Uvod u Riemannovu hipotezu

Bojmić, Dino

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Dino Bojmić

UVOD U RIEMANNOVU HIPOTEZU

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Zrinka Franušić

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Prosti brojevi pobuđuju zanimanje matematičara još od antičkih vremena. Sve je počelo s Euklidovim dokazom tvrdnje o postojanju prostih brojeva. Međutim, može se postaviti pitanje: Koliko ima prostih brojeva manjih od nekog prirodnog broja n? Carl Friedrich Gauss se tim pitanjem prvi počeo baviti sa samo 14 godina. Do kraja svog života je pronašao sve proste brojeve do broja 3 000 000. Tijekom istraživanja prostih brojeva, Gauss je otkrio da je funkcija distribucije prostih brojeva monotono rastuća na sličan način kao i logaritamska funkcija. Na poleđini svog rada o distribuciji prostih brojeva, Gauss je napisao: *Primezahlen unter a* $(a \to \infty)$ $\frac{a}{\ln a}$. Ovom formulom je htio približno odrediti broj prostih brojeva do nekog prirodnog broja a. Danas je ta formula poznatija u obliku

$$\lim_{x \to 0} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1,$$

gdje je π funkcija distribucije prostih brojeva do nekog broja x. Formula je u ovom obliku poznata kao Teorem o prostim brojevima (engl. Prime Number Theorem) te se može interpretirati na sljedeći način $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\pi(x)$ - $\frac{x}{\ln x}$	relativna greška(%)
10^2	25	21	4	16.00
10^3	168	144	24	14.29
10^4	1229	1085	144	11.72
10^5	9592	8685	907	9.46
10^6	78498	72382	6116	7.79
10^7	664579	620420	44159	6.64
10^8	5761455	5428681	332774	5.78
10^9	50847534	48254942	2592592	5.10
10^{10}	455052511	434294481	20758030	4.56
10^{11}	4118054813	3948131653	169923160	4.13
10^{12}	37607912018	36191206825	1416705193	3.77

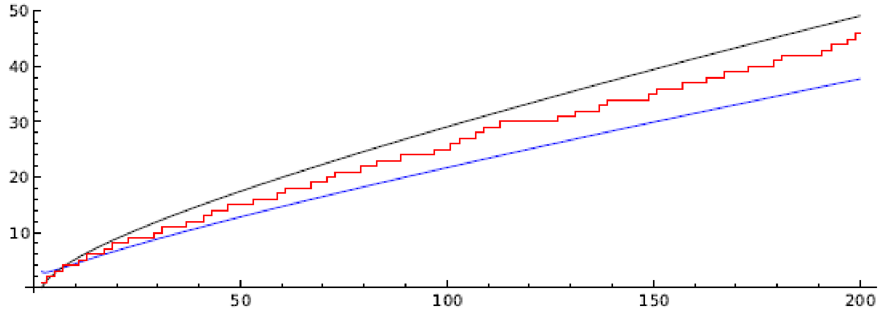
Tablica 0.1: Relativna greška između $\frac{x}{\ln(x)}$ i $\pi(x)$

Kasnije, Gauss je dao znatno bolju aproksimaciju funkcije π koristeći logaritamski integral

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

x	$\pi(x)$	$Li(x)$	$Li(x)$ - $\pi(x)$	relativna greška(%)
10^2	25	29	4	16.00
10^3	168	176	8	4.7619
10^4	1229	1245	16	1.3019
10^5	9592	9628	36	0.3753
10^6	78498	78626	128	0.1631
10^7	664579	664917	338	0.0509
10^8	5761455	5762208	753	0.0131
10^9	50847534	50849233	1699	0.0033
10^{10}	455052511	455055612	3101	0.0007
10^{11}	4118054813	4118066388	11575	0.0003
10^{12}	37607912018	37607950205	38187	0.00001

Tablica 0.2: Relativna greška između $Li(x)$ i $\pi(x)$



Slika 0.1: Grafovi funkcija $Li(x)$ (gornji), $\pi(x)$ (srednji) i $\frac{x}{\ln x}$ (donji) na intervalu $[2, 200]$

Veliku prekretnicu, što se tiče teorije prostih brojeva je napravio Bernhard Riemann sa svojom hipotezom koja povezuje nultočke Riemannove zeta funkcije i funkciju distribucije prostih brojeva. Hipoteza još nije dokazana, no ako je ona točna, onda imamo precizniju informaciju o grešci koja nastaje aproksimiranjem $\pi(x)$ s $\ln x$, za $x \in \mathbb{R}^+$. U prijevodu, Riemannova hipoteza daje još bolju aproksimaciju distribucije prostih brojeva nego što ju daje teorem o prostim brojevima. Riemannova hipoteza predstavlja jedan od najtežih, ali i najzanimljivijih neriješenih matematičkih problema. U ovom radu ćemo se pobliže upoznati s Riemannovom hipotezom te izložiti neke činjenice koje idu u prilog njezinoj istinitosti.

Što je Riemannova hipoteza? Zašto je ona toliko važna za matematiku? Što ona implicira? Ovo su samo neka od pitanja koja se postavljaju uz ovu hipotezu i koja će u ovom radu biti odgovorena. Riemannova hipoteza dovodi u vezu pojmove koji je naizgled jako teško povezati, a to su nultočke analitičke funkcije i distribuciju prostih brojeva. Dokaz Riemannove hipoteze bi značio da je distribucija prostih brojeva, do nama razumne mjere predvidljiva na sličan način kao i bacanje novčića. Ako Riemannova hipoteza nije točna, onda o distribuciji prostih brojeva ne znamo mnogo više nego što je znao Gauss prije dvjestotinjak godina. Njezina netočnost bi implicirala mnogo "kaotičniji" raspored prostih brojeva u skupu realnih brojeva nego što možemo pretpostaviti. Time se naša osnovna razmatranja o prostim brojevima pokazuju netočnima.

Ovaj rad se sastoji od tri poglavlja. Prvo poglavlje započinje povijesnim crticama o Riemannovoj hipotezi i životopisom samog Riemanna. Zatim slijedi razmatranje o Eulerovoj zeta funkciji i njezinim svojstvima. Veći dio ovog poglavlja je posvećen analitičkim produljenjem Riemannove zeta funkcije na skup $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ te na kraju iskazom same Riemannove hipoteze. U drugom poglavlju se promatraju svojstva nultočaka Riemannove zeta funkcije te općenito njihovo dublje značenje u Riemannovoj hipotezi. U završetku poglavlja se objašnjava jedan od načina za njihovo određivanje. Treće, ujedno i nama najzanimljivije poglavlje, posvećeno je vezi između Riemannove hipoteze i prostih brojeva. Iznosi se generalizirana Riemannova hipoteza te njezine implikacije vezane uz područje teorije brojeva. Na kraju rada reći će se nešto o posljedicama Riemannove hipoteze te o njezinoj povezanosti s drugim hipotezama.

Poglavlje 1

Riemannova zeta funkcija

1.1 Hilbertovi matematički problemi

David Hilbert je 8. kolovoza 1900. godine u Parizu na sveučilištu Sorbonne na Drugom međunarodnom kongresu matematičara održao jedan od najznačajnijih govora u povijesti matematike. Naime, Hilbert je u svome priopćenju *"Mathematische Probleme"* prezentirao listu od 10 najpoznatijih, do tad neriješenih matematičkih problema koju je kasnije proširio s još 13 problema. Kompletna lista s detaljnim opisom 23 problema je objavljena u matematičkom časopisu *Bulletin of the American Mathematical Society*. Hilbert je svojim govorom želio zaokružiti vrlo uspješno 19. stoljeće što se tiče razvoja matematike te je htio predvidjeti budućnost matematike u 20. stoljeću fokusirajući se na rješavanje tih 23 problema. Njegov entuzijazam za matematiku i posvećenost rješavanju matematičkih problema tokom cijelog njegovog života je sadržan u njegovoj poznatoj izjavi: *Ignoramus et ignoramibus*, tj. *Ne znamo i nikad nećemo znati*.

Od 23 problema, 10 ih je do danas u potpunosti riješeno i opće prihvaćeno od strane matematičara, 10 problema je riješeno u potpunosti ili djelomično, no rješenja nisu generalno prihvaćena jer postoje kontroverzije oko cjelovitosti rješenja tih problema. Preostala tri problema nisu riješena niti u djelomičnosti. Jedan od njih je Riemannova hipoteza. To je osmi Hilbertov problem te ujedno jedan od sedam, tzv.*Millenium Prize Problems*, odnosno jedan od sedam najpoznatijih matematičkih problema čije se točno rješenje nagrađuje s milijun američkih dolara. Samo jedan takav problem je dosad riješen – Poincaréova hipoteza. Poznata je Hilbertova izjava: *Ako se probudim nakon tisuću godina, moje prvo pitanje bi bilo: Je li dokazana Riemannova hipoteza?*

1.2 Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann je rođen 17. rujna 1826.g. u malom mjestu Breselenz pokraj grada Hannovera. Bio je drugo najstarije dijete od njih šestero koliko je brojala obitelj Riemann. Njegova majka, Charlotte Ebell je umrla prije njegove punoljetnosti. Njegov otac, Friedrich Bernhard Riemann je bio pastor u Breselenzu koji ga je ujedno i podučavao kod kuće uz pomoć njegovog učitelja Schulza sve dok nije otišao pohađati srednju školu. Schulz je Riemanna podučavao aritmetiku i geometriju te je ubrzo bio bolji u tim područjima matematike od svog učitelja.

Slika 1.1: Bernhard Riemann

Nakon završetka srednje škole, Riemann je upisao studij teologije na sveučilištu u Göttingenu na nagovor svoga oca da pođe njegovim stopama. Međutim, Riemann je ubrzo odustao od studija teologije, te je upisao studij matematike na istom sveučilištu. Glavni profesor mu je bio jedan od najpoznatijih svjetskih matematičara Carl Friedrich Gauss, koji mu je ujedno i savjetovao da napusti studij teologije te da upiše studij matematike s obizorm na njegove iznadprosječne sposobnosti. Na istom sveučilištu, Riemannu su matematiku predavali poznati svjetski matematičari Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Carl Gustav Jacob Jacobi, Jacob Steiner i Gotthold Eisenstein. Nakon Dirichletove smrti, Bernhard je postao glavni profesor matematike na sveučilištu. Za vrijeme Austrijsko – pruskog rata, Riemann je otišao iz Göttingena u Italiju u mjesto Selasca (danas gradić Verbania pokraj jezera Maggiore), gdje je i umro od tuberkuloze te je pokopan 20. srpnja 1866. g.

Riemann se bavio kompleksnom analizom, distribucijom električnih naboja, teorijom funkcija, Abelovim funkcijama, prostim brojevima itd. Njemu u čast je nazvana posebna grana diferencijalne geometrije – Riemannova geometrija koja je zapravo poopćenje Gaussove diferencijalne geometrije s 2 na n dimenzija. Jedan od temeljnih pojmova matematičke analize je Riemannov integral koji je nezaobilazan u današnjoj matematici, također nazvan njemu u čast. Riemann je objavio mnogo radova od kojih je samo jedan iz teorije brojeva. No, taj jedan rad krije u sebi jedan od današnjih najznačajnijih neriješenih matematičkih problema, a to je Riemannova hipoteza.

1.3 Eulerova zeta funkcija

Prisjetimo se harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Znamo da taj red divergira. Općenito, promotrimo red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{1.1}$$

gdje je s realan broj. Pitamo se što možemo reći o njegovoj konvergenciji u ovisnosti o s? Za $s \leq 1$, očito imamo divergentan red. Što je s manji, red brže divergira. No, što možemo reći o redu (1.1) za $s > 1$? Odgovor na ovo pitanje dat će nam *Cauchyjev integralni kriterij* konvergencije reda. Dakle, ako je $f : [1, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna i padajuća funkcija, tada red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergira ako i samo nepravi integral

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergira. U našem slučaju je $f(x) = \frac{1}{x^s}$. Za $x \geq 1$, funkcija f pada na intervalu $[1, \infty\rangle$ jer je $f'(x) = \frac{-s}{x^{s+1}} < 0$. Nadalje, vrijedi

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{x^s} = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{x^{1-s}}{1-s} \bigg|_1^a \right) = \lim_{a \to +\infty} \left(\frac{a^{1-s}}{1-s} - \frac{1^{-s}}{1-s} \right).$$

Očito, za $s > 1$, nepravi integral konvergira k broju $\frac{1}{s-1}$, a divergira za $s \leq 1$. Dakle, pokazali smo pomoću integralnog kriterija da red (1.1) konvergira za sve $s > 1$. Koristeći ovu činjenicu, Leonard Euler je definirao *zeta funkciju*.

Definicija 1.3.1. Neka je s realan broj takav da je $s > 1$. **Eulerova zeta funkcija** definira se kao
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

Nadalje Euler je pokazao povezanost zeta funkcije s prostim brojevima. Konkretno, pokazao je da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdots , \tag{1.2}$$

pri čemu p označava prost broj. Jednakost (1.2) možemo prikazati na sljedeći način. Promotrimo Eulerovu zeta funkciju

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots . \tag{1.3}$$

Ako (1.3) pomnožimo s $\frac{1}{2^s}$ dobivamo

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} \cdots . \tag{1.4}$$

Zatim oduzmemo (1.4) od (1.3). Na taj se način ponište svi razlomici čiji se nazivnik može zapisati kao umnožak dviju potencija, pri čemu jedna iznosi 2^s. Slijedi

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots . \tag{1.5}$$

Ako (1.5) pomnožimo s $\frac{1}{3^s}$ dobivamo

$$\frac{1}{3^s}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} + \frac{1}{33^s} \cdots . \tag{1.6}$$

Zatim oduzmemo (1.6) od (1.5). Na taj se način ponište svi razlomici čiji se nazivnik može zapisati kao umnožak dviju potencija, pri čemu jedna iznosi 3^s. Slijedi

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \frac{1}{13^s} + \frac{1}{17^s} \cdots .$$

Nastavljajući postupak dalje analogno, dobivamo

$$\cdots\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1.$$

Dakle, vrijedi
$$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$
Na taj način smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.3.2 (Eulerova produktna formula). *Vrijedi*
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$
za sve $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$.

