SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Borovec

UNIFORMNA METRIKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem se svome mentoru prof. dr. sc. Zvonku Iljazoviću što je oblikovao ideju te svojim stručnim savjetima i mnogobrojnim primjerima pomogao u izradi ovog diplomskog rada.
Najveća zahvala ide mojim roditeljima i suprugu koji su mi omogućili studiranje, te brojnim prijateljima koji su me podržavali kroz sve godine studiranja. Svi oni su mi bili veliki oslonac onda kada je to bilo najpotrebnije. Bez njihove pomoći zasigurno ne bih studiranje privela kraju, te je ova diploma velikim dijelom i njihova.
Veliko hvala svima!

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada je upoznati se sa strukturama metričkih i topoloških prostora. Sadržaj je podijeljen na tri cjeline.

U prvom dijelu definiraju se metrika i metrički prostori. Proučavaju se pojmovi kao što su otvoreni i zatvoreni skupovi u metričkom prostoru te potprostor metričkog prostora. Promatraju se neprekidne funkcije u metričkom prostoru, te se proučavaju konvergentni nizovi, a posebno povezanost neprekidnih funkcija i konvergencije. Promatraju se konvergentni nizovi u $\mathbb{R}$, te se u skladu s time definiraju i neki osnovni pojmovi iz matematičke analize kao što su infimum, supremum, gomilište itd.

Drugi dio je posvećen osnovnim pojmovima u topološkim prostorima. Proučavaju se svojstva topologije, metrizabilnost, baza topologije i produktna topologija. Posebno se i ovdje proučavaju konvergentni nizovi te povezanost neprekidnih funkcija i konvergencije.

U trećem poglavlju se definira uniformna metrika, kompaktnost te uniformna konvergencija. Ovo poglavlje ujedno prikazuje i povezanost metričkih i pripadnih topoloških prostora.

Poglavlje 1

Metrički prostori

1.1 Metrika, primjeri metričkih prostora

Neka je X neprazan skup, te $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi:

1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, gdje su $x, y \in X$

2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Tada kažemo da je d **metrika** na X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je **metrički prostor**.

Primjer 1.1.1. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $d(x, y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Tada je d metrika na $\mathbb{R}$.*

Provjerimo:

1) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$, $|x - y| = 0 \iff x = y$

2) Imamo $d(x, y) = |x - y|$ *i* $d(y, x) = |y - x|$ *pa je* $d(x, y) = d(y, x)$

3) Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Provjerimo je li* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
Imamo $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

*Dakle, d je metrika na $\mathbb{R}$, i to takozvana **euklidska metrika** na $\mathbb{R}$.*

Primjer 1.1.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Provjerimo je li ovako definirana funkcija metrika.

Jasno je da vrijede svojstva (1) i (2) iz definicije metrike. No vrijedi li i nejednakost trokuta? Provjerimo:

$$x, y, z \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \begin{array}{l} x = (x_1, ..., x_n) \\ y = (y_1, ..., y_n) \\ z = (z_1, ..., z_n) \end{array}$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + ... + (x_n - z_n)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + ... + (z_n - y_n)^2}$$

Definiramo: $u_1 = x_1 - z_1, ..., u_n = x_n - z_n$
$v_1 = z_1 - y_1, ..., v_n = z_n - y_n.$

Uočimo da je $x_1 - y_1 = u_1 + v_1, ..., x_n - y_n = u_n + v_n.$

Dovoljno je dokazati sljedeće: $\forall u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ *i* $\forall v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\sqrt{(u_1 + v_1)^2 + ... + (u_n + v_n^2)} \leq \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2} + \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(u_1 + v_1)^2 + ... + (u_n + v_n)^2 \leq (u_1^2 + ... + u_n^2) + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + (v_1^2 + ... + v_n^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(u_1^2 + 2u_1v_1 + v_1^2) + ... + (u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2) \leq (u_1^2 + ... + u_n^2) + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + (v_1^2 + ... + v_n^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$(u_1^2 + ... + u_n^2) + (v_1^2 + ... + v_n^2) + 2(u_1v_1 + ... + u_nv_n) \leq (u_1^2 + ... + u_n^2) + 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2} + (v_1^2 + ... + v_n^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$2(u_1v_1 + ... + u_nv_n) \leq 2\sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$u_1v_1 + ... + u_nv_n \leq \sqrt{\sum u_i^2}\sqrt{\sum v_i^2}$$

Definiramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sa*

$$f(t) = (tu_1 + v_1)^2 + ... + (tu_n + v_n)^2, \forall t \in \mathbb{R}$$

Uočimo: $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Nadalje, $\forall t \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

$$\begin{aligned} f(t) &= u_1^2 t^2 + 2u_1 v_1 t + v_1^2 + ... + u_n^2 t^2 + 2u_n v_n t + v_n^2 = \\ &= (u_1^2 + ... + u_n^2)t^2 + 2t(u_1 v_1 + ... + u_n v_n) + (v_1^2 + ... + v_n^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ *je kvadratna funkcija i* $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 4(u_1 v_1 + ... + u_n v_n)^2 - 4\Sigma u_i^2 \Sigma v_i^2 \leq 0$
$\Rightarrow |u_1 v_1 + ... + u_n v_n| \leq \sqrt{\Sigma u_i^2}\sqrt{\Sigma v_i^2}$

Zaključak: d je metrika na $\mathbb{R}^n$.

Za d kažemo da je **euklidska metrika** na $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.1.3. *Neka je X neprazan skup. Definiramo* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *sa*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \neq y, \\ 0, \text{ ako je } x = y. \end{cases}$$

Tada je d metrika na X. Provjerimo to:

1) $d(x, y) \geq 0$
   $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) *Neka su* $x, y, z \in X$. *Provjerimo vrijedi li* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$*?*
   U slučaju da je $x = y$ *nejednakost očito vrijedi.*
   Ako je $x \neq y$ *imamo da je ili* $x \neq z$ *ili* $y \neq z$*, te nejednakost trokuta vrijedi u oba slučaja.*

Za d kažemo da je ***diskretna metrika*** *na skupu X.*

1.2 Otvoreni i zatvoreni skupovi u metričkom prostoru

Definicija 1.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $x_0 \in X$, te $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Definiramo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

*Za $K(x_0, r)$ kažemo da je **otvorena kugla** oko x_0 radijusa r. Pišemo još i $K(x_0, r; d)$.*

Primjer 1.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ te $r > 0$. Tada je*

$$K(x_0, r; d) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle.$$

Dakle $K(x_0, r; d) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$, to jest svaka otvorena kugla u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ je otvoren interval (ograničen).
Obratno, svaki otvoreni interval (ograničeni) je otvorena kugla.

Primjer 1.2.3. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Neka je $x_0 \in X$, te $r > 0$. Pretpostavimo da je $r \leq 1$. Tada je $K(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\} = \{x_0\}$. Ako je $r > 1$ onda je $K(x_0, r) = X$.*

Definicija 1.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te $S \subseteq X$. Za S kažemo da je **otvoren skup** u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in S$ postoji $r > 0$ takav da je*

$$K(x, r) \subseteq S.$$

Uočimo: X je otvoren u (X, d).

Primjer 1.2.5. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Je li skup $[0, \infty\rangle$ otvoren u $(\mathbb{R}, d)$?*
Ne! Naime, $0 \in [0, \infty\rangle$, ali ne postoji $r > 0$ takav da je $K(0, r) \subseteq [0, \infty\rangle$.

Primjer 1.2.6. *Je li skup $\langle 0, \infty\rangle$ otvoren u $(\mathbb{R}, d)$?*
Neka je $x \in \langle 0, \infty\rangle$, tj. $x > 0$. Definiramo $r = x$. Imamo:

$$K(x, r) = \langle x - r, x + r\rangle = \langle 0, 2x\rangle \subseteq \langle 0, \infty\rangle$$

Dakle, za svaki $x \in \langle 0, \infty\rangle$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq \langle 0, \infty\rangle$. $\Rightarrow$ $\langle 0, \infty\rangle$ je otvoren u $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 1.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup.*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r)$. Tada je $d(x, x_0) < r$.
$\Rightarrow$ Postoji $s > 0$ takav da je $d(x, x_0) + s < r$. Tvrdimo da je $K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$.
Neka je $t \in K(x, s)$. Tada je $d(x, t) < s$. Imamo:

$$d(t, x_0) \leq d(t, x) + d(x, x_0) < s + d(x, x_0) < r$$
$$\Rightarrow t \in K(x_0, r)$$

Dakle $K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$, to jest $K(x_0, r)$ je otvoren skup. □

Definicija 1.2.8. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $F \subseteq X$. Za F kažemo da je* ***zatvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako je $F^c = X \setminus F$ otvoren skup u (X, d).*

Primjer 1.2.9. *$\emptyset$ je otvoren u metričkom prostoru (X, d). Je li zatvoren?*
$\emptyset^c = X \Rightarrow \emptyset$ je zatvoren.

Primjer 1.2.10. *X je otvoren u metričkom prostoru (X, d). Je li zatvoren?*
$X^c = \emptyset \Rightarrow X$ je zatvoren.

Primjer 1.2.11. *Neka je $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ te neka je d euklidska metrika na X. Imamo:*

$$K(0, \frac{1}{2}; d) = \{x \in X \mid d(x, 0) < \frac{1}{2}\} = \{x \in X \mid |x| < \frac{1}{2} = [0, \frac{1}{2}\rangle\}$$

Neka je d' euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je $K(0, \frac{1}{2}; d') = \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$.
Je li $[0, \frac{1}{2}\rangle$ otvoren u metričkom prostoru (X, d)?
Da, to je otvorena kugla u (X, d). No $[0, \frac{1}{2}\rangle$ nije otvoren u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d')$.

Je li $[0, 1]$ otvoren u metričkom prostoru (X, d)?
$K(0, \frac{3}{2}; d) = \{x \in X \mid |x| < \frac{3}{2}\} = [0, 1]$
Dakle, $[0, 1]$ je otvoren u metričkom prostoru (X, d).

Napomena*: otvoren skup u metričkom prostoru ne mora biti jednak otvorenoj kugli u tom metričkom prostoru.*

Je li $[0, 1]$ zatvoren u metričkom prostoru (X, d)?

$([0, 1])^c = [2, 3]$

$K(3, \frac{3}{2}; d) = \{x \in X | d(3, x) < \frac{3}{2}\} =$
$= \{x \in X \mid |3 - x| < \frac{3}{2}\} =$
$= \{x \in X \mid -\frac{3}{2} < x - 3 < \frac{3}{2}\} =$
$= \{x \in X \mid \frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}\} =$

$= \{x \in X \mid \langle \frac{3}{2}, \frac{9}{2} \rangle \bigcap X\} = [2,3]$
$[2,3]$ *je otvoren skup u* (X,d) *(jer je to otvorena kugla u metričkom prostoru* (X,d)*), pa je* $[0,1]$ *zatvoren u* (X,d)*.*

Propozicija 1.2.12. *Neka je* (X,d) *metrički prostor.*

1) $\emptyset, X$ *su otvoreni skupovi u* (X,d)

2) Ako je $U_\alpha, \alpha \in A$*, indeksirana familija otvorenih skupova u* (X,d)*, onda je* $\bigcup U_\alpha$ *otvoren skup.*

3) Ako su U *i* V *otvoreni, onda je* $U \cap V$ *otvoren.*

Dokaz. 1) Dokazano u primjeru 1.2.9.

2) Neka je $U_\alpha, \alpha \in A$, indeksirana familija otvorenih skupova u (X,d). Želimo dokazati da je $\bigcup U_\alpha$ otvoren skup. Neka je $x \in \bigcup U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha_0}$ a to povlači da postoji $r > 0$ takav da je $K(x,r) \subseteq U_{\alpha_0}$. Stoga je $K(x,r) \subseteq \bigcup U_\alpha$. Dakle, $\bigcup U_\alpha$ je otvoren skup.

3) Neka su U i V otvoreni u (X,d). Želimo dokazati da je $U \cap V$ otvoren skup. Neka je $x \in U \cup V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Oba skupa U i V su otvorena. Stoga postoje $r, s > 0$ takvi da je $K(x,r) \subseteq U$ i $K(x,s) \subseteq V$. Neka je $t = min\{r,s\}$. Tada je $t > 0$, $t \leq s$ i $t \leq r$. Stoga je $K(x,t) \subseteq K(x,r)$ i $K(x,t) \subseteq K(x,s)$.
Slijedi zaključak: $K(x,t) \subseteq U \cap V$, odnosno $U \cap V$ je otvoren.

