SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Blaslov

NULTOČKE HOLOMORFNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Marcela Hanzer

Zagreb, srpanj 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Prije svega zahvaljujem se svojoj mentorici prof.dr.sc. Marceli Hanzer na ponuđenoj temi i na svim savjetima koji su mi uvelike pomogli da napišem ovaj rad. Veliko hvala mojoj obitelji, a posebice mojim roditeljima, prvenstveno zbog toga što su mi uopće omogućili da studiram u Zagrebu, a onda i zato što su me poticali, hrabrili i vjerovali u mene. Hvala i Donatu na svim njegovim odricanjima, na strpljenju i na ogromnoj podršci koju mi pruža. I na kraju se zahvaljujem svim mojim prijateljicama i prijateljima koji su kroz cijelo studiranje uvijek bili uz mene.

Sadržaj

Uvod

Proučavanje nultočaka je jedan od osnovnih zadataka izučavanja holomorfnih funkcija. Osnovni rezultat koji se odnosi na skup nultočaka nekonstantnih holomorfnih funkcija jest: za svaki skup točaka $A \subset \Omega$ koji nema gomilište u Ω, postoji holomorfna funkcija na Ω čiji je skup nultočaka upravo skup A. To nam iskazuje Weierstrassov teorem.

Teorem. *Neka je Ω otvoren skup u S^2, $\Omega \neq S^2$. Pretpostavimo $A \subset \Omega$ i A nema gomilište u Ω. Svakom $\alpha \in A$ pridružen je pozitivan broj $m(\alpha)$. Tada postoji $f \in H(\Omega)$ čije su sve nultočke sadržane u A, i takva da f ima nultočku reda $m(\alpha)$ u svakoj točki $\alpha \in A$.*

Navest ćemo i Mittag-Lefflerov teorem koji za unaprijed zadane glavne dijelove meromorfnih funkcija, pronalazi meromorfnu funkciju s upravo tim, unaprijed zadanim, glavnim dijelovima.

Teorem. *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup u ravnini, $A \subset \Omega$ i A nema gomilište u Ω i svakom $\alpha \in A$ pridružen je pozitivan broj $m(\alpha)$ i racionalna funkcija*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}.$$

Tada postoji meromorfna funkcija f na Ω, čiji je glavni dio na svakom $\alpha \in A$ upravo P_α, i koja nema drugih polova u Ω.

Proučavat ćemo beskonačne produkte, definirati elementarne faktore i uvesti kanonski produkt. Također ćemo navesti Weierstrassov teorem o faktorizaciji koji tvrdi da za cijelu funkciju f koja nema nultočku u 0 i čije su nultočke $z_1, z_2, ...$, navedene prema njihovim kratnostima, postoji cijela funkcija g i niz nenegativnih cijelih brojeva $\{p_n\}$ tako da vijedi

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Jensenova formula će nam dati mogućnost da odredimo uvjete koje nultočke nekonstantnih holomorfnih funkcija moraju zadovoljavati, uz neke dodatne uvjete.

Zatim ćemo uvesti Blaschkeove produkte i dokazati Müntz-Szaszov teorem:

Teorem. *Pretpostavimo* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ *i neka je* X *zatvarač u* $C(I)$ *skupa svih linearnih kombinacija funkcija*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

(a) Ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, *tada je* $X = C(I)$.

(b) Ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ *i ako* $\lambda \notin \{\lambda_n\}, \lambda \neq 0$, *tada* X *ne sadrži funkciju* t^{λ}.

Na kraju rada navest ćemo neke rezultate kroz riješene primjere. No, prije svega započet ćemo s kratkim pregledom osnovnih pojmova, definicija i teorema iz područja kompleksne analize i teorije mjere, koji će nam koristiti u ovom radu pri dokazivanju raznih rezultata koji vrijede za nultočke holomorfnih funkcija.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi, definicije i teoremi

U ovom poglavlju navest ćemo neke osnovne definicije i teoreme iz područja kompleksne analize i teorije mjere koji će nam biti potrebni u ovom radu.

Definicija 1.0.1. *Neprazan otvoren povezan skup u* $\mathbb{C}$ *zove se područje.*

Definicija 1.0.2. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *je derivabilna u* $z_0 \in \Omega$ *ako postoji kompleksan broj* $f'(z_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Definicija 1.0.3. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Funkcija* f *je holomorfna (analitička) na* Ω *ako je derivabilna u svakoj točki.*

Definicija 1.0.4. *Skup* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je zatvoren ako je* $\mathbb{C} \setminus S$ *otvoren.* $S \subseteq \mathbb{C}$ *je ograničen ako postoji* $M > 0$ *takav da je* $S \subseteq \bar{K}(0, M)$*.*

Napomena 1.0.5. $K \subseteq \mathbb{C}$ *je kompaktan ako je zatvoren i ograničen.*

Definicija 1.0.6. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Niz funkcija* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$*, konvergira funkciji* $f : \Omega \to \mathbb{C}$*:*

(a) po točkama ako

$$(\forall z \in \Omega)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(b) uniformno na Ω *ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in \Omega)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

(c) lokalno uniformno na Ω *ako za svaki* $z \in \Omega$ *postoji* $r > 0$ *takav da* $K(z, r) \subseteq \Omega$ *i niz* (f_n) *konvergira uniformno na* $K(z, r)$ *prema* f*.*

Teorem 1.0.7. (Weierstrassov teorem o nizu holomorfnih funkcija) *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Neka je* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$*, niz holomorfnih funkcija koji lokalno uniformno konvergira na* Ω *prema* f*. Tada je*

(i) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfna*

(ii) za svaki $k \in \mathbb{N}$ *niz* $((f_n)^{(k)})$ *konvergira lokalno uniformno na* Ω *prema* $f^{(k)}$*.*

Definicija 1.0.8. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*.* $z_0 \in \Omega$ *je izolirana nultočka od* f *ako* $\exists r > 0$ *takav da je* $f(z) \neq 0, \forall z \in K^*(z_0, r) := K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ *i* $f(z_0) = 0$*.*

Teorem 1.0.9. *Neka je* Ω *povezan otvoren skup,* $f \in H(\Omega)$ *i*

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}.$$

Tada je ili $Z(f) = \Omega$ *ili* $Z(f)$ *nema gomilište u* Ω*. U drugom slučaju, svakom* $a \in Z(f)$ *odgovara jedinstven pozitivan cijeli broj* $m = m(a)$ *takav da*

$$f(z) = (z - a)^m g(z) \qquad (z \in \Omega),$$

gdje je $g \in H(\Omega)$ *i* $g(a) \neq 0$*. Štoviše,* $Z(f)$ *je najviše prebrojiv.*

Cijeli broj m se zove *red nultočke* koju f ima u točki a. Očito, $Z(f) = \Omega$ ako i samo ako je f identički jednaka 0. $Z(f)$ zovemo *skup nultočaka* od f.

Definicija 1.0.10. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*. Ako je* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *holomorfna na* $\mathbb{C}$*, kažemo da je* f *cijela funkcija.*

Teorem 1.0.11. (O razvoju holomorfne funkcije Laurentov red) *Neka je* f *holomorfna funkcija na kružnom vijencu* $K(z_0, r, R)$*. Tada je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

gdje su koeficijenti dani s

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

gdje je γ *bilo koja pozitivno orijentirana kružnica s centrom u* z_0 *radijusa* $\rho \in \langle r, R \rangle$*.*

Definicija 1.0.12. *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$. $z_0 \in \mathbb{C}$ *je singularitet funkcije* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *ako* $\exists r > 0$ *takav da je* $K^*(z_0, r) \subseteq \Omega$ *i* $f \in H(K^*(z_0, r))$.
$z_0 \in \mathbb{C}$ *je izolirani singularitet ako postoji okolina od* z_0 *takva da na toj okolini* f *nema drugih singulariteta (osim* z_0*).*

Definicija 1.0.13. *Po teoremu o razvoju holomorfne funkcije u Laurentov red (Teorem 1.0.11) je*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Kažemo da je z_0 *(pri čemu je* z_0 *izolirani singuaritet):*

(1) uklonjiv singularitet ako je $a_{-n} = 0$, *za svaki* $n \geq 1$.

(2) pol m-tog reda ($m \in \mathbb{N}$) *ako je* $a_{-m} \neq 0$, $a_{-n} = 0$, *za svaki* $n > m$.

(3) bitan singularitet ako postoji beskonačan niz $m_1 < m_2 < m_3 < ...$ *takav da je* $a_{m_k} \neq 0$, *za svaki* $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.0.14. *Kažemo da je* f *meromorfna ako su joj jedini singulariteti izolirani, a među njima može imati samo uklonjive i polove.*

Definicija 1.0.15. *Neka su* $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to X$ *zatvorene krivulje u topološkom prostoru* X. *Kažemo da su* γ_0 *i* γ_1 *homotopne u* X *(X-homotopne) ako postoji neprekidno preslikavanje* $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ *(homotopija u* X *od krivulje* γ_0 *do krivulje* γ_1 *) takvo da*

$$h(0, t) = \gamma_0(t), \quad h(1, t) = \gamma_1(t), \quad h(s, 0) = h(s, 1),$$

za sve $s \in [0, 1]$ *i* $t \in [0, 1]$.
Ako stavimo $\gamma_s(t) = h(s, t)$ *dobit ćemo jedno-parametarsku familiju zatvorenih krivulja* γ_s *u* X, *koja sadrži* γ_0 *i* γ_1.
Ako je $\gamma_0 : [0, 1] \to X$ *petlja u području* X, *kažemo da je ona nul-homotopna u* X *ako je homotopna u* X *s konstantnom petljom* $\gamma_1(t) = \gamma_0(0) = \gamma_0(1), \forall t \in [0, 1]$.

Definicija 1.0.16. *Područje* Ω *je jednostavno povezano ako je svaka zatvorena krivulja u* Ω *nul-homotopna u* Ω.

U proučavanju holomorfnih funkcija često upotpunjujemo kompleksnu ravninu sa "točkom" $\{\infty\}$.

Definicija 1.0.17. (Riemannova sfera) $S^2 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Za svaki $r > 0$, $D'(\infty; r)$ je skup svih kompleksnih brojeva z takvih da $|z| > r$. Stavimo $D(\infty; r) = D'(\infty; r) \cup \{\infty\}$. Podskup od S^2 je otvoren ako i samo ako je unija krugova $D(a; r)$, gdje su a proizvoljne točke od S^2, a r proizvoljni pozitivni brojevi. Na $S \setminus \{\infty\}$, to daje uobičajenu euklidsku topologiju ravnine.

Teorem 1.0.18. *Za podskup ravnine Ω sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) Ω je jednostavno povezan (1-povezan).

(b) $S^2 \setminus \Omega$ je povezan.

(c) Svakoj $f \in H(\Omega)$ korespondira $F \in H(\Omega)$ tako da je $F' = f$.

(d) Ako $f \in H(\Omega)$ i f nema nultočaka u Ω, tada postoji $g \in H(\Omega)$ takva da je $f = e^g$.

