcd} TT\varinjlim UK \arrow[rrr, "T\varinjlim \kappa"] \arrow[ddd, "\mu"'] & & & T\varinjlim UK \arrow[ddd, "\varinjlim \kappa"] \\ & TTUK_j \arrow[ul, "TT\iota_j"'] \arrow[r, "T\kappa_j"] \arrow[d, "\mu"'] & TUK_j \arrow[ur, "T\iota_j"'] \arrow[d, "\kappa_j"] & \\ & TUK_j \arrow[r, "\kappa_j"] \arrow[dl, "T\iota_j"] & UK_j \arrow[dr, "\iota_j"] & \\ T\varinjlim UK \arrow[rrr, "\varinjlim \kappa"] & & & \varinjlim UK \end{tikzcd}$$

i da je po pretpostavci $TT\iota$ kolimes od $TTUK$, slijedi da komutira i vanjski kvadrat, budući da komutira pretkomponiran s $TT\iota_j$ za svaki $j \in J$. Slično se dokazuje i da je $\varinjlim \kappa \circ \eta = \mathrm{id}$, a ι_j su morfizmi modula po definiciji.

Za svaki drugi kostožac $\varphi : K \Rightarrow \Delta(A, \alpha)$ na neki T-modul (M, α) se kostožac $U\varphi : UK \Rightarrow \Delta M$ faktorizira kroz jedinstven morfizam $\hat{\varphi} : \varinjlim UK \to M$. Koristeći slično kao i prije da su morfizmi sa $T \varinjlim UK$ određeni djelovanjem na koprojekcije, slijedi da je $\hat{\varphi}$ morfizam modula, jedinstveno određen budući da je U^T vjeran. $\square$

Posebno, ako kategorija $\mathscr{C}$ ima sve kolimese dijagrama sa J i T ih čuva, onda i $\mathscr{C}^T$ ima sve kolimese tipa J.

Slična, ali jednostavnija tvrdnja vrijedi i za limese.

Propozicija 5.4.2. Funktor $U^T : \mathscr{C}^T \to \mathscr{C}$ s Eilenberg-Mooreove kategorije monade (T, μ, η) stvara sve limese.

Dokaz. Neka je uz oznake kao u prethodnoj propoziciji $K : J \to C^T$ funktor takav da UK ima limes $\pi : \Delta \varprojlim UK \Rightarrow UK$. Tada je $\kappa \circ T\pi : \Delta T \varprojlim UK \Rightarrow UK$ stožac na UK i faktorizira se preko nekog morfizma $\varprojlim \kappa$ kroz π. Slično kao u prethodnoj propoziciji dokazuje se da je $\varprojlim K : T \varprojlim K \to \varprojlim K$ T-modul, a $(\pi : \kappa \to \kappa_j)_{j \in J}$ terminalni stožac. $\square$

Sada ćemo opisati jednu posebnu vrstu kolimesa, koja ima istaknuto mjesto u kategorijama modula Primijetimo da je svaka vilica

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] & C \end{tikzcd}$$

u kategoriji $\mathscr{C}$ morfizam $(f, e) : g \to e$ u kategoriji morfizama $\mathscr{C}^{\vec{2}}$. Ukoliko taj morfizam ima prerez $(t, s) : e \to g$, onda vilicu nazivamo **rascijepljenom**.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "t"] \arrow[ddd, "e"'] & & B \arrow[ddd, "e"] \\
& A \arrow[ur, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\
& B \arrow[dr, "e"] & \\
C \arrow[ur, "s"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & C
\end{tikzcd}$$

Ako je $h : B \to C$ neki drugi morfizam takav da je $hf = hg$, onda morfizam $hs : C \to D$ faktorizira h kroz e: $hse = hgt = hft = h$. Kako je e epimorfizam, ta je faktorizacija je i jedinstvena, pa je e zapravo koujednačitelj od f i g. Dakle upravo smo pokazali da je svaka rascijepljena vilica automatski koujednačitelj – **rascijepljeni koujednačitelj**. Budući da svaki funktor preslikava rascijepljenu vilicu u drugu rascijepljenu vilicu, slijedi da su svi rascijepljeni koujednačitelji apsolutni kolimesi.

Nadalje, za paralelne morfizme $f, g : C \to D$ u nekoj kategoriji $\mathscr{C}$ kažemo da su **refleksivan par** ukoliko imaju zajednički prerez, tj. ako postoji morfizam $s : D \to C$ takav da je $fs = gs = \mathrm{id}_D$.

Sljedeća propozicija pokazuje zašto su nam uvedeni pojmovi bitni u kategorijama modula.

Propozicija 5.4.3. Neka je (T, μ, η) monada na kategoriji $\mathscr{C}$, a (M, α) T-modul.

1. Par $(TTM, \mu T) \underset{T\alpha}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} (TM, \mu)$ je refleksivan.
2. Dijagram $TTM \underset{T\alpha}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} TM \xrightarrow{\alpha} M$ je rascijepljen koujednačitelj.
3. $\mathscr{C}^T$-morfizam $\alpha : (TM, \mu) \to (M, \alpha)$ je koujednačitelj para iz točke 1.
4. Ako je $f : (M, \alpha) \to (N, \beta)$ morfizam T-modula, onda je $f : M \to N$ jedinstven $\mathscr{C}$-morfizam takav da komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "T\alpha"'] \arrow[d, "TTf"'] & TM \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "Tf"] & M \arrow[d, "f"] \\ TTN \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "T\beta"'] & TN \arrow[r, "\beta"] & N \end{tikzcd}$$

Dokaz. U 1. je traženi zajednički prerez $T\eta$. Dijagram u 2. je vilica po samoj definiciji morfizma modula, a njenom cijepanju svjedoče morfizmi

$$TTM \xleftarrow{\eta T} TM \xleftarrow{\eta} M.$$

Tvrdnja 3. slijedi iz 2. i činjenice da U^T stvara apsolutne kolimese (5.4.1). Konačno, kako prvi lijevi kvadrat u 4. komutira po prirodnosti od μ, a drugi jer je f morfizam T-modula, slijedi da je (TTf, Tf) prirodna transformacija između koujednačiteljskih dijagrama, i f pripadni jedinstveno određeni morfizam između koujednačitelja. □

Kratko možemo reći da je cijela Eilenberg-Mooreova kategorija generirana posebnom klasom koujednačitelja samo iz slobodnih modula.

5.5 Monadičnost

Pretpostavimo da je $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ lijevo adjungiran nekom funktoru F i da je T monada pridružena adjunkciji $F \dashv G$. Kao što smo vidjeli u propoziciji 5.3.2, postoji funktor $K : \mathscr{D} \to \mathscr{C}^T$ takav da je $G = U^T K$. Funktor G nazivamo **monadičnim** kada je funktor usporedbe K ekvivalencija.

Nakon što smo u odjeljku 5.3 pokazali na koji se način slobodni T-moduli ulažu u $\mathscr{D}$, i u 5.4 kako slobodni moduli generiraju ostale, lako je dokazati sljedeći teorem:

Teorem 5.5.1 (Beckov teorem o monadičnosti)**.** Neka je $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ desno adjungiran funktor. G je monadičan ako i samo ako stvara koujednačitelje G-rascijepljenih refleksivnih parova.

Dokaz. Nužnost slijedi iz propozicije 5.4.1 i činjenice da su rascijepljeni koujednačitelji apsolutni.

Obratno, pretpostavimo da G stvara koujednačitelje G-rascijepljenih refleksivnih parova i neka je $(F \dashv G, \eta, \varepsilon)$ adjunkcija, (T, μ, η) pripadna monada, a $K : \mathscr{D} \to \mathscr{C}^T$ funktor usporedbe. Dokažimo da je K esencijalno surjektivan i potpuno vjeran.