□

Napomena 1.2.13. *Neka je* (X,d) *metrički prostor. Lako indukcijom dobivamo da je presjek konačno mnogo otvorenih skupova otvoren skup.*

Primjer 1.2.14. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$*. Za* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $U_n = \langle -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rangle$*.* U_n *je otvoren skup za svaki n. Tvrdimo da je* $\bigcap U_n = \{0\}$*.*
Jasno je da je $\{0\} \subseteq \bigcap U_n$*. Uzmimo sada* $x \in \bigcap U_n$*. Dokažimo da je* $x = 0$*. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je* $x \neq 0$*. Tada je* $|x| > 0$*, pa postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $\frac{1}{n_0} < |x|$*. Iz ovoga slijedi da* $x \notin \langle -\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0} \rangle$*. Stoga* $x \notin U_{n_0}$*, pa* $x \notin \bigcap U_n$ *a to je u kontradikciji sa pretpostavkom. Zaključujemo da je* $x = 0$ *i* $\bigcap U_n = \{0\}$*.*

Je li jednočlan skup $\{0\}$ *otvoren?*
Kada bi bio otvoren, postojao bi $r > 0$ *takav da je* $K(0, r) \subseteq \{0\}$*, to jest* $\langle -r, r\rangle \subseteq \{0\}$*. No,* $\frac{r}{2} \in \langle -r, r\rangle$ *,ali* $\frac{r}{2} \notin \{0\}$*. Zaključak:* $\{0\}$ *nije otvoren.*

Propozicija 1.2.15. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Tada vrijedi:*

1) $\emptyset$ *i* X *su zatvoreni skupovi.*

2) *Ako je* F_α *indeksirana familija zatvorenih skupova, onda je* $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ *zatvoren skup.*

3) *Ako su* F *i* G *zatvoreni skupovi onda je* $F \cup G$ *zatvoren skup.*

Dokaz. 1) Ovo je dokazano u primjeru 1.2.9.

2) Imamo: $(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha^c$
Zaključujemo da je $(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha)^c$ otvoren, stoga je $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ zatvoren.

3) $(F \cup G)^c = F^c \cup G^c$
$(F \cup G)^c$ je otvoren, stoga je $F \cup G$ zatvoren.

□

1.3 Neprekidne funkcije u metričkom prostoru

Definicija 1.3.1. *Neka su* (X, p) *i* (Y, q) *metrički prostori, te neka je* $f : X \to Y$*. Neka je* $x_0 \in X$*. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna u točki*** x_0 *s obzirom na metrike p i q ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaki* $x \in X$ *vrijedi*

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Uočimo:
Funkcija f je neprekidna u x_0 (s obzirom na metrike p i q) ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi:

$$x \in K(x_0, \delta; p) \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \varepsilon; q)$$
$$\text{to jest } f(K(x_0, \delta; p)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon; q)$$

Definicija 1.3.2. *Neka su* (X, p) *i* (Y, q) *metrički prostori, te* $f : X \to Y$*. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna s obzirom na metrike p i q*** *ako je funkcija neprekidna u svakoj točki* $x_0 \in X$*.*

Primjer 1.3.3. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Neka je $y_0 \in Y$. Definiramo funkciju $f : X \to Y$ sa $f(x) = y_0$, za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike p i q.*

Neka je $x_0 \in X$. Želimo dokazati da je f neprekidna u x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $\delta > 0$ i svaki $x \in X$ tako da $p(x, x_0) < \delta$ vrijedi

$$q(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

jer je $f(x) = f(x_0)$. Dakle, f je neprekidna u x_0. Prema tome, f je neprekidna.

Primjer 1.3.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $f : X \to X$ funkcija definirana sa $f(x) = x$, za svaki $x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike d i d.*

Neka je $x_0 \in X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $\delta = \varepsilon$. Tada za svaki $x \in X$ takav da je $d(x, x_0) < \delta$ vrijedi $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Zaključak: f je neprekidna u x_0, to jest f je neprekidna.

Propozicija 1.3.5. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, te $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na p i q ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y, q) vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, p).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na p i q. Neka je V otvoren skup u (Y, q). Dokažimo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, p). Neka je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(x_0) \in V$. Budući da je V otvoren u (Y, q) postoji $r > 0$ takav da $K(f(x_0), r) \subseteq V$. Po definiciji neprekidnosti postoji $r' > 0$ takav da je $f(K(x_0, r')) \subseteq K(f(x_0), r)$, a to povlači da je $f(K(x_0, r') \subseteq V$. Iz ovoga slijedi $K(x_0, r') \subseteq f^{-1}(V)$ te zaključujemo da je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p).

Pretpostavimo da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, p), za svaki otvoren skup V u (Y, q). Želimo dokazati da je tada f neprekidna s obzirom na metrike p i q. Neka je $x_0 \in X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo $V = K(f(x_0), \varepsilon)$. Tada je V otvoren skup u (Y, q), pa je onda prema pretpostavci $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p). Uočimo da je $x_0 \in f^{-1}(V)$. Stoga postoji $r > 0$ tako da $K(x_0, r) \subseteq f^{-1}(V)$. Iz toga slijedi da je $f(K(x_0, r)) \subseteq K(f(x_0), \varepsilon)$. Prema tome, zaključujemo da je f neprekidna u x_0. Dakle, f je neprekidna.

□

Napomena: Općenito, ako su X i Y skupovi, $f : X \to Y$ funkcija, te $A \subseteq Y$, onda je $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$. Naime ako je $x \in X \setminus f^{-1}(A)$, onda $x \notin f^{-1}(A)$ povlači $f(x) \notin A$, a iz toga slijedi da je $f(x) \in Y \setminus A$, to jest $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. Dakle $X \setminus f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(Y \setminus A)$. S druge strane, ako je $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$ onda je $f(x) \in Y \setminus A$, a to povlači da $f(x) \notin A$, to jest $x \notin f^{-1}(A)$, odnosno $x \in X \setminus f^{-1}(A)$.

Propozicija 1.3.6. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, te $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna funkcija s obzirom na p i q ako i samo ako za svaki zatvoren skup F u (Y, q) vrijedi da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u (X, p).*

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna s obzirom na p i q. Neka je F zatvoren u (Y, q). Tada je $Y \setminus F$ otvoren skup u (Y, q), pa je prema propoziciji 1.3.5 skup $f^{-1}(Y \setminus F)$ otvoren u (X, p). No, prema prethodnoj napomeni vrijedi da je tada $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$, dakle $X \setminus f^{-1}(F)$ je otvoren u (X, p). Dakle $f^{-1}(F)$ je zatvoren u (X, p).

Pretpostavimo sada da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup u (X, p) za svaki zatvoren skup F u (Y, q). Neka je V otvoren skup u (Y, q). Želimo dokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u (X, p). Ako to dokažemo onda će iz propozicije 1.3.5 slijediti da je f neprekidna. Uočimo da je $Y \setminus V$ zatvoren skup u (Y, q). Stoga je $f^{-1}(Y \setminus V)$ zatvoren u (X, p). Prema prethodnoj napomeni vrijedi da je $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$. Dakle $X \setminus f^{-1}(V)$ je zatvoren u (X, p) pa mu je komplement otvoren, to jest $f^{-1}(V)$ je otvoren u (X, p). □

1.4 Ekvivalentne metrike

Propozicija 1.4.1. *Neka je X neprazan skup, te neka su d i d' metrike na skupu X. Pretpostavimo da postoji $M > 0$ takav da je*

$$d(x, y) \leq M \cdot d'(x, y) \tag{1.1}$$

za sve $x, y \in X$. Tada je svaki skup koji je otvoren u metričkom prostoru (X, d) otvoren i u metričkom prostoru (X, d').

Dokaz. Neka je $x \in X$ te $r > 0$. Tvrdimo da je

$$K(x, \frac{r}{M}; d') \subseteq K(x, r; d) \tag{1.2}$$

Neka je $y \in K(x, \frac{r}{M}; d')$. Tada je $d'(x, y) < \frac{r}{M}$, pa je $M \cdot d'(x, y) < r$. Iz (1.1) slijedi da je $d(x, y) < r$. Stoga je $x \in K(x, r; d)$.
Neka je sada U otvoren skup u (X, d). Dokažimo da je U otvoren u (X, d'). Neka je $x \in U$. Tada postoji $r > 0$ tako da je $K(x, r; d) \subseteq U$. Iz (1.2) slijedi da je $K(x, \frac{r}{M}; d') \subseteq U$.
Zaključak: U je otvoren u (X, d'). □

Definicija 1.4.2. *Neka je X neprazan skup, te neka su d i d' metrike na X takve da postoje $M, N > 0$ sa svojstvom da je $d(x, y) \leq Md'(x, y)$ i $d'(x, y) \leq Nd(x, y)$ za sve $x, y \in X$. Tada za metrike d i d' kažemo da su* ***ekvivalentne u smislu Lipschitza****.*

Korolar 1.4.3. *Neka su d i d' metrike na skupu X ekvivalentne u smislu Lipschitza. Neka je $U \subseteq X$. Tada je U otvoren u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren u metričkom prostoru (X, d').*

Dokaz. Dokaz slijedi iz propozicije 1.4.1 i definicije 1.4.2. □

Lema 1.4.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka su $u_1, ..., u_n$ nenegativni realni brojevi. Tada je*

$$\sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2} \leq u_1 + ...u_n \tag{1.3}$$

i

$$u_1 + ... + u_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}. \tag{1.4}$$

Dokaz. (1.3) je ekvivalentno sa $u_1^2 + ... + u_n^2 \leq (u_1 + ... + u_n)^2$, što očito vrijedi.
(1.4) ćemo dokazati indukcijom po n. Uočimo da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $2xy \leq x^2 + y^2$.
Za $n = 1$ relacija (1.4) očito vrijedi.
Pretpostavimo da (1.4) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $u_1, ..., u_{n+1}$ nenegativni realni brojevi.
Imamo:

$$(u_1 + ... + u_n + u_{n+1})^2 = (u_1 + ... + u_n)^2 + 2 \cdot (u_1 + ... + u_n) \cdot u_{n+1} + u_{n+1}^2 \tag{1.5}$$

Prema induktivnoj pretpostavci vrijedi

$$(u_1 + ... + u_n)^2 \leq n \cdot (u_1^2 + ... + u_n^2)$$

Nadalje,

$$2 \cdot (u_1 + ... + u_n) \cdot u_{n+1} = 2u_1u_{n+1} + ... + 2u_nu_{n+1} \leq (u_1^2 + u_{n+1}^2) + ... + (u_n^2 + u_{n+1}^2) = (u_1^2 + ... + u_n^2) + n \cdot u_{n+1}^2$$

Iz (1.5) slijedi :

$$(u_1 + ... + u_{n+1})^2 \leq (n + 1)(u_1^2 + ... + u_{n+1}^2)$$

Dakle, tvrdnja je dokazana za $n + 1$.

□

Primjer 1.4.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka je $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d_1((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$$

Tada je d_1 metrika na $\mathbb{R}^n$. Naime, za $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ i $z = (z_1, ..., z_n)$ vrijedi:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \leq (|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|) + ... + (|x_n - z_n| + |z_n - y_n|) = (|x_1 - z_1| + |x_n - z_n|) + (|z_1 -_1| + ... + |z_n - y_n|) = d_1(x, z) + d_1(z, y)$$

Dakle $d_1(x,y) \leq d_1(x,z) + d_1(z,y)$.

Neka je d *euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Dokažimo da su* d *i* d_1 *ekvivalentne u smislu Lipschitza. Neka su* $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$ *i* $y = (y_1, ..., y_n)$. *Definirajmo* $u_1, ..., u_n$ *sa:* $u_i = |x_i - y_i|$, *za svaki* $i = 1, ..., n$. *Tada je*

$$d(x,y) = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$$

te $d_1(x,y) = u_1 + ... + u_n$. *Iz prethodne leme slijedi* $d(x,y) \leq d_1(x,y)$, *te* $d_1(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d(x,y)$. *Prema tome* d *i* d_1 *su ekvivalentne u smislu Lipschitza.*

Primjer 1.4.6. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, *te neka je* $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$d_\infty((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\}$$

Tvrdimo da je d_∞ *metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$. *Za svaki* $i = 1, ..., n$ *vrijedi*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$$

Zaključujemo da je $d_\infty(x,y) \leq d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y)$. *Dakle* d_∞ *je metrika na* $\mathbb{R}^n$.

Uočimo sljedeće:
Ako su $u_1, ..., u_n$ nenegativni realni brojevi onda je

$$max\{u_1, ..., u_n\} \leq \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2} \leq \sqrt{n} \cdot max\{u_1, ..., u_n\} \tag{1.6}$$

Naime, neka je $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $u_i = max\{u_1, ..., u_n\}$. Tada je $u_i^2 \leq u_1^2 + ... + u_n^2 \leq n \cdot u_i^2$, pa korjenovanjem slijedi (1.6).

Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$. Definirajmo brojeve $u_1, ..., u_n$ sa:

$$u_i = |x_i - y_i|, i \in \{1, ..., n\}.$$

Tada je $d_\infty(x,y) = \max\{u_1, ..., u_n\}$, a $d(x,y) = \sqrt{u_1^2, ..., u_n^2}$. Iz (1.6) slijedi

$$d_\infty(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n} \cdot d_\infty(x,y).$$

Prema tome, metrike d i d_∞ su ekvivalentne u smislu Lipschitza.