Teorem 1.0.19. *Svaki otvoren skup Ω u ravnini je unija nizova $\{K_n\}, n = 1, 2, 3, ...$, kompaktnih skupova takvih da*

(a) K_n leži u unutrašnjosti od K_{n+1}, za $n = 1, 2, 3, ...$

(b) Svaki kompaktan podskup od Ω leži u nekom K_n.

(c) Svaka komponenta od $S^2 \setminus K_n$ sadrži komponentu od $S^2 \setminus \Omega$, za $n = 1, 2, 3, ...$

Svojstvo (c) ustvari govori da K_n nema rupa, osim onih koje su nametnute od rupa u Ω. Uočite da za Ω nismo pretpostavili da je povezan. Unutrašnjost od skupa E je, po definiciji, najveći otvoren podskup od E.

Teorem 1.0.20. (Rungeov teorem) *Neka je Ω otvoreni skup u ravnini, neka je A zatvoren podskup od $S^2 \setminus \Omega$ koji siječe svaku komponentu od $S^2 \setminus \Omega$. Za funkciju $f \in H(\Omega)$ postoji niz $\{R_n\}$ racionalnih funkcija kojima svi polovi leže u skupu A, takav da $R_n \to f$ uniformno na kompaktnim podskupovima od Ω.*

U specijalnom slučaju u kojem je $S^2 \setminus \Omega$ povezan (a to za područje znači da je Ω jednostavno povezano), možemo uzeti $A = \{\infty\}$ pa dobivamo polinome P_n takve da $P_n \to f$ uniformno na kompaktnim podskupovima od Ω.

Teorem 1.0.21. (Cauchyjeva integralna formula) *Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ diferencijabilna funkcija i $\bar{K}(z_0, r) \subseteq \Omega$. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \qquad \forall z \in K(z_0, r), \tag{1.1}$$

gdje je $\gamma(t) = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Definicija 1.0.22. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *otvoren skup. Funkcija* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *je harmonijska u točki* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *ako postoje* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ *i vrijedi*

$$\bigtriangledown u(x_0, y_0) := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

Teorem 1.0.23. *Ako je* $f \in H(\Omega)$, *gdje je* Ω *otvoren skup u ravnini, i ako* f *nema nultočaka u* Ω, *tada je* $\ln |f|$ *harmonijska u* Ω.

Lema 1.0.24. (Fatouova lema) *Neka je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor s mjerom. Ako su* $f_n : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{F}$*-izmjerive funkcije, tada za svaki pozitivan cijeli broj* n *vrijedi*

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Definicija 1.0.25. H^∞ *je prostor svih ograničenih holomorfnih funkcija na* U, *normiranih s*

$$||f||_\infty = \sup_{z\in U} |f(z)|.$$

$L^\infty(T)$ *je prostor svih (ekvivalentnih klasa) osnovnih ograničenih funkcija na* T, *normiranih.*
$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *je otvoren jedinični krug u kompleksnoj ravnini, a* T *je kružnica (rub).*

Teorem 1.0.26. *Svakoj funkciji* $f \in H^\infty$ *korespondira funkcija* $f^* \in L^\infty(T)$, *definirana gotovo svugdje sa*

$$f^*(e^{it}) := \lim_{r\to 1} f(re^{it}).$$

Vrijedi jednakost $||f||_\infty = ||f^*||_\infty$. *Za svaki* $z \in U$ *vrijedi Cauhyjeva formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f^*(w)}{w - z} dw,$$

gdje je γ *pozitivno orijentiran jedinični krug:* $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Teorem 1.0.27. *Neka je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor s mjerom. Ako je* $f : X \to [0, \infty]$ $\mathcal{F}$*-izmjeriva funkcija,* $E \in \mathcal{F}$ *i* $\int_E f d\mu = 0$ *tada je* $f = 0$ *gotovo svugdje na* E.

Teorem 1.0.28. (Stone-Weierstrassov teorem) *Ako je* f *neprekidna kompleksna funkcija definirana na* $[a, b]$, *tada postoji niz polinoma* P_n *takav da je*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x),$$

to jest $P_n(x)$ *konvergira uniformno k* $f(x)$ *na* $[a, b]$.

Definicija 1.0.29. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $A \subseteq X$.

(a) *Skup* A *je zatvoren ako je njegov komplement* A^C *otvoren.*

(b) *Zatvarač skupa* A *je najmanji zatvoren skup u* X *koji sadrži* A.

Definicija 1.0.30. *Kompleksna funkcija* φ *na kompleksnom vektorskom prostoru* V *je kompleksni linearni funkcional ako vrijedi:*

(i) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

(ii) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

za sve kompleksne brojeve α *i za sve* $x, y \in V$. *Realna funkcija* φ *na kompleksnom (ili realnom) vektorskom prostoru* V *je realni linearni funkcional ako (i) vrijedi za sve realne* α.

Teorem 1.0.31. (Posljedica Hahn-Banachovog teorema) *Neka je* M *linearni potprostor normiranog linearnog prostora* X, *i neka je* $x_0 \in X$. *Tada je* x_0 *u zatvaraču* $\bar{M}$ *od* M *ako i samo ako ne postoji ograničen linearni funkcional* f *na* X *takav da je* $f(x) = 0$ *za sve* $x \in M$ *i* $f(x_0) \neq 0$.

Teorem 1.0.32. (Morerin teorem) *Neka je* Ω *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$.
Neka je $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *neprekidna funkcija takva da za svaki trokut* $\triangle \subset \Omega$ *vrijedi*

$$\int_{\delta\triangle} f(z)dz = 0.$$

Tada je f *holomorfna na* Ω.

Definicija 1.0.33. *Slovom* m *označit ćemo Lebesgueovu mjeru podijeljenu s* $\sqrt{2\pi}$. *Za* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *definiramo integral*

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dm(x),$$

za svaki $t \in \mathbb{R}$. *Funkciju* $\hat{f}$ *zovemo Fourierova transformacija od* f.

Poglavlje 2

Beskonačni produkti

Osnovni rezultat koji se odnosi na skup $A \subset \Omega$ takav da A nema gomilište u Ω, daje nam Weierstrassov teorem (Teorem 3.0.7) koji tvrdi da je svaki skup $A \subset \Omega$ koji nema gomilište u Ω skup nultočaka neke holomorfne funkcije f. Ako je $A = \{\alpha_n\}$, tada je prirodan način konstrukcije od f, izabrati neku funkciju f_n iz $H(f)$ tako da f_n ima samo jednu nultočku, u α_n, i da proučimo limes produkta

$$p_n = f_1 f_2 \cdots f_n$$

kada $n \to \infty$. To se mora se urediti tako da niz $\{p_n\}$ konvergira k nekoj $f \in H(\Omega)$ i tako da limes funkcije f nije 0, osim u propisanim točkama α_n. Stoga je poželjno početi sa proučavanjem nekih općih svojstava beskonačnih produkata.

Definicija 2.0.1. *Pretpostavimo da je $\{u_n\}$ niz kompleksnih brojeva*

$$p_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \cdots (1 + u_n), \tag{2.1}$$

i $\quad p = \lim_{n\to\infty} p_n \quad$ *postoji. Tada pišemo*

$$p = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n). \tag{2.2}$$

p_n je parcijalni produkt beskonačnog produkta p (2.2). Reći ćemo da beskonačan produkt (2.2) konvergira ako niz $\{p_n\}$ konvergira.

U proučavanju parcijalnih nizova $\sum a_n$ značajno je kada a_n ide u 0 jako brzo. Analogno, u proučavanju beskonačnih produkata značajno je kada faktori jesu ili nisu blizu 1. Ovo opravdava gornju notaciju: $1 + u_n$ je blizu 1 ako je u_n blizu 0.

Lema 2.0.2. *Ako su $u_1, ..., u_N$ kompleksni brojevi, i ako definiramo*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1+u_n), \quad p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|), \tag{2.3}$$

tada

$$p_N^* \leq \exp(|u_1| + ... + |u_N|) \tag{2.4}$$

i

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1. \tag{2.5}$$

Dokaz. Za $x \geq 0$, vrijedi nejednakost $1 + x \leq e^x$. Zamijenimo li x sa $|u_1|$ dobivamo $(1 + |u_1|) \leq e^{|u_1|}$. Isto napravimo za $|u_2|$, $|u_3|$ i tako sve do $|u_N|$. Množenjem svih tih nejednakosti dobivamo sljedeće

$$\prod_{n=1}^{N}(1+|u_n|) \leq e^{|u_1|+|u_2|+...+|u_N|}$$

to jest, vrijedi (2.4).

Nejednakost (2.5) ćemo dokazati indukcijom.
Za $N = 1$ (*baza indukcije*), (2.5) trivijalno vrijedi. Naime, uvrštavanjem dobijemo

$$|p_1 - 1| \leq p_1^* - 1 \quad \Leftrightarrow \quad |1 + u_1 - 1| \leq 1 + |u_1| - 1 \quad \Leftrightarrow \quad |u_1| \leq |u_1|.$$

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k = 1, ..., N - 1$.
Korak indukcije: Vrijedi

$$p_{k+1} - 1 = p_k(1 + u_{k+1}) - 1 = (p_k - 1)(1 + u_{k+1}) + u_{k+1}.$$

Iz gornje jednakosti i iz pretpostavke indukcije dobivamo

$$|p_{k+1} - 1| \leq (p_k^* - 1)(1 + |u_{k+1}|) + |u_{k+1}|$$

$$= p_k^*(1 + |u_{k+1}|) - 1 - |u_{k+1}| + |u_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1$$

i time je tvrdnja (2.5) dokazana. □

Teorem 2.0.3. *Pretpostavimo da je $\{u_n\}$ niz omeđenih kompleksnih funkcija na skupu S, takvih da $\sum |u_n(s)|$ konvergira uniformno na S. Tada produkt*

$$f(s) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(s)) \tag{2.6}$$

konvergira uniformno na S.
Također vrijedi $f(s_0) = 0$ za neki $s_0 \in S$ ako i samo ako $u_n(s_0) = -1$ za neki n.

Štoviše, ako je $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ bilo koja permutacija od $\{1, 2, 3, ...\}$, tada također imamo

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_{nk}(s)) \qquad (s \in S). \tag{2.7}$$

Dokaz. Pretpostavke teorema impliciraju da je $\sum |u_n(s)|$ omeđeno na S, i ako p_N označava N-ti parcijalni produkt od (2.6), zaključujemo iz Leme 2.0.2 da postoji konstanta $C < \infty$ takva da je $|p_N(s)| \leq C$ za sve N i za sve s.