Ako je (M, α) modul nad T, po propoziciji 5.4.3, i uz relacije $G\varepsilon F = \mu$ i $GF = T$ je par $\varepsilon F, F\alpha : FGFM \to FM$ G-rascijepljen refleksivan par, a α koujednačitelj od $G\varepsilon F$ i $GF\alpha$. Slijedi da postoji morfizam $q : FM \to Q$ u $\mathscr{D}$ takav da je q koujednačitelj od εF i $F\alpha$, a $Gq = U^T Kq$ koujednačitelj od $G\varepsilon F$ i $GF\alpha$ izomorfan sa α, i posebno također rascijepljen.

$$TTM \underset{T\alpha}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} TM \xrightarrow{U^T Kq} U^T KQ$$

Kako U^T reflektira koujednačitelje U^T-rascijepljenih parova, slijedi da je Kq koujednačitelj u dijagramu

$$(TTM, \mu T) \underset{T\alpha}{\overset{\mu}{\rightrightarrows}} (TM, \mu) \xrightarrow{Kq} KQ,$$

dakle posebno je izomorfan modulu (M, α) od kojeg smo krenuli, pa smo dokazali esencijalnu surjektivnost.

Za proizvoljan D po definiciji je KD jednak modulu $G\varepsilon : TGD \to GD$. Posebno je $G\varepsilon$ rascijepljen koujednačitelj refleksivnoga para $\mu G = G\varepsilon FG$ i $TG\varepsilon = GFG\varepsilon$, pa ga G reflektira u koujednačitelj

$$FGFGD \underset{FG\varepsilon}{\overset{\varepsilon FG}{\rightrightarrows}} FGD \xrightarrow{\varepsilon} D.$$

Budući da je ε_D koujednačitelj, onda je posebno i epimorfizam za svaki $D \in \mathscr{D}$, iz čega slijedi da je G vjeran, pa je zbog $G = U^T K$ i K vjeran.

Konačno, ako je dan morfizam T-modula $f : (GD, G\varepsilon) \to (GD', G\varepsilon)$, gdje su D, $D' \in \mathscr{D}$, onda je $f : GD \to GD'$ po tvrdnji 4. propozicije 5.4.3 jedinstvni morfizam za koji komutira dijagram

$$\begin{tikzcd} GFGFGD \arrow[r, shift left, "G\varepsilon FG"] \arrow[r, shift right, "GFG\varepsilon"'] \arrow[d, "GFGFf"'] & GFGD \arrow[r, "G\varepsilon"] \arrow[d, "GFf"] & GD \arrow[d, "f"] \\ GFGFGD' \arrow[r, shift left, "G\varepsilon FG"] \arrow[r, shift right, "GFG\varepsilon"'] & GFGD' \arrow[r, "G\varepsilon"] & GD', \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

pa budući da je G vjeran, komutiraju i pune linije u dijagramu

$$\begin{tikzcd} FGFGD \arrow[r, shift left, "\varepsilon FG"] \arrow[r, shift right, "FG\varepsilon"'] \arrow[d, "FGFf"'] & FGD \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "Ff"] & D \arrow[d, dotted, "g"] \\ FGFGD' \arrow[r, shift left, "\varepsilon FG"] \arrow[r, shift right, "FG\varepsilon"'] & FGD' \arrow[r, "\varepsilon"] & D'. \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Kako su gornja i donja vilica koujednačitelji, par $(FGFf, Ff)$ inducira morfizam $g : D \to D'$ takav da komutira cijeli dijagram (5.2). Budući da je f jedinstveno određen dijagramom (5.1), slijedi $Gg = U^T f$, dakle i $Kg = f$, pa je K pun. □

Korolar 5.5.2 (Grubi teorem o monadičnosti)**.** Desno adjungiran funktor koji stvara koujednačitelje refleksivnih parova je monadičan.

Primjer 5.5.3.

1. Iz primjera 4.4.2 znamo da je funktor $\mathcal{P} : \mathrm{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ desno adjungiran, a iz korolara 5.5.2 lako slijedi da je i monadičan. Pretpostavimo da su funkcije $f, g : A \to B$ obje prerezi od $\pi : B \to A$, i da je $e : E \to A$ inkluzija podskupa $\{x \in A : f(x) = g(x)\}$, tj. ujednačitelj od f i g. Dokažimo da funktor $\mathcal{P}$ preslikava e u rascijepljen koujednačitelj. Budući da su e i f injekcije, vrijedi $e^{\leftarrow} \circ e^{\rightarrow} = \mathrm{id}$ i $f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = \mathrm{id}$, dok $g^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = e^{\rightarrow} \circ e^{\leftarrow} = (E \cap -)$ slijedi iz $f(x) = g(y) \Rightarrow x = \pi(f(x)) = \pi(g(y)) = y$. Dakle, $\mathcal{P}e = e^{\leftarrow}$ je posebno koujednačitelj od $\mathcal{P}f$ i $\mathcal{P}g$. Kako je $\mathcal{P}$ i konzervativan, slijedi da je $\mathcal{P}$ monadičan. Posebno $\mathcal{P}$ stvara limese, što daje alternativan dokaz kopotpunosti kategorije Set, prednost kojega je što se može poopćiti na sve elementarne topose.

2. Inkluzija refleksivne kategorije $U : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ očito zadovoljava uvjete teorema: kako je U potpuno vjeran, svaka U-rascijepljena vilica je i rascijepljena. Elementarni dokaz ove tvrdnje je zapravo dan u primjeru 5.2.3.
3. Kategorija CompHaus monadična je nad Set. Da je zaboravni funktor desno adjungiran slijedi iz postojanja Stone–Čechove kompaktifikacije (v. primjer 3.4.7), ostatak konstrukcije može se naći u [10].
4. **Algebarske teorije** su algebarske strukture aksiomatizirane identitetama – univerzalno kvantificiranim jednakostima. Primjer algebarske teorije je teorija grupa, danih kao algebarskih struktura s po jednom nularnom (e), unarnom ($(-)^{-1}$) i binarnom ($\cdot$) operacijom koje zadovoljavaju identitete $x(yz) = (xy)z$, $xx^{-1} = e = x^{-1}x$ i $xe = x = ex$. Moduli nad prstenom R su algebarska teorija s nularnom operacijom 0, unarnom operacijom $-$, binarnom operacijom $+$, i još po jednom unarnom operacijom za svaki element prstena R. Slični primjeri su monoidi, prstenovi, algebre, i mnogi drugi. Sve kategorije algebarskih teorija su monadične (s očitim zaboravnim funktorom) nad kategorijom Set. Dokaz i opsežan tretman algebarskih teorija može se naći u [6].

Poglavlje 6

Afini morfizmi

6.1 Aditivne i Abelove kategorije

Podsjetimo da za kategoriju kažemo da je **predaditivna** ako je obogaćena nad monoidalnom kategorijom $(\mathrm{Ab}, \otimes)$. Za svaki objekt A predaditivne kategorije $\mathscr{A}$ Abelova grupa $\operatorname{End} A = \operatorname{Hom}(A, A)$ s operacijom kompozicije čini prsten. Obratno, svaki prsten R možemo shvatiti kao predaditivnu kategoriju s jednim objektom $*$, i skupom morfizama R sa zbrajanjem i kompozicijom morfizama danima zbrajanjem i množenjem u prstenu R.