Neka je X skup, te neka su d, d' i d'' metrike na skupu X takve da su d i d' ekvivalentne u smislu Lipschitza, te da su d' i d'' ekvivalentne u smislu Lipschitza. Tada su i metrike d i d'' ekvivalentne u smislu Lipschitza. Naime, postoje $M, N, P, Q > 0$ takvi da:

$$d(x, y) \leq M \cdot d'(x, y) \tag{1.7}$$

$$d'(x, y) \leq N \cdot d(x, y) \tag{1.8}$$

$$d'(x, y) \leq P \cdot d''(x, y) \tag{1.9}$$

$$d''(x, y) \leq Q \cdot d'(x, y) \tag{1.10}$$

Kada pomnožimo (1.9) s M i iskoristimo (1.7) dobivamo:

$$d(x, y) \leq Md'(x, y) \leq MPd''(x, y)$$

Dakle $d(x, y) \leq MPd''(x, y)$.
S druge strane, kada (1.8) pomnožimo s Q i iskoristimo (1.10) dobivamo:

$$d''(x, y) \leq Qd'(x, y) \leq QNd(x, y)$$

to jest $d''(x, y) \leq QNd(x, y)$. Zaključujemo da su metrike d i d'' ekvivalentne u smislu Lipschitza.

1.5 Konvergencija nizova u metričkom prostoru

Definicija 1.5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X te neka je $a \in X$. Za niz (x_n) kažemo da* ***teži ili konvergira točki*** *a (u metričkom prostoru (X, d)) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_n, a) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Još kažemo i da je a* ***limes niza*** *(x_n) i pišemo*

$$x_n \to a.$$

Za niz (x_n) u X kažemo da je ***konvergentan*** *u metričkom prostoru (X, d) ako postoji $a \in X$ takav da $x_n \to a$.*

Primjer 1.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $a \in X$. Definiramo niz (x_n) sa $x_n = a$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada niz (x_n) teži prema a.*

Uočimo:
Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$x_n \in K(a, \epsilon), \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Propozicija 1.5.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $a, b \in X$, pri čemu je $a \neq b$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $r = \dfrac{d(a,b)}{2}$. Tada je $r > 0$. Pretpostavimo da postoji $c \in X$ takav da je $c \in K(a, r) \cap K(b, r)$. Tada je $d(a, c) < r$ i $d(b, c) < r$. Imamo:

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c) < 2r$$

Dakle, $d(a, b) < 2r$, no ovo je u kontradikciji s definicijom broja r. Zaključujemo da je $K(a, r) \cap K(b, r) = \emptyset$.
Neka je $U = K(a, r)$ i $V = K(b, r)$. Tada su U i V otvoreni skupovi u (X, d) takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.

□

Propozicija 1.5.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X, te $a \in X$. Tada $x_n \to a$ ako i samo ako za svaki otvoren skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $x_n \to a$. Neka je U otvoren u (X, d) i neka je $a \in U$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(a, \varepsilon) \subseteq U$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Stoga je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.

Pretpostavimo sada da za svaki otvoren skup U u (X, d) koji sadrži a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Dokažimo da $x_n \to a$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $K(a, \varepsilon)$ otvoren skup u (X, d) koji sadrži točku a, pa stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: $x_n \to a$. □

Propozicija 1.5.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X, te $a, b \in X$. Pretpostavimo da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest $a \neq b$. Prema propoziciji 1.5.3 postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $a \in U$ i $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Iz propozicije 1.5.4 slijedi da postoje prirodni brojevi n_0 i m_0 takvi da $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$ i $x_n \in V$ za svaki $n \geq m_0$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$. Tada je $x_n \in U$ i $x_n \in V$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $U \cap V = \emptyset$. Prema tome, $a = b$.

□

Teorem 1.5.6. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, neka je $a \in X$, te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna u točki a s obzirom na metrike p i q. Pretpostavimo da je (x_n) niz u X takav da $x_n \to a$. Tada niz $(f(x_n))$ konvergira prema $f(a)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je f neprekidna u točki a, postoji $\delta > 0$ takav da je $f(K(a,\delta)) \subseteq K(f(a),\varepsilon)$. Budući da $x_n \to a$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a,\delta)$ za svaki $n \geq n_0$. Prema tome, $f(x_n) \in K(f(a),\varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključujemo da niz $(f(x_n))$ konvergira prema $f(a)$.

□

Lema 1.5.7. *Neka je (X,d) metrički prostor, (x_n) niz u X, te $a \in X$ točka takva da je $d(x_n,a) \leq \frac{1}{n}$, za svaki $n \in N$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberemo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, pa je $d(x_n,a) < \varepsilon$. Dakle $x_n \to a$.

□

Teorem 1.5.8. *Neka su (X,p) i (Y,q) metrički prostori, $a \in X$, te $f : X \to Y$ funkcija koja ima sljedeće svojstvo: kad god je (x_n) niz u X takav da $x_n \to a$ onda $f(x_n) \to f(a)$. Tada je f neprekidna u točki a.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\varepsilon > 0$ za kojeg ne postoji $\delta > 0$ takav da

$$p(x,a) < \delta \Rightarrow g(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Stoga za svaki $\delta > 0$ postoji $x \in X$ takav da je $p(x,a) < \delta$ i $q(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$. Iz ovoga slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ takav da je $p(x_n,a) < \frac{1}{n}$ i $q(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Imamo niz (x_n) koji prema lemi 1.5.7 teži prema a. Iz pretpostavke teorema slijedi da niz $(f(x_n))$ teži prema $f(a)$. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $q(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, za svaki $n \geq n_0$. No ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $q(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome, f je neprekidna u a.

□

Napomena:
Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada niz (x_n) teži prema a (u klasičnom smislu konvergencije) ako i samo ako $x_n \to a$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

Napomena:
Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, te neka je $a \in \mathbb{R}$. Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada je f neprekidna funkcija u točki a (u klasičnom smislu) ako i samo ako je f neprekidna u a s obzirom na metrike d,d.

1.6 Omeđeni skupovi u metričkom prostoru

Definicija 1.6.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, te $S \subseteq X$. Za S kažemo da je omeđen skup u metričkom prostoru (X, d) ako postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r_0)$.*

Lema 1.6.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je S omeđen skup u metričkom prostoru (X, d). Tada za svaki $x \in X$ postoji $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x, r)$.*

Dokaz. Budući da je S omeđen postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r_0)$. Neka je $x \in X$. Definiramo $r = d(x, x_0) + r_0$. Tvrdimo da je $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$. Neka je $y \in K(x_0, r_0)$. Imamo $d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < d(x, x_0) + r_0 = r$. Dakle $d(x, y) < r$, pa je $y \in K(x, r)$. Prema tome $K(x_0, r_0) \subseteq K(x, r)$, pa je $S \subseteq K(x, r)$.

□

Propozicija 1.6.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su S i T omeđeni skupovi u (X, d) Tada je $S \cup T$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Uzmimo $x \in X$. Iz prethodne leme slijedi da postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x, r_1)$ i $T \subseteq K(x, r_2)$. Neka je $r = max\{r_1, r_2\}$. Tada je $K(x, r_i) \subseteq K(x, r)$, za $i = 1, 2$. Stoga je $S \subseteq K(x, r)$ i $T \subseteq K(x, r)$, pa je i $S \cup T \subseteq K(x, r)$. Dakle, $S \cup T$ je omeđen skup u (X, d).

□

Korolar 1.6.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su $S_1, ..., S_n$ omeđeni skupovi u metričkom prostoru (X, d). Tada je $S_1 \cup ... \cup S_n$ omeđen skup u (X, d).*

Dokaz. Indukcijom iz prethodne propozicije.

□

Korolar 1.6.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je S konačan podskup od X. Tada je S omeđen u (X, d).*

Dokaz. S je unija konačno mnogo jednočlanih skupova, a svaki jednočlani skup je omeđen, pa tvrdnja slijedi iz prethodnog korolara.

□

Definicija 1.6.6. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***gornja međa*** *skupa S ako je $x \leq a$, za svaki $x \in S$. Za $S \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je odozgo omeđen ako postoji gornja međa od S.*

Definicija 1.6.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***supremum*** *skupa S ako je a najmanja gornja međa skupa S, to jest ako vrijedi:*

1) a je gornja međa od S

2) ako je b gornja međa od S, onda je $a \leq b$.

Definicija 1.6.8. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in S$. Za a kažemo da je **najveći element skupa S** ili **maksimum od S** ako je a gornja međa od S.*

Uočimo, ako je a maksimum skupa S, onda je a supremum od S. Nadalje, uočimo da je supremum nekog skupa, ako postoji, jedinstven.

Primjer 1.6.9. *Skup $\langle -\infty, 0\rangle$ ima supremum i to je broj 0. Jasno je da je 0 gornja međa tog skupa. Nadalje, ako je b gornja međa skupa $\langle -\infty, 0\rangle$, onda je $0 \leq b$. U suprotnom bismo imali $b < 0$, pa bi postojao $c \in \mathbb{R}$ takav da je $b < c < 0$, a što bi značilo da je c element skupa $\langle -\infty, 0\rangle$ koji je veći od b, no to je nemoguće. Dakle, 0 je supremum skupa $\langle -\infty, 0\rangle$. Uočimo da 0 nije maksimum ovog skupa, te da ovaj skup nema maksimum.*

Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$. Primjetimo da ako neki skup ima supremum, onda je on odozgo omeđen. S druge strane, svaki odozgo omeđen neprazan skup ima supremum.

Aksiom potpunosti: Neka su S i T neprazni podskupovi od $\mathbb{R}$ takvi da je $x \leq y$ za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ tako da je

$$x \leq z \leq y$$

za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$.

Teorem 1.6.10. *Svaki neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$ ima supremum.*

Dokaz. Neka je S neprazan odozgo omeđen podskup od $\mathbb{R}$. Neka je T skup svih gornjih međa od S. Tada je $T \neq \emptyset$ jer je S odozgo omeđen. Imamo stoga $S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$ i $x \leq y$, za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Prema aksiomu potpunosti tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da je $x \leq z \leq y$, za svaki $x \in S$ i za svaki $y \in T$. Iz ovoga zaključujemo da je z supremum od S. □

Definicija 1.6.11. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je **donja međa** skupa S ako je $a \leq x$ za svaki $x \in S$. Za skup S kažemo da je **odozdo omeđen** ako postoji barem jedna donja međa od S.*

Definicija 1.6.12. *Neka je S podskup od $\mathbb{R}$. Za $a \in S$ kažemo da je najmanji element skupa S ili **minimum** od S ako je a donja međa od S.*

Definicija 1.6.13. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ i $a \in \mathbb{R}$. Za a kažemo da je* ***infimum*** *skupa S ako je a najveća donja međa skupa S, to jest ako vrijedi:*

1) a je donja međa od S

2) ako je b donja međa od S onda je $b \leq a$

Uočimo sljedeće:
Ako infimum skupa S postoji onda je on jedinstven. Nadalje, ako je a minimum skupa S, onda je a infimum od S. Infimum skupa S označavamo sa $\inf S$.

Primjer 1.6.14. *0 je infimum skupa $\langle 0, \infty \rangle$.*
Jasno je da je 0 donja međa ovog skupa. S druge strane, ako je b donja međa ovog skupa onda je $b \leq 0$. Dokažimo to.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $b > 0$ pa postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < x < b$. No ovo je u kontradikciji s činjenicom da je b donja međa skupa $\langle 0, \infty \rangle$. Prema tome, $b \leq 0$ što znači da je 0 infimum skupa $\langle 0, \infty \rangle$.

Uočimo da ovaj skup nema minimum!

Propozicija 1.6.15. *Svaki neprazan odozdo omeđen skup ima infimum.*

Dokaz. Neka je S neprazan odozdo omeđen skup. Neka je T skup svih donjih međa skupa S. Imamo $S \neq \emptyset, T \neq \emptyset$ i $x \leq y$ za svaki $x \in T$ i za svaki $y \in S$. Prema aksiomu potpunosti postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $x \in T$ i za svaki $y \in S$ vrijedi $x \leq z \leq y$. Prema tome, z je infimum skupa S.

□

Propozicija 1.6.16. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in \mathbb{R}$. Tada je a supremum skupa S ako i samo ako je a gornja međa skupa S, te za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.*

Dokaz. Neka je a supremum skupa S. Jasno je da je tada a gornja međa od S. Neka je $\varepsilon > 0$. Želimo dokazati da postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.
Pretpostavimo suprotno. Tada je $x \leq a - \varepsilon$, za svaki $x \in S$. To znači da je $a - \varepsilon$ gornja međa skupa S, a što povlači $a \leq a - \varepsilon$ (jer je a supremum skupa S). No to je očito nemoguće, pa zaključujemo da postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$.
Pretpostavimo sada da je a gornja međa od S te da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. Dokažimo da je a supremum od S.
Neka je b gornja međa od S. Tvrdimo da je tada $a \leq b$. Pretpostavimo suprotno, to jest $b < a$. Definiramo $\varepsilon = a - b$. Tada je $\varepsilon > 0$, pa postoji $x \in S$ takav da je $a - \varepsilon < x$. No,

$b = a - \varepsilon$. Slijedi $b < x$, što je nemoguće jer je b gornja međa skupa S. Dakle $a \leq b$.
Zaključak: a je supremum od S.