Uzmimo ϵ, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Postoji neki N_0 za koji vrijedi

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |u_n(s)| < \epsilon \quad (s \in S). \tag{2.8}$$

Neka je $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ permutacija od $\{1, 2, 3, ...\}$. Ako je $N \geq N_0$, i ako je M toliko velik da je

$$\{1, 2, ..., N\} \subset \{n_1, n_2, ..., n_M\}, \tag{2.9}$$

i ako $q_M(s)$ označava M-ti parcijalni produkt od (2.7), onda

$$q_M - p_N = p_N \left\{ \prod (1 + u_{nk}) - 1 \right\}. \tag{2.10}$$

n_k koji se pojavljuju u (2.10) su svi različiti i veći od N_0. Stoga, (2.8) i Lema 2.0.2 pokazuju da vrijedi

$$|q_M - p_N| \leq |p_N|(e^{\epsilon} - 1) \leq 2|p_N|\epsilon \leq 2C\epsilon \tag{2.11}$$

Ako je $n_k = k \quad (k = 1, 2, 3, ...)$, tada $q_M = p_M$ i (2.11) pokazuje da $\{p_N\}$ konvergira uniformno ka funkciji f.
Također, (2.11) pokazuje da vrijedi

$$|p_M - p_{N_0}| \leq 2|p_{N_0}|\epsilon \quad (M > N_0), \tag{2.12}$$

pa je $|p_M| \geq (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}|$. Odatle

$$|f(s)| \geq (1 - 2\epsilon)|p_{N_0}(s)| \quad (s \in S), \tag{2.13}$$

što pokazuje da je $f(s) = 0$ ako i samo ako je $p_{N_0}(s) = 0$.

Konačno, (2.11) također pokazuje da $\{q_M\}$ konvergira k istoj točki kao i $\{p_N\}$. $\square$

Teorem 2.0.4. *Pretpostavimo* $0 \leq u_n < 1$. *Tada*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0 \quad \text{ako i samo ako} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty.$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ako stavimo $p_N = (1-u_1)\cdots(1-u_N)$, tada $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_N > 0$, pa $p = \lim p_N$ postoji. Ako $\sum u_n < \infty$, Teorem 2.0.3 povlači $p > 0$.

($\Rightarrow$) Obratom po kontrapoziciji dobit ćemo drugi smjer. Pretpostavimo dakle $\sum u_n = \infty$. Želimo dokazati da je tada $p \leq 0$. Iz prethodnog i iz Leme 2.0.2 imamo

$$p \leq p_N = \prod_{1}^{N}(1-u_n) \leq \exp\{-u_1 - u_2 - \cdots - u_N\} = e^{-\sum_{n=1}^{N} u_n},$$

i posljednji izraz teži u 0 kad $N \to \infty$, ako $\sum u_n = \infty$. □

Često ćemo koristiti sljedeće posljedice Teorema 2.0.3.

Teorem 2.0.5. *Pretpostavimo* $f_n \in H(\Omega)$ *za* $n = 1, 2, 3, ...,$ *niti jedan* f_n *nije jednak* 0 *u niti jednoj komponenti od* Ω, *i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| \tag{2.14}$$

konvergira uniformno na kompaktnom podskupu od Ω. *Tada produkt*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \tag{2.15}$$

konvergira uniformno na kompaktnom podskupu od Ω. *Dakle,* $f \in H(\Omega)$.

Nadalje, imamo

$$m(f;z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n;z) \quad (z \in \Omega), \tag{2.16}$$

gdje je $m(f;z)$ *definiran kao nultočka od* f *u točki* z *kratnosti* m. *[Ako* $f(z) \neq 0$, *tada* $m(f;z) = 0$.*]*

Dokaz. Prvi dio slijedi direktno iz Teorema 2.0.3 za $u_n(z) = -(1-f_n(z)) = f_n(z) - 1$. Kako $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ konvergira uniformno na kompaktnom podskupu od Ω, to iz Teorema 2.0.3 slijedi da

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + u_n(z)) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z) - 1) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

konvergira uniformno na kompaktnom posdkupu od Ω.

Za drugi dio teorema vidimo da svaki $z \in \Omega$ ima okolinu V, u kojem najviše konačno mnogo f_n-ova ima nultočku, zbog (2.14). Uzmimo najprije takve faktore. Produkt preostalih nema nultočaka u V, prema Teoremu 2.0.3, i to daje (2.16). Također vidimo da najviše konačno mnogo izraza u (2.16) može biti pozitivno za bio koji dani $z \in \Omega$. $\square$

Poglavlje 3

Weierstrassov teorem o faktorizaciji

U ovom poglavlju definirat ćemo elementarne faktore te preko njih uvesti kanonski produkt koji je od velikog interesa u proučavanju cijelih funkcija konačnog reda. Također ćemo iskazati i dokazati Weierstrassov teorem o faktorizaciji i neke njegove posljedice.

Definicija 3.0.1. *Stavimo* $E_0(z) = 1 - z$, *i za* $p = 1, 2, 3, ...$

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Ovakve funkcije, koje je uveo Weierstrass, zovu se elementarni faktori. Njihova jedina nultočka je $z = 1$. *Njihova korisnost ovisi o činjenici da su blizu 1 ako* $|z| < 1$ *i ako je* p *velik, inače* $E_p(1) = 0$.

Lema 3.0.2. *Za* $|z| \leq 1$ *i* $p = 0, 1, 2, ...,$

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Dokaz. Za $p = 0$, tvrdnja je očita. Za $p \geq 1$, deriviranjem dobijemo

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left\{z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right\}.$$

Dakle, $-E_p{}'$ ima nultočku reda p u točki $z = 0$ (vidi Teorem 1.0.9), i $-E_p{}'$ ima nenegativne realne koeficijente. Kako

$$1 - E_p(z) = \int_{[0,z]} -E_p'(w)dw,$$

$1 - E_p$ ima nultočku reda $p + 1$ u $z = 0$ i ako

$$\varphi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}},$$

tada $\varphi(z) = \sum a_n z^n$, gdje su svi $a_n \geq 0$. Odatle $|\varphi(z)| \leq \varphi(1) = 1$ za $|z| \leq 1$, i odatle slijedi tvrdnja leme. $\square$

Teorem 3.0.3. *Neka je $\{z_n\}$ niz kompleksnih brojeva takav da vrijedi: $z_n \neq 0$ i $|z_n| \to \infty$ kada $n \to \infty$. Ako je $\{p_n\}$ niz nenegativnih cijelih brojeva takvih da*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty \tag{3.1}$$

za svaki pozitivan r (gdje je $r_n = |z_n|$), tada beskonačan produkt

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{3.2}$$

definira cijelu funkciju P koja ima nultočku u svakoj točki z_n i koja nema niti jednu drugu nultočku u toj ravnini.
Preciznije, ako se α pojavljuje m puta u nizu $\{z_n\}$, tada P ima nultočku reda m u α. Na primjer, uvjet (3.1) je uvijek zadovoljen ako je $p_n = n - 1$.

Dokaz. Za svaki r vrijedi $r_n > 2r$ za sve osim konačno mnogo n, stoga $\frac{r}{r_n} < \frac{1}{2}$ za ove n, pa (3.1) vrijedi za $1 + p_n = n$, to jest za $p_n = n - 1$.

Sada fiksirajmo r. Ako je $|z| \leq r$, Lema 3.0.2 pokazuje

$$|1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n})| \leq |\frac{z}{z_n}|^{1+p_n} \leq (\frac{r}{r_n})^{1+p_n} \tag{3.3}$$

ako $r_n \geq r$, što vrijedi za sve osim za konačno mnogo n-ova. Sada slijedi iz (3.1) da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n})|$$

konvergira uniformno na kompaktnom skupu u ravnini, i Teorem 2.0.5 daje željeni zaključak. $\square$

Napomena 3.0.4. *Za određeni niz $\{r_n\}$, (3.1) vrijedi za konstantni niz $\{p_n\}$. U interesu nam je uzeti tu konstantu što je moguće manju; dobivena funkcija (3.2) se*

tada zove kanonski produkt koji korespondira sa $\{z_n\}$.
Na primjer, ako $\sum \frac{1}{r_n} < \infty$, *možemo uzeti* $p_n = 0$, *i kanonski produkt je jednostavno*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{z_n}).$$

Ako $\sum \frac{1}{r_n} = \infty$, *ali* $\sum \frac{1}{r_n^2} < \infty$, *kanonski produkt je*

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{z/z_n}.$$

Kanonski produkti su od velikog interesa u proučavanju cijelih funkcija konačnog reda.

Sada ćemo navesti Weierstrassov teorem o faktorizaciji.

Teorem 3.0.5. (Weierstrassov teorem o faktorizaciji) *Neka je* f *cijela funkcija, pretpostavimo* $f(0) \neq 0$, *i neka su* $z_1, z_2, z_3, ...$ *nultočke od* f, *navedene prema njihovim kratnostima. Tada postoji cijela funkcija* g *i niz nenegativnih cijelih brojeva* $\{p_n\}$ *tako da vijedi*

$$f(z) = e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right). \tag{3.4}$$

Napomena 3.0.6.
(a) *Ako* f *ima nultočku reda* k *u* $z = 0$, *prethodni teorem primijenimo na* $\frac{f(z)}{z^k}$.
(b) *Faktorizacija* (3.4) *nije jedinstvena; jedinstvena faktorizacija može biti povezana s onim funkcijama* f *čije nultočke zadovoljavaju uvjet koji zahtjeva konvergenciju kanonskog produkta.*

Dokaz. Neka je P produkt u Teoremu 3.0.3, formiran s nultočkama od f. Tada f/P ima samo uklonjive singularitete u ravnini, stoga je cijela funkcija (ili se može proširiti u cijelu funkciju). Također, f/P nema nultočku, i budući da je ravnina jednostavno povezana (1-povezana), $f/P = e^g$, za neke cijele funkcije g. (Vidi Teorem 1.0.18). □

Dokaz Teorema 3.0.3 se lako prilagodi za bilo koji otvoreni skup. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.0.7. (Weierstrassov teorem) *Neka je* Ω *otvoren skup u* S^2, $\Omega \neq S^2$. *Pretpostavimo* $A \subset \Omega$ *i* A *nema gomilište u* Ω. *Svakom* $\alpha \in A$ *pridružen je pozitivan broj* $m(\alpha)$. *Tada postoji* $f \in H(\Omega)$ *čije su sve nultočke sadržane u* A, *i takva da* f *ima nultočku reda* $m(\alpha)$ *u svakoj točki* $\alpha \in A$.

Dokaz. Pojednostavljuje argument, a ne uzrokuje gubitak općenitosti na pretpostavku da $\infty \in \Omega$, ali $\infty \notin A$. (Ako to odmah ne vrijedi, onda linearnom razlomljenom transformacijom možemo napraviti da ipak vrijedi.) Tada je $S^2 \setminus \Omega$ neprazan kompaktan podskup ravnine i ∞ nije limes od A.

Ako je A konačan, možemo uzeti racionalnu funkciju f.

Ako je A beskonačan, tada je A prebrojiv (inače bi postojalo gomilište u Ω). Neka je $\{\alpha_n\}$ niz čiji su članovi u A i u kojem je svaki $\alpha \in A$ naveden točno $m(\alpha)$ puta. Povežimo sa svakim $\{\alpha_n\}$ točku $\beta_n \in S^2 \setminus \Omega$ tako da vrijedi $|\beta_n - \alpha_n| \leq |\beta - \alpha_n|$ za sve $\beta \in S^2 \setminus \Omega$; ovo je moguće jer je $S^2 \setminus \Omega$ kompaktan skup. Tada

$$|\beta_n - \alpha_n| \to 0$$

kada $n \to \infty$; inače bi A imao gomilište u Ω. Tvrdimo da

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)$$

ima željena svojstva.