Ključno svojstvo predaditvnih kategorija je podudaranje konačnih produkata i koprodukata: konačna familija $(A_1, \ldots, A_n)$ u $\mathscr{A}$ ima produkt $(\bigoplus_{i=1}^n A_i, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ ako i samo ako ima koprodukt $(\bigoplus_{i=1}^n A_i, \iota_1, \ldots, \iota_n)$. Objekt $\bigoplus_{i=1}^n A_i$ s kanonskim projekcijama produkta i inkluzijama koprodukta nazivamo **biproduktom** familije $(A_1, \ldots, A_n)$, i on je potpuno karakteriziran algebarski: morfizmi $\pi_i : \bigoplus_{i=1}^n A_i \to A_i$ i $\iota_i : A_i \to \bigoplus_{i=1}^n A_i$ za $i \in \{1, \ldots, n\}$ čine redom stožac produkta i kostožac koprodukta ako i samo ako vrijedi $\pi_i \iota_j = \delta_{ij}$ i $\sum_{i=j}^n \iota_i \pi_i = \mathrm{id}$. Iz ovoga odmah slijedi da je biprodukt apsolutan limes i kolimes: čuva ga svaki aditivan funktor.

Ako predaditivna kategorija ima sve biprodukte nazivamo je i **aditivnom** i tada vrijedi i obrat prethodne primjedbe: budući da za $f, g : A \to B$ vrijedi $f + g = \nabla \circ (f \oplus g) \circ \Delta$, biprodukt rekonstruira aditivnu strukturu kategorije, pa slijedi da je funktor aditivan ako i samo ako čuva binarne produkte ili koprodukte. Posebno su aditivni svi adjungirani funktori između aditivnih kategorija.

Za predaditivnu kategoriju $\mathscr{A}$ i proizvoljnu J, funktorska kategorija $\mathscr{A}^J$ je Ab-obogaćena na očin način (zbog biaditivnosti kompozicije možemo prirodne transformacije zbrajati po komponentama), a ako je $\mathscr{A}$ aditivna, onda je to po propoziciji 2.3.1 i $\mathscr{A}^J$. Dakle ako postoje funktori $\varprojlim$ ili $\varinjlim : \mathscr{A}^J \to \mathscr{A}$ moraju i oni biti aditivni, budući da su adjungirani. I općenito ćemo pretpostavljati da su aditivni svi funktori između aditivnih kategorija, a pod funktorskom kategorijom u tome slučaju podrazumijevati potkategoriju aditivnih funktora.

Beskonačne koprodukte u aditivnim kategorijama označavat ćemo isto s $\bigoplus$, iako se u pravilu ne podudaraju s produktom, budući da je to u skladu s tradicionalnim oznakama u glavnim primjerima aditivnih kategorija.

Budući da konačne biprodukte ima po pretpostavci, aditivna je kategorija konačno potpuna ako i samo ako ima jezgre, i dualno konačno kopotpuna ako i samo ako ima kojezgre. Aditivnu kategoriju koja je i konačno potpuna i kopotpuna nazivamo **predabelovom**, a za predabelovu kategoriju kažemo da je **Abelova** ako su svi monomorfizmi i epimorfizmi regularni, dakle jezgre odnosno kojezgre.

Abelove kategorije imaju daleko više dobrih svojstava nego što bi se na temelju ovog jednostavnog posljednjega aksioma moglo činiti. Osnovna svojstva Abelovih kategorija standardan su dio kursa homološke algebre i ovdje ih nećemo navoditi. Kratki pregled može se naći u [10], ili opsežnije u [20].

6.2 Moduli

Funktor $M : R \to \mathscr{A}$ s prstena R u Abelovu kategoriju A nazivamo **lijevim R-modulom** u kategoriji $\mathscr{A}$, a kategoriju $[R, \mathscr{A}]$ lijevih R-modula u $\mathscr{A}$ označavamo s ${}_R\mathscr{A}$. Naravno, ovakav funktor zadan je samo objektom $M = M(*)$ od $\mathscr{A}$ i homomorfizmom prstenova $\lambda = M_{**} : R \to \operatorname{End} M$, a prirodna transformacija $M \Rightarrow N$ zadana je $\mathscr{A}$-morfizmom $\varphi : M \to N$ takvim da je $\varphi \circ \lambda(r) = \lambda(r) \circ \varphi$ za sve $r \in R$. Analogno možemo definirati desne module kao kontravarijantne funktore $R^{\mathrm{op}} \to \mathscr{A}$, i pripadnu kategoriju $\mathscr{A}_R$. Svaki objekt $A \in \mathscr{A}$ je lijevi i desni $\mathbb{Z}$ modul na jedinstven način, ali također ima i prirodnu strukturu $\operatorname{End} A$ modula, danu inkluzijom pune potkategorije $\{A\}$ u $\mathscr{A}$, odnosno djelovanjem $\mathrm{id} : \operatorname{End} A \to \operatorname{End} A$.

Klasični moduli su u ovim terminima moduli u kategoriji Ab, i primijetimo da su R-S-bimoduli točno lijevi R moduli u kategoriji Mod_S, odnosno ekvivalentno desni S moduli u kategoriji ${}_R\mathrm{Mod}$.

Svaki morfizam prstenova $f : R \to S$ inducira funktor $[f, -] : [S, \mathscr{A}] \to [R, \mathscr{A}]$ koje ćemo označavati s f_* i zvati **restrikcijom skalara duž f**.

Slično, ako je $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ proizvoljan funktor između Abelovih kategorija, onda funktor $[-, F] : {}_R\mathscr{A} \to {}_R\mathscr{A}$ preslikava module u $\mathscr{A}$ u module u $\mathscr{B}$. Posebno, za $A \in \mathscr{A}$ hom funktor $\operatorname{Hom}(-, A) : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ preslikava lijeve module u $\mathscr{A}$ u (obični) desni modul $\operatorname{Hom}(M, A)$, dakle dobivamo funktor $\operatorname{Hom}(M, -) : \mathscr{A} \to \mathrm{Mod}_R$. Za $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}_S$, dakle kada je $M \in {}_R\mathrm{Mod}_S$, funktor $\operatorname{Hom}(M, -)$ desno je adjungiran tenzorskom produktu $- \otimes_R M : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$. Budući da analogna tvrdnja vrijedi za funktor $M \otimes_S - : {}_S\mathrm{Mod} \to {}_R\mathrm{Mod}$, slijedi da je tenzorski produkt koneprekidan u oba argumenta. Općenitije, za prstenove R, S i T je tenzorski produkt nad S bifunktor

$$- \otimes_S - : {}_R\mathrm{Mod}_S \times {}_S\mathrm{Mod}_T \to {}_R\mathrm{Mod}_T,$$

budući da lijevo R-množenje na $M \otimes_R N$ možemo definirati sa $r(m \otimes n) = rm \otimes n$, za svaki $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$.

Primijetimo da je funktor $\mathrm{Hom}(R, -) : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ uvijek izomorfni identiteti, pa isto vrijedi i za njemu lijevo adjungirane funktore $- \otimes_R R$. Za $M \in \mathrm{Mod}_R$, izomorfizam $M \cong \mathrm{Hom}(R, M)$ dan je s $m \mapsto - \cdot m$ u jednom, i $\varphi \mapsto \varphi(1)$ u drugom smjeru. Izomorfizam $M \cong M \otimes_R R$ zadan je s $r \mapsto r \otimes 1$, a inverz je određen s $m \otimes r \mapsto mr$. Analogna tvrdnja vrijedi i za funktore $\mathrm{Hom}(R, -) : {}_R\mathrm{Mod} \to {}_R\mathrm{Mod}$ i $R \otimes_R -$.

Ako sada pogledamo restrikciju skalara $f_* : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$, onda se po gornjoj konstrukciji S-bimodul S po f_* preslikava u S-R bimodul f_*S koji je kao lijevi S-modul jednak S, a desno djelovanje zadano je s $s \cdot r = sf(r)$, $s \in S$, $r \in R$. Lako se vidi da općenito vrijedi $f_* \cong - \otimes_S f_*S$, pa je $f_* \dashv \mathrm{Hom}(f_*S, -)$. Funktor $\mathrm{Hom}(f_*S, -)$ označavamo i s $f^!$ i nazivamo **koproširenjem skalara** duž f. S druge strane je S i R-S-bimodul (gdje lijevo R-množenje dobivamo analognom restrikcijom skalara lijevoga S-modula S) kojega možemo označiti s f^*R, i vrijedi $f_* \cong \mathrm{Hom}(f^*R, -)$, dakle i $- \otimes_R f^*R \dashv f_*$. Funktor $- \otimes_R f^*R$ označavamo i s f^* i nazivamo **proširenjem skalara** duž f.