□

Propozicija 1.6.17. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$, te $a \in \mathbb{R}$. Tada je a infimum skupa S ako i samo ako je a donja međa skupa S i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $x \in S$ takav da je $x < a + \varepsilon$.*

Dokaz. Analogno kao u prethodnoj propoziciji.

□

Definicija 1.6.18. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Za S kažemo da je* ***omeđen skup*** *u $\mathbb{R}$ ako je S omeđen i odozgo i odozdo.*

Propozicija 1.6.19. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Tada je S omeđen skup u $\mathbb{R}$ ako i samo ako je S omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.*

Dokaz. Neka je x_0 donja međa skupa S, te y_0 gornja međa skupa S. Neka je $M \in \mathbb{R}, M > 0$ takav da je $M > y_0$ i $M > -x_0$. Tada je

$$-M < x_0 \leq s \leq y_0 < M$$

za svaki $s \in S$. Iz ovoga slijedi da je $S \subseteq \langle -M, M \rangle$, to jest $S \subseteq K(0, M; d)$. Zaključujemo da je S omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$.

Pretpostavimo sada da je S omeđen u $(\mathbb{R}, d)$. Tada postoje $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r)$, to jest

$$S \subseteq \langle x_0 - r, x_0 + r \rangle.$$

Stoga je $x_0 - r$ donja međa od S, a $x_0 + r$ gornja međa od S. Dakle, S je omeđen u $\mathbb{R}$. □

Definicija 1.6.20. *Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je rastući ako je $x_n \leq x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*
Za niz realnih brojeva (x_n) kažemo da je padajući ako je $x_n \geq x_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.6.21. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je (x_n) niz u X. Za niz (x_n) kažemo da je* ***omeđen u metričkom prostoru*** *(X, d) ako je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup u (X, d).*

Propozicija 1.6.22. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) konvergentan niz u ovom prostoru. Tada je (x_n) omeđen.*

Dokaz. Neka je $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(a, 1)$ za svaki $n \geq n_0$. Dakle $\{x_n \mid n \geq n_0\}$ je omeđen skup. S druge strane, skup $\{x_n \mid n < n_0\}$ je omeđen jer je konačan. Stoga je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ omeđen skup kao unija dva omeđena skupa. Dakle, (x_n) je omeđen u (X, d).

□

Definicija 1.6.23. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Za (x_n) kažemo da je* ***Cauchyjev niz ili C-niz*** *u (X, d) ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Propozicija 1.6.24. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je (x_n) konvergentan niz u (X, d). Tada je (x_n) Cauchyjev niz u (X, d).*

Dokaz. Neka je $a \in X$ takav da $x_n \to a$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Neka su $m, n \geq n_0$. Tada je

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \varepsilon$$

Dakle $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ za sve $m, n \geq n_0$, to jest (x_n) je C-niz.

□

Primjer 1.6.25. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran sa $x_n = \frac{1}{n}$. Tada $x_n \to 0$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$. Stoga je (x_n) C-niz u $(\mathbb{R}, d)$.*

Neka je p euklidska metrika na $\langle 0, \infty\rangle$. Tada je (x_n) C-niz u metričkom prostoru $(\langle 0, \infty\rangle, p)$ (jer je C-niz u $(\mathbb{R}, d)$), no on nije konvergentan u tom metričkom prostoru.
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $a \in \langle 0, \infty\rangle$ takav da $x_n \to a$ u metričkom prostoru $(\langle 0, \infty\rangle, p)$. Znamo da je $p(x, y) = d(x, y)$ za svaki $x, y \in \langle 0, \infty\rangle$. Stoga također vrijedi da $x_n \to a$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ pa slijedi da je $a = 0$ što znači da $a \notin \langle 0, \infty\rangle$. Kontradikcija. Dakle, (x_n) je C-niz u $(\langle 0, \infty\rangle, p)$, no nije konvergentan u tom metričkom prostoru.

Primjer 1.6.26. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = (-1)^n$. Tada je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$, pa je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. No (x_n) nije konvergentan niz u $(\mathbb{R}, d)$.*
Pretpostavimo suprotno. Tada je (x_n) C-niz u $(\mathbb{R}, d)$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_m, x_n) < 1 \tag{1.11}$$

za sve $m, n \geq n_0$. Odaberemo neki paran broj $m \geq n_0$. Neka je $n = m + 1$. Tada je $x_m = 1$ i $x_n = -1$, pa je

$$d(x_m, x_n) = |1 - (-1)| = 2$$

što je u kontradikciji s (1.11). Dakle, (x_n) nije konvergentan u $(\mathbb{R}, d)$.

Propozicija 1.6.27. *Neka je (x_n) omeđen i rastući niz realnih brojeva. Neka je a supremum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz propozicije 1.6.16 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $a-\varepsilon < x_{n_0}$. Budući da je (x_n) rastući niz, za sve $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je $i \leq j$ vrijedi $x_i \leq x_j$. Stoga za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_{n_0} \leq x_n$, pa imamo:

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$$

Dakle, $x_n \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$, za svaki $n \geq n_0$. Prema tome, $x_n \to a$.
Zaključak: (x_n) konvergira prema a.

□

Propozicija 1.6.28. *Neka je x_n omeđen i padajući niz realnih brojeva. Neka je a infimum skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada $x_n \to a$.*

Dokaz. Uočimo prije svega da činjenica da je niz (x_n) padajući povlači da je $x_n \geq x_m$ za sve $n, m \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leq m$. Neka je $\varepsilon > 0$. Iz propozicije 1.6.17 slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{n_0} < a + \varepsilon$ Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $a - \varepsilon < a \leq x_n \leq x_{n_0} < a + \varepsilon$, pa je $x \in \langle a - \varepsilon, a + \varepsilon \rangle$.
Zaključak: (x_n) konvergira prema a.

□

Primjer 1.6.29. *Neka je $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Neka je (x_n) niz definiran sa $x_n = q^n$ pri čemu je $n \in \mathbb{N}$. Tada $x_n \to 0$.*
Naime $q < 1$, a to povlači da je $q^{n+1} < q^n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (niz je padajući). Jasno je da je ovaj niz omeđen. Prema prethodnoj propoziciji je dovoljno dokazati da je 0 infimum skupa $S = \{q^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Jasno je da je 0 donja međa tog skupa. Neka je a infimum skupa S. Tada je $0 \leq a$. Pretpostavimo da je $0 < a$. Iz $q < 1$ slijedi $1 < \frac{1}{q}$, pa $a > 0$ povlači $a < \frac{a}{q}$. Budući da je a najveća donja međa skupa S broj $\frac{a}{q}$ nije donja međa skupa S, što znači da postoji $x \in S$ takav da je $x < \frac{a}{q}$. Dakle postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $q^n < \frac{a}{q}$. Iz ovoga slijedi da je $q^{n+1} < a$. No $q^{n+1} \in S$, pa je ovo u kontradikciji s činjenicom da je a donja međa od S. Dakle, $a = 0$.

Lema 1.6.30. *Neka je (I_n) niz segmenata u $\mathbb{R}$, takvih da je $I_{n+1} \subseteq I_n$, za svaki $n \in N$. Tada je*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $a_n < b_n$ i $I_n = [a_n, b_n]$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $I_{n+1} \subseteq I_n$, to jest $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ iz čega slijedi

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Prema tome niz (a_n) je rastući, a niz (b_n) je padajući. Neka je $m \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < b_m$. Naime, ako je $n \geq m$ onda je

$$a_n < b_n \leq b_m,$$

a ako je $n \leq m$ onda je

$$a_n \leq a_m < b_m.$$

Iz ovoga zaključujemo da je b_m gornja međa skupa $S = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Neka je c supremum skupa S. Tada je $c \leq b_m$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. S druge strane vrijedi $a_n < c$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_n \leq c \leq b_n,$$

to jest $c \in I_n$. Zaključak: $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

□

1.7 Gomilište niza u metričkom prostoru

Definicija 1.7.1. *Neka je X skup, neka je (x_n) niz u X, te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je niz (x_n)* ***beskonačan u skupu S*** *ako je skup $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in S\}$ beskonačan, to jest ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n$ i $x_m \in S$.*

Definicija 1.7.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Neka je $a \in X$. Za a kažemo da je* ***gomilište niza*** *(x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako je za svaki $\varepsilon > 0$ niz (x_n) beskonačan u skupu $K(a, \varepsilon)$.*

Propozicija 1.7.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Tada je a gomilište niza (x_n) ako i samo ako za svaki otvoren skup U u (X, d) takav da je $a \in U$ vrijedi da je (x_n) beskonačan u U.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a gomilište niza (x_n). Neka je U otvoren skup u (X, d) tako da je $a \in U$. Tada postoji $r > 0$ takav da je $K(a, r) \subseteq U$. Budući da je a gomilište od (x_n), niz (x_n) je beskonačan u $K(a, r)$, pa je beskonačan i u U.
Obratno, pretpostavimo da ja (x_n) beskonačan u U za svaki otvoren skup U takav da je

$a \in U$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je $K(a, \varepsilon)$ otvoren skup u (X, d), pa je niz (x_n) beskonačan u $K(a, \varepsilon)$. Prema tome, a je gomilište niza (x_n).

□

Uočimo sljedeće:
Ako je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X i $a \in X$, te ako $x_n \to a$, onda je a gomilište niza (x_n).

Primjer 1.7.4. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva definiran sa $x_n = (-1)^n$. Tada su -1 i 1 očito gomilišta ovog niza. S druge strane, ovaj niz nije konvergentan, dakle ni jedna od ovih točaka nije limes niza (x_n).*

Primjer 1.7.5. *Neka je (x_n) niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $x_n = n$. Tada (x_n) nema gomilište, to jest ne postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je a gomilište niza (x_n).*
Pretpostavimo suprotno, neka je $a \in \mathbb{R}$ gomilište niza (x_n). Tada je niz (x_n) beskonačan u $K(a, 1)$, to jest u $\langle a - 1, a + 1 \rangle$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a + 1 < n$. Tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m \geq n$ vrijedi $a + 1 < m$, pa $m \notin \langle a - 1, a + 1 \rangle$, to jest $x_m \notin \langle a - 1, a + 1 \rangle$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je (x_n) beskonačan u $\langle a - 1, a + 1 \rangle$.

Uočimo sljedeće:
Ako je X skup, (x_n) niz u X, te ako su S i T podskupovi od X tako da je (x_n) beskonačan u $S \cup T$, onda je (x_n) beskonačan u S ili je beskonačan u T.

Definicija 1.7.6. *Neka je (X, d) metrički prostor, te S neprazan omeđen skup u (X, d). Definiramo*

$$diamS = sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$$

Za broj diamS kažemo da je dijametar skupa S.

Lema 1.7.7. *Neka je I segment u $\mathbb{R}$, te neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}$ koji je beskonačan u I. Tada postoji segment J takav da je (x_i) beskonačan u J, te $J \subseteq I$ i $diamJ = \frac{1}{2} diamI$.*

Dokaz. Imamo $I = [a, b]$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Neka je $c = \frac{a + b}{2}$. Tad je $a < c < b$, pa je $I = [a, b] = [a, c] \cup [c, b]$. Budući da je (x_i) beskonačan u I imamo da je (x_i) beskonačan u $[a, c]$ ili u $[c, b]$. Uočimo da je $diam[a, c] = c - a = \frac{b - a}{2}$.

Dakle, $diam[a, c] = \frac{1}{2} diam I$. Analogno dobivamo $diam[c, b] = \frac{1}{2} diam I$.

□

Lema 1.7.8. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka je $x_0 \in X$, te $r > 0$. Ako je $A \subseteq X$ takav da je $x_0 \in A$ i $diam A < r$, onda je $A \subseteq K(x_0, r)$.*

Dokaz. Neka je $a \in A$. Tada je $d(x_0, a) \leq diam A < r$. Dakle $d(x_0, a) < r$, pa je $a \in K(x_0, r)$. Zaključak: $A \subseteq K(x_0, r)$.

□

Lema 1.7.9. *Neka je (x_n) niz realnih brojeva, te neka je $a \in \mathbb{R}$ takav da $x_n \to a$. Neka je $c \in \mathbb{R}$. Tada $c \cdot x_n \to c \cdot a$.*

Dokaz. Ako je $c = 0$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je $c \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|},$$

za svaki $n \geq n_0$. Stoga je $|cx_n - ca| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: $cx_n \to ca$.

□

Teorem 1.7.10. *Neka je (x_i) omeđen niz u $\mathbb{R}$. Tada (x_i) ima gomilište.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ takvi da je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a, b]$. Definiramo niz segmenata $(I_n)_{n \geq 0}$ na sljedeći način:
$I_0 = [a, b]$. Uočimo da je (x_i) beskonačan u I_0.
Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}_0$ te da smo definirali segment I_n tako da je niz (x_i) beskonačan u I_n. Prema lemi 1.7.7 postoji podsegment J od I_n takav da je (x_i) beskonačan u J i $diam J = \frac{1}{2} diam I_n$.
Definirajmo $I_{n+1} = J$. Na ovaj način smo definirali niz (I_n) segmenata takav da je

$$I_{n+1} \subseteq I_n, diam I_{n+1} = \frac{1}{2} diam I_n,$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, te takav da je (x_i) beskonačan u I_n, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Prema lemi 1.6.30 postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $c \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Imamo:

$$diam I_1 = \frac{1}{2} diam I_0 = \frac{1}{2}(b - a)$$

$$diam I_2 = \frac{1}{2} diam I_1 = \frac{1}{4}(b - a)$$

Lako indukcijom dobivamo da je $diamI_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$. Znamo da niz $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ teži u 0, pa stoga i niz $(diamI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ teži u 0. Dokažimo da je c gomilište niza (x_i). Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da $diamI_n \to 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $diamI_n < \varepsilon$. Imamo $c \in I_n$ i $diamI_n < \varepsilon$ pa lema 1.7.3 povlači da je

$$I_n \subseteq K(c, \varepsilon).$$

Iz ovoga slijedi da je niz (x_i) beskonačan u $K(c, \varepsilon)$. Zaključak: c je gomilište niza (x_i).