Stavimo $r_n = 2|\alpha_n - \beta_n|$. Neka je K kompaktan podskup od Ω. Kada $r_n \to 0$, tada postoji N takav da $|z - \beta_n| > r_n$ za sve $z \in K$ i za sve $n \geq N$. Odatle je

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right| \leq \frac{1}{2},$$

iz čega slijedi, prema Lemi 3.0.2,

$$\left|1 - E_n\left(\frac{\alpha_n - \beta_n}{z - \beta_n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \qquad (z \in K, n \geq N),$$

što vrijedi za sve osim konačno mnogo n-ova pa slijedi da red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|1 - E_{p_n}(\frac{z}{z_n})\right|$$

konvergira uniformno na kompaktnom podskupu od Ω te smo time dokazali teorem, prema Teoremu 2.0.5. □

Kao posljedicu možemo dobiti karakterizaciju meromorfnih funkcija (vidi Definiciju 1.0.14).

Teorem 3.0.8. *Svaka meromorfna funkcija na otvorenom skupu Ω je kvocijent dviju funkcija koje su holomorfne u Ω.*

Obrat teorema je očit; Ako su $g \in H(\Omega), h \in H(\Omega)$ i h nije 0 u niti jednoj komponenti od Ω, tada je g/h meromorfna na Ω.

Dokaz. Pretpostavimo da je f meromorfna na Ω. Neka je A skup svih polova od f u Ω i neka je za svaki $\alpha \in A, m(\alpha)$ red pola od f u α. Prema Teoremu 3.0.7 postoji $h \in H(\Omega)$ takva da h ima nultočku kratnosti $m(\alpha)$ u svakom $\alpha \in A$, i h nema niti jednu drugu nultočku.
Stavimo $g = fh$. Singulariteti od g u točkama od A se mogu ukloniti, stoga možemo proširiti g tako da $g \in H(\Omega)$. Očito, $f = g/h$ u $\Omega \setminus A$, to jest meromorfnu funkciju f smo prikazali kao kvocijent dviju holomorfnih funkcija g i h. □

Poglavlje 4

Mittag-Lefflerov teorem

Mittag-Lefflerov teorem iskazuje za polove meromorfne funkcije analognu tvrdnju tvrdnji Teorema 3.0.7 za nultočke holomorfnih funkcija. Naime, Mittag-Lefflerov teorem za unaprijed zadane glavne dijelove meromorfnih funkcija, pronalazi meromorfnu funkciju upravo s tim, unaprijed zadanim, glavnim dijelovima.

U ovom poglavlju navest ćemo i interpolacijski problem.

Teorem 4.0.1. (Mittag-Lefflerov teorem) *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup u ravnini, $A \subset \Omega$ i A nema gomilište u Ω i svakom $\alpha \in A$ pridružen je pozitivan broj $m(\alpha)$ i racionalna funkcija*

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z-\alpha)^{-j}.$$

Tada postoji meromorfna funkcija f na Ω, čiji je glavni dio na svakom $\alpha \in A$ upravo P_α, i koja nema drugih polova u Ω.

Dokaz. Uzmimo niz $\{K_n\}$ kompaktnih skupova u Ω, kao u Teoremu 1.0.19 : Za $n = 1, 2, 3, ...,$ K_n leži u unutrašnjosti od K_{n+1}, svaki kompaktan podskup od Ω leži u nekom K_n, i svaka komponenta od $S^2 \setminus K_n$ sadrži komponentu od $S^2 \setminus \Omega$. Stavimo $A_1 = A \bigcap K_1$, i $A_n = A \bigcap (K_n \setminus K_{n-1})$ za $n = 2, 3, 4, ...$ Kako je $A_n \subset K_n$ i A nema gomilište u Ω (stoga nema ni u K_n), svaki A_n je konačan skup.
Stavimo

$$Q_n(z) = \sum_{\alpha \in A_n} P_\alpha(z) \qquad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{4.1}$$

Kako je svaki A_n konačan, svaki Q_n je racionalna funkcija. Polovi od Q_n leže u $K_n \setminus K_{n-1}$, za $n \geq 2$. Posebno, Q_n je holomorfna na otvorenom skupu koji sadrži K_{n-1}. Sada, iz Rungeovog teorema (Teorem 1.0.20) slijedi da postoje racionalne funkcije R_n, čiji su svi polovi u $S^2 \setminus \Omega$, tako da

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < 2^{-n} \qquad (z \in K_{n-1}). \tag{4.2}$$

Tvrdimo da

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty}(Q_n(z) - R_n(z)) \qquad (z \in \Omega) \tag{4.3}$$

ima željena svojstva.

Fiksirajmo N. Na K_N imamo

$$f = Q_1 + \sum_{n=2}^{N}(Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}(Q_n - R_n). \tag{4.4}$$

Prema (4.2), svaki član u zadnjoj sumi u (4.4) je manji od 2^{-n} na K_N. Također, posljednji red konvergira uniformno na K_N ka funkciji koja je holomorfna u unutrašnjosti od K_N. Kako su polovi od svake R_n izvan Ω,

$$f - (Q_1 + \cdots + Q_N)$$

je holomorfna u unutrašnjosti od K_N. Tako f ima upravo propisan glavni dio u unutrašnjosti od K_N, i stoga u Ω, jer je N bio proizvoljan. $\square$

Interpolacijski problem. Mittag-Lefflerov teorem možemo kombinirati s Weierstassovim teoremom da bismo dobili rješenje sljedećeg problema: Možemo li uzeti proizvoljan skup $A \subset \Omega$, koji nema gomilište u Ω i pronaći funkciju $f \in H(\Omega)$ koja ima propisane vrijednosti u svakoj točki od A? Odgovor je da možemo. Ustvari, mi možemo i bolje, možemo i propisati vrijednosti konačno mnogo derivacija u svakoj točki od A. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 4.0.2. *Pretpostavimo da je Ω otvoren skup u ravnini, $A \subset \Omega$, A nema gomilište u Ω, i svakom $\alpha \in A$ je pridružen nenegativan cijeli broj $m(\alpha)$ i kompleksni brojevi $w_{n,\alpha}, 0 \leq n \leq m(\alpha)$. Tada postoji $f \in H(\Omega)$ takva da*

$$f^{(n)}(\alpha) = n! w_{n,\alpha} \qquad (\alpha \in A, 0 \leq n \leq m(\alpha)). \tag{4.5}$$

Dokaz. Prema Teoremu 3.0.7, postoji $g \in H(\Omega)$ čije su jedine nultočke u A i takva da g ima nultočku reda $m(\alpha) + 1$ u svakom $\alpha \in A$. Mi tvrdimo da možemo svakom $\alpha \in A$ pridružiti funkciju P_α u formi

$$P_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{1+m(\alpha)} c_{j,\alpha}(z - \alpha)^{-j} \tag{4.6}$$

tako da $g \cdot P_\alpha$ ima sljedeći razvoj u red potencija

$$g(z)P_\alpha(z) = w_{0,\alpha} + w_{1,\alpha}(z-\alpha) + \cdots + w_{m(\alpha),\alpha}(z-\alpha)^{m(\alpha)} + \cdots \tag{4.7}$$

na nekom otvorenom krugu s centrom u α.

Da pojednostavnimo pisanjem uzmimo $\alpha = 0$ i $m(\alpha) = m$, i izostavimo indeks α. Za z koji je blizu 0 imamo

$$g(z) = b_1 z^{m+1} + b_2 z^{m+2} + \cdots , \tag{4.8}$$

gdje je $b_1 \neq 0$. Ako

$$P(z) = c_1 z^{-1} + \cdots + c_{m+1} z^{-m-1}, \tag{4.9}$$

tada

$$g(z)P(z) = (c_{m+1} + c_m z + \cdots + c_1 z^m)(b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + \cdots). \tag{4.10}$$

b-ovi su zadani, a želimo odabrati c-ove, stoga

$$g(z)P(z) = w_0 + w_1 z + \cdots + w_m z^m + \cdots . \tag{4.11}$$

Ako usporedimo koeficijente od $1, z, ..., z^m$ u (4.10) i (4.11), dobit ćemo koeficijente $c_{m+1}, c_m, ..., c_1$, uz uvjet $b \neq 0$. $\square$

Na ovaj način, dobili smo željene P_α. Mittag-Lefflerov teorem sada nam daje meromorfnu funkciju h u Ω čiji glavni dio čine P_α, i ako stavimo $f = g \cdot h$ dobit ćemo funkciju sa željenim svojstvima.

Poglavlje 5

Jensenova formula

Kao što smo vidjeli u Teoremu 3.0.7, na lokaciju nultočaka holomorfnih funkcija u području Ω nema restrikcija, osim one očite, a to je da nema gomilišta u Ω. Situacija je poprilično drugačija ako $H(\Omega)$ zamijenimo s određenim podklasama koje su definirane s određenim uvjetima rasta. U ovoj situaciji distribucija nultočaka mora zadovoljavati određene kvantitativne uvjete. Glavni teorem, u tom smislu, je Jensenova formula (Teorem 5.0.2). Trebali bismo ga primijeniti na određene klase cijelih funkcija i na određene podklase od $H(U)$, gdje je $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ otvoren jedinični krug u kompleksnoj ravnini s centrom u 0.

Sljedeća lema daje mogućnost da primijenimo Cauchyjev teorem za procjenu određenog integrala.

Lema 5.0.1. *Vrijedi:* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln|1 - e^{i\theta}|d\theta = 0.$

Dokaz. Stavimo $\Omega = \{z : Re(z) < 1\}$. Kako je $1 - z \neq 0$ u Ω i Ω je jednostavno povezan, postoji $h \in H(\Omega)$ takav da

$$e^{h(z)} = 1 - z$$

u Ω, i ovakav h je jedinstveno određen ako zahtijevamo da je $h(0) = 0$.
Kako je $Re(1 - z) > 0$ u Ω, imamo

$$Re[h(z)] = \ln|1 - z|, \quad |Im[h(z)]| < \frac{\pi}{2} \quad (z \in \Omega). \tag{5.1}$$

Za male $\delta > 0$, neka je Γ put

$$\Gamma(t) = e^{it} \quad (\delta \leq t \leq 2\pi - \delta), \tag{5.2}$$

i neka je γ kružni luk s centrom u 1 koji počinje u $e^{i\delta}$, a završava u $e^{-i\delta}$ u U. Tada

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{2\pi-\delta} \ln|1-e^{i\theta}|d\theta = Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} h(z)\frac{dz}{z}\right] = Re\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} h(z)\frac{dz}{z}\right]. \tag{5.3}$$

Posljednja jednakost vrijedi zbog Cauchyjeve formule (Teorem 1.0.21); uočite $h(0) = 0$.