Euler je izračunao vrijednost zeta funkcije u parnim prirodnim brojevima. Pri računu se koristio Weierstrassovom produktnom formulom
$$\sin \pi x = \pi x \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right). \tag{1.7}$$
Jedno od njegovih najzanimljivijih otkrića je vrijednost zeta funkcije u točki $s = 2$.

Teorem 1.3.3. *Vrijedi*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$
Dokaz. Promatramo funkciju $\sin x$ i razvijemo ju u Taylorov red oko točke $x = 0$ (to jest u MacLaurinov red)
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{1.8}$$
Jednakost (1.8) podijelimo s x te dobivamo
$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \cdots. \tag{1.9}$$
Sada se vratimo na (1.7). Tu jednakost podijelimo s πx te uz zamjenu varijabli $\pi x \mapsto x$ dobivamo
$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots. \tag{1.10}$$
Koeficijent uz x^2 u (1.10) glasi
$$-\frac{1}{1^2\pi^2} - \frac{1}{2^2\pi^2} - \frac{1}{3^2\pi^2} - \frac{1}{4^2\pi^2} - \cdots = -\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

Izjednačimo u (1.9) i (1.10) koeficijente uz x^2 i dobivamo

$$-\left(\frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\frac{1}{3^2\pi^2}+\frac{1}{4^2\pi^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{6}$$

iz čega konačno slijedi

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

□

Prethodni teorem se naziva još i Baselov problem. Postavio ga je talijanski matematičar Pietro Mengoli 1644. godine, a riješio, tj. dokazao Euler 1735. godine. Problem je dobio ime po Eulerovom rodnom gradu.

Spomenimo još neke vrijednosti zeta funkcije koje je Euler izračunao na sličan način kao i $\zeta(2)$. To su

$$\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450}.$$

Vrijednost zeta funkcije u parnim prirodnim brojevima se može izračunati pomoću sljedeće formule koju je sam Euler i dokazao

$$\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\,\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}, \tag{1.11}$$

pri čemu B_{2k} označava *Bernoullijev broj*. Bernoullijevi brojevi u uskoj su vezi sa sumom k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva, to jest sa

$$S_k(n)=1^k+2^k+\cdots+n^k,\ n\in\mathbb{N},\ n>1,$$

za neki $k\in\mathbb{N}$. Bernoulli je također ustanovio da su sume $S_k(n)$ zapravo polinomi u varijabli n stupnja $k+1$ te je prethodnu jednakost zapisao na sljedeći način

$$S_k(n)=\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}.$$

Prethodna relacija implicitno definira koeficijente B_j, odnosno Bernoullijeve brojeve. U najjednostavnijem slučaju za $k=1$, s jedne strane imamo

$$S_1(n)=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}(n^2+n),$$

a s druge

$$S_1(n)=\frac{1}{2}(B_0n^2+2B_1n).$$

Otuda je

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2}.$$

Općenito, Bernoullijevi brojevi se mogu odrediti pomoću sljedeće rekurzije

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_m = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k(n)}{m-k+1} \end{cases}.$$

Vrijednosti prvih nekoliko Bernoullijevih brojeva su

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

Budući da vrijedi $B_j = 0$ za neparne brojeve $j > 1$, u različitim formulama pojavljuju se samo Bernoulijevi brojevi s parnim indeksom, kao što je slučaj za formulu pomoću koje se računaju vrijednosti $\zeta(2k)$ u (1.11). Nadalje, Bernoullijevi brojevi su racionalni brojevi pa iz (1.11) možemo zaključiti da su vrijednosti zeta funkcije u parnim prirodnim brojevima iracionalni brojevi zbog faktora π, pa čak i transcendentni.

O aritmetičkim svojstvima brojeva $\zeta(2k+1)$ se zna dosta manje i njih ne možemo odrediti eksplicitno kao što je bio slučaj za brojeve $\zeta(2k)$. Međutim, vrijednosti zeta funkcije u neparnim prirodnim brojevima možemo odrediti pomoću formule

$$\zeta(2k+1) = \frac{1}{(2k)!} \int_0^\infty \frac{t^{2k}}{e^t - 1} dt, k \in \mathbb{N}.$$

Dokazano je da je $\zeta(3)$ transcendentan broj, no za ostale vrijednosti zeta funkcije u neparnim prirodnim brojevima se ne može sa sigurnošću utvrditi jesu li ti brojevi samo iracionalni ili su i transcendentni.

1.4 Riemannova zeta funkcija

Budući da za cilj imamo iskazivanje Riemannove hipoteze, u tu svrhu morat ćemo definirati Riemannovu zeta funkciju. Riemannova zeta funkcija u uskoj je vezi sa specijalnim Dirichletovim redom u kompleksnoj varijabli $s = \sigma + it$, pri čemu su $\sigma, t \in \mathbb{R}$. Često ćemo realni dio kompleksnog broja s, to jest σ, označavati s $\Re(s)$, a imaginarni dio, t s $\Im(s)$. Prisjetimo se da pod općim Dirichletov redom smatramo red oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

gdje je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{C}$ i $s \in \mathbb{C}$. Prisjetimo se i eksponencijalne funkcije kompleksne varijable koja se definira na sljedeći način

$$e^s = e^{\sigma+it} = e^{\sigma}(\cos t + i \sin t), \tag{1.12}$$

odnosno

$$n^s = e^{s\ln n} = e^{(\sigma+it)\ln n} = e^{\sigma\ln n}(\cos(t\ln n) + i\sin(t\ln n)). \tag{1.13}$$

Kako Riemannovu zeta funkciju možemo shvatiti kao poopćenje Eulerove zeta funkcije na kompleksne varijable s, jasno je da će nas isključivo zanimati Dirichletov red u kojem vrijedi $a_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to jest

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \tag{1.14}$$

za sve one $s \in \mathbb{C}$ za koje red konvergira. Jer je

$$|n^s| = n^{\sigma}|\cos(t\ln n) + i\sin(t\ln n)| = n^{\sigma},$$

lako možemo zaključiti da red (1.14) *konvergira apsolutno* za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da je $\Re(s) > 1$, a divergira u slučaju kada je $\Re(s) \leq 1$.

Definicija 1.4.1. Riemannova zeta funkcija definira se na sljedeći način

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da je $\Re(s) > 1$.

Napomenimo da apsolutna konvergencija reda (1.14) na skupu $S = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ implicira holomorfnost Riemannove zeta funkcije na tom skupu. To jest, funkcija ima derivaciju u svakoj točki navedenog (otvorenog) skupa. Red (1.14) možemo zapisati na sljedeći način

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots).$$

Iz (1.2) slijedi da funkciju ζ možemo zapisati i na ovaj način

$$\zeta(s) = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}.$$

Riemannovu zeta funkciju smo zapisali u obliku Eulerove produktne formule kao i u (1.2). Ovakav zapis je jedna od prvih veza Riemannove zeta funkcije i prostih brojeva. Nadalje, kao direktnu posljedicu prethodne jednakosti imamo sljedeću tvrdnju.

Teorem 1.4.2. *Za svaki $s \in \mathbb{C}$ za koji je $\Re(s) > 1$, vrijedi $\zeta(s) \neq 0$.*

Vidjeli smo da Dirichletov red (1.14) divergira za svaki $s \in \mathbb{C}$ za koji je $\Re(s) \leq 1$. S druge strane, on *lokalno uniformno konvergira* u bilo kojem području u kojem vrijedi $\sigma \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$, jer postoji konvergentan red $\sum_n a_n$ takav da je $\frac{1}{n^s} \leq a_n$ za svaki s iz navedenog podskupa i za svaki $n \in \mathbb{N}$. Konačno, možemo zaključiti da je Riemannova zeta funkcija *analitička* na skupu $\Re(s) > 1$ jer je red (1.14) kojim je funkcija definirana apsolutno i lokalno uniformno konvergentan. Prisjetimo se, analitička funkcija ima neprekidnu derivaciju na svojoj domeni, tj. može se razviti u red potencija.

No, Riemannova zeta funkcija nije definirana na području $\Re(s) \leq 1$ jer je u tom slučaju red kojim je funkcija definirana divergentan. Posebno, za $s = 1$ imamo harmonijski red. Budući da je funkcija ζ analitička na spomenutom skupu, prirodno je pitati se postoji li njezino analitičko (ili meromorfno) produljenje na neki veći podskup od $\mathbb{C}$. Problemom njenog analitičkog produljenja bavit ćemo se u sljedećem dijelu ovog rada.

1.5 Analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije

Glavni problem Riemannove zeta funkcije je njezina domena jer je funkcija definirana samo za $\Re(s) > 1$. Stoga ćemo pokušati odrediti analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije. To je moguće u ovom slučaju jer je Riemannova zeta funkcija analitička na svojoj domeni. Prisjetimo se definicije analitičkog prouduljenja funkcije. Neka su $f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ i $f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ analitičke funkcije takve da je $D_1 \subset D_2$. Ako je $f_2|_{D_1} = f_1$, onda kažemo da je funkcija f_2 direktno *analitičko produljenje funkcije* f_1.

Dakle, ako uspijemo pronaći analitičku funkciju na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ koja se može zapisati u obliku Dirichletovog reda (1.14) na skupu $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, onda smo uspjeli definirati $\zeta(s)$ za sve $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. U točki $s = 1$, Riemannovu zeta funkciju nikako ne možemo definirati i ona će predstavljati njezin *singularitet*, to jest funkcija ζ neće biti analitička jedino u toj točki. Riemann je 1859. godine dokazao da postoji analitičko produljenje funkcije ζ na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, te ga je i odredio.

Teorem 1.5.1. *Riemannova zeta funkcija koja je definirana Dirichletovim redom (1.14) može se analitički produljuti na cijelu kompleksnu ravninu bez točke s=1, to jest na* $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

U nastavku ćemo opisati kako se eksplicitno definira analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije. Prije toga prisjetit ćemo se nekih pojmova iz kompleksne analize kao što su Laurentov red funkcije, meromorfna funkcija, singularitet, pol, reziduum,...

Svaka holomorfna funkcija f na kružnom vijencu $V(z_0; r, R)$ oko točke z_0 može se razviti u tzv. *Laurentov red* potencija oko točke z_0 na sljedeći način

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Koeficijenti a_n računaju se prema formuli

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

gdje je Γ_0 pozitivno orijentirana kružnica oko z_0 proizvoljnog radijusa ρ, $r < \rho < R$. Specijalno, svaka holomorfna funkcija na probušenom krugu oko točke z_0 može se razviti u Laurentov red, a koeficijent a_{-1} uz izraz $\dfrac{1}{z - z_0}$ naziva se *reziduum* funkcije f u točki z_0 i označavamo ga s $\operatorname{res}(f, z_0)$.

Za funkciju f kažemo da je *meromorfna* na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako skup singulariteta nema gomilište u Ω i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi. Nadalje, funkcija f ima u točki z_0 *singularitet* ako funkcija u toj točki nije holomorfna (nema derivaciju) ili uopće nije definirana. Singularitet z_0 je *izoliran* ako je f holomorfna funkcija na nekom probušenom krugu oko točke z_0, to jest na $K(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Postoje tri tipa izoliranih singulariteta: *uklonjivi singulariteti*, *polovi* i *bitni singulariteti*. Izolirani singularitet z_0 funkcije f će biti *uklonjiv*, ako u točki z_0 možemo funkciju f dodefinirati tako da postane holomorfna na nekom krugu $K(z_0, R)$. Za izolirani singularitet z_0 kažemo da je *pol*, ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima konačno mnogo (ali barem jedan) članova s negativnim potencijama, to jest s potencijama od $\frac{1}{z-z_0}$. *Red pola* je red najveće potencije od $\frac{1}{z-z_0}$ koja se u tom Laurentovom razvoju pojavljuje s koeficijentom različitim od nule. Konačno, izolirani singularitet z_0 je *bitan* singularitet ako u Laurentovom razvoju funkcije f oko točke z_0 ima beskonačno mnogo članova s negativnim potencijama, to jest beskonačno mnogo koeficijenata uz negativne potencije koji su različiti od nule.

Sada se vraćamo na određivanje analitičkog produljenja Riemannove zeta funkcije. Neka je $\Re(s) > 1$. Funkciju ζ možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(s \int_n^{\infty} x^{-s-1} dx \right) = s \sum_{n=1}^{\infty} n \int_n^{n+1} x^{-s-1} dx.$$

Neka je $x = [x] + \{x\}$, pri čemu je $[x]$ označava cijeli dio realnog broja x, a $\{x\}$ označava razlomljeni dio realnog broja x. Znamo da je vrijednost $[x]$ uvijek jednaka konstanti n za svaki x u intervalu $[n, n+1\rangle$ pa imamo

$$\zeta(s) = s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n}^{n+1}[x]x^{-s-1}dx = s\int_{1}^{\infty}[x]x^{-s-1}dx.$$

Zapišemo $[x] = x - \{x\}$ te dobijemo

$$\zeta(s) = s\int_{1}^{\infty}x^{-s}dx - s\int_{1}^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx.$$

Nakon sređivanja imamo

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_{1}^{\infty}\{x\}x^{-s-1}dx, \sigma > 1. \tag{1.15}$$

Zbog nejednakosti $0 \leq \{x\} < 1$, nepravi integral (1.15) konvergira za sve $\sigma > 0$ zbog konvergencije integrala $\int_{1}^{\infty} x^{-\sigma-1}dx$. Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty}\{x\}\,x^{-s-1}dx < \int_{1}^{\infty} x^{-s-1}dx \leq \int_{1}^{\infty}\left|x^{-s-1}\right|dx = \int_{1}^{\infty}x^{-\sigma-1}dx \\ = -\frac{1}{\sigma}x^{-\sigma}\Big|_{1}^{\infty} = -\frac{1}{\sigma}\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sigma} - 1\right) = \frac{1}{\sigma},\end{aligned}$$

za $\sigma > 0$. Prema tome, nepravi integral u (1.15) definira analitičku funkciju u varijabli s, pri čemu je $\Re(s) > 0$. Stoga, meromorfna funkcija na desnoj strani relacije (1.15) daje analitičko produljenje funkcije ζ na područje $\Re(s) > 0$ te iz izraza $\frac{s}{s-1}$ slijedi da se pol funkcije ζ nalazi u točki $s = 1$ te da je reziduum funkcije u $s = 1$ jednak 1. Jednakost (1.15) naziva se **integralni oblik meromorfnog (analitičkog) produljenja funkcije** ζ s $\Re(s) > 1$ na $\Re(s) > 0$.