□

Neka je X skup te neka je (x_n) niz u X. Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Tada za niz $(x_{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ (to jest za niz $x \circ a : \mathbb{N} \to X$) kažemo da je podniz niza (x_n).

Primjer 1.7.11. *Neka su (x_n) i (y_n) nizovi realnih brojeva definirani sa:*

$$x_n = \frac{1}{n} \ i \ y_n = \frac{1}{2n}.$$

Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$a(n) = 2n.$$

Očito je a strogo rastuća funkcija, te vrijedi $y_n = x_{2n} = x_{a_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle $(y_n) = (x_{a_n})$. Prema tome, (y_n) je podniz niza (x_n).

Lema 1.7.12. *Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq a_n$.*

Dokaz. Ovo dokazujemo indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \leq a_n$. Iz $a_n < a_{n+1}$ slijedi $n < a_{n+1}$. Stoga je $n + 1 \leq a_{n+1}$.

□

Propozicija 1.7.13. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je (x_n) niz u X koji teži prema $b \in X$. Tada svaki podniz od (x_n) teži prema b.*

Dokaz. Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija. Dokažimo da niz (x_{a_n}) teži prema b.
Neka je $\varepsilon > 0$. Budući da (x_n) teži prema b postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in K(b, \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$.
Neka je $n \geq n_0$. Prema prethodnoj lemi vrijedi $a_n \geq n$, pa je $a_n \geq n_0$. Stoga je $x_{a_n} \in K(b, \varepsilon)$.
Dakle, $x_{a_n} \in K(b, \varepsilon)$ za svaki $n \geq n_0$. Zaključak: Niz (x_{a_n}) teži prema b.

□

Primjer 1.7.14. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $x_n = (-1)^n$. *Neka je* (y_n) *niz u* $\mathbb{R}$ *definiran sa* $y_n = 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $y_n = x_{2n}$ *pa zaključujemo da je* (y_n) *podniz od* (x_n). *Niz* (y_n) *teži prema 1, no* (x_n) *ne teži prema 1, čak štoviše niz* (x_n) *nije ni konvergentan.*

Propozicija 1.7.15. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* (x_n) *niz u X, te neka je* $b \in X$. *Pretpostavimo da postoji podniz od* (x_n) *koji teži prema b. Tada je b gomilište niza* (x_n).

Dokaz. Neka je $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija tako da niz (x_{a_n}) teži prema b. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$x_{a_n} \in K(b, \varepsilon)$$

za svaki $n \geq n_0$. Želimo dokazati da je niz (x_n) beskonačan u $K(b, \varepsilon)$.
Neka je $m \in \mathbb{N}$. Odaberimo prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n \geq m$ i $n \geq n_0$. Tada je $a_n \geq n$, pa je $a_n > m$. Iz $n \geq n_0$ slijedi

$$x_{a_n} \in K(b, \varepsilon).$$

Dakle postoji $l \in \mathbb{N}, l \geq m$ tako da je $x_l \in K(b, \varepsilon)$ (ovdje smo uzeli da je $l = a_n$), što znači da je (x_n) beskonačan u $K(b, \varepsilon)$, pa je prema tome b gomilište od (x_n).

□

Propozicija 1.7.16. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* (x_i) *niz u X, te neka je b gomilište niza* (x_i). *Tada postoji podniz niza* (x_i) *koji teži prema b.*

Dokaz. Definiramo funkciju $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ induktivno. Neka je a_1 prirodan broj tako da je $x_{a_1} \in K(b, 1)$. Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali a_n. Budući da je b gomilište niza (x_i) postoji $m \geq 1 + a_n$ tako da je

$$x_m \in K(b, \frac{1}{n+1}).$$

Definiramo $a_{n+1} = m$. Na ovaj način smo induktivno definirali funkciju a. Uočimo da je $a_n < a_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, te da je

$$x_{a_n} \in K(b, \frac{1}{n}), \text{ za svaki n} \in \mathbb{N}.$$

Stoga je (x_{a_n}) podniz niza (x_i), a iz prethodne leme slijedi da (x_{a_n}) teži prema b.

□

Korolar 1.7.17. *Neka je* (X, d) *metrički prostor, neka je* (x_n) *niz u X. Tada* (x_n) *ima gomilište ako i samo ako* (x_n) *ima konvergentan podniz.* □

Korolar 1.7.18. *Svaki omeđen niz u* $\mathbb{R}$ *ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Prema teoremu 1.7.10 omeđen niz u $\mathbb{R}$ ima gomilište, pa prema korolaru 1.7.17 ima konvergentan podniz.

□

Primjer 1.7.19. *Neka je d diskretna metrika na* $\mathbb{N}$. *Neka je* (x_n) *niz u* $\mathbb{N}$ *definiran sa*

$$x_n = n, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tada je (x_n) *omeđen niz u* $(\mathbb{N}, d)$ *jer je* $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$, *a* $\mathbb{N}$ *je omeđen skup u* $(\mathbb{N}, d)$. *Naime, za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i za svaki* $r > 1$ *vrijedi da je* $K(n, r) = \mathbb{N}$.
Pretpostavimo da niz (x_n) *ima gomilište b. Tada postoji* $m \geq b + 1$ *takav da je*

$$x_m \in K(b, \frac{1}{2}).$$

No $K(b, \frac{1}{2}) = \{b\}$. *Prema tome* $x_m = b$, *to jest* $m = b$, *što je u kontradikciji sa* $m \geq b + 1$. *Dakle niz* (x_n) *nema gomilište, pa nema ni konvergentan podniz.*

Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka je (x_i) niz u $\mathbb{R}^n$. Neka su $(x_i^1)_{i\in\mathbb{N}}, ..., (x_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$ nizovi realnih brojeva takvi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x_i = (x_i^1, ..., x_i^n).$$

Za nizove $(x_i^1), ..., (x_i^n)$ kažemo da su **komponentni nizovi** od (x_i).

Propozicija 1.7.20. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, *neka je* (x_i) *niz u* $\mathbb{R}^n$, *te neka su* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Tada niz* (x_i) *teži prema n-torci* $(a_1, ..., a_n)$ *u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^n, d)$ *ako i samo ako komponentni nizovi realnih brojeva* $(x_i^1), ..., (x_i^n)$ *teže redom prema brojevima* $a_1, ..., a_n$.

Dokaz. Pretpostavimo da (x_i) teži prema $a = (a_1, ..., a_n)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $i \geq n_0$ vrijedi $d(x_i, a) < \varepsilon$. Neka je $i \geq n_0$. Imamo:

$$d(x_i, a) = d((x_i^1, ...x_i^n), (a_1, ..., a_n)) = \sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + ... + (x_i^n - a_n)^2}.$$

Uočimo sada sljedeće: ako su $u_1, ..., u_n \in \mathbb{R}$ onda je za svaki $j \in \{1, ..., n\}$

$$|u_j| = \sqrt{u_j^2} \leq \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}.$$

Stoga za svaki $j \in \{1, ..., n\}$ imamo

$$|x_i^j - a_j| \leq \sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + ... + (x_i^n - a_n)^2} < \varepsilon.$$

Dakle, za svaki $j \in \{1, ..., n\}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|x_i^j - a_j| < \varepsilon \text{ za svaki } i \geq n_0.$$

Zaključujemo da niz $(x_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ teži prema (a_j) za svaki $j \in \{1, ..., n\}$.

Pretpostavimo sada da nizovi $(x_i^1), ..., (x_i^n)$ teže redom prema brojevima $a_1, ..., a_n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je $j \in \{1, ..., n\}$. Budući da $(x_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ teži prema a_j postoji k_j takav da je

$$|x_i^j - a_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \text{ za svaki } i \geq k_j.$$

Neka je $N = max\{k_1, ..., k_n\}$. Tada za svaki $i \geq N$ vrijedi $i \geq k_1, ..., i \geq k_n$, pa je

$$|x_i^1 - a_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, ..., |x_i^n - a_n| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

iz čega slijedi

$$d(x_i, a) = \sqrt{(x_i^1 - a_1)^2 + ... + (x_i^n - a_n)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + ... + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Dakle $d(x_i, a) < \varepsilon$ za svaki $i \geq N$, pa zaključujemo da niz (x_i) teži prema a.

□

Napomena 1.7.21. *Neka je X skup, te neka je (x_n) niz u X. Neka je (y_n) podniz od (x_n), te neka je (z_n) podniz od (y_n). Tada je (z_n) podniz od (x_n).*
Naime, postoje strogo rastuće funkcije $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je $y_n = x_{a_n}$, te $z_n = y_{b_n}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$z_n = y_{b(n)} = x_{a(b(n))} = x_{(a \circ b)(n)},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $a \circ b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija imamo da je niz (z_n) podniz od (x_n).

Teorem 1.7.22. *Neka je (x_i) omeđen niz u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$, pri čemu je d euklidska metrika. Tada (x_i) ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja slijedi iz teorema 1.7.22. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka je (x_i) omeđen niz u $(\mathbb{R}^{n+1}, d)$. Tada je skup $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ omeđen u $(\mathbb{R}^{n+1}, d)$ pa postoji $M > 0$ takav da je $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq K((0, ..., 0), M)$, pa je

$$d((0, ..., 0), (x_i^1, ..., x_i^{n+1})) < M, \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga slijedi da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sqrt{(x_i^1)^2 + ... + (x_i^{n+1})^2} < M. \tag{1.12}$$

Stoga je $|x_i^1| < M, ..., |x_i^{n+1}| < M$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Iz ovoga slijedi da je

$$-M < x_i^{n+1} < M,$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$, pa je skup $\{x_i^{n+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ omeđen u $\mathbb{R}$. Dakle niz (x_i^{n+1}) je omeđen u $\mathbb{R}$.
Neka je (y_i) niz u $\mathbb{R}^n$ definiran sa $y_i = (x_i^1, ..., x_i^n)$. Tada prema 1.12 za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$d((0, ..., 0), y_i) = \sqrt{(x_i^1)^2 + ... + (x_i^n)^2} < M.$$

Dakle $y_i \in K((0, ..., 0), M)$. Prema tome, (y_i) je omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$.
Prema induktivnoj pretpostavci postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(y_{a(i)})$ konvergentan niz u $(\mathbb{R}^n, d)$.
Promotrimo niz $(x_{a(i)}^{n+1})$. On je podniz niza (x_i^{n+1}) koji je omeđen, pa je i on sam omeđen. Prema teoremu 1.7.22 taj niz ima konvergentan podniz, pa postoji strogo rastuća funkcija $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_{a(b(i))}^{n+1})$ konvergentan niz. Prema propoziciji 1.7.13 niz $(y_{a(b(i))})$ je konvergentan kao podniz niza $(y_{a(i)})$.
Neka je $c = a \circ b$. Tada je $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strogo rastuća funkcija, te imamo da su nizovi $(y_{c(i)})$ i $(x_{c(i)}^{n+1})$ konvergentni. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$y_{c(i)} = (x_{c(i)}^1, ..., x_{c(i)}^n).$$

Dakle $(x_{c(i)}^1), ..., (x_{c(i)}^n)$ su komponentni nizovi od $y_{c(i)}$ pa su prema propoziciji 1.7.20 i oni konvergentni. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ imamo

$$x_{c(i)} = (x_{c(i)}^1, ..., x_{c(i)}^{n+1}),$$

pa iz propozicije 1.7.20 slijedi da je niz $(x_{c(i)})$ konvergentan u $(\mathbb{R}^{n+1}, d)$. Jasno, $(x_{c(i)})$ je podniz od (x_i).

□

1.8 Potprostor metričkog prostora

Definicija 1.8.1. *Neka su* (X, d) *i* (Y, p) *metrički prostori takvi da je* $Y \subseteq X$*, te* $p(a, b) = d(a, b)$ *za svaki* $a, b \in Y$. *Tada za* (Y, p) *kažemo da je* ***potprostor*** *metričkog prostora* (X, d).

Uočimo sljedeće: Ako je (X, d) metrički prostor, te $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, onda postoji jedinstvena metrika p na Y takva da je (Y, p) potprostor od (X, d).