Duljina od γ je manja od $\pi\delta$, stoga (5.1) pokazuje da je apsolutna vrijednost zadnjeg integrala u (5.3) manja od $C\delta\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)$, gdje je C neka konstanta. Ovo nam daje traženi rezultat ako $\delta \to 0$ u (5.3). □

Teorem 5.0.2. (Jensenova formula) *Pretpostavimo* $\Omega = D(0;R), f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0, 0 < r < R$, *i* $\alpha_1, ..., \alpha_N$ *su nultočke od* $f \in \bar{D}(0;r)$, *navedene redom prema njihovim kratnostima. Tada*

$$|f(0)|\prod_{n=1}^{N}\frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}. \tag{5.4}$$

Ova jednakost je poznata kao Jensenova formula. Pretpostavka $f(0) \neq 0$ *ne uzrokuje nikakav problem u primjenama, jer ako* f *ima nultočku reda* k *u* 0, *formula se može primijeniti na* $\frac{f(z)}{z^k}$.

Dokaz. Poredajmo točke α_j tako da su $\alpha_1, ..., \alpha_m$ u $D(0;r)$ i $|\alpha_{m+1}| = \cdots = |\alpha_N| = r$. (Naravno, možemo imati $m = N$ ili $m = 0$.) Stavimo

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{r^2-\bar{\alpha}_n z}{r(\alpha_n - z)}\prod_{n=m+1}^{N}\frac{\alpha_n}{\alpha_n - z} \tag{5.5}$$

Tada $g \in H(D)$, gdje $D = D(0; r+\epsilon)$, za neki $\epsilon > 0$, i g nema nultočku u D, stoga je $\ln|g|$ harmonijska u D (prema Teoremu 1.0.23), i

$$\ln|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|g(re^{i\theta}|d\theta. \tag{5.6}$$

Prema (5.5), uvrštavanjem $z = 0$ dobijemo

$$|g(0)| = |f(0)|\prod_{n=1}^{m}\frac{r}{|\alpha_n|}. \tag{5.7}$$

Za $1 \leq n \leq m$, faktori u (5.5) imaju apsolutnu vrijednost 1 ako $|z| = r$. Ako $\alpha_n = re^{i\theta_n}$, za $m < n \leq N$, slijedi

$$\ln|g(re^{i\theta})| = \ln|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N}\ln|1-e^{i(\theta-\theta_n)}|. \tag{5.8}$$

Lema 5.0.1 pokazuje da se integral u (5.6) ne mijenja ako g zamijenimo sa f. Usporedba s (5.7) sada daje (5.4). $\square$

Jensenova formula dovodi do nejednakosti koje uključuje granične vrijednosti omeđenih holomorfnih funkcija na U (klasu ovakvih funkcija označavat ćemo s H^∞).

Teorem 5.0.3. *Ako $f \in H^\infty$, i ako je f^* radijalni limes funkcije f, [$f^*(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it})$], tada*

$$\ln|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f^*(e^{i\theta})|d\theta \tag{5.9}$$

za sve r između 0 i 1. Srednji član u (5.9) je neopadajuća funkcija od r.

Ako f nije identički jednaka 0, tada slijedi da je zadnji integral u (5.9) veći od $-\infty$ pa relacija

$$f^*(e^{i\theta}) \neq 0 \tag{5.10}$$

vrijedi za gotovo sve točke na T, gdje je $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ jedinična kružnica u kompleksnoj ravnini (rub).

Dokaz. Lijeva strana Jensenove formule (5.4) očito ne opada ako r raste. Isto vrijedi i za srednji član u (5.9). Pretpostavimo sada, bez smanjenja općenitosti, $|f| \leq 1$. Tada $\ln(1/|f|) \geq 0$, i Fatouova lema daje

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left\{\frac{1}{|f^*(e^{i\theta})|}\right\} d\theta \leq \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left\{\frac{1}{|f(re^{i\theta})|}\right\} d\theta \tag{5.11}$$

Ovo povlači (5.9).
Ako f nije identički jednaka 0, ali f ima nultočku reda m u $z = 0$, stavimo $g(z) = f(z)/z^m$. Tada $|g(0)| > 0, |f^*| = |g^*|$ i ako primijenimo (5.9) na g, vidimo da vrijedi $\int \ln|f^*| > -\infty$. $\square$

Nultočke cijelih funkcija. Pretpostavimo da je f cijela funkcija, i definiramo

$$M(r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})| \quad (0 < r < \infty), \tag{5.12}$$

i neka je $n(r)$ broj nultočaka od f u $\bar{D}(0; r)$. Pretpostavimo $f(0) = 1$, radi jednostavnosti. Jensenova formula daje

$$M(2r) \geq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(2re^{i\theta})|d\theta\right\} = \prod_{n=1}^{n(2r)} \frac{2r}{|\alpha_n|} \geq 2^{n(r)},$$

ako je $\{\alpha_n\}$ niz nultočaka od f, uređenih tako da $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \cdots$. Stoga

$$n(r) \ln 2 \leq \ln M(2r). \tag{5.13}$$

Brzinu rasta od $n(r)$ (na primjer, gustoća nultočaka od f) kontrolira brzina rasta od $M(r)$. Pogledajmo specifičan slučaj. Pretpostavimo da za velike r

$$M(r) < \exp\{Ar^k\} \tag{5.14}$$

gdje su A i k zadani pozitivni brojevi. Tada (5.13) daje

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} \leq k. \tag{5.15}$$

Na primjer, ako je k pozitivan cijeli broj i

$$f(z) = 1 - e^{z^k}, \tag{5.16}$$

tada je $n(r)$ otprilike $\pi^{-1}kr^k$, stoga

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = k. \tag{5.17}$$

To pokazuje da ocjena (5.15) ne može biti poboljšana.

Poglavlje 6

Blaschkeovi produkti

Jensenova formula daje mogućnost određivanja preciznih uvjeta koje nultočke nekonstantnih $f \in H^\infty$ funkcija moraju zadovoljavati.

Teorem 6.0.1. *Ako je $\{\alpha_n\}$ niz na U, takav da je $\alpha_n \neq 0$ i*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) < \infty, \tag{6.1}$$

ako je k nenegativan cijeli broj i ako

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha_n} z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \qquad (z \in U), \tag{6.2}$$

tada je $B \in H^\infty$, i B nema drugih nultočaka osim u točkama α_n.

Funkciju B zovemo *Blaschkeov produkt.* Primijetite da se neki α_n-ovi mogu ponavljati, i u tom slučaju B ima višestruke nultočke u tim točkama. Uočite također, da svaki faktor u (6.2) ima apsolutnu vrijednost 1 na T.

Pojam "Blaschkeov produkt" ćemo također koristiti i situacijama kada imamo samo konačno mnogo faktora, ali i kada nemamo niti jednog faktora; u tom slučaju je $B(z) = 1$.

Dokaz. n-ti član u sumi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha_n} z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \right|$$

je

$$\left| \frac{\alpha_n + |\alpha_n| z}{(1-\bar{\alpha_n} z)\alpha_n} \right| (1-|\alpha_n|) \leq \frac{1+r}{1-r}(1-|\alpha_n|),$$

ako $|z| \leq r$. Stoga Teorem 2.0.5 pokazuje da je $B \in H(U)$ i da B ima samo propisane nultočke. Kako svaki faktor u (6.2) ima apsolutnu vrijednost 1 na T, slijedi da $|B(z)| < 1$, i time je teorem dokazan. □

Prethodni teorem pokazuje da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty, \tag{6.3}$$

dovoljan uvjet da bi postojala $f \in H^\infty$ koja ima samo propisane nultočke $\{\alpha_n\}$.
Ovaj uvjet je također i nužan, dakle vrijedi i obratno, to jest:
Ako je $f \in H^\infty$ i f nije identički jednaka 0, tada nultočke od f moraju zadovoljavati uvjet (6.3).
Ovo je specijalan slučaj Teorema 6.0.2. Zanimljivo je da je (6.3) nužan uvjet u mnogo većim klasama funkcija, koje ćemo sada opisati.

Za bilo koji realan broj t, definiramo

$$\ln^+ t := \begin{cases} \ln t & \text{za } t \geq 1 \\ 0 & \text{za } t < 1. \end{cases}$$

Neka je N (Nevanlinna) klasa svih $f \in H(U)$ za koje vrijedi

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty. \tag{6.4}$$

Jasno je da je $H^\infty \subset N$. Uočite da (6.4) stavlja ograničenje na brzinu rasta od $|f(z)|$ kada $|z| \to 1$, dok ograničenost integrala

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \tag{6.5}$$

nema takvih restrikcija.
Na primjer, (6.5) ne ovisi o r ako $f = e^g$, za bilo koju holomorfnu funkciju $g \in H(U)$.
Zaključujemo da (6.5) može ostati malen jer $\ln |f|$ podrazumijeva velike negativne vrijednosti kao i velike pozitivne vrijednosti, budući da je $\ln^+ |f| \geq 0$.

Teorem 6.0.2. *Pretpostavimo da je $f \in N$, f nije identički jednaka 0 na U, i $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ su nultočke od f, navedene prema njihovim kratnostima. Tada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1 - |\alpha_n|) < \infty. \tag{6.6}$$

(Pretpostavljamo da f ima beskonačno mnogo nultočaka na U. Ako ih ima samo konačno mnogo, tada gornja suma ima samo konačno mnogo članova i nemamo što dokazivati. Također, $|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|$.)

Dokaz. Ako f ima nultočku reda m na početku, i $g(z) = z^{-m}f(z)$, tada je $g \in N$, i g ima iste nultočke kao i f, osim onih početnih nultočaka. Stoga, možemo pretpostaviti, bez smanjenja općenitosti, da je $f(0) \neq 0$. Neka je $n(r)$ broj nultočaka od f na $\bar{D}(0;r)$, fiksirajmo k, i uzmimo $r < 1$ takav da vrijedi $n(r) > k$. Tada Jensenova formula

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{n(r)} \frac{r}{|\alpha_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|f(re^{i\theta})|d\theta\right\} \tag{6.7}$$

implicira

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{k} \frac{r}{|\alpha_n|} \leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln^+|f(re^{i\theta})|d\theta\right\}. \tag{6.8}$$

Naša pretpostavka da je $f \in N$ je ekvivalentna postojanju konstante $C < \infty$ koja ograničava desnu stranu od (6.8), za sve r, $0 < r < 1$.
Slijedi

$$\prod_{n=1}^{k} |\alpha_n| \geq \frac{1}{C}|f(0)|r^k. \tag{6.9}$$

Nejednakost vrijedi za svaki k, kada $r \to 1$. Odatle slijedi

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \geq \frac{1}{C}|f(0)| > 0. \tag{6.10}$$

Prema Teoremu 2.0.4, (6.10) implicira (6.6). □

Korolar 6.0.3. *Ako je $f \in H^\infty$ (ili ako je $f \in N$), ako su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...$ nultočke od f na U, i ako je $\sum(1 - |\alpha_n|) = \infty$, tada je $f(z) = 0$, za sve $z \in U$.*

Na primjer, ne postoji nekonstantna ograničena funkcija na U koja ima nultočku u svakoj točki $\frac{n-1}{n}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Slijedi teorem koji opisuje ponašanje Blaschkeovog produkta u blizini granice od U. Prisjetimo se da, kao član od H^∞, B ima radijalni limes $B^*(e^{i\theta})$ u gotovo svim točkama od T.