Dakle vidimo da je restrikcija skalara dio adjungirane trojke $f^* \dashv f_* \dashv f^!$, a do kraja ovoga poglavlja ćemo pokazati i da je svaki drugi vjerni funktor između kategorija modula koji je istovremeno i lijevo i desno adjungiran zapravo ekvivalentan restrikciji skalara, i posebno da (do na ekvivalenciju) dolazi od homomorfizma prstenova.

Osnovni primjer restrikcije skalara je duž inicijalnoga morfizma $u : \mathbb{Z} \to R$. Tada je $u_* : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$ zaboravni funktor, proširenje tenzorski produkt s R nad $\mathbb{Z}$, a koproširenje modul aditivnih morfizam s R.

6.3 Generatori u Abelovim kategorijama

Ako je objekt P Abelove kategorije $\mathscr{A}$ generator, onda je $\mathrm{Hom}(P, -) : \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$ vjeran funktor, pa budući da je svaka Abelova kategorija balansirana i konzervativan. Dakle, svaki generator (ili općenitije i familija generatora) Abelove kategorije je automatski jak. Nadalje, ako $\mathscr{A}$ ima koprodukte, onda je za svaki objekt $A \in \mathscr{A}$ morfizam κ dijagrama 2.5 kvocijent od $P^{\oplus I}$ za neki skup I. Štoviše, u ovom kontekstu generatori imaju i jače svojstvo: svaki objekt A je kojezgra nekoga morfizma

$P^{\oplus J} \to P^{\oplus I}$, kojega konkretno možemo dobiti iz dijagrama

$$P^{\oplus J} \twoheadrightarrow K \xhookrightarrow{\ker \kappa} P^{\oplus I} \xrightarrow{\kappa} A.$$

Kažemo da P **konačno generira** A ukoliko za I možemo odabrati konačan skup, a da ga **konačno prezentira** ako i J možemo odabrati konačan. Budući da je za I konačan $\mathrm{Hom}(P^{\oplus J}, P^{\oplus I}) \cong \mathrm{Hom}(P, P)^{\oplus (I \times J)}$ imamo da je svaki objekt A kojega P konačno generira kolimes dijagrama morfizama $P \to P$, a svaki A koji je konačno prezentiran je kolimes konačnoga takvoga dijagrama.

Objekt P takav da funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ čuva sve koprodukte nazivamo **kompaktnim**. Kako je funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ i desno egzaktan ako i samo ako je P projektivan, slijedi da je $\mathrm{Hom}(P, -)$ koneprekidan točno kada je P kompaktan i projektivan.

Odmah iz definicija slijedi da je prsten R kompaktan projektivni generator u kategoriji modula Mod_R, no sljedeća propozicija pokazuje da nije jedini takav objekt.

Propozicija 6.3.1. Za objekt $P \in \mathrm{Mod}_R$ vrijedi:

1. P je generator ako i samo ako je R direktni sumand od P^n za neki $n \in \mathbb{N}$.
2. P je projektivan ako i samo ako je direktni sumand od $R^{\oplus I}$ za neki skup I.
3. Ako je P konačno generiran onda je kompaktan.
4. Ako je P projektivan i kompaktan, onda je konačno generiran.

Dokaz. 1. Budući da je R generator, svaki R-modul je direktni sumand slobodnog modula $R^{\oplus I}$ za neki I. No ako je R direktan sumand od P^n, onda isto očito vrijedi i za P, dakle i P je generator.
Obratno, postoji kvocijent $P^{\oplus I} \twoheadrightarrow R$, no R je generiran jedinicom koja je slika neke konačne sume u $P^{\oplus I}$, dakle možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je I konačan.

2. Ako je P projektivan, onda se cijepa egzaktni niz

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^{\oplus I} \longrightarrow P \longrightarrow 0,$$

pa tvrdnja vrijedi.
Obratno, pretpostavimo da je za neki R-modul A modul $P \oplus A$ projektivan, i da su dani morfizam $f : P \to N$ i epimorfizam $e : M \twoheadrightarrow N$. Tada po

pretpostavci postoji morfizam g koji faktorizira $f\pi$ u dijagramu

$$\begin{tikzcd} A \oplus P \arrow[r, shift left, "\pi"] \arrow[d, dashed, "g"] & P \arrow[l, shift left, "\iota"] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "e"] & M \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

a $g\iota$ je onda tražena faktorizacija f kroz e, pa slijedi da je i P projektivan. Posebno je projektivan svaki sumand slobodnoga modula.

3. Za proizvoljnu familiju modula $(M_i)_i$ možemo $\bigoplus_i(P, M_i)$ i $\mathrm{Hom}(P, \bigoplus_i M_i)$ shvatiti kao podmodule od $\mathrm{Hom}(P, \prod_i M_i)$ i očito je:

$$\bigoplus_i \mathrm{Hom}(P, M_i) \leqslant \mathrm{Hom}(P, \bigoplus_i M_i) \leqslant \mathrm{Hom}(P, \prod_i M_i).$$

   Prva inkluzija je jednakost ako je slika svakoga morfizma $P \to \bigoplus_i M_i$ sadržana u konačnoj sumi, što očito vrijedi čim je P konačno generiran.

4. Neka je P direktan sumand slobodnoga modula $R^{\oplus I}$. Po prethodnom dijelu dokaza, slika inkluzije $P \to R^{\oplus I}$ sadržana je u konačnoj sumi, tj. P je sumand konačno generiranoga modula, pa je i sam konačno generiran.

$\square$

Kao što ćemo vidjeti, postojanje kompaktnih projektivnih generatora i karakterizira kategorije modula. Svaki objekt P Abelove kategorije $\mathscr{A}$ je prirodno lijevi $\mathrm{End}\,P$-modul, a funktor $\mathrm{Hom}({}_{\mathrm{End}\,P}P, -) : \mathscr{A} \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{End}\,P}$ komponiran sa zaboravnim funktorom $\mathrm{Mod}_{\mathrm{End}\,P} \to \mathrm{Ab}$ točno je $\mathrm{Hom}({}_{\mathbb{Z}}P, -) : \mathscr{A} \to \mathrm{Ab}$, pa slijedi da je vjeran i koneprekidan točno kada je P kompaktan projektivni generator od $\mathscr{A}$, štoviše, vrijedi teorem:

Teorem 6.3.2 (Gabriel-Mitchell)**.** Ako je P kompaktan projektivni generator kopotpune Abelove kategorije $\mathscr{A}$, onda je funktor $\mathrm{Hom}(P, -) : \mathscr{A} \to \mathrm{Mod}_{\mathrm{End}\,P}$ ekvivalencija kategorija.