Sam Riemann je, kao što smo već napomenuli, uspio analitički, odnosno meromorfno produljiti funkciju ζ na čitavu kompleksnu ravninu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Tada govorimo o tzv. *kompletiranoj zeta funkciji*. U nastavku ćemo opisati kako se može dobiti takvo produljenje, no prije toga ćemo se upoznati s gama funkcijom koja se u tu svrhu eksplicitno koristi.

1.6 Gama funkcija

Gama funkciju je prvi uveo Euler s ciljem generalizacije funkcije faktorijela na realne brojeve. Zbog svoje velike važnosti, gama funkcijom su se bavili Legendre, Gauss, Liouville, Weierstrass i još mnogi drugi veliki matematičari. Gama funkcija pripada kategoriji transcendentnih funkcija, tj. funkcija koje nisu algebarske. Ona se također pojavljuje u raznim područjima matematike kao što su asimptotski redovi, hipergeometrijski redovi, teorija brojeva itd. Gama funkcija može biti rješenje interpolacijskog problema u kojem treba naći glatku krivulju koja povezuje točke (x, y) zadane s $y = (x-1)!$ za sve prirodne brojeve x. Euler je 1730.g. gama funkciju definirao na sljedeći način

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln\tau)^{x-1} d\tau.$$

Ako stavimo $t = -\ln\tau$, dobivamo gama funkciju u obliku u kojem je danas definiramo.

Definicija 1.6.1. Gama funkcija je definirana nepravim integralom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \tag{1.16}$$

za sve realne brojeve osim negativnih cijelih brojeva i nule.

Uočimo da je integral kojim je definirana gama funkcija nepravi u donjoj i u gornjoj granici. Odredimo sve vrijednosti broja x za koje integral u (1.16) konvergira. Za $t > 0$, vrijedi

$$e^{-t} t^{x-1} < t^{x-1}$$

pa imamo

$$\int_\epsilon^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \int_\epsilon^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x} - \frac{\epsilon^x}{x}.$$

Za $x > 0$ je

$$\int_\epsilon^1 e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{1}{x}.$$

To znači da je nepravi integral $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$ konvergentan, tj. vrijedi

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0.$$

Za svaki $t > 0$, vrijedi $e^t > 0$ te nejednakost $e^t > \frac{t^n}{n!}$ vrijedi za sve cijele brojeve n. Stoga vrijedi i $e^{-t} < \dfrac{t^n}{n!}$ iz koje slijedi još važnija nejednakost $e^t t^{x-1} < \dfrac{n!}{t^n + 1 - x}$. Dakle, za fiksiran broj x i za $n > x + 1$ možemo zaključiti da je

$$\int_0^\delta e^{-t} t^{x-1} dt < \frac{n!}{n-x}.$$

Slijedi da integral

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1} = \lim_{\delta\to+\infty}\int_1^\delta e^{-t}t^{x-1}dt$$

postoji, što znači da je funkcija definirana u (1.16) dobro definirana. Zamijenimo li x s $x+1$ u (1.16) i integriramo po dijelovima, dobivamo

$$\int_\epsilon^\delta e^{-t}t^x dt = -\left. e^{-t}t^x\right|_\epsilon^\delta + x\int_\epsilon^\delta e^{-t}t^{x-1}dt = e^{-\epsilon}\epsilon^x - e^{-\delta}\delta^x + x\int_\epsilon^\delta e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Za $\epsilon \to 0$ i $\delta \to +\infty$, izrazi $e^{-\epsilon}\epsilon^x$ i $e^{-\delta}\delta^x$ teže k 0. Dolazimo do važne funkcijske jednadžbe

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{1.17}$$

Ova funkcijska jednadžba je temelj razvoja teorije o gama funkcijama te predstavlja generalizaciju identiteta $n! = n(n-1)!$ za realne vrijednosti broja n.

Pretpostavimo da znamo vrijednosti gama funkcije na intervalu $\langle 0, 1]$. Pomoću 1.17 lako možemo saznati vrijednost gama funkcije na intervalu $\langle 1, 2]$, zatim na intervalu $\langle 2, 3]$ i tako analogno dalje, povećavajući rubove intervala za 1. Na taj način, dolazimo do jednakosti

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x),$$

koja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Gama funkcija u (1.16) je definirana samo za $x > 0$. Prirodno je postaviti pitanje kako se funkcija ponaša za $x < 0$. Ako se s nalazi u intervalu $\langle -n, -n+1\rangle$, onda definiramo vrijednost gama funkcije u točki x na ovaj način

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\Gamma(x+n). \tag{1.18}$$

Očito je da za negativne cijele brojeve i 0, desna strana u (1.18) nije definirana pa su te točke polovi gama funkcije. Dakle, možemo zaključiti da je funkcija gama dobro definirana. Također, možemo definirati gama funkciju i za kompleksne brojeve.

Definicija 1.6.2. Gama funkcija je definirana nepravim integralom

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt, \tag{1.19}$$

za sve kompleksne brojeve s takve da je $\Re(s) \neq -n, n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Slično kao i kod zeta funkcije, gama funkcija je definirana na $\Re(s) > 0$ jer na tom području, integral 1.19 konvergira.

Sada se možemo zapitati, postoji li neka druga definicija gama funkcije koja je primjenjiva na cijeloj kompleksnoj ravnini? Odnosno, postoji li neko analitičko produljenje gama funkcije na cijelu kompleksnu ravninu? Odgovor je pozitivan.

Definicija 1.6.3. Gama funkcija je analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini koju definiramo pomoću Weierstrassovog produkta

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}},$$

pri čemu je γ Eulerova konstanta koja je definirana na sljedeći način

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.5772156649 \cdots .$$

Nije još dokazano je li Eulerova konstanta algebarski ili transcendentni broj ili čak iracionalan. Sljedeći teorem o svojstvima gama funkcije iznosimo bez dokaza.

Teorem 1.6.4. *Gama funkcija zadovoljava sljedeće funkcijske jednadžbe:*

1. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$,
2. $\Gamma(1) = 1$,
3. $\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$,
4. $\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z)$ *(Legendreova formula duplikacije).*

1.7 Kompletirana zeta funkcija i Riemannova hipoteza

Gama funkciju, definiranu i opisanu u prethodnom odsječku, koristimo za daljnje analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije na cijelu kompleksnu ravninu. Uvrstimo li $s = 2$ u (1.19), dobivamo

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt,$$

za $\sigma > 0$. Stavimo $t = n^2 \pi x$ i dobivamo

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx. \tag{1.20}$$

Sumiranjem (1.20) po n s lijeve i desne strane, dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx. \tag{1.21}$$

Uočimo da je nepravi integral u (1.21) konvergetan za $\sigma > 0$ u objema granicama, što smo i pokazali u prethodnom odsječku pri definiranju gama funkcije. Dakle, red

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}e^{-n^2\pi x}dx$$

konvergira, što znači da smo zadovoljili uvjete teorema o monotonoj konvergenciji koji nam omogućuje zamjenu znakova sumacije i integracije. Za $\sigma > 1$, zbog definicije Riemannove zeta funkcije, imamo

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\right)dx. \tag{1.22}$$

Sada uvodimo Jacobijevu theta funkciju koju definiramo na sljedeći način

$$\vartheta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}, x > 0.$$

Uočimo da je red $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$ divergentan za $x = 0$. Ovo je samo jedna od Jacobijevih theta funkcija iz klase funkcija oblika

$$\vartheta(z,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n z}e^{\pi i\omega n^2}, z,\omega \in \mathbb{C}, \Im(\omega) > 0.$$

Uočimo da vrijedi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$

iz čega slijedi jednakost

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi x} - 1\right). \tag{1.23}$$

Kombinirajući (1.22) i (1.23) dobivamo

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx. \tag{1.24}$$

Zbog divergencije reda u točki $x = 0$ kojim je definirana Jacobijeva theta funkcija, integral u (1.24) je nepravi u obje granice. Funkcijska jednadžba Jacobijeve theta funkcije glasi

$$x^{\frac{1}{2}}\vartheta(x) = \vartheta\left(x^{-1}\right), \tag{1.25}$$

pri čemu je $x > 0$. Za integral (1.24) vrijedi

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx + \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx. \tag{1.26}$$

Primjenjujemo metodu supstitucije na nepravi integral s desne strane prethodne jednakosti

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{t} & dx = -\frac{dt}{t^2} \\ 0 \to \infty & 1 \to 1 \end{bmatrix} = \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta\left(\frac{1}{t}\right)-1}{2}dt. \tag{1.27}$$

Koristeći (1.25), primijetimo da vrijedi

$$\frac{\vartheta\left(\frac{1}{x}\right)-1}{2} = \frac{\sqrt{x}\vartheta(x)-1}{2} = \sqrt{x}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{x}-1}{2}.$$

Stoga, integral u (1.27) možemo zapisati kao

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\frac{\vartheta(x)-1}{2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{2}x^{-\frac{s}{2}-1}\left[\sqrt{x}\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) + \frac{\sqrt{x}-1}{2}\right]dx. \tag{1.28}$$

Konačno, iz (1.26) i (1.28) slijedi

$$\pi^{\frac{-s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx + \int_1^\infty \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1-s}{2}-1} - x^{-\frac{s}{2}-1}\right)dx.$$

Uočimo da za $s \neq 0$ i $s \neq 1$ možemo lako eksplicitno izračunati vrijednost integrala

$$\int_1^\infty \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1-s}{2}-1} - x^{-\frac{s}{2}-1}\right)dx = \left.\frac{x^{\frac{1-s}{2}}}{1-s}\right|_1^\infty + \left.\frac{x^{-\frac{s}{2}}}{s}\right|_1^\infty = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} = \frac{-1}{s(1-s)}.$$

Konačno, imamo

$$\zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\left(\frac{-1}{s(1-s)} + \int_1^{\infty}\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right)dx\right). \tag{1.29}$$

Uočimo da je Jacobijeva theta funkcija strogo padajuća za $x \geq 1$ u što se možemo uvjeriti s grafa te funkcije na Slici 1.2 pa vrijedi $\vartheta(x) < \vartheta(1)$ za $x > 1$. Nadalje, jer je

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\right) = 0,$$

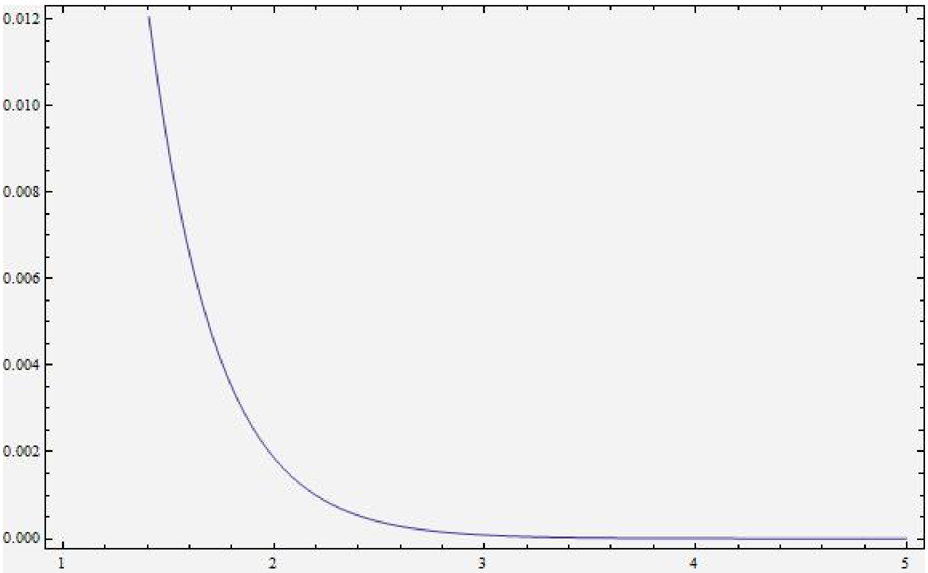
slijedi

$$\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = 1.$$

Otuda je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)-1}{2} = 0.$$

Stoga, nepravi integral u (1.29) konvergira za svaki $s \in \mathbb{C}$ i definira cijelu funkciju na $\mathbb{C}$.



Slika 1.2: Graf Jacobijeve theta funkcije na intervalu $[1, 5]$

Dakle, (1.29) daje analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije na cijelu kompleksnu ravninu osim u točki $s = 1$. Uočimo da je u točki $s = 0$ funkcija definirana s $\dfrac{1}{s\Gamma(s)}$ analitička na $\mathbb{C}$. Ovo nije jedino analitičko produljenje Riemannove zeta funkcije, ali zbog jedinstvenosti analitičkog produljenja, sva produljenja se u konačnici svode na (1.29) na bilo kojoj domeni na kojoj su definirana.

Teorem 1.7.1. *Za bilo koji $s \in \mathbb{C}$, vrijedi*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \tag{1.30}$$

Ako stavimo da je

$$\xi(s) = \frac{s}{2}(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{1.31}$$

*onda, funkcijsku jednadžbu (*1.30*) zapisujemo u jednostavnijem obliku*

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{1.32}$$

Iz Teorema 1.7.1 slijedi

$$\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$$

pa je funkcija $\xi(s)$ simetrična oko pravca $\Re(s) = \frac{1}{2}$ i $\Im(s) = 0$. Sada zapišimo (1.32) na sljedeći način

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^s\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}. \tag{1.33}$$

Koristeći Legendreovu formulu duplikacije iz Teorema 1.6.4 imamo

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s}}\Gamma(1-s)$$

iz čega slijedi

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}2^s}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\Gamma(1-s). \tag{1.34}$$

Uvrštavanjem (1.34) u (1.33) dobivamo

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{(2\pi)^s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(1-s)}.$$

Koristeći treću tvrdnju iz Teorema 1.6.4, odnosno funkcijsku jednadžbu
$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \dfrac{\pi}{sin\,(\pi s)}$, dobivamo

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \frac{\sin(\pi s)}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} = \frac{2\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{(2\pi)^s}.$$

Sređivanjem prethodne funkcijske jednadžbe dobivamo

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s). \tag{1.35}$$

Nakon definiranja funkcijske jednadžbe, promatrat ćemo nultočke funkcije ζ. Prisjetimo se jednostavnih polova gama funkcije. Oni se postižu za negativne cijele brojeve i nulu. Iz jednakosti (1.35), točnije zbog izraza $\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, slijedi da Riemannova zeta funkcija ima tzv. *trivijalne nultočke* koje se postižu za sve parne negativne cijele brojeve, tj. za $s = -2, -4, -6, ...$ Pol $s = 0$ se poništava zbog izraza $\frac{1}{s(s-1)}$.