Teorem 6.0.4. *Ako je B Blaschkeov produkt, tada je $|B^*(e^{i\theta})| = 1$ gotovo svugdje i*

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|B(re^{i\theta})|d\theta = 0. \tag{6.11}$$

Dokaz. Postojanje limesa je posljedica činjenice da je integral monotona funkcija od r. Pretpostavimo da je $B(z)$ kao u Teoremu 6.0.1 i stavimo

$$B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1 - \bar{\alpha_n} z} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}. \tag{6.12}$$

Kako je $\ln\left(\left|\frac{B}{B_N}\right|\right)$ neprekidna na otvorenom skupu koji sadrži T, limes (6.11) ostaje nepromijenjen ako B zamijenimo s B_N. Ako primijenimo Teorem 5.0.3 na B_N, dobit ćemo

$$\ln|B_N(0)| \leq \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|B(re^{i\theta})|d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} \ln|B^*(e^{i\theta})|d\theta \leq 0. \tag{6.13}$$

Ako pustimo $N \to \infty$, prvi član u (6.13) ide u 0. Sada teorem o sendviču daje (6.11) i pokazuje da je $\int \ln|B^*| = 0$. Budući da je $\ln|B^*| \leq 0$ gotovo svugdje, Teorem 1.0.27 implicira $\ln|B^*| = 0$ gotovo svugdje $\Rightarrow |B^*| = e^0 = 1$ gotovo svugdje. $\square$

Poglavlje 7

Müntz-Szaszov teorem

Stone-Weierstrassov teorem (Teorem 1.0.28) govori da su polinomi gusti u $C(I)$. $C(I)$ je prostor svih neprekidnih kompleksnih funkcija na zatvorenom intervalu $I = [0, 1]$, sa supremum normom. Drugim riječima, skup svih konačnih linearnih kombinacija funkcija

$$1, t, t^2, t^3, ... \tag{7.1}$$

je gust u $C(I)$.

Postavljamo sljedeće pitanje: Ako je $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, pod kojim uvjetima je istina da funkcije

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ... \tag{7.2}$$

razapinju gust potprostor od $C(I)$?

Ispada da ovaj problem ima veoma prirodnu vezu s problemom distribucije nultočaka ograničenih holomorfnih funkcija u poluravnini (ili na krugu). Iznenađujuće lijep odgovor je da funkcije (7.2) razapinju gust potprostor od $C(I)$ ako i samo ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Zapravo, dokaz daje još precizniji zaključak kojeg navodimo u sljedećem teoremu.

Teorem 7.0.1. (Müntz-Szaszov teorem) *Pretpostavimo* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ *i neka je* X *zatvarač u* $C(I)$ *skupa svih linearnih kombinacija funkcija*

$$1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, t^{\lambda_3}, ...$$

(a) Ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$*, tada je* $X = C(I)$.

(b) Ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ *i ako* $\lambda \notin \{\lambda_n\}, \lambda \neq 0$*, tada* X *ne sadrži funkciju* t^λ.

Dokaz. Posljedica Hahn-Banachovog teorema (Teorem 1.0.31) govori da je $\varphi \in C(I)$, ali $\varphi \notin X$ ako i samo ako postoji ograničen linearni funkcional na $C(I)$ koji ne iščezava u φ, ali koji iščezava na cijelom X-u. Kako je svaki ograničeni linearni funkcional na $C(I)$ dan integriranjem obzirom na kompleksnu Borelovu mjeru na I, (a) će biti posljedica sljedeće propozicije:

Ako je $\sum \dfrac{1}{\lambda_n} = \infty$ *i ako je* μ *kompleksna Borelova mjera na* I *takva da*

$$\int_I t^{\lambda_n} d\mu(t) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, ...), \tag{7.3}$$

tada također vrijedi

$$\int_I t^k d\mu(t) = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{7.4}$$

Jer, ako se to dokaže, prethodno obrazloženje pokazuje da X sadrži sve funkcije t^k; budući da je $1 \in X$, svi polinomi su u X, i Stone-Weierstrassov teorem sada implicira $X = C(I)$.

Stoga pretpostavimo da (7.3) vrijedi. Budući da podintegralne funkcije u (7.3) i u (7.4) iščezavaju u 0, možemo pretpostaviti da je mjera μ koncentrirana na $\langle 0, 1]$. Povezujemo sa μ funkciju

$$f(z) = \int_I t^z d\mu(t). \tag{7.5}$$

Za $t > 0$, $t^z = e^{z \ln t}$, po definiciji. Neprekidnost od f se lako provjeri, i sada možemo primijeniti Morerin teorem. Zaključujemo da je f holomorfna na desnoj poluravnini. Štoviše, ako je $z = x + iy$, $x > 0$ i $0 < t \leq 1$, tada $|t^z| = t^x \leq 1$. Stoga je f ograničena na desnoj poluravnini i iz (7.3) slijedi $f(\lambda_n) = 0$, za $n = 1, 2, 3, ...$ Definirajmo

$$g(z) := f\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad (z \in U). \tag{7.6}$$

Tada je $g \in H^\infty$ i $g(\alpha_n) = 0$, gdje je $\alpha_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1}$. Budući da je λ_n pozitivan realan broj, slijedi da je $|\alpha_n| < 1$, dakle $\alpha_n \in U$. Jednostavan račun pokazuje $\sum(1 - |\alpha_n|) = \infty$, ako je $\sum \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Korolar 6.0.3 kaže da je $g(z) = 0$, za sve $z \in U$. Stoga je $f = 0$. Posebno, $f(k) = 0$ za $k = 1, 2, 3, ...$, i to daje (7.4). Dakle, imamo dokazan (a) dio teorema.

Da bismo dokazali (b) dio teorema, konstruirat ćemo mjeru μ na I tako da (7.5) definira funkciju f koja je holomorfna u poluravnini $Re(z) > -1$, i koja poprima vrijednost 0 u $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ te nema drugih nultočaka u ovoj poluravnini. Za funkcional induciran mjerom μ nultočke će iščeznuti na X, ali neće iščeznuti na niti jednoj funkciji t^λ, ako je $\lambda \neq 0$ i $\lambda \notin \{\lambda_n\}$.

Počet ćemo s konstruiranjem funkcije f koja ima opisane nultočke, i tada ćemo pokazati da f može biti reprezentirana u formi (7.5). Definiramo

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z}. \tag{7.7}$$

Stoga je

$$1 - \frac{\lambda_n - z}{2 + \lambda_n + z} = \frac{2z + 2}{2 + \lambda_n + z},$$

i beskonačan produkt u (7.7) konvergira uniformno na svakom kompaktnom skupu koji ne sadrži niti jedu od točaka $-\lambda_n - 2$. Slijedi da je f meromorfna funkcija na cijeloj ravnini, s polovima -2 i $-\lambda_n - 2$ i s nultočkama u $0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ...$ Također, svaki faktor u beskonačnom produktu (7.7) je po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 ako je $Re(z) \geq -1$. Faktor $(2+z)^3$ osigurava da je restrikcija od f na pravcu $Re(z) = -1$ u L^1.

Fiksirajmo z tako da je $Re(z) > -1$ i razmotrimo Cauchyjevu formulu za $f(z)$, gdje se put integriranja sastoji od polukružnice s centrom u -1, radijusa $R > 1 + |z|$, od $-1 - iR$ do $-1 + iR$, nakon čega slijedi interval od $-1 + iR$ do $-1 - iR$. Integral po polukružnici ide u 0 kada $R \to \infty$, pa nam preostaje

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z} ds \qquad (Re(z) > -1). \tag{7.8}$$

Međutim,

$$\frac{1}{1 - is + z} = \int_0^1 t^{z-is} dt \qquad (Re(z) > -1). \tag{7.9}$$

Dakle, (7.8) možemo zapisati u sljedećoj formi

$$f(z) = \int_0^1 t^z \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(-1+is) \cdot e^{-is \ln t} ds \right\} dt. \tag{7.10}$$

Izmjena poretka u integralu je dopuštena: ako član integracije u (7.10) zamijenimo s njegovom apsolutnom vrijednosti, konačan integral je isti.

Stavimo $g(s) = f(-1+is)$. Tada je srednji integral u (7.10) jednak $\hat{g}(\ln t)$, gdje je $\hat{g}$ Fourierova transformacija od g. To je ograničena neprekidna funkcija na $\langle 0, 1]$, i ako stavimo $d\mu(t) = \hat{g}(\ln t) dt$ dobit ćemo mjeru koja predstavlja f u željenoj formi (7.5) i time je dokaz gotov. $\square$

Ovaj teorem implicira da svaki put kada $\{1, t_1^\lambda, t_2^\lambda, t_3^\lambda, ...\}$ razapinje $C(I)$, neki beskonačni podskup od t_i^λ može biti uklonjen bez promjene razapinjućeg skupa. Posebno, $C(I)$ ne sadrži nikakve minimalne razapinjuće skupove ovog tipa. To je u značajnoj suprotnosti u odnosu na ponašanje ortonormiranih skupova u Hilbertovom prostoru: ukoliko je bilo koji element uklonjen iz ortonormiranog skupa, njegov raspon se smanjuje. Također, ukoliko $\{1, t_1^\lambda, t_2^\lambda, t_3^\lambda, ...\}$ ne razapinje $C(I)$, uklanjanje bilo kojeg njegovog elementa će smanjiti raspon; to slijedi iz Teorema 7.0.1(b).

Poglavlje 8

Primjeri

U ovom poglavlju riješit ćemo par primjera te tako ilustrirati primjenu teorije koju smo razvili.

Primjer 8.0.1. *Pod kojim uvjetima za niz realnih brojeva y_n postoji ograničena holomorfna funkcija u otvorenoj desnoj poluravnini koja nije identički jednaka nuli, ali koja ima nultočke u svakoj točki $1 + iy_n$? Posebno, provjerite da li postoji takva funkcija ako je*

(a) $y_n = \ln n$

(b) $y_n = \sqrt{n}$

(c) $y_n = n$

(d) $y_n = n^2$.

Rješenje.

Koristeći preslikavanje $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$, možemo reducirati rješavanje istog pitanja na način da umjesto otvorene desne poluravnine s navedenim preslikavanjem gledamo otvoreni jedinični krug, za kojeg Blashkeov produkt (6.3) daje kriterij. Dakle, provjeravamo uvjet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1}\right|\right) < \infty, \tag{8.1}$$

gdje je $\alpha_n = 1 + iy_n$.

(a) $y_n = \ln n \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 1 + i \ln n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{1 + i\ln n - 1}{1 + i\ln n + 1}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{|2 + i\ln n|}\right) = (*)$$

Kako je $|2 + i\ln n| = \sqrt{2^2 + \ln^2 n} = \sqrt{4 + \ln^2 n}$ to slijedi

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4 + \ln^2 n} - \ln n}{\sqrt{4 + \ln^2 n}} \cdot \frac{\sqrt{4 + \ln^2 n} + \ln n}{\sqrt{4 + \ln^2 n} + \ln n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4 + \ln^2 n + \ln n \sqrt{4 + \ln^2 n}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{4+\ln^2 n + \ln n\sqrt{4+\ln^2 n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4 + \ln^2 n + \ln n\sqrt{4 + \ln^2 n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \infty$$

i $\sum \frac{1}{n}$ divergira pa po usporednom kriteriju slijedi da divergira i red $\sum \frac{4}{4+\ln^2 n + \ln n\sqrt{4+\ln^2 n}}$. Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1}\right|\right) = \infty$ to jest, uvjet (8.1) nije zadovoljen pa ne postoji $f \in H^\infty$ sa željenim svojstvima.