Dokaz. Pokažimo prvo da je funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ potpuno vjeran, dakle da je bijektivna familija funkcija

$$\mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(P,-)_{AB}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, A), \mathrm{Hom}(P, B)).$$

Ova je familija prirodna u A, dakle za svaki objekt $B \in \mathscr{B}$ definira prirodnu transformaciju $\alpha : \mathrm{Hom}(-, B) \Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, -), \mathrm{Hom}(P, B))$ funktora s $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$ u Ab. Budući da je po pretpostavci funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ koneprekidan, oba ova funktora su neprekidna (dakle prevode kolimese u $\mathscr{A}$ u limese u Ab). Nadalje, ako primijenimo propoziciju 2.1.3 na koprezentaciju kogeneratorom P objekta A u $\mathscr{A}^{\mathrm{op}}$, dobivamo da je α_A određena funktorijalno morfizmom α_P, dakle α je cijela zadana samo komponentom u P, i izomorfizam je ako je i α_P izomorfizam. No, $\alpha_P : \mathrm{Hom}(P, B) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, P), \mathrm{Hom}(P, B))$ pridružuje morfizmu $b : P \to B$ funkciju $- \circ b$, što je upravo djelovanje $- \cdot b$ od $\mathrm{Hom}(P, P)$ na $\mathrm{Hom}(P, B)$, dakle α_P je kanonski izomorfizam.

Uzmimo sada proizvoljan modul $M \in \mathrm{Mod}_{\mathrm{End}\,P}$ s prezentacijom

$$\mathrm{Hom}(P, P)^{\oplus J} \xrightarrow{g} \mathrm{Hom}(P, P)^{\oplus I} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Kako je $\mathrm{Hom}(P, -)$ koneprekidan i pun, slijedi da je $g = \mathrm{Hom}(P, f)$ za neki morfizam $f : P^{\oplus J} \to P^{\oplus I}$, a da je $M \cong \mathrm{Hom}(P, \operatorname{coker} f)$. Dakle funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ je i esencijalno surjektivan, pa je ekvivalencija kategorija. □

Odgovor na neke od dualnih problema, konkretno postojanja kogeneratora i injektivnih objekata u kategorijama modula, daje sljedeći teorem:

Teorem 6.3.3. U kategoriji Mod_R je $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ s prirodnom strukturom desnoga R-modula injektivni kogenerator.

Dokaz. Abelova grupa (i općenitije modul nad domenom glavnih ideala) je injektivna ako i samo ako je djeljiva (v. [20]) pa je posebno i $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ injektivan $\mathbb{Z}$-modul. Funktor $\mathrm{Hom}(R, -) : \mathrm{Ab} \to \mathrm{Mod}_R$ je koproširenje skalara duž morfizma $\mathbb{Z} \to R$, dakle desno je adjungiran egzaktnom funktoru, i lako je vidjeti da takav funktor čuva injektivne objekte.

Pretpostavimo da je $f : M \to N$ morfizam u Mod_R različit od 0, a $n \in N$ netrivijalan element slike od f. Budući da je $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ djeljiva, postoji netrivijalan morfizam sa cikličke grupe nR u $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, dakle i netrivijalan morfizam $h : R \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Preslikavanje

$$\begin{aligned} g &: nR \to \mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ g &: nr \mapsto hr, \end{aligned}$$

je očito R-linearno i po injektivnosti se proširuje do $\tilde{g} : R \to \mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Posebno je $[\tilde{g}(n)](1) = g(1) \neq 0$, dakle i $gf \neq 0$, što dokazuje da je $\mathrm{Hom}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ kogenerator. □

6.4 Eilenberg–Wattsov teorem

Iz prethodnog odjeljka slijedi da svaka kategorija modula zadovoljava i uvjete posebnog teorema o adjungiranom funktoru i njegovog duala, dakle glavni rezultati prethodnih poglavlja se bitno pojednostavljuju:

Korolar 6.4.1. Neke je $G : \mathrm{Mod}_S \to \mathscr{C}$ funktor s kategorije modula u lokalno malu kategoriju $\mathscr{C}$. G je neprekidan ako i samo ako je desno adjungiran. Ako je G neprekidan, vjeran i egzaktan, onda je monadičan. Slično, funktor $F : \mathrm{Mod}_S \to \mathscr{C}$ je koneprekidan ako i samo ako je lijevo adjungiran, a komonadičan ako je uz to vjeran i egzaktan.

Ako u ovaj korolar uvrstimo $\mathscr{C} = \mathrm{Ab}$, on postaje posebno jednostavan. Neprekidan funktor $G : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Ab}$ desno je adjungiran nekom aditivnom funktoru $F \dashv G$, pa za svaki S-modul N vrijedi:

$$\mathrm{Hom}(F\mathbb{Z}, N) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, GN) \cong GN,$$

dakle funktor G je izomorfan kovarijantnom hom funktoru $\mathrm{Hom}(F\mathbb{Z}, -)$, iz čega po jedinstvenosti lijevo adjungiranoga funktora slijedi $F \cong - \otimes F\mathbb{Z}$. Cilj nam je poopćiti ovaj rezultat s Ab i na proizvoljne kategorije modula.

Lema 6.4.2. Za svaki funktor $F : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$ između kategorija modula, postoji prirodna transformacija $\tau : - \otimes_R FR \Rightarrow F$ takva da je τ_R izomorfizam.

Dokaz. Za svaki modul $M \in \mathrm{Mod}_R$ možemo definirati preslikavanje

$$\alpha_M : M \cong \mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(FR, FM),$$

i ono će biti R-linearno: za $m \in M$, $n \in N$, $r \in R$ vrijedi

$$[\alpha(m)r](n) = [\alpha(m)](rn) = F(m \cdot -)[F(r \cdot -)(n)] = F(mr \cdot -) = \alpha(mr)(n).$$

I izomorfizam $M \cong \mathrm{Hom}(R, M)$ i F_{RM} su prirodni u M, pa je α prirodna transformacija kojoj po adjunkciji $- \otimes_R FR \dashv \mathrm{Hom}(FR, -)$ odgovara prirodna transformacija $\tau_M : M \otimes_R FR \to FM$. Posebno je $\tau_R : r \otimes n \mapsto [\alpha(r)](n) = rn$ upravo kanonski izomorfizam $R \otimes_R FR \cong FR$. □

Naravno, kako je F aditivan, uz propoziciju 2.1.3 slijedi da je τ izomorfizam i na svakom modulu slobodnom nad konačnim skupom. Ako je F egzaktan, onda je to i na konačno prezentiranim modulima, a ako je koneprekidan, što je slučaj koji promatramo, onda je τ izomorfizam $- \otimes_R FR \cong F$.

Teorem 6.4.3 (Eilenberg–Watts)**.** Funktor $H_{RS} : {}_R\mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Fun}_{cc}(\mathrm{Mod}_R, \mathrm{Mod}_S)$ s kategorije R-S-bimodula u kategoriju koneprekidnih funktora sa Mod_R u Mod_S definiran s $H_{RS} = (-\otimes_R)-$ je ekvivalencija kategorija.

Dokaz. Da je funktor H esencijalno surjektivan, tj. da je svaki koneprekidni funktor $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$ izomorfan tenzoriranju nekim R-S-bimodulom P je glavna tvrdnja teorema i dokazana je u prethodnoj raspravi. Ako je $f : P \to P'$ homomorfizam bimodula, onda $0 = Hf = - \otimes_R f$ povlači da je i $0 = R \otimes_R f \cong f$, pa je H i vjeran.