Zbog funkcijske jednadžbe (1.30) i činjenice da je za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\Re(s) > 1$ vrijedi $\zeta(s) \neq 0$, slijedi da se sve netrivijalne nultočke nalaze na *pruzi* $0 \leq \Re(s) \leq 1$. Netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije su zapravo nultočke funkcije ξ i one su simetrične s obzirom na pravac $\Re(s) = \frac{1}{2}$ i realnu os $\Im(s) = 0$. Dakle, ako je ρ netrivijalna nultočka Riemannove zeta funkcije, onda je i $\overline{\rho}$ također.

Teorem 1.7.2. *Funkcija $\zeta(s)$ ima sljedeća svojstva:*

1. *$\zeta(s)$ nema nultočaka na $\Re(s) > 1$,*

2. *jedini pol funkcije $\zeta(s)$ se nalazi u točki $s = 1$ i taj pol je ujedno i pol prvog reda s reziduumom 1,*

3. *trivijalne nultočke funkcije $\zeta(s)$ se postižu za sve negativne parne cijele brojeve s, osim za 0, tj. za $s = -2, -4, -6, ...$,*

4. *netrivijalne nultočke se nalaze unutar pruge $0 \leq \Re(s) \leq 1$ i simetrične su s obzirom na pravac $\Re(s) = \frac{1}{2}$ i s obzirom na realnu os $\Im(s) = 0$,*

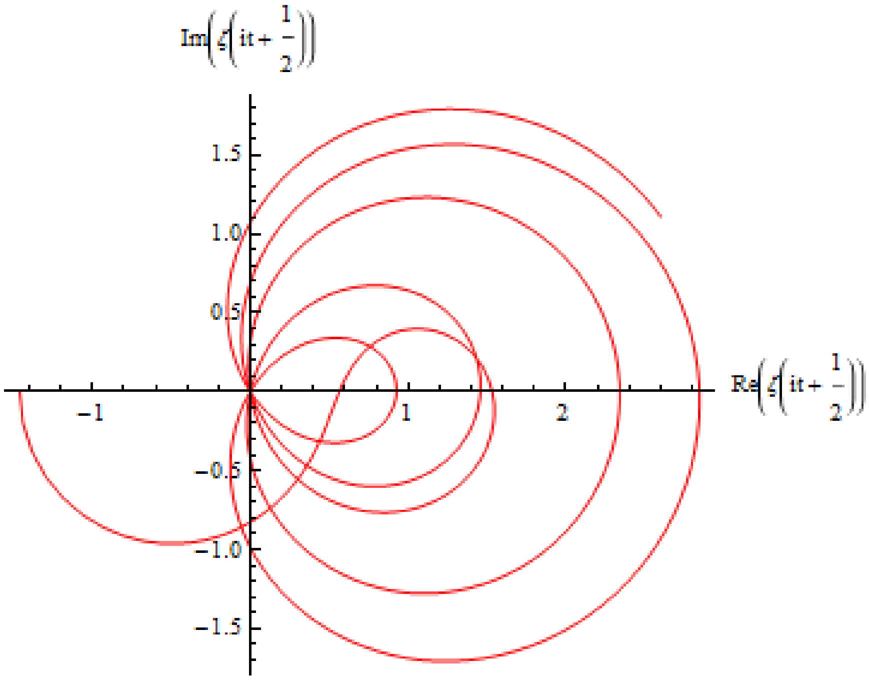
5. *nultočke funkcije $\xi(s)$ su zapravo netrivijalne nultočke funkcije $\zeta(s)$.*

Pruga $0 \leq \Re(s) \leq 1$ se naziva *kritična pruga* i pravac $\Re(s) = \frac{1}{2}$ se naziva *kritični pravac*. Sad konačno iznosimo Riemannovu hipotezu.

Slutnja 1.7.3. ***(Riemannova hipoteza)**. Sve netrivijalne nultočke funkcije $\zeta(s)$ se nalaze na kritičnom pravcu $\Re(s) = \frac{1}{2}$.*

Riemann je svoju hipotezu iznio bez dokaza. Poznata je njegova izjava:

"Svatko bi naravno htio rigorozan dokaz ove slutnje, međutim daljnje traganje za dokazom moram staviti sa strane nakon nekoliko uzaludnih pokušaja zato jer to nije nužno za neposredni cilj mojeg istraživanja." (Prijevod iz Riemannog rada iz 1859.godine: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*).



Slika 1.3: Riemannova zeta funkcija u parametarskom obliku s parametrom t na kritičnom pravcu $\frac{1}{2} + it$ pri čemu je $t \in [0, 35]$

Poglavlje 2

O nultočkama Riemannove zeta funkcije

U prethodnom poglavlju smo definirali Riemannovu zeta funkciju ζ za sve $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Iz njezine funkcijske jednadžbe (1.30) možemo lako vidjeti da ona poprima vrijednost 0 u točkama $-2k$, $k \in \mathbb{N}$. Već smo napomenuli da su to tzv. *trivijalne* nultočke. O ostalim nultočkama je sam Riemann postavio slutnju da su oblika $\frac{1}{2} + it$, tj. da sve leže na kritičnom pravcu $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Znamo da je prvih nekoliko netrivijlanih nultočaka Riemann uspio odrediti, no ti njegovi izračuni nisu pronađeni. Nakon 150 godina broj poznatih nultočaka popeo se na brojku 10^{13} i one sve leže na kritičnom pravcu, tj. potvrđuju ispravnost hipoteze. No, s druge strane možemo konstatirati kako se o skupu nultočaka još uvijek zna vrlo malo usprkos velikim naporima brojnih matematičara.

Ponovimo, netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije su oblika $s = \sigma + it$, za $0 < \sigma < 1$ te kažemo da se one nalaze unutar kritične pruge $0 < \Re(s) < 1$. Netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije označavamo s ρ, pri čemu n-tu netrivijalnu nultočku označavamo s $\rho_n = \sigma + it_n$. Do sada je svim pronađenim nultočkama vrijednost realnog dijela jednaka $\frac{1}{2}$, tj. vrijedi $\sigma = \frac{1}{2}$.

Riemannova zeta funkcija može se faktorizirati preko svojih netrivijalnih nultočaka. Naime, u teoriji analitičkih funkcija kao jedan od osnovnih pojmova nalazi se i pojam *beskonačnog produkta*. Zahvaljujući metodi razvoja analitičke funkcije u beskonačan produkt, funkciju možemo dovesti u direktnu vezu sa skupom njezinih nultočaka. U tome nam može poslužiti polinom kojeg možemo prikazati u obliku produkta linearnih polinoma (odnosno Osnovni teorem algebre). Zbog toga ćemo u sljedećem odsječku navesti glavne činjenice o funkcijama koje se mogu prikazati u obliku beskonačnog produkta.

2.1 Dva osnovna teorema faktorizacije

Osnovni teorem algebre tvrdi da se svaki ne-nul polinom $p(z)$ u kompleksnoj varijabli može jedinstveno faktorizirati na sljedeći način

$$p(z) = az^m \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

pri čemu je a nenegativna konstanta, m je nenegativan cijeli broj i $z_1, z_2, ..., z_n$ su kompleksne nultočke polinoma p različite od 0. Posljedice ovog teorema su dvojake. S jedne strane, bilo kojem konačnom nizu $z_1, z_2, ..., z_n$ u kompleksnoj ravnini se može pridružiti polinom $p(z)$ čije su nultočke upravo članovi toga niza, dakle $p(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$. S druge strane, bilo koji polinom $p(z)$ u kompleksnoj ravnini se može faktorizirati na sljedeći način

$$p(z) = a \prod_{k=1}^{n}(z - z_k),$$

pri čemu je a konstanta različita od 0 te članovi niza $z_1, z_2, ..., z_n$ su kompleksne nultočke funkcije p.

Međutim, postavlja se pitanje egzistencije faktorizacije cijelih funkcija. S tim pitanjem se automatski nameću i dva problema. Prvi problem je vezan uz mogućnost postojanja beskonačnog broja nultočaka funkcije što vodi beskonačnim produktima, a s njima se javljaju i problemi njihove konvergencije. Drugi problem je vezan uz mogućnost postojanja dviju cijelih funkcija s istim brojem nultočaka istog reda, koje mogu postati jednake ako ih pomnožimo s nekom cijelom funkcijom koja ne iščezava. Tada jedinstvenost faktorizacije više nije zagarantirana.

Ako beskonačni produkt $\prod_{k}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$ ne konvergira, onda on ne može definirati cijelu funkciju, stoga nije teško uočiti da neki uvjeti moraju biti postavljeni na niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ da bi postigli konvergenciju ovog produkta. U tom slučaju, faktore $\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$ treba zamijeniti s nekim novim faktorima koji bi garantirali konvergenciju. Tu do izražaja dolaze *Weierstrassovi elementarni faktori*. Definiramo ih za nenegativne brojeve d na sljedeći način

$$E_d(z) = \begin{cases} 1 - z, \text{ ako je } d = 0, \\ (1 - z)^{\frac{z^1}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^d}{d}}, \text{ inače.} \end{cases}$$

Također, vrijedi nejednakost

$$|1 - E_d(z)| \leq |z|^{d+1},$$

za $|z| \leq 1, d \in \mathbb{N}_0$, koju je dokazao Walter Rudin. Primijetimo da faktori oblika $(1 - z)$ iščezavaju jedino za $z = 1$.

Teorem 2.1.1 (**Weierstrassov produktni teorem**). *Neka je $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz kompleksnih brojeva čiji su članovi različiti od 0, takav da vrijedi $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = \infty$, pri čemu je $r_k = |z_k|$. Ako je $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bilo koji niz nenegativnih brojeva takav da je red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_k}\right)^{1+d_k}$ konvergentan za sve $r > 0$, onda je funkcija definirana s*

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E_{d_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)$$

cijela transcendentna funkcija čiji je skup nultočaka upravo jednak $\{z_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Napomena 2.1.2. *Ako se nultočka w funkcije f pojavljuje u nizu $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ točno m puta, onda toliko iznosi i njezina kratnost.*

Podsjetimo se da funkciju koja nije polinom nazivamo transcendentnom funkcijom. Primijetimo da niz $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uvijek postoji jer na primjer, za $d_k = k$, red $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_k}\right)^{1+d_k}$ konvergira. Možemo primijetiti da je u ovom teoremu sadržan i Osnovni teorem algebre. Naime, ako je niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konačan, onda možemo uzeti $d_k = 0$ te dobivamo $f(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right)$. Sada ćemo iskazati prvu formu Weierstrassovog teorema faktorizacije.

Teorem 2.1.3 (**Weierstrassov teorem faktorizacije**). *Neka je f cijela transcendentna funkcija. Neka je 0 nultočka kratnosti m, a ostale nultočke poredamo u standardno numeriran niz $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tako da vrijedi*

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_k| \leq \cdots$$

te svaku nultočku ponovimo onoliko puta kolika je njezina kratnost. Tada postoji cijela funkcija g takva da vrijedi

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_k\left(\frac{z}{z_k}\right). \tag{2.1}$$

Pojam *standardno numeriran* niz znači da se svaka nultočka funkcije f različita od 0 pojavljuje u gornjem nizu onoliko puta, kolika je njezina kratnost. Skup nultočaka funkcije f je skup $\{0, 0, ..., 0, z_1, z_2, ..., z_k, ...\}$ pri čemu se nultočka 0 pojavljuje m puta.

Weierstrassov teorem faktorizacije tvrdi da se cijele funkcije mogu prikazati u obliku produkta pomoću vlastitih nultočaka, tj. da za svaki standardno numeriran niz kompleksnih brojeva koji pritom teži u beskonačnost, postoji bar jedna cijela funkcija kojoj je taj niz upravo skup nultočaka. Sada se postavlja pitanje je li moguće pojednostavniti izraz (2.1). Odgovor je pozitivan i taj teorem je poznat kao Hadamardov teorem faktorizacije koji je ujedno druga forma Weierstrassovog teorema faktorizacije. Dokazao ga je francuski matematičar Jacques Hadamard 1893. godine. No, prije iznošenja samog teorema, trebamo definirati još nekoliko pojmova.

Za početak, prisjetimo se principa maksimuma modula koji tvrdi da u području $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ne postoji točka z_0 takva da za svaku holomorfnu nekonstantnu funkciju f vrijedi

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|,$$

za svaki $z \in \Omega$. Za daljnje proučavanje faktorizacije cijele funkcije $f \neq 0$, trebat će nam tzv. **modul cijele funkcije** f kojeg za $r > 0$ definiramo na sljedeći način

$$M(r) = M_f(r) = max\,\{|f(z)|; |z| = r\}\,.$$

Iz principa maksimuma modula slijedi da je $M(r)$ maksimum funkcije $z \mapsto |f(z)|$ na zatvorenom krugu $\overline{K}(0, r)$. Posebno, ako je cijela funkcija nekonstanta, onda je funkcija $r \mapsto M(r)$ strogo rastuća. Ako cijela funkcija f nije polinom (što je naš slučaj), onda njezin modul $M(r)$ raste brže od svake potencije r^m, tj. cijele transcendentne funkcije rastu brže od bilo koje fiksne potencije od r. Dakle, ideja je mjeriti rast takvih funkcija pomoću *najjednostavnije brzorastuće funkcije*, tj. pomoću funkcije $z \mapsto e^z$.

Definicija 2.1.4. Kažemo da je funkcija f **konačnog reda** ako postoji realan broj $\mu > 0$ takav da vrijedi

$$M(r) \leq e^{r^{\mu}}, \tag{2.2}$$

za svaki dovoljno velik $r = r(\mu) > 0$. Broj

$$\rho = \rho(f) = inf\,\{\mu \mid \mu \quad \text{zadovoljava (2.2)}\}$$

zovemo **red funkcije** f. Ako uvjet (2.2) nije ispunjen ni za koji μ, onda kažemo da je funkcija f beskonačnog reda i stavljavmo $\rho = \infty$.

Sada definiramo pojam eksponenta konvergencije.