(b) $y_n = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 1 + i\sqrt{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{1 + i\sqrt{n} - 1}{1 + i\sqrt{n} + 1}\right|\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{|2 + i\sqrt{n}|}\right) = (*)$$

Kako je $|2 + i\sqrt{n}| = \sqrt{4 + n}$ to slijedi

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4+n} - \sqrt{n}}{\sqrt{4+n}} \cdot \frac{\sqrt{4+n} + \sqrt{n}}{\sqrt{4+n} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4 + n + \sqrt{4n + n^2}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{4+n+\sqrt{4n+n^2}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{4 + n + \sqrt{4n + n^2}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{4}{2} = 2$$

i $\sum \frac{1}{n}$ divergira pa po usporednom kriteriju slijedi da divergira i red $\sum \frac{4}{4+n+\sqrt{4n+n^2}}$. Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left|\frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n + 1}\right|\right) = \infty$ to jest, uvjet (8.1) nije zadovoljen pa kao i u prethodnom primjeru ne postoji $f \in H^\infty$ sa željenim svojstvima.

(c) $y_n = n \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 1 + in$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n+1}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{1+in-1}{1+in+1}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n}{|2+in|}\right)=(*)$$

Kako je $|2+in| = \sqrt{4+n^2}$ to slijedi

$$(*)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4+n^2}-n}{\sqrt{4+n^2}}\cdot\frac{\sqrt{4+n^2}+n}{\sqrt{4+n^2}+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{4+n^2+n\sqrt{4+n^2}}\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira pa po usporednom kriteriju konvergira i početni red. Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n+1}\right|\right) < \infty$ to jest, uvjet (8.1) je zadovoljen pa postoji $f \in H^\infty$ sa željenim svojstvima.

(d) $y_n = n^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_n = 1 + in^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n+1}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{1+in^2-1}{1+in^2+1}\right|\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{n^2}{|2+in^2|}\right)$$

$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+|in^2|-n^2}{|2+in^2|}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|2+in^2|}\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|in^2|}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Slično kao u (c) slijedi da početni red konvergira. Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left|\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n+1}\right|\right) < \infty$ to jest, uvjet (8.1) je zadovoljen pa postoji $f \in H^\infty$ sa željenim svojstvima.

Primjer 8.0.2. *Pretpostavimo* $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $f \in H(U)$, $f(U) \subset U$ *i* $f(0) = \alpha$. *Koliko nultočaka može imati* f *u zatvorenom krugu* $\bar{D}(0,\beta)$? *Koliko ima nultočaka ako je*

(a) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$

(b) $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$

(c) $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$

(d) $\alpha = \frac{1}{1000}$, $\beta = \frac{1}{10}$?

Rješenje.

Neka su $z_1, ..., z_m$ sve nultočke od f (navedene prema njihovim kratnostima) takve da je $|z_k| \leq \beta$, za $k \in \{1, ..., m\}$. Definirajmo

$$g(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}.$$

Tada je $g(z)$ holomorfna u okolini od $\bar{U}$ i $|g(z)| = 1$, za svaki z takav da je $|z| = 1$. Kvocijent dviju holomorfnih funkcija $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ je holomorfna funkcija na U.
Jer je $f(U) \subset U$ vrijedi

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| \leq 1 \qquad (\forall z \in U).$$

Posebno, za $z = 0$ imamo:

$$1 \geq \left|\frac{f(0)}{g(0)}\right| = \frac{|\alpha|}{\left|\prod_{k=1}^{m} -z_k\right|} \geq \frac{\alpha}{\prod_{k=1}^{m} |z_k|} \geq \frac{\alpha}{\beta^m}, \tag{8.2}$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi jer je $|z_k| \leq \beta \Rightarrow \frac{1}{|z_k|} \geq \beta$.
Iz (8.2) slijedi

$$\beta^m \geq \alpha \quad \Rightarrow \quad m \cdot \ln \beta \geq \ln \alpha \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}.$$

U zadnjem koraku se promijenila nejednakost jer smo dijelili s $\ln \beta$, a $\beta \in \langle 0, 1 \rangle$ $\Rightarrow \ln \beta \in \langle -\infty, 0 \rangle$. Dakle, broj nultočaka m u $\bar{D}(0, \beta)$ je ograničen s

$$m \leq \frac{\ln(\alpha)}{\ln(\beta)}. \tag{8.3}$$

Riješimo sada konkretne primjere:

(a) $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m \leq \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1.$

(b) $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 + 1 = 2$$

(c) $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow \quad m \leq 0.37$. $\quad f$ nema nultočaka u krugu $\bar{D}(0, 1/3)$.
(d) $\alpha = \frac{1}{1000}$, $\beta = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad m \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right) + \ln\left(\frac{1}{10}\right) + \ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} = 3.$$

Primjer 8.0.3. *Pretpostavimo $|\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq |\alpha_3| \leq \cdots < 1$. Neka je $n(r)$ broj članova u nizu kompleksnih brojeva $\{\alpha_j\}$ takvih da je $|\alpha_j| \leq r$. Dokažite*

$$\int_0^1 n(r)dr = \sum_{j=1}^{\infty}(1 - |\alpha_j|).$$

Rješenje.

Iz pretpostavke je $\alpha_j \in [0, 1\rangle$.
Broj članova u nizu kompleksnih brojeva $\{\alpha_j\}$ takvih da je $|\alpha_j| \leq r$ možemo matematički zapisati na sljedeći način
$n(r) = \sum_j \mathbb{1}_{\{\alpha_j \leq r\}}$, gdje je karakteristična funkcija $\mathbb{1}_{\{\alpha_j \leq r\}} = \begin{cases} 1 & \text{za } \alpha_j \leq r \\ 0 & \text{za } \alpha_j > r. \end{cases}$
Imamo

$$\int_0^1 n(r)dr = \int_0^1 \sum_j \mathbb{1}_{\{\alpha_j \leq r\}} dr = \sum_j \int_0^1 \mathbb{1}_{\{\alpha_j \leq r\}} dr.$$

Posljednju jednakost (zamjenu sume i integrala) opravdava Fubinijev terem primijenjen na brojeću mjeru i na Lebesgueovu mjeru $[0, 1\rangle$. Računamo

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\alpha \leq r\}} dr = \int_\alpha^1 dr = 1 - \alpha, \tag{8.4}$$

za neki α. Primijenimo (8.4) na $\alpha = \alpha_j$, gdje je $\alpha_j = |\alpha_j|, \forall j$, zatim sumiramo po svakom j. Slijedi

$$\int_0^1 n(r) = \sum_j (1 - |\alpha_j|),$$

što je i trebalo pokazati.

Primjer 8.0.4. *Stavimo* $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n^2}$*, za* $n = 1, 2, 3, ...$ *i neka je* B *Blaschkeov produkt sa nultočkama u točkama* α_n*. Dokažite da tada vrijedi:* $\lim\limits_{r \to 1} B(r) = 0$ *(podrazumijeva se da je* $0 < r < 1$*).*

Preciznije, pokažite da vrijedi sljedeća ocjena

$$|B(r)| < \prod_{n=1}^{N-1} \frac{r - \alpha_n}{1 - \alpha_n r} < \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_N - \alpha_n}{1 - \alpha_n} < e^{N/3},$$

ako je $\alpha_{N-1} < r < \alpha_N$*.*

Rješenje.

$$B(r) = r^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - r}{1 - \bar{\alpha_n} r} \cdot \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}.$$

Uočimo da je α_n realan broj pa je $\bar{\alpha_n} = \alpha_n$. Također, α_n je uvijek pozitivan broj pa slijedi da je

$$B(r) = r^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - r}{1 - \alpha_n r}.$$

Za neki fiksni N takav da je $\alpha_{N-1} < r < \alpha_N$ vrijedi

$$|B(r)| = |r|^k \prod_{n=1}^{N-1} \frac{|\alpha_n - r|}{|1 - \alpha_n r|} < \prod_{n=1}^{N-1} \frac{r - \alpha_n}{1 - \alpha_n r} < \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_N - \alpha_n}{1 - \alpha_n} \tag{8.5}$$

gdje prva nejednakost vrijedi jer je (u brojniku) $r > \alpha_{N-1}$, a druga nejednakost vrijedi jer je (u brojniku) $r < \alpha_N$ i nazivnik $1 - \alpha_n r > 1 - \alpha_n$. Imamo

$$\frac{\alpha_N - \alpha_n}{1 - \alpha_n} = \frac{1 - \frac{1}{N^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{N^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 - \frac{n^2}{N^2}.$$

Ako stavimo $u_n = -\frac{n^2}{N^2}$, tada prema Lemi 2.0.2 dobivamo ocjenu

$$\prod_{n=1}^{N-1} 1 - \frac{n^2}{N^2} \leq exp\left\{-\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n^2}{N^2}\right\}.$$

Računamo

$$-\frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N-1} n^2 = -\frac{1}{N^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (N-1)^2) \tag{8.6}$$

Iskoristimo formulu koja daje sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva, to jest $S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ i dobivamo da je (8.6) jednako

$$-\frac{1}{N^2}\frac{(N-1)N(2N-1)}{6} = -\frac{(N-1)(2N-1)}{6N} < -\frac{N \cdot 2N}{6N} = -\frac{N}{3}.$$

Stoga je (8.5) $< e^{-N/3}$. Pustimo li sada $N \to \infty$ dobivamo $\lim_{N\to\infty} e^{-N/3} = 0$ pa prema teoremu o sendviču i $|B(r)| \to 0$. Kako izraz konvergira po apsolutnoj vrijednosti to konvergira i obično. Uočimo još da $r \to 1$ kada $N \to \infty$ što nam daje tvrdnju koju smo htjeli dokazati, to jest $\lim\limits_{r\to 1} B(r) = 0$.

Primjer 8.0.5. *Nađite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $e^{e^z} = 1$. Skicirajte rješenja kao točke u ravnini.*
Rješenje.

$$e^{e^z} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$$

Naime, $e^{2\pi ik} = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ zbog periodičnosti sinusa i kosinusa. To lako uočavamo pogledamo li trigonometrijski zapis $e^{2\pi ik} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1$ jer je $\sin(2\pi k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$ i $\cos(2\pi k) = 1, \forall k \in \mathbb{Z}$. Dakle, polazni problem je ekvivalentan rješavanju jednadžbe $e^z = 2\pi ik, k \in \mathbb{Z}$.

1. slučaj $k = 0 \Rightarrow e^z = 0$, a to je nemoguće jer je e^z uvijek strogo veće od 0 pa u ovom slučaju ne postoji rješenje.