Preostaje dokazati da za svaku prirodnu transformaciju $\alpha : - \otimes_R P \Rightarrow - \otimes_R P'$ vrijedi $\alpha = - \otimes_R f$ za neki homomorfizam R-S-bimodula $f : P \to P'$. Uzmimo za f kompoziciju $P \cong R \otimes_R P \xrightarrow{\alpha} R \otimes_R P' \cong P'$. Znamo da je α desno S-linearno po definiciji, pa je to i f, a lijeva R-linearnost od f slijedi iz prirodnosti od α i S-linearnosti R-množenja: komutira dijagram

$$\begin{array}{ccc} R \otimes_R P & \xrightarrow{(r\cdot -)\otimes \mathrm{id}} & R \otimes_R P \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ R \otimes_R P' & \xrightarrow{(r\cdot -)\otimes \mathrm{id}} & R \otimes_R P'. \end{array}$$

Konačno, trebamo provjeriti da je $\alpha = - \otimes_R f$. No $\alpha_R - \mathrm{id}_R \otimes_R f = 0$ vrijedi po konstrukciji, pa opet iz činjenice da su funktori $- \otimes_R P$ i $- \otimes_R P'$ koneprekidni isto vrijedi i za sve druge objekte. $\square$

Napomena. Za $P \in {}_R\mathrm{Mod}_S$ i $Q \in {}_S\mathrm{Mod}_T$ imamo da je

$$H_{ST}Q \circ H_{RS}P = (- \otimes_R P) \otimes_S T \cong - \otimes_R (P \otimes_S T) = H_{RT}(P \otimes_S Q)$$

i $H_{RR}R \cong \mathrm{Id}_R$. Dakle, H je uspostavlja ekvivalenciju bikategorije bimodula sa 2-kategorijom koneprekidnih funktora između kategorija (desnih) modula.

Nadalje, ako je $\mathscr{A}$ kopotpuna Abelova kategorija i $N : R \to \mathscr{A}$ lijevi R-modul u $\mathscr{A}$ i tada se može konstruirati funktor $- \otimes_R N : \mathrm{Mod}_R \to \mathscr{A}$ lijevo adjungiran funktoru $\mathrm{Hom}(N, -)$, i dalje se potpuno analogno dokazuje nešto općenitija tvrdnja: kategorije ${}_R\mathscr{A}$ i $\mathrm{Fun}_{cc}(\mathscr{A}, \mathrm{Mod}_R)$ su ekvivalentne. Vidi [14] za detalje.

6.5 Monade na kategorijama modula

Eilenberg–Wattsov teorem nam posebno omogućava klasifikaciju koneprekidnih monada na kategoriji modula. Svaka takva monada (T, μ, η) na Mod_R izomorfna je tenzoriranju R-bimodulom TR. Nadalje, funktor TT je izomorfan tenzoriranju s $TR \otimes_R TR$, a jedinica i množenje monade dane su morfizmima bimodula. Pokazat ćemo zapravo da je ova korespondencija koneprekidnih monada i bimodula ekvivalencija kategorija.

Propozicija 6.5.1. Kategorija $\mathrm{Mon}_{\mathrm{cc}}(\mathrm{Mod}_R)$ koneprekidnih monada nad Mod_R ekvivalentna je kategoriji $\mathrm{Mon}({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$ monoida u monoidalnoj kategoriji $({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$.

Dokaz. Ako je zadan monoid (T, m, e) u ${}_R\mathrm{Mod}_R$, možemo definirati prirodne transformacije

$$\eta = \mathrm{Id} \cong - \otimes_R R \xrightarrow{-\otimes e} - \otimes_R T$$
$$\mu = (- \otimes_R T) \otimes_R T \cong - \otimes_R (T \otimes_R T) \xrightarrow{-\otimes m} - \otimes_R T,$$

i asocijativnost i jediničnost od η i μ slijede iz asocijativnosti i jediničnosti od e i m. Dakle $(- \otimes_R T, \mu, \eta)$ je monada nad Mod_R.

Ako je (T', m', e') drugi monoid, a $(- \otimes_R T', \mu', \eta')$ analogno konstruirana monada, onda iz Eilenberg–Wattsovog teorema znamo da je svaka prirodna transformacija $\lambda : - \otimes_R T \to - \otimes_R T'$ oblika $- \otimes_R l$ za neki morfizam bimodula $l : T \to T'$. Jasno je i da je $- \otimes_R l$ morfizam monada ako i samo ako je l morfizam monoida.

Dakle, konstruirali smo potpuno vjeran funktor s monoida u monade, pa trebamo još pokazati da je svaka monada (T, μ, η) nad Mod_R dolazi na ovaj način od nekoga monoida. Po Eilebnerg–Wattsu, TR ima strukturu R-bimodula i $T \cong - \otimes_R TR$. Sada definiramo m i e tako da komutira

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\sim"] & - \otimes_R TR \\
\mathrm{Id} \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, "\sim"] & - \otimes_R R, \arrow[u, "-\otimes_R e"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mu"'] & (- \otimes_R T) \otimes_R T \arrow[r, "\sim"] & - \otimes_R (T \otimes_R T) \arrow[d, "-\otimes_R m"] \\
T \arrow[rr, "\sim"] & & - \otimes_R T,
\end{tikzcd}$$

pa je (TR, m, e) monoid, a njemu pridružena monada izomorfna s (T, μ, η) po konstrukciji. □

Napomena. Iz bikategorijske perspektive ovaj rezultat je očit: 2-kategorija modula, koneprekidnih funktora i prirodnih transformacija ekvivalentna je bikategoriji modula, bimodula i morfizama bimodula, pa su i monade nad Mod_R u prvoj kategoriji ekvivalentne monadama nad Mod_R u drugoj, a to su upravo monoidi u $({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$.

Trivijalni monoid R je inicijalan u $\mathrm{Mon}({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$, pa zaboravni funktor $U : ({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R) \to (\mathrm{Ab}, \otimes)$, budući da je monoidalan, daje funktor

$$R/\mathrm{Mon}({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R) \cong \mathrm{Mon}({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R) \to R/\mathrm{Ring},$$

koji monoidu (S, m, e) u $({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$ pridružuje prsten $e : R \to S$ pod R. Ovo preslikavanje je izomorfizam kategorija.

Propozicija 6.5.2. Kategorija $\mathrm{Mon}({}_R\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$ monoida u ${}_R\mathrm{Mod}_R$ izomorfna je kategoriji R/Ring prstenova pod prstenom R.

Dokaz. Ako je dan homomorfizam prstenova $f : R \to S$, onda na S možemo definirati lijevo i desno R-množenje preko restrikcije skalara, dakle $sr = sf(r)$ i $rs = f(r)s$ za $r \in R$ i $s \in S$. Po asocijativnosti množenja u S su ova dva djelovanja kompatibilna, tj. S je R-bimodul. Funkcija f je R-linearna i slijeva i zdesna po definiciji, a množenje $m : S \otimes_{\mathbb{Z}} S \to S$ zadovoljava $(sr)s' = s(rs')$ za $s, s' \in S$ i $r \in R$ pa se faktorizira jedinstveno kroz kvocijent $S \otimes_{\mathbb{Z}} S \twoheadrightarrow S \otimes_R S$. Dobiveno preslikavanje $m' : S \otimes_R S \to S$ je R-linerano s obje strane i asocijativno, opet po asocijativnosti u S, a f je jedinica monoida po definiciji.

U drugome smjeru za monoidu (T, m, e) pridružujemo morfizam prstenova $e : R \to T$. Da je e jedinica za m znači točno da je $rt = e(r)t$ i $tr = te(r)$ za $r \in R$, $t \in T$, a množenje u prstenu T je upravo dano kompozicijom $T \otimes_{\mathbb{Z}} T \twoheadrightarrow T \otimes_R T \xrightarrow{m} T$. Dakle ove dvije konstrukcije na objektima su inverzne.

Konačno ako je dan homomorfizam prstenova $h : S \to T$ koji je morfizam sa $f : R \to S$ na $g : R \to T$, onda

$$h(rs) = h(f(r)s) = h(f(r))h(s) = g(r)h(s) = rh(s)$$

povlači da je lijevo, a analogni argument i da je desno R-linearan, dakle morfizam je R-bimodula R i T. Dalje je jasno da je homomorfizam $h : S \to T$ morfizam monoida pridruženih morfizmima f i g ako i samo ako je $hg = f$. $\square$

Napomena. Kategoriju $(R \downarrow \mathrm{Ring})$ možemo nazvati i *kategorijom algebri* nad nekomutativnim prstenom R, no ako je R komutativan ovaj se pojam ne podudara nužno sa standardnom definicijom algebre nad komutativnim prstenom, kao morfizma $f : R \to A$ takvoga da je $\mathrm{im}\, f \subseteq Z(A)$, tj. slabiji je. U terminima monoida, klasični pojam odgovara monoidu u kategoriji $(\mathrm{Mod}_R, \otimes_R)$, koja je za netrivijalan R prava potkategorija od $({}_R\mathrm{Mod}_R \otimes_R)$.