Definicija 2.1.5. Neka je $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{C}^*$ koji je standardno numeriran i takav da je $\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = \infty$. Za $\alpha \in \langle 0, \infty\rangle$ promatramo red

$$\sum_k \frac{1}{|z_k|^{\alpha}}. \tag{2.3}$$

Broj

$$\tau = inf\,\{\alpha > 0 \mid \quad \text{red (2.3) konvergira}\}$$

zovemo **eksponent konvergencije** niza $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ako red (2.3) divergira, onda za svaki $\alpha > 0$ stavljamo $\tau = \infty$. Nadalje, definiramo veličinu κ kao najveći eksponent među svim $n \in \mathbb{N}_0$ takvima da red $\sum_k \frac{1}{|z_k|^n}$ divergira.

Sada možemo iskazati Hadamardov teorem faktorizacije.

Teorem 2.1.6 (Hadamardov teorem faktorizacije). *Neka je f cijela transcendentna funkcija konačnog reda ρ i neka je $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ standardno numeriran niz nultočaka funkcije f u $\mathbb{C}^*$, pri čemu je $z = 0$ nultočka kratnosti $m \in \mathbb{N}_0$. Tada funkciju f možemo faktorizirati na sljedeći način*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{z_k}\right),$$

gdje je $g(z)$ polinom stupnja $\leq \lfloor\rho\rfloor$. Ako je $\kappa = 0$, onda imamo

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right).$$

Može se pokazati da se eksponent konvergencije τ nekog niza $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ računa kao

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\ln |z_k|}.$$

Najvažnije primjene Hadamardovog teorema faktorizacije su sadržane u sljedeća dva korolara.

Korolar 2.1.7. *Neka je f cijela transcendentna funkcija različita od konstante. Tada funkcija f ima beskonačno mnogo nultočaka.*

Korolar 2.1.8. *Neka je f cijela transcendentna funkcija reda $0 < \rho < 1$. Tada se funkcija f može zapisati kao beskonačni produkt linearnih faktora*

$$f(z) = a \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right),$$

pri čemu je a konstanta, a $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ standardno numeriran niz nultočaka funkcije f.

Pretohodni korolar je direktno poopćenje Osnovnog teorema algebre.

2.2 Riemannova ξ funkcija i njezina faktorizacija

Riemann je vjerovao da se svaka analitička (meromorfna) funkcija može opisati pomoću svojih singulariteta i nultočaka. Ta zamisao ga je potakla na eksplicitnom pokazivanju zavisnosti funkcije ξ o netrivijalnim kompleksnim nultočkama funkcije ζ. Ideja je povezati funkciju ξ s prostim brojevima te odrediti broj nultočaka funkcije ζ.

Napomenimo da će se naša daljnja razmatranja fokusirati na funkciju ξ, koja se naziva još i *Riemannova ξ funkcija*, a ne na Riemannovu zeta funkciju. Razlog tome je popriličnо jednostavan. Naime, kao što smo već ustanovili, nultočke funkcije ξ su zapravo netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije. Funkcija ξ je dvostruko simetrična, tj. vrijedi $\overline{\xi(s)} = \xi(\overline{s})$ i $\xi(s) = \xi(1-s)$ što povlači i simetriju njezinih nultočaka, tj. ako je ρ nultočka funkcije ξ, onda je i $\overline{\rho}$ nultočka također. No, najvažnije svojstvo funkcije ξ jest da poprima realne vrijednosti za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da je $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Prisjetimo se postupka analitičkog produljenja Riemannove zeta funkcije. Kombiniranjem (1.29) i (1.31) dobivamo

$$\xi(s) = \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2} \int_1^\infty \left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) dx.$$

Ako stavimo $\Re(s) = \frac{1}{2}$, onda dobivamo

$$\frac{s(s-1)}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2}+it\right)\left(\frac{1}{2}-it\right)}{2} = \frac{\frac{1}{4}+t^2}{2} \tag{2.4}$$

i

$$\left(x^{\frac{s}{2}-1} + x^{\frac{1-s}{2}-1}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) = \left(x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{it}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{-it}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right). \tag{2.5}$$

Koristeći jednu od Eulerovih formula (1.12), odnosno (1.13) na desnu stranu jednakosti (2.5), dobivamo

$$\left(x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{it}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{-it}{2}}\right)\left(\frac{\vartheta(x)-1}{2}\right) = x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t}{2}\ln x\right)(\vartheta(x)-1). \tag{2.6}$$

Znamo da je Jacobijeva theta funkcija realna funkcija pa iz izraza (2.4) i (2.6) možemo zaključiti da funkcija ξ u točkama $s = \frac{1}{2}+it$ postiže realne vrijednosti, stoga ju je lakše analizirati te vršiti daljnja razmatranja nego Riemannovu zeta funkciju. Možemo zaključiti da su sve nultočke funkcije ξ oblika $\xi\left(\frac{1}{2}+it\right)$ ujedno i imaginarni dijelovi nultočaka Riemannove zeta funkcije. Spomenimo i činjenicu da je G.H. Hardy, poznati engleski matematičar, koristeći Hadamardov teorem faktorizacije dokazao jednu od Riemannovih pretpostavki da funkcija ζ ima beskonačno mnogo nultočaka na pravcu $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Hardyjev dokaz Hadamardovog teorema, kao jedan od prvih važnijih rezultata vezanih uz Riemannovu hipotezu, predstavlja temelje za istinitost Riemannove hipoteze jer ostaje još "samo" dokazati da su to ujedno i sve nultočke Riemannove zeta funkcije.

U prošlom odsječku smo razmatrali faktorizaciju cijelih transcendentnih funkcija. Riemann je pokazao da je ξ cijela funkcija prvog reda, što znači da zadovoljava uvjete Hadamardovog teorema faktorizacije. Hadamard je također dokazao 1893. godine da se funkcija ξ može zapisati na sljedeći način

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \tag{2.7}$$

pri čemu ρ "trči po svim" netrivijalnim nultočkama Riemannove zeta funkcije.

Prethodna faktorizacija funkcije ξ je prvi primjer veze između prostih brojeva koje se pojavljuju u Eulerovom produktu funkcije ζ i njeznih netrivijalnih nultočaka ρ. Međutim, postavlja se problem konvergencije produkta u (2.7), a time i valjanosti prethodne formule (gledano sa stajališta samog Riemanna, prije Hadamardovog dokaza 1893. godine). Stoga je Riemann promatrao nultočke funkcije (1.2) za $\Re(s) > 1$, odnosno njihovu distribuciju.

2.3 Procjena broja nultočaka

Definicija 2.3.1. Definiramo pravouktnik $P = \{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t < T\}$. Broj nultočaka funkcije ζ unutar P je

$$N(T) = \#\{\sigma + it \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1, 0 \leq t < T, \zeta(\sigma + it) = 0\}.$$

Iako točne lokacije netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije nisu do danas poznate, mnogo vjerodostojnih zaključaka je doneseno što se tiče broja nultočaka na kritičnoj pruzi, prvenstveno zaključaka vezanih uz broj netrivijalnih nultočaka koje se nalaze ispod zadane visine na toj pruzi, a među njima je i sljedeći teorem kojeg je iznio sam Riemann, a dokazao njemački matematičar Hans Carl Friedrich von Mangoldt. Prije samog teorema moramo uvesti oznaku za asimptotsko ponašanje funkcija. Oznaka $f(x) = O(g(x))$ znači da postoji konstanta C takva da je $|f(x))| \leq Cg(x)$, za sve x.

Teorem 2.3.2 (Riemann-Von Mangoldtova formula).

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

Prethodni teorem se može malo elegantnije zapisati na sljedeći način

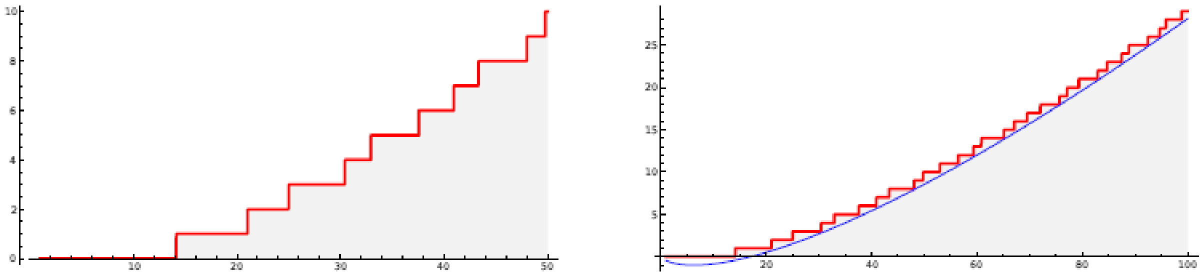
$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi e} + O(\ln T).$$

Dokazao ga je njemački matematičar Hans Carl Friedrich von Mangoldt 1905. godine. Teorem ima višestruko značenje. Naime, Riemann je dokaz konvergencije produkta u (2.7) temeljio na Riemann-Von Mangoldtovoj formuli te na taj način direktno povezao nultočke funkcija ζ i ξ. Prema definiciji funkcije ξ, znamo da je $\xi(s) \neq 0$, za $\Re(s) > 1$. Iz Teorema 1.7.1 znamo da vrijedi $\xi(0) \neq 0$, $\xi(1) \neq 0$ i $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \neq 0$ za $\Re(s) > 1$ iz čega slijedi da su nultočke funkcije ξ ujedno i nultočke funkcije ζ. Teorem 2.3.2 je temelj za računsku potvrdu Riemannove hipoteze.

14.13472	79.33737	124.25681	165.53706	202.49359
21.02203	82.91038	127.51668	167.18443	204.18967
25.01085	84.73549	129.57870	169.09451	205.39469
30.42487	87.42527	131.08768	169.91197	207.90625
32.93506	88.80911	133.49773	173.41153	209.57650
37.58617	92.49189	134.75650	174.75419	211.69086
40.91871	94.65134	138.11604	176.44143	213.34791
43.32707	95.87063	139.73620	178.37740	214.54704
48.00515	98.83119	141.12370	179.91648	216.16953
49.77383	101.31785	143.11184	182.20707	219.06759
52.97032	103.72553	146.00098	184.87446	220.71491
56.44624	105.44662	147.42276	185.59878	221.43070
59.34704	107.16861	150.05352	187.22892	224.00700
60.83177	111.02953	150.92525	189.41615	224.98332
65.11254	111.87465	153.02469	192.02665	227.42144
67.07981	114.32022	156.11290	193.07972	229.33741
69.54640	116.22668	157.59759	195.26539	231.25018
72.06715	118.79078	158.84998	196.87648	231.98723
75.70469	121.37012	158.84998	198.01530	233.69340
77.14484	122.94682	163.03070	201.26475	236.52422

Tablica 2.1: Imaginarni dijelovi t_n prvih 100 netrivijalnih nultočaka ρ_n

Ako napravimo graf distribucije brojeva t_n te graf funkcije $N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$, dobit ćemo vrlo jasnu potvrdu legitimnosti Riemann-Von Mangoldtove formule. Na Slici 2.1 prikazana je distribucija brojeva t_n na intervalu $[0, 50]$ na lijevom grafu, a na desnom distribucija brojeva t_n na intervalu $[0, 100]$ te funkcija aproksimacije $N(T) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}$.



Slika 2.1: Distribucija brojeva t_n na intervalu $[0,50]$ (lijevo) i $[0,100]$ (desno)

Nadalje, za $T = 50$ i $T = 100$, prema Teoremu 2.3.2 imamo

$$\begin{aligned} N(50) &= 8.5477 + O(\ln 50), \\ N(100) &= 28.1273 + O(\ln 100). \end{aligned}$$

Broj nultočaka za $t \leq 50$ je 10, a broj nultočaka za $t \leq 100$ je 29. Ove kalkulacije idu u prilog Riemann-Von Mangoldtovoj formuli. Također, iz Tablice 2.1 možemo zaključiti da su nultočke sve gušće raspoređene za veći T.

Iz Tablice 2.2 možemo vidjeti da su neke uzastopne nultočke vrlo blizu jedna drugoj. Ta se pojava naziva *Lehmerov fenomen*. Prvi puta se pojavljuje između dviju uzastopnih nultočaka s imaginarnim dijelovima 7005.062866 i 7005.100564. Njihova razlika je 0.037698 što je značajno manje od prosjeka koji iznosi oko 1. Lehmerov fenomen je jedan od polaznih točaka u eventualnom numeričkom opovrgavanju Riemannove hipoteze kojeg ne treba olako zanemariti.

Nedugo nakon što je Hardy dokazao da se na kritičnom pravcu nalazi beskonačno mnogo netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije, postavlja se pitanje o njihovom minimalnom broju na tom pravcu, tj. pitanje donje ograde. Označimo s $N_0(T)$ broj netrivijalnih nultočaka do nekog broja T na kritičnom pravcu, tj.

$$N_0(T) = \#\left\{t \in \mathbb{R}; 0 < t \leq T, \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = 0\right\}.$$

Hardy i Littlewood su dokazali 1921. godine da postoji konstanta $A > 0$ za koju nejednakost

$$N_0(T) > AT,$$

$1000 \leq t \leq 1026$	$10000 \leq t \leq 10017$	$50000 \leq t \leq 50015$
1001.34948	10000.06534	50000.40675
1002.40430	10000.65184	50001.12481
1003.26780	10000.91817	50001.67366
1004.67504	10002.27912	50002.87818
1005.54342	10002.98032	50003.47404
1008.00670	10004.04705	50004.26484
1008.79570	10004.67940	50004.87872
1009.80659	10005.31033	50005.04981
1010.56975	10006.05275	50006.11959
1012.41004	10007.37287	50006.69657
1013.05863	10008.03424	50007.39995
1014.68963	10009.09926	50007.96894
1016.06017	10010.39626	50008.31029
1017.26640	10010.85914	50009.72676
1018.60557	10011.55164	50010.44286
1019.91243	10012.09837	50011.35444
1020.91747	10013.03306	50011.77741
1021.54434	10013.83681	50012.24748
1022.88527	10015.05539	50012.94253
1025.26572	10015.61096	50013.82243
1025.70794	10016.65550	50014.58458

Tablica 2.2: Imaginarni dijelovi t_n netrivijalnih nultočaka ρ_n na odabranim intervalima

vrijedi za sve realne brojeve T. Ovaj teorem je bio najprecizniji što se tiče određivanja broja nultočaka na kritičnom pravcu sve do 1932. godine kada A. Selberg dokazuje da za sve realne brojeve T vrijedi nejednakost

$$N_0(T) > AT \ln T.$$

Do danas najbolju aproksimaciju broja nultočaka na kritičnom pravcu je dao J.B. Coney 1989. godine. Dokazao je da vrijedi nejednakost

$$N_0(T) \geq \alpha N(T),$$

pri čemu je $\alpha = 0.40219$. U prijevodu, J.B. Conrey je dokazao da se više od dvije petine netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije nalazi na kritičnom pravcu.