Obrazloženje:
Ako su p_1 i p_2 metrike na Y tako da je (Y, p_1) potprostor od (X, d) i (Y, p_2) potprostor od (X, d) onda su funkcije $p_1, p_2 : Y \times Y \to \mathbb{R}$ jednake jer za sve $a, b \in Y$ vrijedi

$$p_1(a, b) = d(a, b) = p_2(a, b).$$

S druge strane, ako definiramo funkciju $p : Y \times Y \to \mathbb{R}$ sa $p(a, b) = d(a, b)$ za sve $a, b \in Y$, onda je očito p metrika na Y, te imamo da je (Y, p) potprostor od (X, d).

Propozicija 1.8.2. *Neka je* (Y, p) *potprostor metričkog prostora* (X, d). *Neka je* $V \subseteq Y$. *Tada je V otvoren skup u* (Y, p) *ako i samo ako postoji otvoren skup U u* (X, d) *takav da je* $V = Y \cap U$.

Dokaz. Uočimo prije svega sljedeće: Ako je $y \in Y$ i $r > 0$ onda je $K(y, r; p) = Y \cap K(y, r; d)$. Naime,

$$\begin{aligned} x \in K(y, r; p) &\Leftrightarrow x \in Y, p(x, y) < r \\ &\Leftrightarrow x \in Y, d(x, y) < r \\ &\Leftrightarrow x \in Y \cap K(y, r; d). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je V otvoren u (Y, p). Tada za svaki $y \in V$ postoji $r_y > 0$ takav da je $K(y, r_y; p) \subseteq V$. Slijedi da je

$$V = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p).$$

Neka je $U = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d)$. Tada je U otvoren skup u (X, d) kao unija otvorenih skupova.
Imamo:

$$V = \bigcup_{y \in V} K(y, r_y; p) = \bigcup_{y \in V} (Y \cap K(y, r_y; d)) = Y \cap (\bigcup_{y \in V} K(y, r_y; d)) = Y \cap U$$

Pretpostavimo sada da postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$. Neka je $y \in V$. Tada je $y \in U$, pa postoji $r > 0$ takav da je $K(y, r; d) \subseteq U$. Iz ovoga slijedi:

$$Y \cap K(y, r; d) \subseteq Y \cap U,$$

to jest $K(y, r; p) \subseteq V$. Prema tome, V je otvoren u (Y, p).

$\square$

Poglavlje 2

Topološki prostori

2.1 Topologija, primjeri topologija

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup, te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijedi sljedeće:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$

3) *Ako su $U, V \in \mathcal{T}$ onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

*Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je **topologija** na skupu X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **topološki prostor**.*

Primjer 2.1.2. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$, te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na X.*

Primjer 2.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{T}_d$ familiju svih otvorenih skupova u (X, d). Tada je $\mathcal{T}_d$ topologija na X prema propoziciji 1.2.12. Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je **topologija inducirana metrikom** d.*

Primjer 2.1.4. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je **diskretna topologija** na X.*
*Nadalje, $\{\emptyset, X\}$ je također topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je **indiskretna topologija** na X.*

Primjer 2.1.5. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada je* $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.
Očito je $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$. *S druge strane, neka je* $S \in \mathcal{P}(X)$. *Tada je* $S \subseteq X$. *Neka je* $x \in S$. *Imamo* $K(x, \frac{1}{2}; d) = \{x\}$ *pa je očito* $K(x, \frac{1}{2}; d) \subseteq S$. *Dakle S je otvoren u* (X, d), *to jest* $S \in \mathcal{T}_d$. *Zaključak:* $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.
Drugim riječima, diskretna topologija na X je inducirana diskretnom metrikom na X.

Definicija 2.1.6. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Za* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je* ***metrizabilan*** *topološki prostor ako postoji metrika d na X koja inducira topologiju* $\mathcal{T}$, *to jest takva da je* $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Primjer 2.1.7. *Neka je X neprazan skup. Tada je* $(X, \mathcal{P}(X))$ *metrizabilan topološki prostor.*

Definicija 2.1.8. *Za topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je* ***Hausdorffov*** *ako za sve* $a, b \in X, a \neq b$ *postoje* $U, V \in \mathcal{T}$ *takvi da je* $a \in U, b \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$.

Propozicija 2.1.9. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *metrizabilan topološki prostor. Tada je* $(X, \mathcal{T})$ *Hausdorffov.*

Dokaz. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Neka su $a, b \in X, a \neq b$. Prema propoziciji 1.5.3 postoje otvoreni skupovi U,V u (X, d) takvi da je $a \in U, b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Slijedi da su $U, V \in \mathcal{T}_d$, pa su $U, V \in \mathcal{T}$. □

Napomena 2.1.10. *Ako je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $n \in \mathbb{N}$, *te* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, *onda je* $U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$.
Ovo dokazujemo indukcijom po n. Za $n = 1$ *tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki* $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $U_1, ..., U_{n+1} \in \mathcal{T}$. *Tada je*

$$U_1 \cap ... \cap U_{n+1} = (U_1 \cap ... \cap U_n) \cap U_{n+1}.$$

Prema induktivnoj pretpostavci je $U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$, *a znamo da je* $U_{n+1} \in \mathcal{T}$, *pa je stoga* $U_1 \cap ... \cap U_{n+1} \in \mathcal{T}$.

Je li svaki topološki prostor metrizabilan, to jest ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, mora li tada postojati metrika d na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$ (to jest takva da je $\mathcal{T}$ upravo familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d))?

Primjer 2.1.11. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor* $(X, \{\emptyset, X\})$ *nije metrizabilan.*
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji metrika d na X tako da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$. *Odaberimo* $a, b \in X$ *tako da je* $a \neq b$.
Neka je $r = d(a, b)$. *Tada je* $r > 0$ *jer je* $a \neq b$. *Neka je* $U = K(a, r)$. *Tada je U otvoren skup u metričkom prostoru* (X, d), *pa je* $U \in \mathcal{T}_d$. *Stoga je* $U \in \{\emptyset, X\}$, *pa je* $U = \emptyset$ *ili* $U = X$. *No* $U \neq \emptyset$ *jer* $a \in U$, *te* $U \neq X$ *jer* $b \notin U$. *Kontradikcija. Topološki prostor* $(X, \{\emptyset, X\})$ *nije metrizabilan.*

Primjer 2.1.12. *Neka je X skup koji ima barem dva elementa. Tada topološki prostor* $(X, \{\emptyset, X\})$ *očito nije Hausdorffov. Uočimo da ovo i propozicija 2.1.9 povlače da* $(X, \{\emptyset, X\})$ *nije metrizabilan.*

Neka je X neprazan skup, te neka su d i d' metrike na X ekvivalentne u smislu Lipschitza. Iz korolara 1.4.3 slijedi da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.
Naime, ako je $U \in \mathcal{T}_d$ onda je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d), pa korolar povlači da je otvoren i u (X, d'), što znači da je $U \in \mathcal{T}_{d'}$. Dakle $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$. Isto tako $\mathcal{T}_{d'} \subseteq \mathcal{T}_d$, pa imamo $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$.

Definicija 2.1.13. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, *te neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$. *Za* $\mathcal{T}_d$ *kažemo da je* ***euklidska topologija*** *na* $\mathbb{R}^n$.

Primjer 2.1.14. *Neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $\mathbb{R}$. *Tada je* $\langle 0, 1\rangle \in \mathcal{E}$, $\langle -\infty, 0\rangle \in \mathcal{E}$, *no* $[0, 1\rangle \notin \mathcal{E}$.

Definicija 2.1.15. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, te* $U \subseteq X$. *Za U kažemo da je otvoren skup u* $(X, \mathcal{T})$ *ako je* $U \in \mathcal{T}$.

2.2 Potprostor topološkog prostora

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Neka je

$$\rho = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Tada je ρ topologija na Y. Dokažimo to.

1) Imamo $\emptyset \in \rho$ jer je $\emptyset = Y \cap \emptyset$, a $\emptyset \in \mathcal{T}$. Isto tako, $X \in \mathcal{T}$, pa je $Y \cap X \in \rho$, a $Y \cap X = Y$.

2) Neka je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata iz ρ. Znači da za svaki $\alpha \in A$ postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ tako da je $V_\alpha = Y \cap U_\alpha$. Imamo
$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (Y \cap U_\alpha) = Y \cap (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha).$$
Iz činjenice da je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ slijedi da je $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in S$.

3) Neka su $V_1, V_2 \in \rho$. Tada postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $V_1 = Y \cap U_1$ i $V_2 = Y \cap U_2$. Stoga je
$$V_1 \cap V_2 = (Y \cap U_1) \cap (Y \cap U_2) = Y \cap (U_1 \cap U_2).$$
Budući da je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$, vrijedi da je $V_1 \cap V_2 \in \rho$.

Dakle ρ je topologija na Y. Za ρ kažemo da je **relativna topologija** na Y (određena s $\mathcal{T}$). Za (Y, ρ) kažemo da je **potprostor** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.

Propozicija 2.2.1. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Trebamo dokazati da je
$$\mathcal{T}_p = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}_d\}. \tag{2.1}$$
Neka je $V \in \mathcal{T}_p$. Tada je V otvoren skup u metričkom prostoru (Y, p). Prema propoziciji 1.8.2 postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = U \cap Y$. Očito je $U \in \mathcal{T}_d$.
Pretpostavimo sada da je $U \in \mathcal{T}_d$. Tada je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d), pa je $U \cap Y$ otvoren u (Y, p), to jest $U \cap Y \in \mathcal{T}_p$.
Zaključak: (2.1) vrijedi. Time je tvrdnja propozicije dokazana.

□

2.3 Neprekidne funkcije u topološkim prostorima

Definicija 2.3.1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Neka je $f : X \to Y$. Za funkciju f kažemo da je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ ako za svaki $V \in \mathcal{S}$ vrijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.*

Propozicija 2.3.2. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Neka je $f : X \to Y$. Tada je f neprekidna s obzirom na metrike p i q ako i samo ako je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna s obzirom na metrike p i q. Neka je $V \in \mathcal{T}_q$. To znači da je V otvoren skup u metričkom prostoru (Y, q). Prema propoziciji 1.3.5 vrijedi da je $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p), to jest $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_p$. Ovime smo dokazali da je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.
Pretpostavimo sada da je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T}_q$.To povlači da je za svaki otvoren skup V u (Y, q) skup $f^{-1}(V)$ otvoren u (X, p). Sada prema propoziciji 1.3.5 zaključujemo da je f neprekidna s obzirom na metrike p i q.

□

Primjer 2.3.3. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, neka je $y_0 \in Y$, te neka je $f : X \to Y$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = y_0, \text{ za svaki } x \in X.$$

Tada je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.
Neka je $V \in \mathcal{S}$. Ako je $y_0 \in V$, onda je $f^{-1}(V) = X$, a ako $y_o \notin V$ onda je $f^{-1}(V) = \emptyset$. U svakom slučaju vrijedi da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Dakle vrijedi da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$.

Primjer 2.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $id_x : X \to X$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}$.*
Naime, za svaki $V \subseteq X$ vrijedi $id_x^{-1}(V) = V$.

Propozicija 2.3.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{V})$ topološki prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, te neka je $g : Y \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na $\mathcal{S}$ i $\mathcal{V}$. Tada je funkcija $g \circ f$ neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{V}$.*

Dokaz. Uočimo prvo sljedeće: ako je $A \subseteq Z$ onda je

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

Naime, za $x \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(A) &\Leftrightarrow (g \circ f)(x) \in A \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) \in A \\ &\Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Neka je $W \in \mathcal{V}$. Prema dokazanom vrijedi

$$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)).$$

Budući da je g neprekidna, vrijedi $g^{-1}(W) \in \mathcal{S}$, a budući da je f neprekidna vrijedi da je $f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{T}$. Dakle, $(g \circ f)^{-1}(W) \in \mathcal{T}$.
Zaključak: $g \circ f$ je neprekidna funkcija.

□

2.4 Baza topologije

Definicija 2.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

2) *Svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ je unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, to jest ako je $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$.*

*Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je **baza topologije** $\mathcal{T}$.*

Primjer 2.4.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.*
Jasno je da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Neka je $U \in \mathcal{T}_d, U \neq \emptyset$. Tada je U otvoren u metričkom prostoru (X, d). Za svaki $x \in U$ postoji $r_x > 0$ tako da je $K(x, r_x) \subseteq U$. Vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x).$$

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Primjer 2.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

Propozicija 2.4.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ i za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$, te neka je $x \in U$. Tada postoji familija $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ tako da je $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$. Stoga je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$, pa postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in B_{\alpha_0}$. Očito je $B_{\alpha_0} \subseteq U$.

Pretpostavimo sada da za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U$. Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$. Za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B_x \subseteq U$. Vrijedi $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. Prema tome, $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$.

□

Uočimo sljedeće: Ako je X skup, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X, te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$, onda je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Naime, ako je $U \in \mathcal{T}_1$ onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$, za svaki $\alpha \in A$ vrijedi $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$. Stoga je $\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ (jer je $\mathcal{T}_2$ topologija), dakle $U \in \mathcal{T}_2$. Prema tome $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Analogno dobijemo da je $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, pa slijedi $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.

Propozicija 2.4.5. *Neka je X neprazan skup, te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X sa sljedećim svojstvima:*

1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$

2) *Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, te $x \in B_1 \cap B_2$, onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.