Sada pretpostavimo da nam je dana R-algebra $\eta : R \to T$ i pripadna monada $(- \otimes_R T, \mu, \eta)$. Restrikcija skalara $\eta_* : \mathrm{Mod}_T \to \mathrm{Mod}_R$ je vjeran, neprekidan i koneprekidan funktor, dakle monadična je. U elementarnim terminima, jasno je da je $M \in \mathrm{Mod}_R$ modul nad monadom $- \otimes_R T$ točno ako je i modul nad T, i to na takav način da je $\eta_* M_T = M_R$. Dakle, imamo i sljedeći rezultat:

Propozicija 6.5.3. Ako je (T, μ, η) koneprekidna monada na kategoriji Mod_R, onda je $\eta_R : R \to TR$ algebra nad R, a kategorija modula nad T ekvivalentna je kategoriji Mod_{TR} s restrikcijom skalara η_* kao zaboravnim funktorom.

6.6 Afini morfizmi

Prateći terminologiju iz [15], definiramo **neprekidni morfizam** $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ između Abelovih kategorija kao adjungirani par $f^* \dashv f_* : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$, **plosnati morfizam** kao neprekidni morfizam f takav da je f^* egzaktan, a **afini morfizam** kao neprekidni morfizam f takav da je funktor f_* konzervativan (ekvivalentno: vjeran) i lijevo adjungiran, dakle postoji funktor $f^! : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ takav da je $f^* \dashv f_* \dashv f^!$.

Po Eilenberg–Wattsovom teoremu, neprekidni morfizmi između kategorija modula u korespondenciji su s bimodulima, a neprekidni morfizam $f : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_S$ je plosnat ako i samo ako je pridruženi R-S-bimodul M ($f^* \cong - \otimes_R M$) plosnat nad R. Sada analiziramo posebno situaciju afinoga morfizma.

Naravno, svaki morfizam prstenova $f^\circ : R \to S$ inducira afini morfizam $f : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$, pri čemu su funktori f_* i f^* redom restrikcija i proširenje skalara duž f°.

Obratno, ako je dana Abelova kategorija $\mathscr{A}$ i afini morfizam $f : \mathscr{A} \to \mathrm{Mod}_R$, onda je funktor f_* monadičan, i već iz propozicije 6.5.3 slijedi da je ekvivalentan restrikciji skalara, i mogu se eksplicitno izračunati prsten TR i homomorfizam η_R. No to će ipak biti lakše učiniti preko teorema 6.3.2, a primjedbu da je $\mathscr{A} \cong \mathrm{Mod}_{TR}$ ćemo zasada iskoristiti samo da zaključimo da je $\mathscr{A}$ a fortiori kopotpuna.

Očito vrijedi $f_* \cong \mathrm{Hom}(R, f_* -)$, iz čega po pretpostavci imamo

$$u_* f_* \cong u_* \circ \mathrm{Hom}(R, f_* -) \cong \mathrm{Hom}(f^* R, -),$$

gdje je $u_* : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Ab}$ zaboravni funktor. Iz ovoga slijedi da je funktor $\mathrm{Hom}(f^* R, -)$ i sam vjeran i lijevo i desno adjungiran, dakle objekt $f^* R$ je kompaktan projektivni generator od $\mathscr{A}$. Nadalje, $f^* R$ je lijevi modul nad R u $\mathscr{A}$, a za svaki $A \in \mathscr{A}$ je izomorfizam Abelovih grupa $\vartheta_A : \mathrm{Hom}({}_R f^* R, A) \cong f_* A$ zadan s $\alpha \mapsto (f_* \alpha \circ \eta)(1)$ i R-linearan, dakle funktor $\mathrm{Hom}({}_R f^* R, -)$ izomorfan je s f_*.

S druge strane, označimo s T prsten $\mathrm{Hom}(f^* R, f^* R)$ i s g morfizam $R \to T$ zadan lijevim djelovanjem R na $f^* R$, tj. eksplicitno s $r \mapsto f^*(r \cdot -)$, pa je po konstrukciji $g_*({}_T f^* R) = {}_R f^* R$. Slijedi i

$$g_* \mathrm{Hom}({}_T f^* R, -) = \mathrm{Hom}({}_R f^* R, -) \cong f_*,$$

ali funktor $\mathrm{Hom}({}_T\mathrm{Mod} f^*R, -)$ je po teoremu 6.3.2 ekvivalencija.

Teorem 6.6.1. Neka je R prsten, $\mathscr{A}$ Abelova kategorija, a $f : \mathscr{A} \to \mathrm{Mod}_R$ afini morfizam. Funktor f_* ekvivalentan je restrikciji skalara duž homomorfizma $f^\circ : R \to \mathrm{Hom}(f^*R, f^*R)$ zadanog s $f^\circ(r) = f^*(r \cdot -)$ za svaki $r \in R$.

Naravno, ako je afini morfizam f iz teorema i plosnat, onda

Precizniji rezultat dobivamo ako u gornjem teoremu uzmemo $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}_S$ i dodamo zahtjev $f^*R \cong S$. Tada je $T \cong \mathrm{End}\, S \cong S$ i $\mathrm{Hom}({}_S S, -) \cong \mathrm{Id}$ izomorfizam kategorija.

Propozicija 6.6.2. Neka su R i S prstenovi, a $f : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$ afini morfizam takav da je $f^*R \cong S$. Tada je f_* izomorfan restrikciji skalara duž morfizma $f^\circ : R \to S$ zadanoga sa $f^\circ(r) = [f^*(r \cdot -)](1)$ za svaki $r \in R$.

Ova korespondencija afinih morfizama i morfizama prstenova je i funktorijalna. Označimo s Aff kategoriju čiji su objekti Abelove kategorije, a morfizmi klase izomorfizama afinih morfizama između njih. Pridruživanje (klase izomorfizama) restrikcije skalara f morfizmu prstenova $f^\circ : R \to S$ određuje tada kontravarijantan funktor[1] s Ring u Aff, a pridruživanje restrikcije $h : \mathrm{Mod}_T \to \mathrm{Mod}_S$ morfizmu $h : S \to T$ algebri $f^\circ : R \to S$ i $g^\circ : R \to T$ daje kontravarijantan funktor $R/\mathrm{Ring} \to \mathrm{Aff}/\mathrm{Mod}_R$. Ovaj je funktor očito vjeran, a lako ćemo vidjeti i da je pun. Ako su naime zadani morfizmi prstenova $f^\circ : R \to S$ i $g^\circ : R \to T$ i afini morfizam $h : \mathrm{Mod}_T \to \mathrm{Mod}_S$ takav da je $f \circ h = g$, onda imamo

$$h^*S \cong h^*f^*R \cong g^*R \cong T,$$

pa iz prethodne propozicije znamo da h dolazi od restrikcije skalara.

Ako s pAffMod označimo potkategoriju od Aff čiji su objekti kategorije modula, a morfizm $f : \mathrm{Mod}_S \to \mathrm{Mod}_R$ je afini morfizam f takav da je $f^*R \cong S$, onda možemo zaključiti:

Teorem 6.6.3. Kategorija R/Ring kontravarijantno se ulaže u kategoriju $\mathrm{Aff}/\mathrm{Mod}_R$ i dualna je potkategoriji $\mathrm{pAffMod}/\mathrm{Mod}_R$.