Nakon što smo diskutirali problem broja netrivijalnih nultočaka prirodno je postaviti pitanje koliko ih je do danas pronađeno. Danas je moguće uz pomoć računala, koristeći

Turingovu metodu, pronaći poprilično mnogo netrivijalnih nultočaka. U Tablici 2.3 dajemo prikaz broja netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije, autora izračuna, te pripadnu godinu.

Godina	Broj netrivijalnih nultočaka	Autor izračuna
1903.	15	J.P. Gram
1914.	79	R.J. Backlund
1925.	138	J.I. Hutchinson
1935.	1041	E.C. Tichmarsh
1953.	1 104	A.M. Turing
1956.	15 000	D.H. Lehmer
1956.	25 000	D.H. Lehmer
1958.	35 337	N.A. Meller
1966.	250 000	R.S. Lehman
1968.	3 500 000	J.B. Rosser i dr.
1977.	40 000 000	R.P. Brent
1979.	81 000 001	R.P. Brent
1982.	200 000 001	R.P. Brent i dr.
1983.	300 000 001	J. van de Lune i dr.
1986.	1 500 000 001	J. van de Lune i dr.
2001.	10 000 000 000	J. van de Lune (neobjavljeno)
2004.	900 000 000 000	S. Wedeniwski
2004.	10 000 000 000 000	X. Gourdon

Tablica 2.3: Broj poznatih netrivijalnih nultočaka Riemannove zeta funkcije

2.4 Riemann-Siegelova formula

Pitanje istinitosti Riemannove hipoteze je otvoreno od njenog nastanka 1859. godine. Najdirektniji oblik ”napada” na nju je traženje protuprimjera i razmatranje računanja vrijednosti Riemannove zeta funkcije. Od vremena Riemanna do danas, razni matematičari su razvili tehnike računanja koje sve više pokazuju istinitost Riemannove hipoteze. Danas se takvi računi provode uz pomoć računala.

Neki od algoritama za određivanje nultočaka Riemannove zeta funkcije su Euler-Maclaurinova formula, Hardyjeva funkcija, Gramov zakon, Turingov algoritam, Odlyzko-Schönhageov algoritam te Riemann-Siegelova formula koju je vrlo vjerojatno sam Riemann koristio za izračun prvih nekoliko netrivijalnih nultočaka.

Carl Ludwig Siegel je 1932. godine među obiljem Riemannovih neobjavljenih radova pronašao jedan rad uz pomoć kojeg je došao do formule koja je danas poznata pod imenom Riemann-Siegelova formula. Formula služi za brzo pronalaženje nultočaka Riemannove zeta funkcije na pravcu $\Re(s) = \frac{1}{2}$. Međutim, ova formula ne može dati formalnu potvrdu Riemannove hipoteze.

Dakle, sada ćemo iznijeti Riemann-Siegelovu formulu za računanje vrijednosti $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ za $t > 0$. Neka su

$$N = \left\lfloor \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \right\rfloor, p = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - N.$$

Sada definiramo funkciju $Z(t)$ na sljedeći način

$$Z(t) = 2\sum_{n=1}^{N} n^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\vartheta(t) - t\ln n\right) + R, \tag{2.8}$$

pri čemu je

$$\vartheta(t) = \Im\left(\ln\Gamma\left(\frac{it}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) - \frac{t}{2}\ln\pi$$

i

$$R \approx (-1)^{N-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(C_0 + C_1\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} + C_2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{2}{2}} + C_3\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} + C_4\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-\frac{4}{2}}\right),$$

te vrijedi

$$\begin{aligned}
C_0 &= \psi(p) = \frac{\cos\left(2\pi\left(p^2 - p - \frac{1}{16}\right)\right)}{\cos(2\pi p)},\\
C_1 &= -\frac{1}{96\pi^2}\psi^{(3)}(p),\\
C_2 &= -\frac{1}{18432\pi^4}\psi^{(6)}(p) + \frac{1}{64\pi^2}\psi^{(2)}(p),\\
C_3 &= -\frac{1}{5308416\pi^6}\psi^{(9)}(p) - \frac{1}{3840\pi^4}\psi^{(5)}(p) - \frac{1}{64\pi^2}\psi'(p),\\
C_4 &= -\frac{1}{2038431744\pi^8}\psi^{(12)}(p) + \frac{11}{5898240\pi^6}\psi^{(8)}(p) + \frac{19}{24576\pi^4}\psi^{(4)}(p) + \frac{1}{128\pi^2}\psi(p).
\end{aligned}$$

Primijetimo da funkcije C_i, $i = 0, ..., 4$ nisu definirane za $p = \frac{1}{4}$ i $p = \frac{3}{4}$. Konačno, $\zeta(\frac{1}{2} + ti)$ se računa na sljedeći način

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = Z(t)e^{-i\vartheta(t)}.$$

Primijetimo da je suma u (2.8) zapravo jedini dio koji je problematičan za računanje. Nakon što izračunamo vrijednost $Z(t)$, daljnji posao je poprilično lagan. Uočimo da se nultočke funkcije Z podudaraju s nultočkama Riemannove zeta funkcije na kritičnom pravcu.

Poglavlje 3

Riemannova hipoteza i prosti brojevi

3.1 Prosti brojevi i $\zeta(s)$

Kao što smo i prije spomenuli, Eulerova produktna formula nam sugerira povezanost Riemannove zeta funkcije s prostim brojevima

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

za $\Re(s) > 1$. Ako logaritmiramo Eulerovu produktnu formulu, dobivamo

$$\ln \zeta(s) = \ln\left(\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \sum_p \ln \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Sada želimo prethodnu jedakost zapisati u obliku sume po svim prirodnim, a ne samo po prostim brojevima zbog lakše daljnje manipulacije. Stoga, prethodnu jednakost zapisujemo na sljedeći način

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} (\pi(n) - \pi(n-1)) \ln \frac{1}{1 - n^{-s}}. \tag{3.1}$$

Uočimo da je

$$\pi(n) - \pi(n-1) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } n \text{ prost broj,} \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

Stoga je desna strana jednakosti (3.1) jednaka 0 za sve složene brojeve n. Slijedi

$$\ln \zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n) \ln \frac{1}{1 - n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty} \pi(n-1) \ln \frac{1}{1 - n^{-s}}.$$

Uočimo da je $\pi(1) = 0$ pa u prethodnoj jednakosti izraz $n-1$ možemo zamijeniti s n. Dobivamo

$$\ln\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\ln\frac{1}{1-n^{-s}} - \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\ln\frac{1}{1-(n+1)^{-s}}.$$

Dalje slijedi

$$\ln\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\left(\ln\left(1-(n+1)^{-s}\right) - \ln\left(1-n^{-s}\right)\right). \tag{3.2}$$

Promotrimo sada derivaciju izraza $\ln(1-x^{-s})$

$$(\ln(1-x^{-s}))' = \frac{1}{1-x^{-s}}\left(sx^{-s-1}\right) = \frac{s}{x\,(x^s-1)}.$$

Integriranjem prethodne jednakosti dobivamo

$$\ln\left(1-(n+1)^{-s}\right) - \ln\left(1-n^{-s}\right) = \int_n^{n+1}\frac{s}{x\,(x^s-1)}dx.$$

Stoga, jednakost (3.2) možemo zapisati na sljedeći način

$$\ln\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\int_n^{n+1}\frac{s}{x\,(x^s-1)}dx.$$

S obzirom da je $\pi(n)$ konstanta, možemo je staviti pod znak integrala te zbog granica integracije, možemo je zamijeniti s $\pi(x)$. Imamo

$$\ln\zeta(s) = \sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\pi(x)s}{x\,(x^s-1)}dx = \int_2^{\infty}\frac{\pi(x)s}{x\,(x^s-1)}dx. \tag{3.3}$$

Relacija (3.3) vodi do jednog od najvažnijih pristupa proučavanju funkcije π. Naime, mogu se istražiti analitička svojstva funkcije definirane u (3.3) i zatim se može naći odgovarajuća inverzna integralna transformacija. Riemann je $\ln\zeta(s)$ zapisao na sljedeći način

$$\frac{\ln\zeta(s)}{s} = \int_2^{\infty}\frac{R(x)}{x^{s+1}}dx, \tag{3.4}$$

pri čemu se funkcija R definira kao

$$R(x) = \sum_{p^n\leq x}\frac{1}{n} \tag{3.5}$$

i pri čemu je p prost broj. Funkcija R se naziva i funkcija **Riemannove distribucije prostih brojeva**. Riemann funkciju R označava s f, no zbog učestalosti oznake funkcija sa slovom f, mi smo je označili s R da ne dolazi do zabune. Promotrimo sada kako se ponaša funkcija R na intervalu $[0,5]$.

Dakle, za $0 \leq x < 2$ je $R(x) = 0$, za $2 \leq x < 3$ je $R(x) = 1$, za $2 \leq x < 4$ je $R(x) = 2$, za $4 \leq x < 5$ je $R(x) = \frac{5}{2}$, za $4 < x \leq 5$ je $R(x) = \frac{7}{2}$ i tako dalje. Stoga, možemo reći da je R stepeničasta funkcija u što se možemo uvjeriti iz njenog grafa na Slici 3.1. Primijetimo da je suma kojom je funkcija R definirana konačna u što se možemo uvjeriti na sljedećem primjeru.

Primjer 3.1.1. *Za* $x = 100$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} R(100) &= \pi(100) + \frac{1}{2}\pi(10) + \frac{1}{3}\pi(4.64) + \frac{1}{4}\pi(3.16) + \frac{1}{5}\pi(2.51) + \frac{1}{6}\pi(2.15) + \frac{1}{7}\pi(1.93) \\ &= 25 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + 0 \\ &= \frac{428}{15} \approx 28.53. \end{aligned}$$

Primijetimo da je broj kvadrata prostih brojeva manjih od x očito jednak $\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ te analogijom dolazimo do zaključka da je broj n-tih potencija prostih brojeva manjih od x jednak $\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$. Stoga, $R(x)$ možemo zapisati na sljedeći način

$$R(x) = \sum_{n} \frac{\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{n} = \sum_{n=1}^{\lfloor \log_2 x \rfloor} \frac{\pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{n} = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots. \tag{3.6}$$

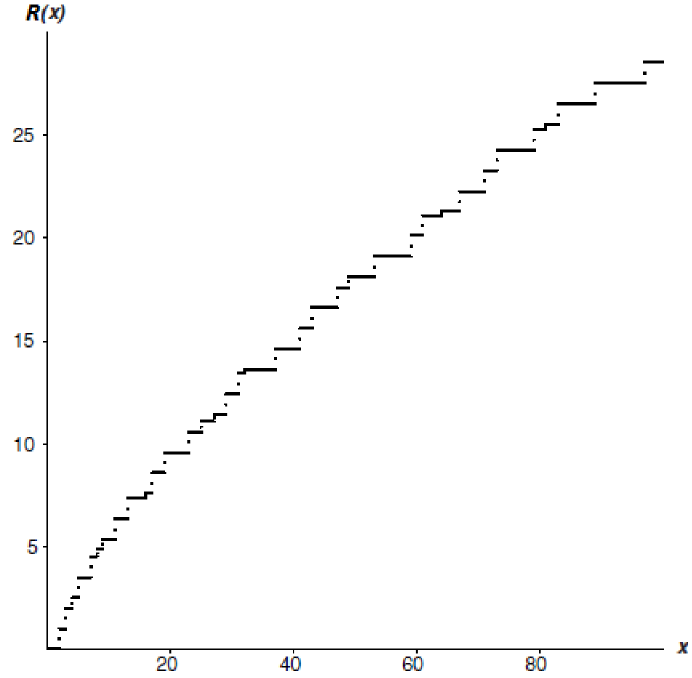
Promatrajući relacije (3.4) i (3.6), očito je da smo doveli u direktnu vezu Riemannovu zeta funkciju i funkciju distribucije prostih brojeva.