Dokaz. Jedinstvenost slijedi iz prethodne napomene. Dokažimo da postoji takva topologija. Neka je $\mathcal{T}$ familija svih podskupova U od X koji imaju sljedeće svojstvo:

Za svaki $x \in U$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U$.

Tvrdimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X, te da joj je $\mathcal{B}$ baza.

1) Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$. Da je $X \in \mathcal{T}$ slijedi iz svojstva (1) propozicije.

2) Neka je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata iz $\mathcal{T}$. Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Neka je $x \in \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Tada postoji $\alpha_0 \in A$ tako da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$. Stoga je $x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Prema tome, $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

3) Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$, pa postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $x \in B_2 \subseteq V$. Iz ovoga slijedi da je

$$x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V.$$

Prema svojstvu (2) iz propozicije postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Stoga je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$. Prema tome, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Dakle, $\mathcal{T}$ je topologija na X. Iz definicije od $\mathcal{T}$ je jasno da je $B \in \mathcal{T}$, za svaki $B \in \mathcal{B}$. Dakle $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Nadalje, iz definicije od $\mathcal{T}$ i propozicije 2.4.4 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

$\square$

2.5 Produktna topologija

Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori. Neka je

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}.$$

Vrijedi $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X \times Y$. Naime, za svaki $B \in \mathcal{B}$ vrijedi $B \subseteq X \times Y$, pa je $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq X \times Y$. S druge strane $X \times Y \in \mathcal{B}$, pa je $X \times Y \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$.
Uočimo da općenito vrijedi sljedeće:

Ako su $A, C \subseteq X$, te $B, D \subseteq Y$, onda je $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

To slijedi iz činjenice da za svaki $x \in X$ i $y \in Y$ vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$$
$$\Updownarrow$$
$$(x, y) \in A \times B \text{ i } (x, y) \in C \times D$$

$$\Updownarrow$$
$$x \in A \text{ i } y \in B \text{ i } x \in C \text{ i } y \in D$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in A \cap C \text{ i } y \in B \cap D$$
$$\Updownarrow$$
$$(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Tada je $B_1 = U_1 \times V_1, B_2 = U_2 \times V_2$, gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ i $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Imamo

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2),$$

pa je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Iz ovoga očito slijedi:

Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ (uzmemo $B_3 = B_1 \cap B_2$).

Iz propozicije 2.4.5 slijedi da postoji jedinstvena topologija $\mathcal{R}$ na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Za $\mathcal{R}$ kažemo da je **produktna topologija određena topologijama** $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$, a za topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ kažemo da je **produkt** topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$.

Propozicija 2.5.1. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka je $W \subseteq X \times Y$. Tada je $W \in \mathcal{R}$ ako i samo ako za svaki $z \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da je $z \in U \times V \subseteq W$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Pretpostavimo da je $W \in \mathcal{R}$. Neka je $z \in W$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{R}$ propozicija 2.4.4 povlači da postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $z \in B \subseteq W$. Dakle postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da je $z \in U \times V \subseteq W$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $z \in W$ postoje $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$ takvi da je

$$z \in U \times V \subseteq W.$$

Ovo znači da za svaki $z \in W$ postoji $B_z \in \mathcal{B}$ takav da je $z \in B_z \subseteq W$. Tada je $W = \bigcup_{z \in W} B_z$.

Za svaki $z \in W$ vrijedi $B_z \in \mathcal{R}$ (jer je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}$). Stoga je $\bigcup_{z \in W} B_z \in \mathcal{R}$, to jest $W \in \mathcal{R}$.

□

Propozicija 2.5.2. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Neka su $p : X \times Y \to X$ i $q : X \times Y \to Y$ projekcije (to jest $p(x, y) = x, q(x, y) = y$). Tada je funkcija p neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$, a funkcija q je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}$. Tada je $p^{-1}(U) = U \times Y$. Naime,

$$(x, y) \in p^{-1}(U) \Leftrightarrow p(x, y) \in U \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow (x, y) \in U \times Y.$$

Vrijedi $U \times Y \in \mathcal{R}$ jer je $U \in \mathcal{T}$ i $Y \in \mathcal{S}$. Dakle, $p^{-1}(U) \in \mathcal{R}$ za svaki $U \in \mathcal{T}$. Zaključujemo da je funkcija p neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$.
Analogno dobivamo da je q neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$.

□

Propozicija 2.5.3. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Neka je $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{p(x_1, x_2), q(y_1, y_2)\}, \; x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y.$$

Tada je d metrika na $X \times Y$.

Dokaz. Provjerimo da je d metrika:

1) Očito je $d(a, b) \geq 0$, za sve $a, b \in X \times Y$. Nadalje, očito je $d(a, b) = 0$ ako je $a = b$. S druge strane , pretpostavimo da je $d(a, b) = 0$ za neke $a, b \in X \times Y$. Imamo $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, gdje su $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$. Dakle vrijedi da je

$$max\{p(x_1, x_2), q(y_1, y_2)\} = 0.$$

Prema tome, $p(x_1, x_2) = 0$ i $q(y_1, y_2) = 0$, što povlači da je $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$, pa je $a = b$.

2) Jasno je da je $d(a, b) = d(b, a)$ za sve $a, b \in X \times Y$.

3) Neka su $a, b, c \in X \times Y$. Tada je $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2), c = (x_3, y_3)$, gdje su $x_1, x_2, x_3 \in X$ i $y_1, y_2, y_3 \in Y$. Znamo da je $d(a, b) = max\{p(x_1, x_2), q(y_1, y_2)\}$

   a) slučaj: $d(a, b) = p(x_1, x_2)$
   Imamo $d(a, b) = p(x_1, x_2) \leq p(x_1, x_3) + p(x_3, x_2) \leq d(a, c) + d(b, c)$

   b) slučaj: $d(a, b) = q(y_1, y_2)$
   Analogno dobivamo $d(a, b) = q(y_1, y_2) \leq q(y_1, y_3) + q(y_3, y_2) \leq d(a, c) + d(b, c)$

   Dakle, $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$.

Zaključak: d je metrika na $X \times Y$.

□

Teorem 2.5.4. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, te neka je d metrika na $X \times Y$ definirana kao u prethodnoj propoziciji. Tada je $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_p, V \in \mathcal{T}_q\}$. Želimo dokazati da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.
Uočimo prije svega sljedeće: Ako je $x \in X$ i $y \in Y$, te $r > 0$, onda je

$$K((x,y), r; d) = K(x, r; p) \times K(y, r; q). \tag{2.2}$$

Neka je $a \in K((x,y), r; d)$. Tada je $a = (x_1, y_1), x_1 \in X, y_1 \in Y$, te je $d((x_1, y_1), (x, y)) < r$. To povlači da je

$$max\{p(x_1, x), q(y_1, y)\} < r,$$

pa je $p(x_1, x) < r$ i $q(y_1, y) < r$, što znači da je $x_1 \in K(x, r; p)$ i $y_1 \in K(y, r; q)$. Stoga je

$$a \in K(x, r; p) \times K(y, r; q).$$

Obratno, ako je $a \in K(x, r; p) \times K(y, r; q)$, onda je $a = (x_1, y_1)$, gdje je $x_1 \in K(x, r; p), y_1 \in K(y, r; q)$. Slijedi da je $p(x_1, x) < r$ i $q(y_1, y) < r$, pa je

$$max\{p(x_1, x), q(y_1, y)\} < r,$$

što povlači $d((x_1, y_1), (x, y)) < r$, to jest

$$a \in K((x, y), r; d).$$

Time je dokazano da vrijedi (2.2).
Dokažimo sada da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$.

(1) Najprije provjerimo da li je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$. Neka je $U \in \mathcal{T}_p$ i $V \in \mathcal{T}_q$. Želimo dokazati da je $U \times V \in \mathcal{T}_d$, to jest da je $U \times V$ otvoren skup u $(X \times Y, d)$. Neka je $a \in U \times V$. Tada je $a = (x, y)$, gdje je $x \in U$ i $y \in V$. Budući da je $x \in U$ te U otvoren skup u metričkom prostoru (X, p), postoji $r > 0$ tako da je $K(x, r; p) \subseteq U$.
Isto tako, činjenica da je $y \in V$ te da je V otvoren u metričkom prostoru (Y, q) povlače da postoji $s > 0$ tako da je $K(y, s; q) \subseteq V$. Neka je $t = min\{r, s\}$. Tada je

$$K(x, t; p) \subseteq K(x, r; p) \subseteq U \text{ i } K(y, t; p) \subseteq K(y, s; p) \subseteq V,$$

pa je

$$K(x, t; p) \times K(y, t; q) \subseteq U \times V.$$

Prema (2.2) vrijedi da je $K((x, y), t; d) \subseteq U \times V$, to jest $K(a, t; d) \subseteq U \times V$. Dakle $U \times V$ je otvoren u $(X \times Y, d)$.

(2) Tvrdimo da za svaki $W \in \mathcal{T}_d$ i svaki $a \in W$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $a \in B \subseteq W$. Neka je $W \in \mathcal{T}_d$ i $a \in W$. Tada je W otvoren skup u $(X \times Y, d)$ pa slijedi da postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r; d) \subseteq W. \tag{2.3}$$

Imamo $a = (x, y), x \in X, y \in Y$. Prema (2.2) i (2.3) vrijedi

$$K(x, r; p) \times K(y, r; q) \subseteq W.$$

Neka je $B = K(x, r; p) \times K(y, r; q)$. Tada je $a \in B \subseteq W$, a očito je $B \in \mathcal{B}$.

Iz (1) i (2) i propozicije 2.4.4 slijedi da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_d$. Time je dokazana tvrdnja teorema.

□

Korolar 2.5.5. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori, te neka je $(X \times Y, \mathcal{R})$ njihov produkt. Pretpostavimo da su $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ metrizabilni. Tada je i $(X \times Y, \mathcal{R})$ metrizabilan.*

Dokaz. Budući da su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ metrizabilni, postoje metrike p na X i q na Y takve da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_p$ i $\mathcal{T} = \mathcal{S}_q$. Neka je d metrika na $X \times Y$ definirana kao u propoziciji 2.5.3. Tada je prema teoremu 2.5.4 $(X \times Y, \mathcal{T}_d)$ produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T}_p)$ i $(Y, \mathcal{T}_q)$, to jest produkt topoloških prostora $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$. Stoga je $\mathcal{R} = \mathcal{T}_d$. Dakle topološki prostor $(X \times Y, \mathcal{R})$ je metrizabilan.

□

Primjer 2.5.6. *Neka je $\mathcal{E}_1$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$, te neka je $\mathcal{E}_2$ euklidska topologija na $\mathbb{R}^2$. Tada je $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}_2)$ produkt topoloških prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$. Dokažimo to.*
Neka je p euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je d metrika na $\mathbb{R}^2$ definirana sa

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{p(x_1, x_2), p(y_1, y_2)\}.$$

Prema teoremu 2.5.4 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_d)$ je produkt topoloških prostora $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_p)$, to jest produkt $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{E}_1)$.
Preostaje dokazati da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{E}_2$.
Neka je d_E euklidska metrika na $\mathbb{R}^2$. Tada je d_E ekvivalentna u smislu Lipschitza metrici d_∞ na $\mathbb{R}^2$. Iz definicije od d slijedi

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

pa je $d = d_\infty$.
Dakle, metrike d i d_E su ekvivalentne u smislu Lipschitza, pa slijedi da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d_E}$ (korolar 1.4.3). Zaključak: $\mathcal{T}_d = \mathcal{E}_2$.

Propozicija 2.5.7. *Neka su* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori, te neka je* $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{S}$. *Pretpostavimo da je* $f : X \to Y$ *funkcija takva da je* $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, *za svaki* $B \in \mathcal{B}$. *Tada je f neprekidna s obzirom na* $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

Dokaz. Neka je $V \in \mathcal{S}$. želimo dokazati da je $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{S}$ postoji $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$ tako da je $V = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$. Vrijedi:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha)$$

Budući da je $f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T}$ za svaki $\alpha \in A$, te da je $\mathcal{T}$ topologija, imamo da je $\bigcup_{\alpha \in A} f^{-1}(B_\alpha) \in \mathcal{T}$, pa je i $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$.
Zaključak: f je neprekidna s obzirom na $\mathcal{T}, \mathcal{S}$.