2. slučaj $k \neq 0 \Rightarrow e^z = 2\pi ik$. Ako kompleksan broj z zapišemo kao $z = x + iy$ tada imao $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. e^{iy} ćemo zapisati trigonometrijski. Slijedi $e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + ie^x\sin y = 2\pi ik$. Izjednačavajući realan i imaginaran dio prethodne jednakosti dobivamo

$$e^x\cos y = 0 \Rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{2l+1}{2}\pi, l \in \mathbb{Z} \quad i \quad e^x\sin y = 2\pi k.$$

$e^x\sin y = 2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad e^x(-1)^l = 2\pi k \quad$ jer je $\sin y = \sin\left(\frac{2l+1}{2}\pi\right) = (-1)^l$.
$e^x(-1)^l = 2\pi k \Leftrightarrow e^x = 2\pi k(-1)^l$.

2.1. slučaj $k > 0$ i l paran
$\Rightarrow \quad e^x = 2\pi k \Rightarrow x = \ln(2\pi k)$. Dakle, jedno rješenje je

$$z_l = \ln(2\pi k) + i\frac{2l+1}{2}\pi, \quad l \quad paran, \quad k > 0.$$

2.2. slučaj $k < 0$ i l neparan
$\Rightarrow \quad e^x = 2\pi k(-1) = 2\pi|k| \Rightarrow x = \ln(2\pi|k|)$. Dakle, drugo rješenje je

$$z_l = \ln(2\pi|k|) + i\frac{2l+1}{2}\pi, \quad l \quad neparan, \quad k < 0.$$

Za slučajeve $k > 0$ i l neparan, te za $k < 0$ i l paran dolazimo do kontradikcije pa za te slučajeve nema rješenja.
Dakle, imamo beskonačno mnogo rješenja jednadžbe $e^{e^z} = 1$ i ona su opisana s

$$z_l := \begin{cases} \ln(2\pi k) + i\dfrac{2l+1}{2}\pi & \text{za } k > 0 \text{ i l paran} \\ \ln(2\pi|k|) + i\dfrac{2l+1}{2}\pi & \text{za } k < 0 \text{ i l neparan.} \end{cases}$$

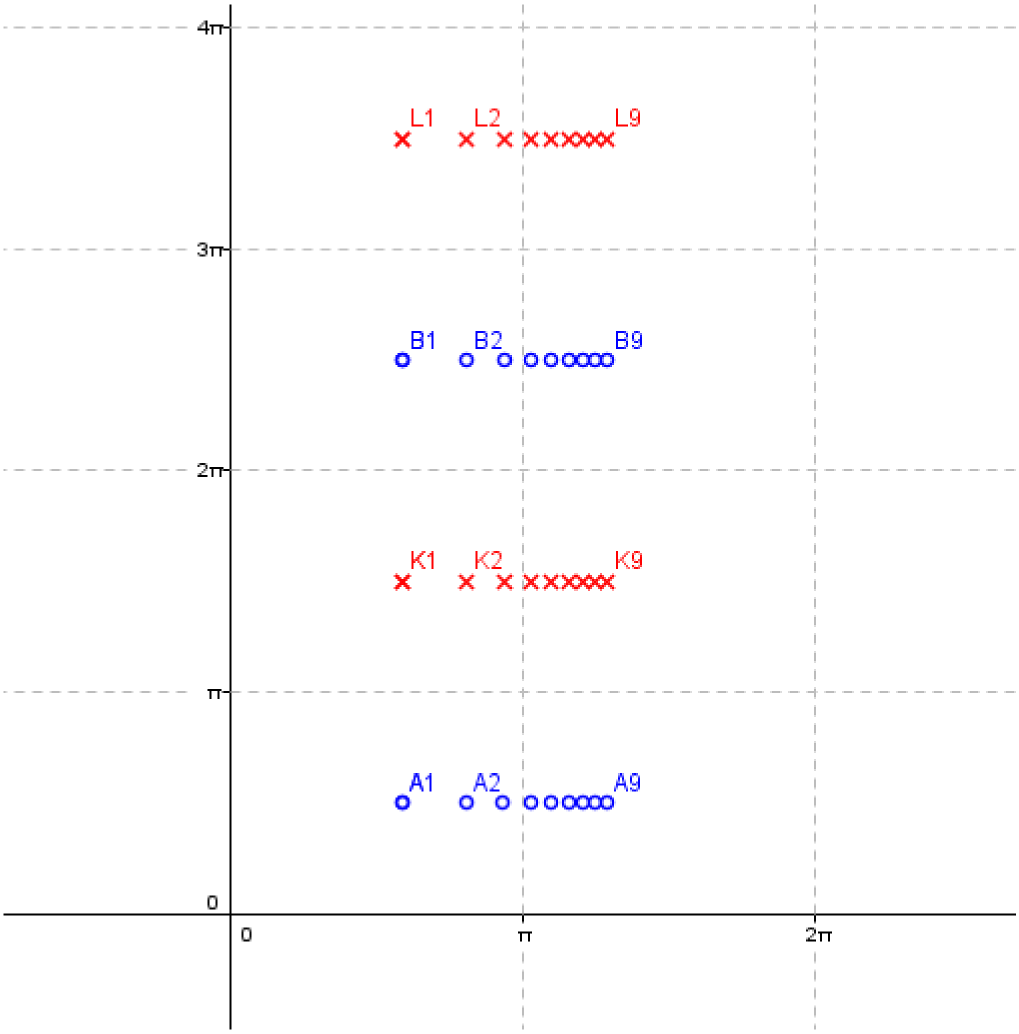
Sada ćemo skicirati dobivene točke u ravnini. Točke imaju koordinate: (x, y), gdje koordinata x predstavlja realni dio, a koordinata y imaginarni dio od z_l. Uočimo, za fiksirani k imamo beskonačno mnogo l-ova, a parnost l-ova ovisi o konkretnom k.

Tako na primjer za $k = 1$ imamo točke oblika $(\ln(2pi), *)$, gdje su $*$ svi $y = \dfrac{2l+1}{2}\pi$ pri čemu su l-ovi parni (jer je $k > 0$): dakle ove točke su na vertikalnom pravcu.

Za $k = 2$ imamo točke oblika $(\ln(4pi), *)$, gdje su $*$ svi $y = \dfrac{2l+1}{2}\pi$ pri čemu su l-ovi parni (jer je $k > 0$): dakle i ove točke su na vertikalnom pravcu.

Za $k = -1$ imamo točke oblika $(\ln(2pi), *)$, gdje su $*$ svi $y = \dfrac{2l+1}{2}\pi$ pri čemu su l-ovi neparni (jer je $k < 0$): dakle i ove točke su na vertikalnom pravcu, i tako dalje.

Zaključujemo da će za fiksirane k-ove, sve točke biti na vertikalnim pravcima.
Na sljedećoj slici pogledajmo grafički prikaz.



Slika 8.1: Točke u ravnini

Na slici 8.1 se nalazi graf nekih rješenja dane jednadžbe, pri čemu su ta rješenja prikazana kao točke u ravnini.
Za $k > 0$ uvrstili smo $l = 0, 2$ i tako dobili točke A_k i B_k, $k = 1, 2, \cdots 9$.
Za $k < 0$ uvrstili smo $l = 1, 3$ te tako dobili točke $K_{|k|}$ i $L_{|k|}$, $k = -9, -8, \cdots - 1$.

Iz slike 8.1 vidimo da ti vertikalni pravci postaju sve gušći. Naime, razmak između svaka dva vertikalna pravca je

$$x_{k+1} - x_k = \ln(2\pi(k+1)) - \ln(2\pi k) = \ln(1 - 1/k)$$

pa je $\lim\limits_{k\to\infty} \ln(1 - 1/k) = 0$.

Bibliografija

[1] R. Busam, E. Freitag, *Complex analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[2] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 i 2*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf (rujan 2015.).

[3] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1976.

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[5] H. Šikić, *Mjera i integral predavanja*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/mii_predavanja.pdf (studeni 2012.).

Sažetak

U ovom radu proučavaju se nultočke holomorfnih funkcija. Bitan rezultat o kojem govorimo u radu je da ukoliko neki skup točaka Z nema gomilište, tada postoji holomorfna funkcija f čiji je skup nultočaka $Z(f)$ upravo jednak skupu Z, i obratno, ukoliko je f holomorfna funkcija koja nije identički jednaka nuli, tada skup svih nultočaka od f nema gomilište. O tome nam govori Weierstrassov teorem. Također smo iskazali i dokazali Mittag-Lefflerov teorem koji za meromorfne funkcije, točnije za unaprijed zadane glavne dijelove meromorfnih funkcija, pronalazi meromorfnu funkciju s upravo tim, unaprijed zadanim, glavnim dijelovima.

Kako bi to bilo moguće prije svega trebali smo uvesti niz pojmova posebice iz kompleksne analize i teorije mjere. Zatim smo definirali beskonačne produkte i proučavali neka njihova opća svojstva.

Na putu dokazivanja Weierstrassovog teorema o faktorizaciji upoznali smo pojam elementarnih faktora, kao i pojam kanonskog produkta. Jensenova formula nam je dala mogućnost određivanja uvjeta koje moraju zadovoljavati nultočke nekonstantnih holomorfnih funkcija, uz neke dodatne uvjete.

Upoznali smo se s pojmom Baschkeovih produkta kao i sa nekim njihovim svojstvima. Također, naveli smo i dokazali Müntz-Szaszov teorem. U konačnici smo riješili neke zadatke koji koriste uvedene i dokazane rezultate.

Summary

In this paper we examined the zeros of holomorphic functions. An important result we deal with in this work is that if the set Z has no limit point, then there exists holomorphic function f such that its zero set $Z(f)$ is precisely the set Z, and conversely, if the function f is holomorphic and it is not identically equal to 0, then the zero set $Z(f)$ has no limit point. The Weierstrass theorem asserts that. We also demonstrated and proven Mittag-Leffler theorem which, for given main parts of Laurent expansions around given set of points, gives a meromorphic function with exactly that Laurent expansions near its poles.

In order to acomplish that, we needed to introduce numerous concepts and ideas especially from complex analysis and measure theory. Then we defined infinite products and studied some of their general properties.

On the way to prove the Weierstrass factorization theorem we introduced the concept of elementary factors, as well as the concept of canonical product. Jensen's formula gave us the possibility to determine the precise conditions which the zeros of nonconstant holomorphic functions, with some additional properties, must satisfy.

We introduced the concept of Baschke products as well as with some of their properties. Also, we demonstrated and proven Müntz-Szasz theorem. At the end, we resolve some exercises using the results we previously obtained.

Životopis

Zovem se Marija Blaslov. Rođena sam 26. lipnja 1991. godine u Zadru. Odrasla sam u mjestu Kali na otoku Ugljanu. 2006. godine završila sam Osnovnu školu Valentina Klarina u Preku. Iste godine upisala sam Srednju školu Vladimira Nazora, smjer opća gimnazija, u Zadru. Kao maturantica, položila sam državnu maturu te sam se 2010. godine upisala na Prirodoslovno-matematički fakultet, matematički odsjek, u Zagrebu. U srpnju 2014. godine završila sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike, smjer nastavnički, te sam na istom fakultetu nastavila obrazovanje upisavši diplomski sveučilišni studij Matematičke statistike.