Riemann 1859. godine došao do jednog od najvažnijih zaključaka što se tiče daljnjeg razmatranja funkcije R

$$R(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) - \ln 2 + \int_{x}^{\infty} \frac{dt}{t\,(t^2-1)\ln t}, \tag{3.7}$$

pri čemu ρ "trči po svim" netrivijalnim nultočkama Riemannove zeta funkcije. Ovu jednakost zovemo i **Riemannova formula** koju je dokazao Hans von Mangoldt 1895. godine. Prisjetimo se na koji je način definiran izraz $Li(x)$, odnosno Eulerov logaritamski integral

$$Li(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\ln t}.$$



Slika 3.1: Graf funkcije $R(x)$ na intervalu $[0, 80]$

U literaturi, pogotovo američkoj, često se znaju poistovjećivati funkcije *Li* i *li*. Funkcija *li* definira se na sljedeći način

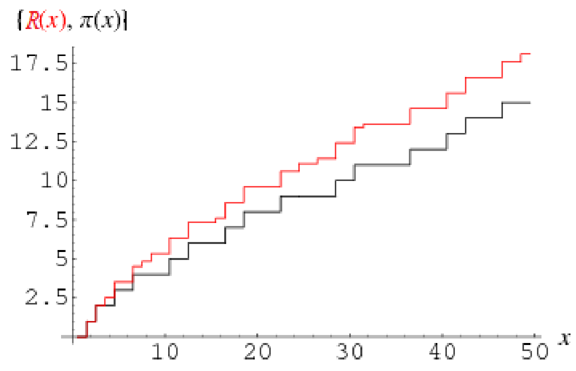
$$li(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \text{ za } 0 < x < 1, \\ \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right), \text{ za } x > 1. \end{cases}$$

Ove dvije funkcije su povezane sljedećom jednakosti

$$Li(x) = li(x) - li(2).$$

Vratimo se sada na Riemannovu formulu. Ona je naime, poprilično dobra aproksimacija funkcije π u što se možemo uvjeriti promatrajući grafove tih funkcija na Slici 3.2. Član $Li(x)$ u jednakosti (3.7) je zapravo Gaussova aproksimacija funkcije π

$$\pi(x) \sim Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = li(x) - li(2).$$



Slika 3.2: Grafovi funkcija R (gornji) i π (donji) na intervalu $[0, 50]$

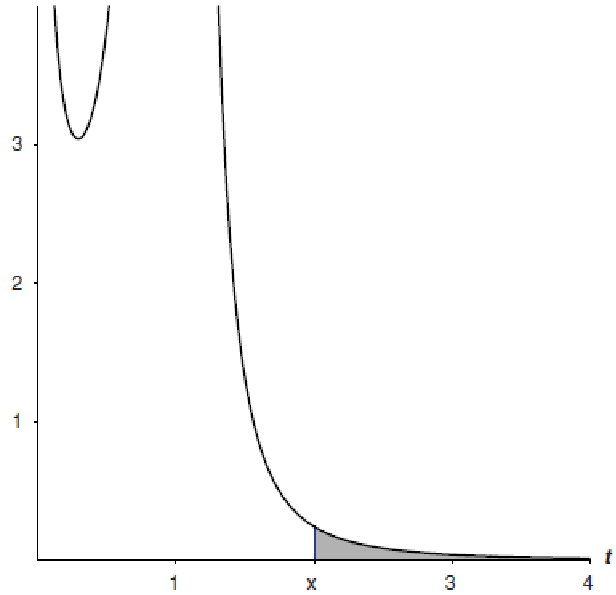
Riemannova aproksimacija će biti još bolja u usporedbi s Gaussovom ako se u obzir uzimaju i ostali članovi jednakosti u (3.7), što se može vidjeti iz Tablice 3.1.

x	Riemannova greška	Gaussova greška
10^6	30	130
$2 \cdot 10^6$	-9	122
$3 \cdot 10^6$	0	155
$4 \cdot 10^6$	33	206
$5 \cdot 10^6$	-64	125
$6 \cdot 10^6$	24	228
$7 \cdot 10^6$	-38	179
$8 \cdot 10^6$	-6	223
$9 \cdot 10^6$	-53	187
10^7	88	339

Tablica 3.1: Riemannova i Gaussova greška u aproksimaciji $\pi(x)$

Promotrimo graf funkcije $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $f(t) = \dfrac{1}{t(t^2-1)\ln t}$ na Slici 3.3. Za $x < 2$ vrijedi $R(x) = 0$, stoga promatramo vrijednosti funkcije f za $x \geq 2$. Ona je na intervalu $\langle 2, +\infty\rangle$ strogo padajuća. Stoga se na tom intervalu može odrediti površina ispod grafa te krivulje, tj. može se odrediti vrijednost nepravog integrala i ta vrijednost iznosi približno 0.14. Kako je $\ln 2 = 0.693147$, vrijedi

$$-0.6931 < -\ln 2 + \int_x^\infty \frac{dt}{t\,(t^2-1)\ln t} < -0.5531,$$



Slika 3.3: Graf funkcije f na intervalu $[0, 4]$

što je poprilično zanemariva vrijednost u usporedbi s vrijednostima $\pi(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

Još nas zanima na koji se način računa vrijednost izraza $\sum_{\rho} Li\,(x^{\rho})$. Pri tome ćemo se koristiti funkcijom li. No, za početak moramo definirati *eksponencijalni integral* $Ei(x)$, pri čemu je $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definiramo ga na sljedeći način

$$Ei(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Eksponencijalni integral je također definiran i za kompleksne brojeve

$$E_1(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

Generalno, E_1 se definira kao analitičko produljenje u kompleksnoj varijabli z na području $\Re(z) \geq 0$

$$E_1(z) = \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-tz}}{t} dt.$$

Sada imamo sve potrebno da bi mogli izračunati vrijednosti izraza $Li\,(x^{\rho})$. Vrijedi

$$li(x) = Ei(\ln x),$$

za $x \in \mathbb{R}^+$. Iz prethodne jednakosti slijedi

$$li\,(x^\rho) = Ei(\rho \ln x).$$

Sada možemo zapisati $Li\,(x^\rho)$ na sljedeći način

$$Li\,(x^\rho) = Ei(\rho \ln x) - li(2).$$

Može se pokazati da za kompleksne brojeve z, $\Re(z) > 0$ vrijedi

$$Ei(z) = \gamma + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}.$$

Podsjetimo se, γ je Euler-Mascheronijeva konstanta koja iznosi otprilike 0.5772.

Kao konačan rezultat razmatranja funkcije R, Riemann koristi Möbiusovu formulu inverzije na jednakost (3.5) te dobiva

$$\pi(x) = \sum_n \frac{f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{n} = f(x) - \frac{1}{2}f\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{3}f\left(x^{\frac{1}{3}}\right) - \frac{1}{5}f\left(x^{\frac{1}{5}}\right) + \frac{1}{6}f\left(x^{\frac{1}{6}}\right) - \frac{1}{7}f\left(x^{\frac{1}{7}}\right) \cdots . \tag{3.8}$$

Za Möbiusovu funkciju vrijedi

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, \text{ za } n = 1\ , \\ (-1)^k, \text{ za } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ pri čemu su } p_1, p_2, ..., p_k \text{ različiti prosti brojevi,} \\ 0, \text{ ako } n \text{ nije kvadratno slobodan.} \end{cases}$$

Dakle, jednakost (3.8) se može zapisati u sljedećem obliku

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} R\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

te je na taj način Riemann povezao funkciju distribucije prostih brojeva π i Riemannovu funkciju distribucije prostih brojeva R.

3.2 Tvrdnje ekvivalentne Riemannovoj hipotezi

Riemannov rad iz 1859. godine pod naslovom: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, iako nije opširan, bio je prekretnica u teoriji brojeva u 19. stoljeću, a i dan danas predstavlja jedan od važnijih radova u svijetu matematike. Gledano s tehničke strane, Riemannova hipoteza je hipoteza kao i svaka druga, međutim, ona i opravdava taj naziv u punom smislu jer mnogi teoremi ju koriste kao polaznu točku, npr. "*Pretpostavimo da je Riemannova hipoteza istinita, ...*". Iako su mnogi matematičari uvjereni u njezinu istinitost, ona do danas ostaje nedokazana. To uvjerenje uveličava i želja matematičara za njenom istinitošću, jer bi u tom slučaju na stotine teorema bilo automatski dokazano. Njena istinitost bi povlačila veliki napredak u dokazivanju Goldbachove hipoteze, dokazala bi se vjerodostojnost mnogih zaključaka vezanih uz kvadratne forme, euklidski prsten cijelih bojeva, teoriju kaosa itd.

Riemannova hipoteza se može preformulirati na mnogo načina. Tvrdnje koje su ekvivalentne Riemannovoj hipotezi možemo grupirati u tri skupine: tvrdnje striktno vezane uz teoriju brojeva, tvrdnje blisko povezane s analitičkim svojstvima zeta i drugih funkcija i multidisciplinarne tvrdnje. U ovom odsječku ćemo razmatrati tvrdnje koje su vezane uz teoriju brojeva. Osim što Riemannovu hipotezu možemo preformulirati na više načina, također ju možemo generalizirati na tzv. *jače tvrdnje* koje su temelj za dokazivanje mnogo posljedičnih teorema koje iz nje proizlaze.

Tvrdnje ekvivalentne Riemannovoj hipotezi koje su blisko povezane s teorijom brojeva omogućuju laicima objašnjavanje Riemannove hipoteze bez upotrebe kompleksne analize te kompliciranih matematičkih pojmova. Iako je malo vjerojatno da će ijedna od ovih ekvivalentnih tvrdnji pomoći pri dokazivanju Riemannove hipoteze, one pokazuju vrlo zamršenu povezanost Riemannove zeta funkcije s prostim brojevima. Za početak ćemo definirati Liouvilleovu funkciju.

Definicija 3.2.1. Liouvilleova funkcija je definrana na sljedeći način

$$\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)},$$

gdje je $\Omega(n)$ broj prostih faktora prirodnog broja n brojenih s multiplicitetom.

Iz prethodne definicije možemo zaključiti da vrijedi

$$\lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(5) = \lambda(7) = \lambda(8) = -1$$

i

$$\lambda(1) = \lambda(4) = \lambda(6) = \lambda(9) = \lambda(10) = 1.$$

Liouvilleova funkcija je multiplikativna i za nju vrijedi

$$\sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } n \text{ potpun kvadrat}, \\ 0, \text{ inače}. \end{cases}$$

Povezanost Riemannove zeta funkcije i Liouvilleove funkcije slijedi iz identiteta

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

Ova povezanost sugerira da Riemannovu hipotezu možemo preformulirati u tvrdnju koja će uključivati Liouvilleovu funkciju.

Teorem 3.2.2. *Riemannova hipoteza je ekvivalentna tvrdnji*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(n)}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} = 0,$$

za svaki $\varepsilon > 0$.

Ova ekvivalentna tvrdnja Riemannovoj hipotezi se može protumačiti na sljedeći način. Jednaka je vjerojatnost da rastav nekog prirodnog broja na proste faktore brojene s multiplicitetom ima paran ili neparan broj faktora. Promotrimo niz $(\lambda(n))_{n\in\mathbb{N}}$

$$1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, ...$$

koji se ponaša otprilike kao niz slučajno odabranih brojeva 1 i -1. Stoga, razlika između ukupnog broja pojavljivanja broja 1 i ukupnog broja pojavljivanja broja -1 nije mnogo veća od drugog korijena ukupnog broja članova niza. Ovo je intuitivna interpretacija Riemannove hipoteze koju preciznije možemo iskazati na sljedeći način.

Teorem 3.2.3. *Tvrdnja*

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

je ekvivalentna Riemannovoj hipotezi.

Ovaj teorem je 1901. godine dokazao Helge von Koch te opisujući ovu aproksimaciju kao *najbolju moguću grešku* Teorema o prostim brojevima.

Lowell Schoenfeld je dokazao 1976. godine da je Riemannova hipoteza ekvivalentna sljedećim tvrdnjama

1. $|\pi(x) - Li(x)| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$, za sve $x \geq 2657$,

2. $|\psi(x) - x| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln^2 x$, za sve $x \geq 73.2$, pri čemu je $\psi(x)$ druga Čebiševljeva funkcija.

Primijetimo da je prva aproksimacija bolja od aproksimacije u Teoremu 3.2.3. Spomenimo da postoje dvije Čebiševljeve funkcije. Prva Čebiševljeva funkcija se definira kao suma

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p,$$

a druga Čebiševljeva funkcija kao suma

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \ln p.$$

Primijetimo da je druga Čebiševljeva funkcija vrlo slična Riemannovoj funkciji R.

Schoenfeld je također 1976. godine pokazao da je Riemannova hipoteza ekvivalentna tvrdnji

$$|\psi(x) - x| < \frac{1}{8\pi} \sqrt{x}(\ln x)^2.$$

Još ćemo spomenuti jednu tvrdnju ekvivalentnu Riemannovoj hipotezi koja je povezana s Mertensovom funkcijom.

Definicija 3.2.4. Mertensova funkcija, koja se označava s $M(x)$, definira se za sve $x \in \mathbb{R}$ na sljedeći način

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n),$$

pri čemu je $\mu(n)$ Möbiusova funkcija.

Mertensova funkcija je usko povezana s Riemannovom zeta funkcijom sljedećom jednakosti

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Sada iznosimo tvrdnju ekvivalentnu Riemannovoj hipotezi.

Teorem 3.2.5. *Tvrdnja*

$$M(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

za svaki $\varepsilon < 0$ *je ekvivalentna Riemannovoj hipotezi.*

3.3 Generalizirana Riemannova hipoteza

U matematici je čest slučaj generalizacije teških problema na one još teže. Nekad je taj postupak produktivan, a nekad nije. No, u slučaju Riemannove hipoteze, taj postupak je vrlo koristan u cjelokupnom sagledavanju posljedica koje Riemannova hipoteza implicira. Postoji nekoliko generalizacija Riemannove hipoteze, ovisno o području matematike na koje ona utječe, tj. područje koje se promatra. U ovom odjeljku ćemo se fokusirati na *najbitniju* generalizaciju Riemannove hipoteze koja će nam trebati za daljnje razmatranje njezinih posljedica.

Počinjemo s Riemannovom hipotezom u klasičnom i općenito najpoznatijem obliku kojeg smo dosad već izrekli.

Slutnja 3.3.1 (**Riemannova hipoteza**). *Netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije imaju realni dio koji iznosi* $\frac{1}{2}$.

Dakle, temeljni objekt razmatranja je Riemannova zeta funkcija koja je definirana za sve $s \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi $\Re(s) > 1$ sljedećim redom

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

koji se može analitički produljiti do apsolutno konvergentnog reda u cijeloj kompleksnoj ravnini osim u točki $s = 1$. Ova tvrdnja se može pojednostavniti uvođenjem Dirichletove eta funkcije koja se naziva još i alternativna zeta funkcija.

Definicija 3.3.2. Dirichletova eta funkcija se definira na sljedeći način

$$\eta(s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s).$$

Kako $\eta(s)$ konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $\Re(s) > 0$, postupak analitičkog produljenja nije potrebno provoditi. Riemannova hipoteza je točna onda i samo onda ako se sve nultočke eta funkcije η na području $0 < \Re(s) < 1$ nalaze na pravcu $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Dosad smo uz Riemannovu hipotezu usko vezali njegovu zeta funkciju. Međutim, funkcija ζ je specijalni slučaj općenitije klase funkcija, tzv. *Dirichletovih L-funkcija.* Za početak ćemo definirati Dirichletov L-red na sljedeći način

$$L(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_k(n) n^{-s},$$

pri čemu $\chi_k(n)$ je tzv. *Dirichletov karakter* modulo k definiran sljedećim aksiomatskim svojstvima

$$\chi_k(1) = 1,$$

$$\chi_k(n) = \chi_k(n+k),$$

$$\chi_k(m)\chi_k(n) = \chi_k(mn),$$

za sve cijele brojeve m i n. Također, vrijedi

$$\chi_k(n) = 0,$$

ako je najveća zajednička mjera brojeva k i n različita od 1, tj. ako vrijedi $(k,n) \neq 1$. Kažemo da je Dirichletov karakter modulo k *primitivan* ako ne postoji $\chi_d(n)$ takav da vrijedi $\chi_k(n) = \chi_d(n)$, pri čemu d dijeli k i $d \neq k$. Jedinstveni $\chi_k(n)$ takav da za sve n za koje je $(k,n) = 1$ vrijedi $\chi_k(n) = 1$ naziva se *glavni* Dirichletov karakter.