6.7 Moritina ekvivalencija

Budući da u prethodnom odjeljku afine morfizme karakteriziramo do na ekvivalenciju, postavlja se pitanje koliko je prsten R određen kategorijom R modula, tj.

[1] Prelazak na klase izomorfizama nam treba upravo kako bi dobili strogu funktorijalnost.

što možemo reći o odnosu prstenova R i S takvih da je $\mathrm{Mod}_R \cong \mathrm{Mod}_S$, koje ćemo nazivati **Morita ekvivalentnima**.

Prije svega, primijetimo da je u komutativnom slučaju ovo pitanje trivijalno.

Propozicija 6.7.1. Za svaki prsten R vrijedi $\mathrm{End}(\mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}_R}) \cong Z(R)$

Dokaz. Ako je $\mathscr{C}$ proizvoljna kategorija, onda je za svaki objekt $C \in \mathscr{C}$ i prirodnu transformaciju $\alpha : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$ pridruživanje $\alpha \mapsto \alpha_C$ homomorfizam $e_C : \mathrm{End}\,\mathrm{Id} \to \mathrm{End}\, C$ monoida. Štoviše, budući da za svaki morfizam $f : C \to C$ komutira

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & C \arrow[d, "\alpha_C"] \\ C \arrow[r, "f"] & C, \end{tikzcd}$$

slika od h je sadržana u centru od $\mathrm{End}\, C$.

Ako je objekt objekt R generator od $\mathscr{C}$, onda je e_R monomorfizam: za $\alpha, \beta : \mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$ takve da je $\alpha_R = \beta_R$ i $f : R \to C$ imamo $\alpha_C f = f\alpha_R = f\beta_R = \beta_C f$. Budući da je R generator, a f proizvoljan, slijedi $\alpha_C = \beta_C$.

Dakle, za $\mathscr{C} = \mathrm{Mod}_R$ je $\mathrm{End}\,\mathrm{Id}$ podmonoid od $Z(\mathrm{End}\, R) = Z(R)$. Obratno, lako se vidi da je djelovanje elementom $r \in Z(R)$ prirodna transformacija $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$. $\square$

Korolar 6.7.2. Komutativni prstenovi su Morita ekvivalentni ako i samo ako su izomorfni.

U nekomutativnom je slučaju još iz teorema 6.3.2 jasno da Moritina ekvivalencija ne određuje potpuno prsten. Naime, ako je R-bimodul P kompaktni projektivni generator u kategoriji Mod_R, onda je kategorija Mod_R ekvivalentna kategoriji modula nad prstenom $\mathrm{End}\, P$, a funktor $\mathrm{Hom}(P, -)$ restrikciji skalara duž morfizma $f : R \to \mathrm{Hom}(P, P)$ zadanoga lijevim djelovanjem od R.

Prsten R^n na primjer je R-bimodul (po dijagonali $R \to R^n$), i kompaktan je projektivni generator kategorije Mod_R za svaki $n \in N$. Odgovarajući morfizam $f : R \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n) \cong M_n(R)$ je inkluzija dijagonalnih matrica. Funktor usporedbe $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_{M_n(R)}$ preslikava R u R-$M_n(R)$-bimodul $M_{1n}(R)$, i očito je izomorfan funktoru $\mathrm{Hom}(M_{n1}(R), -)$, gdje $M_{n1}(R)$ ima prirodnu strukturu $M_n(R)$-R-bimodula, pa je njemu adjungirani, dakle i inverzni funktor dan s $- \otimes_{M_n(R)} M_{n1}(R)$.

I općenito, iz Eilenberg–Wattsovog teorema slijedi da je Moritina ekvivalencija prstenova R i S uvijek zadana S-R-bimodulom P i R-S bimodulom Q takvim da je P kompaktni projektivni generator kategorija Mod_R i ${}_S\mathrm{Mod}$, Q kompaktni projektivni generator kategorija Mod_S i ${}_R\mathrm{Mod}$, i $P \otimes_S Q \cong R$, a $Q \otimes_R P \cong S$.

Bibliografija

[1] *nLab*, siječanj 2015, http://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.

[2] J. Adámek, H. Herrlich i G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories The Joy of Cats*, online verzija, 2004, http://katmat.math.uni-bremen.de/acc/.

[3] M. Barr i C. Wells, *Toposes, triples and theories*, Springer-Verlag New York, 1985.

[4] H. Bass, *Algebraic K theory*, WA Benjamin, Inc., 1968.

[5] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1: Basic Category Theory*, Cambridge University Press, 1994.

[6] ______, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*, Cambridge University Press, 1994.

[7] ______, *Handbook of Categorical Algebra 3: Categories of Sheaves*, Cambridge University Press, 1994.

[8] M. Kashiwara i P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, 2006.

[9] G. M. Kelly, *Basic concepts of enriched category theory*, CUP Archive, 1982, http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html.

[10] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[11] S. Mac Lane i I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic*, Springer Science & Business Media, 1992.

[12] M. Makkai, *Avoiding the axiom of choice in general category theory*, Journal of Pure and Applied Algebra **108** (1996), br. 2, 109 – 173, ISSN 0022-4049.

[13] E. Moggi, *Notions of computation and monads*, Information and computation **93** (1991), br. 1, 55–92.

[14] A. Nyman i S. P. Smith, *A generalization of Watts's Theorem: Right exact functors on module categories*, (2008), http://arxiv.org/abs/0806.0832.

[15] A. L. Rosenberg, *Noncommutative schemes*, Compositio Mathematica **112** (1998), br. 1, 93–125, ISSN 0010-437X.

[16] M. A. Shulman, *Set theory for category theory*, (2008), http://arxiv.org/abs/0810.1279v2.

[17] R. Vakil, *Foundations of algebraic geometry*, skripta, 2014, http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/.

[18] A. Vistoli, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, (2004), http://arxiv.org/abs/math/0412512v4.

[19] C. E. Watts, *Intrinsic characterizations of some additive functors*, Proceedings of the American Mathematical Society **11** (1960), br. 1, 5–8.

[20] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge university press, 1995.

[21] Z. Škoda, *Noncommutative localization in noncommutative geometry*, (2004), http://arxiv.org/abs/math/0403276.

Sažetak

U ovome radu obrađene su osnove teorije kategorija: reprezentabilnost, limesi, adjungirani funktori i monade, te su izloženi dokazi nekih ključnih rezultata (teoremi o adjungiranom funktoru, Barr–Beckov teorem). Uveden je jezik monoidalnih i obogaćenih kategorija, i ukratko je opisana bikategorijska perspektiva. Alat razvijen u prethodnim poglavljima primjenjen je na kategorije modula nad nekomutativnim prstenom s jedinicom, i obrađena su neka svojstva egzaktnosti funktora koja imaju geometrijske interpretacije. Posebno je dana karakterizacija afinih morfizama u kategoriju modula.

Summary

The thesis covers the basics of category theory: representability, limits, adjoint functors and monads, and presents proofs of some of the key results in the field (adjoint functor theorems, Barr–Beck theorem). The language of monoidal and enriched categories is introduced, and the bicategorical perspective is briefly described. The tools developed in the previous chapters are applied to categories of modules over a unital non-commutative ring, and certain exactness properties with geometric interpretations are studied. A characterization of affine morphisms into a category of modules is obtained.

Životopis

Rođen sam 8. travnja 1990. godine u Vinkovcima, gdje sam i pohađao osnovnu školu (1997-2005.), te kasnije matematičku gimnaziju Matije Antuna Reljkovića (2005-2009.). Po završetku srednje škole upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tokom prve godine studija sudjelovao sam na međunarodnom studentskom natjecanju Vojtěch Jarník, a tokom druge godine bio demonstrator. Preddiplomski studij završio sam 2012. i potom upisao diplomski studij teorijske matematike na istome fakultetu.