Dirichletova L-funkcija, je analitičko produljenje pripadajućeg Dirichletovog L-reda. Primijetimo da Riemannova zeta funkcija pripada klasi takvih funkcija jer vrijedi

$$L(s,\chi_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_1(n)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

Sada možemo izreći generaliziranu Riemannovu hipotezu.

Slutnja 3.3.3 (Generalizirana Riemannova hipoteza). *Sve netrivijalne nultočke Dirichletovog L-reda $L(s,\chi_k)$ kojim je funkcija L definirana imaju realni dio jednak $\frac{1}{2}$.*

U ovom slučaju, pojam *netrivijalne nultočke* se odnosi na sve $s \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $0 < \Re(s) < 1$ takve da je $L(s,\chi_k) = 0$. Možemo uočiti da generalizirana Riemannova hipoteza implicira "osnovnu" Riemannovu hipotezu, jer kao što smo već rekli, ζ pripada klasi Dirichletovih L-funkcija. Također možemo primijetiti da, za razliku od funkcije ζ, nultočke funkcije L se mogu nalaziti na pravcu $\Im(s) = 0$, no sve nultočke koje se nalaze na tom pravcu su poznate i svrštava ih se u trivijalne nultočke.

3.4 Posljedice generalizirane Riemannove hipoteze

Dokazivanje Riemannove hipoteze bi impliciralo mnoge posljedice, prvenstveno one vezane uz teoriju brojeva, kao i u područjima usko vezanim uz teoriju brojeva kao što je npr. kriptografija. Već smo konstatirali, da se mnogo teorema zasniva Riemannovoj hipotezi te bi u slučaju dokaza njezine istinitosti, ti teoremi bi također bili dokazani. Stoga ćemo u ovom odjeljku nešto reći o najzanimljivijim posljedicama koje bi Riemannova hipoteza implicirala u slučaju njezine istinitosti.

Za početak, prisjetimo se Teorema 3.2.3. Usporedimo li numeričke vrijednosti funkcija π i Li, možemo zaključiti da vrijedi nejednakost $\pi(x) < Li(x)$, kao što je i Gauss pretpostavljao. No, 1914. godine John Littlewood je koristeći Riemannovu hipotezu pokazao da se znak nejednakosti okreće beskonačno mnogo puta, tj. nejednakost ne vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$. Godine 1933., Stanley Skewes je koristio Riemannovu hipotezu da bi pokazao da se znak nejednakosti okreće za neki broj $x, x < 10^{10^{10^{34}}}$. Međutim, 22 godine poslije, Skewes je dokazao bez upotrebe Riemannove hipoteze da se znak nejednakosti okreće za neki broj $x, x < 10^{10^{10^{963}}}$. Ovo je jedan od prvih primjera u kojem je neka tvrdnja dokazana korištenjem Riemannove hipoteze, a kasnija dokazana bez nje.

Godine 1919. švedski matematičar Harald Cramér je pokazao da Riemannova hipoteza implicira jednakost

$$p_{k+1} - p_k = O\left(\sqrt{p_k} \ln p_k\right),$$

pri čemu je p_k, k-ti prosti broj. Spomenimo da Legendreova hipoteza (koja je također nedokazana) tvrdi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji neki prosti broj između n^2 i $(n+1)^2$. U stvarnosti, broj prostih brojeva između n^2 i $(n+1)^2$ je poveći. Legendreova hipoteza implicira jednakost

$$p_{k+1} - p_k = O\left(\sqrt{p_k}\right),$$

što je očito bolja aproksimacija od Cramérove. Međutim, Cramér je pokazao, neovisno o Riemannovoj hipotezi, da vrijedi

$$p_{k+1} - p_k = O\Big((\ln p_k)^2\Big).$$

Sada ćemo nešto reći o posljedicama Riemannove hipoteze vezane uz već spomenute L-funkcije. Naime, Pafnuty Lvovich Chebyshev je 1853. godine promatrao proste brojeve oblika $p, p \equiv 1 \pmod 4$ i $p \equiv 3 \pmod 4$ te je primijetio da je uvijek broj prostih brojeva $p \equiv 3 \pmod 4$, veći ili jednak broju prostih brojeva $p, p \equiv 1 \pmod 4$ do nekog broja x. Chebyshev je svoju pretohdno opisanu tvdrnju zapisao u obliku

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{p \neq 2} (-1)^{\frac{p+1}{2}} x^p = \infty,$$

pri čemu je p prost broj. Hardy i Littlewood su pokazali 1917. godine da je ova Chebyshevljeva hipoteza ekvivalentna generaliziranoj Riemannovoj hipotezi za L-funkcije za netrivijalni Dirichletov karakter modulo 4.

Christian Goldbach je 1742. godine u pismu kojeg je poslao Euleru, postavio jednu od najpoznatijih i najstarijih neriješenih hipoteza u matematici koja tvrdi da se svaki prirodni broj $n, n \geq 5$ može zapisati u obliku zbroja tri prosta broja. Međutim, postoje i tzv. dvije *slabe* Goldbachove slutnje koje kažu da se svaki parni broj $n, n \geq 4$ može zapisati u obliku zbroja dva prosta broja te slutnja da se svaki neparni broj $n, n > 5$ može zapisati u obliku zbroja tri neparna prosta broja. Hardy i Littlewood su dokazali da za dovoljno velik broj n, generalizirana Riemannova hipoteza implicira potonju *slabu* slutnju. Godine 1997., Deshouillers, Effinger, Riele i Zinoviev su dokazali da se u slučaju točnosti generalizirane Riemannove hipoteze, svaki neparan broj $n, n > 5$ može zapisati u obliku zbroja tri prosta broja.

Hardy i Littlewood su također dokazali da vrijedi i druga Goldbachova *slaba* slutnja, u slučaju da je generalizirana Riemannova hipoteza istinita. Posebno, ako s $E(N)$ označimo broj parnih brojeva $n < N$ koji se ne mogu prikazati u obliku zbroja dva prosta broja, onda vrijedi $E(N) = O\left(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$, za svaki $\varepsilon > 0$.

Zanimljivo je pitanje postojanja prostog broja $p, a < p < b$, između danih brojeva a i b. Joseph Louis François Bertrand je 1845. godine tvrdio da između prirodnih brojeva a i $2a, a > 1$ uvijek postoji prosti broj. Ovaj Bertrandov teorem je temeljna ideja za formuliranje sljedećeg teorema. Naime, ako se pretpostavi da vrijedi Riemannova hipoteza, nije teško dokazati da za bilo koji dovoljno velik broj x i za bilo koji $\alpha > \frac{1}{2}$, postoji prosti broj p u intervalu $\langle x, x + x^{\alpha} \rangle$. Godine 1937., neovisno o Riemannovoj hipotezi, Albert Ingham je pokazao da uvijek za dovoljno velik broj x, postoji neki prosti broj p u intervalu $\left\langle x, x + x^{\frac{5}{8}} \right\rangle$.

Prisjetimo se sada nekih pojmova iz teorije brojeva. Ako su a i n relativno prosti prirodni brojevi, onda se najmanji prirodni broj d sa svojstvom da je $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ zove *red od a modulo n*. S $\varphi(n)$ označimo broj brojeva manjih od n koji su s njim relativno prosti. Funkciju $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zovemo Eulerova funkcija. Ako je red od a modulo n jednak $\varphi(n)$, onda se a zove *primitivni korijen modulo n*. Sada možemo iznijeti tvrdnju Emila Artina koja kaže da je svaki cijeli broj $a, a \neq -1$, koji nije potpun kvadrat, primitivni korijen modulo p za beskonačno mnogo prostih brojeva p. Ovu hipotezu je dokazao Christopher Hooley 1967. godine koristeći generaliziranu Riemannovu hipotezu. Godine 1986., Roger Heath-Brown je dokazao da postoje eventualno najviše dva prosta broja za koja Artinova hipoteza ne vrijedi.

Bibliografija

[1] E. Artin: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964. (travanj, 2014.)

[2] R. Ayoub: *Euler and the Zeta Function*, The American Mathematical Monthly, Vol. 81, No. 10 (Dec., 1974), pp. 1067-1086, `http://www.jstor.org/stable/2319041` (travanj, 2014.)

[3] P. Borwein, S. Choi, B. Rooney, A. Weirathmueller: *The Riemann Hypothesis: A Resource for the Afficionado and Virtuoso Alike*, Springer, New York, 2007.

[4] J. Derbyshire: *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Joseph Henry Press, Washington, 2003.

[5] R. Dingman: *The Riemann Hypothesis*, 2010. `http://modular.math.washington.edu/edu/2010/414/projects/dingman.pdf` , (travanj, 2014.)

[6] H. M. Edwards: *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, New York, 2001.

[7] A. A. Karatsuba, S.M. Voronin: *The Riemann-Zeta Function*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[8] H. Kraljević: *Odabrana poglavlja teorije analitičkih funkcija*, 2010. `http://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2010-11/an_funk_2010_11.pdf`, (svibanj, 2014.)

[9] W. Narkiewicz: *The Development of Prime Number Theory*, Springer, New York, 2000.

[10] S. J. Patterson: *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] B. Širola: *Distribucija prim brojeva i Riemannova zeta-funkcija; prvi dio*, 2008. http://e.math.hr/zeta/index-print.pdf, (svibanj, 2014.)

[12] E. C. Tichmarsh, S.M. Voronin: *The Theory of the Riemann-Zeta Function*, Clarednon Press, Oxford, 1986.

[13] Š. Ungar: *Kompleksna analiza*, 2009. http://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf, (travanj, 2014.)

[14] T. J. Yoder: *An Introduction to the Riemann Hypothesis*, 2011. http://sections.maa.org/epadel/students/studentWinners/2011_Yoder.pdf, (travanj, 2014.)

[15] S. Zakeri: *Value Distribution of Holomorphic Functions*, 2011. http://www.math.qc.edu/~zakeri/mat704/ch8_3_19_2011.pdf, (svibanj, 2014.)

[16] Andrew Odlyzko: Tables of zeros of the Riemann zeta function, http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko//zeta_tables/index.html, (svibanj, 2014.)

[17] Bernhard Riemann-Wikipedia,the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann, (travanj, 2014.)

[18] David Hilbert-Wikipedia,the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/David_Hilbert, (travanj, 2014.)

[19] Gamma function-Wikipedia,the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function,(travanj, 2014.)

[20] Hilbert's problems-Wikipedia,the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_problems, (travanj, 2014.)

[21] Millennium Prize Problems-Wikipedia,the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems, (travanj, 2014.)

[22] Riemann Zeta Function-from Wolfram MathWorld, http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html, (travanj, 2014.)

[23] Riemann-Siegel formula, http://web.mit.edu/kenta/www/six/parallel/2-Final-Report.html#Evaluating, (lipanj, 2014.)

Sažetak

Riemannova zeta funkcija ζ, je funkcija kompleksne varijable s koja je analitičko produljenje beskonačanog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, koji konvergira za $\Re(s) > 1$. Riemannova hipoteza, koju je izrekao Bernhard Riemann 1859. godine, tvrdi da sve netrivijalne nultočke Riemannove zeta funkcije imaju realni dio jednak $\frac{1}{2}$. Što to zapravo znači? Istinitost Riemannove hipoteze bi značila da možemo odrediti broj prostih brojeva do nekog realnog broja s jako malom greškom. Također, ako se Riemannova hipoteza pokaže istinitom, onda bi mnogi teoremi bili automatski dokazani. Na primjer, teorem o prostim brojevima daje vrlo dobru aproksimaciju broja prostih brojeva do nekog određednog broja, međutim Riemannova hipoteza nam kaže koliko je zapravo dobra ta aproksimacija. Dosad je pronađeno 10^{13} takvih netrivijalnih nultočaka, stoga su mnogi uvjereni u njenu istinitost, ali zasada ona nije dokazana. Riemannova hipoteza spada među sedam velikih problema tzv. *Millennium Prize Problems* (jedan od tih sedam problema je riješen) i vjerojatno je jedna od najpoznatijih nedokazanih matematičkih problema današnjice. O njezinoj važnosti svjedoči i sljedeća anegdota. Naime, kad je netko pitao poznatog matematičara Davida Hilberta, što bi napravio kad bi ga tisuću godina nakon vlastite smrti probudili, on je odgovorio: ”Upitao bih - Je li Riemannova hipoteza dokazana?”

Summary

The Riemann zeta function ζ, is a function of a complex variable s that analytically continues the sum of the infinite series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, which converges for $\Re(s) > 1$. The Riemann hypothesis, proposed by Bernhard Riemann in 1859, states that the nontrivial zeros of the Riemann zeta function all have real part $\frac{1}{2}$. What does it mean? Its truth would guarantee the nicest possible distribution of the primes which we can predict and would immediately verify a lot of dependent theorems. For instance, the Prime Number Theorem gives a good approximation to how many primes are less than a given number, but the Riemann hypothesis is related to a conjecture about how good that approximation is. Ten trillion nontrivial zeroes have been found until now and people assume that Riemann hypothesis is true but still no one has prove it. Riemann hypothesis is one of six unsolved Millennium Prize Problems and probably the one of most famous unsolved hypothesis in mathematics. For these many reasons, when the great mathematician David Hilbert was asked what he would do if he were to be revived in a thousand years, he replied, *I would ask, "Has somebody proven the Riemann hypothesis?"*

Životopis

Dino Bojmić je rođen 27.07.1990. godine u Zadru. Pohađao je Osnovnu školu Šime Budinića te Opću gimnaziju Franje Petrića. Obrazovanje nastavlja na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, na kojem upisuje preddiplomski studij 2009. godine te diplomski studij Matematika; smjer nastavnički 2012. godine. Za vrijeme trajanja diplomskog studija, objavljuje matematički članak pod naslovom *Matematika i zdrava prehrana* u časopisu Matka. Završio je diplomski studij u srpnju 2014. godine.