□

Propozicija 2.5.8. *Neka su* $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori, te neka je* $(X \times Y, \mathcal{R})$ *njihov produkt. Neka su* $p : x \times Y \to X$ *i* $q : X \times Y \to Y$ *projekcije na prvu, odnosno drugu koordinatu. Nadalje, neka je* $(Z, \mathcal{W})$ *topološki prostor, te* $f : Z \to X \times Y$ *funkcija. Tada je f neprekidna s obzirom na* $\mathcal{W}, \mathcal{R}$ *ako i samo ako je* $p \circ f$ *neprekidna s obzirom na* $\mathcal{W}, \mathcal{T}$, *te* $q \circ f$ *neprekidna s obzirom na* $\mathcal{W}, \mathcal{S}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f neprekidna. Za funkcije p i q znamo da su neprekidne (prema propoziciji 2.5.2). Stoga su i $p \circ f$ i $q \circ f$ neprekidne kao kompozicije neprekidnih funkcija. Neka je $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{T}, V \in \mathcal{S}\}$. Znamo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{R}$. Da bismo dokazali da je f neprekidna s obzirom na $\mathcal{W}, \mathcal{R}$ dovoljno je dokazati, prema prethodnoj propoziciji, da je

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{W} \text{ za svaki } B \in \mathcal{B}.$$

Neka su $U \in \mathcal{T}$ i $V \in \mathcal{S}$. Tada je:

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z \mid f(z) \in U \times V\} = \\ &= \{z \in Z \mid p(f(z)) \in U \text{ i } g(f(z)) \in V\} = \\ &= \{z \in Z \mid (p \circ f)(z) \in U\} \cap \{z \in Z \mid (q \circ f)(z) \in V\} = \\ &= (p \circ f)^{-1}(U) \cap (q \circ f)^{-1}(V) \end{aligned}$$

Budući da su $p \circ f$ i $q \circ f$ neprekidne funkcije vrijedi:

$$(p \circ f)^{-1}(U) \in \mathcal{W} \text{ i } (q \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{W}.$$

Prema tome i skup $f^{-1}(U \times V)$ je, kao presjek ova dva skupa, element od $\mathcal{W}$. Time smo dokazali da je f neprekidna.

□

2.6 Nizovi u topološkom prostoru

Definicija 2.6.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je (x_n) niz u X, te $a \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži ili konvergira prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni skup U u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $a \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$, za svaki $n \geq n_0$.*

Propozicija 2.6.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X, te $a \in X$. Tada niz (x_n) teži prema a u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako (x_n) teži prema a u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz propozicije 1.5.4 i prethodne definicije.

□

Definicija 2.6.3. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda za a kažemo da je limes niza (x_n) ako $x_n \to a$.*

Primjer 2.6.4. *Neka je X neprazan skup, neka je (x_n) bilo koji niz u X, te a bilo koji element od X. Tada niz (x_n) konvergira prema a u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.*

Napomena 2.6.5. *Iz ovog primjera zaključujemo da limes niza u topološkom prostoru ne mora biti jedinstven.*

Propozicija 2.6.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor. Neka je (x_n) niz u X, te neka su $a, b \in X$ takvi da $x_n \to a$ i $x_n \to b$. Tada je $a = b$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $a \neq b$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov, postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U, b \in V, U \cap V = \emptyset$.
Iz $x_n \to a$ i $a \in U$ slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.
Iz $x_n \to b$ i $b \in V$ slijedi da postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x_n \in U$ za svaki $n \geq m_0$.
Neka je $n = max\{n_0, m_0\}$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$, pa je $x_n \in U$ i $x_n \in V$. No ovo je u kontradikciji s time da je $U \cap V = \emptyset$. Dakle, $a = b$.

□

Definicija 2.6.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $a \in X$, te neka je $U \in \mathcal{T}$ takav da je $a \in U$. Tada za U kažemo da je **okolina točke a** u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$, onda $x_n \to a$ ako i samo ako za svaku okolinu U točke a postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.

Definicija 2.6.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Za a kažemo da je* ***gomilište*** *niza (x_n) ako je niz (x_n) beskonačan u svakoj okolini od a u $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 2.6.9. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Tada je a gomilište niza (x_n) u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je a gomilište niza (x_n) u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Slijedi direktno iz propozicije 1.7.3.

□

Propozicija 2.6.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $a \in X$. Pretpostavimo da $x_d \to a$. Tada je a gomilište niza (x_n).*

Dokaz. Neka je U okolina od a u $(X, \mathcal{T})$. Želimo pokazati da je niz (x_n) beskonačan u U. Znamo da $x_n \to a$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$. Ovo znači da skup $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ sadrži skup $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.
Zaključak: niz (x_n) je beskonačan u U. Time je dokazano da je a gomilište od (x_n).

□

Poglavlje 3

Kompaktnost i uniformna metrika

3.1 Uniformna metrika

Propozicija 3.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je S neprazan omeđen skup u (X, d). Tada je $\{d(x, y) \mid x, y \in S\}$ odozgo omeđen skup u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Budući da je S omeđen postoje $x_0 \in X$ i $r_0 > 0$ takvi da je $S \subseteq K(x_0, r_0)$. Neka su $x, y \in S$. Tada je $d(x, y) \leq d(x_0, y) + d(x_0, x) \leq r_0 + r_0$. Dakle, $d(x, y) < 2r_0$ za svaki $x, y \in S$. Time je dokazana tvrdnja propozicije.

□

Definicija 3.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, S skup te $f : S \to X$. Za funkciju f kažemo da je omeđena (s obzirom na metriku d) ako je slika funkcije* ($\operatorname{Im} f$) *omeđen skup u metričkom prostoru (X, d).*

Propozicija 3.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je S skup. Neka su $f, g : S \to X$ funkcije omeđene s obzirom na metriku d. Tada je skup $\{d(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$ odozgo omeđen u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Prema propoziciji 1.6.3 skup $f(S) \cup g(S)$ je omeđen u (X, d). Iz propozicije 3.1.1 slijedi da je skup $\{d(x, y) \mid x, y \in f(S) \cup g(S)\}$ odozgo omeđen u $\mathbb{R}$. No $\{d(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$ je podskup ovog skupa, pa je stoga i on odozgo omeđen u $\mathbb{R}$.

□

Propozicija 3.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ te $r > 0$. Tada je*

$$diam K(x_0, r) \leq 2r.$$

Dokaz. Neka su $x, y \in K(x_0, r)$. Tada je

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(y, x_0) < 2r.$$

Dakle, $d(x, y) < 2r$ za sve $x, y \in K(x_0, r)$. Znamo da je $diamK(x_0, r)$ supremum skupa

$$\{d(x, y) \mid x, y \in K(x_0, r)\}.$$

Prema pokazanom, broj 2r je gornja međa ovog skupa, pa je stoga

$$diamK(x_0, r) \leq 2r.$$

□

Definicija 3.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor, te S neprazan skup. Označimo s $B(S, (X, d))$ skup svih funkcija sa S u X koje su omeđene s obzirom na metriku d. Neka je $p : B(S, (X, d)) \times B(S, (X, d)) \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$p(f, g) = sup\{d(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$$

*Za p kažemo da je **uniformna metrika** na skupu $B(S, (X, d))$ određena metrikom d.*

Napomena 3.1.6. *Funkcija p je zaista metrika na skupu $B(S, (X, d))$. Dokažimo to.*

Dokaz. Neka su $f, g \in B(S, (X, d))$. Jasno je da je $p(f, g) > 0$. Nadalje, ako je $f = g$ onda je $p(f, g) = sup\{0\} = 0$. S druge strane, ako je $p(f, g) = 0$ to znači da je 0 supremum skupa $\{d(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$. Stoga za svaki $s \in S$ vrijedi $d(f(s), g(s)) \leq 0$. Dakle za svaki $s \in S$ vrijedi $d(f(s), g(s)) = 0$, to jest $f(s) = g(s)$. Prema tome, $f = g$.
Očito je $p(f, g) = p(g, f)$ za svaki $f, g \in B(S, (X, d))$. Neka su $f, g, h \in B(S, (X, d))$. Neka je $s \in S$. Tada je

$$d(f(s), g(s)) \leq d(f(s), h(s)) + d(h(s), g(s)) \leq p(f, h) + p(h, g)$$

Dakle $d(f(s), g(s)) \leq p(f, h) + p(h, g)$. Ovo znači da je broj $p(f, h) + p(h, g)$ gornja međa skupa $\{d(f(s), g(s)) \mid s \in S\}$. Tada je supremum toga skupa manji ili jednak od $p(f, h) + p(h, g)$. Dakle $p(f, g) \leq p(f, h) + p(h, g)$. Ovim smo dokazali da je p metrika na $B(S, (X, d))$.

□

3.2 Kompaktni metrički prostori

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za (X, d) kažemo da je **kompaktan metrički prostor** ako svaki niz u (X, d) ima konvergentan podniz.*

Primjer 3.2.2. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada $(\mathbb{R}, d)$ nije kompaktan metrički prostor. Naime, niz (x_n) definiran sa $x_n = n$ nema konvergentan podniz.*

Definicija 3.2.3. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je **omeđen** ako je skup X omeđen u metričkom prostoru (X, d).*

Definicija 3.2.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je **potpuno omeđen** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je*

$$X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Propozicija 3.2.5. *Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor. Tada je (X, d) omeđen.*

Dokaz. Uzmimo $\varepsilon > 0$ (na primjer $\varepsilon = 1$). Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

Jasno je da su skupovi $K(x_1, \varepsilon), ..., K(x_n, \varepsilon)$ omeđeni u (X, d), pa stoga korolar 1.6.4 povlači da je X omeđen u (X, d). Dakle (X, d) je omeđen metrički prostor.

□

Primjer 3.2.6. *Neka je X beskonačan skup, te neka je d diskretna metrika na X. Tada je (X, d) omeđen metrički prostor jer za svaki $x \in X$ vrijedi $K(x, 2) = X$.*

Pretpostavimo da je (X, d) potpuno omeđen. Tada za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je

$$X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon).$$

No za svaki $x \in X$ vrijedi $K(x, \varepsilon) = \{x\}$. Prema tome $X = \{x_1\} \cup ... \cup \{x_n\}$, to jest $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je X beskonačan. Prema tome, (X, d) nije potpuno omeđen.

Teorem 3.2.7. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada je (X, d) potpuno omeđen.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da (X, d) nije potpuno omeđen. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da ne postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je $X = K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon)$. Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, ..., x_n \in X$ vrijedi $K(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup K(x_n, \varepsilon) \subsetneq X$. Odaberimo točku $b \in X$. Definirajmo niz (x_n) induktivno na sljedeći način:

1) $x_1 = b$

2) Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali $x_1, ..., x_n$. Tada postoji $y \in X$ takav da $y \notin \bigcup_{1 \le i \le n} K(x_i, \varepsilon)$. Definiramo $x_{n+1} = y$.

Na ovaj način smo definirali niz (x_n) koji ima svojstvo da $x_{n+1} \notin K(x_i, \varepsilon)$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$. Iz ovoga slijedi da za sve $i, j \in \mathbb{N}, i < j$ vrijedi

$$d(x_i, x_j) \ge \varepsilon. \tag{3.1}$$

Budući da je (X, d) kompaktan, niz (x_n) ima konvergentan podniz.
Postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(x_{a(n)})$ konvergentan. Stoga je taj niz i Cauchyjev, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \ge n_0$ vrijedi

$$d(x_{a(n)}, x_{a(m)}) < \varepsilon.$$

Odaberimo n i m takve da je $n_0 \le n < m$. Neka je $i = a(n)$, $j = a(m)$. Tada je $i < j$ i $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. No to je u kontradikciji s 3.1.
Zaključak: (X, d) je potpuno omeđen.

□

3.3 Kompaktni topološki prostori

Definicija 3.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ tako da je*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X.$$

*Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Primjer 3.3.2. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{U} = \{\langle -n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.*

Definicija 3.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **kompaktan** topološki prostor ako se svaki otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ može reducirati na konačan pokrivač, to jest ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ tako da je*

$$X = U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Primjer 3.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, pri čemu je $\mathcal{T}$ konačna familija (skup). Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor.*
Naime, ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ onda je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, što znači da je $\mathcal{U}$ konačna familija. Dakle $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\}$, gdje su $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$. Jasno je da je $U_1 \cup ... \cup U_n = X$, pa zaključujemo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.

Primjer 3.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, pri čemu je X konačan skup. Tada je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan.*
Naime, činjenica da je X konačan povlači da je $\mathcal{T}$ konačan, pa tvrdnja slijedi iz prethodnog primjera.

Teorem 3.3.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Tada svaki niz u X ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X. Pretpostavimo da (x_n) nema gomilište u $(X, \mathcal{T})$.
Neka je $a \in X$ proizvoljna točka. Tada a nije gomilište niza (x_n), pa postoji okolina U_a od a takva da niz (x_n) nije beskonačan u U_a. To znači da postoji $n_a \in \mathbb{N}$ takav da $x_m \notin U_a$ za svaki $m \geq n_a$.
Neka je

$$\mathcal{U} = \{U_a \mid a \in X\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan postoje $k \in \mathbb{N}$ i $a_1, ..., a_k \in X$ takvi da je

$$U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_k} = X.$$

Neka je $m = max\{n_{a_1}, ..., n_{a_k}\}$. Tada je

$$m \geq n_{a_1}, ..., m \geq n_{a_k}$$

pa slijedi da

$$x_m \notin U_{a_1}, ..., x_m \notin U_{a_k}.$$

Stoga $x_m \notin U_{a_1} \cup ... \cup U_{a_k}$, to jest $x_m \notin X$. Kontradikcija.
Zaključak: (x_n) ima gomilište u $(X, \mathcal{T})$.

□

Definicija 3.3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d) ako je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren u metričkom prostoru (X, d), te ako je*

$$\bigcup_{u \in \mathcal{U}} U = X.$$

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d) ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.

Korolar 3.3.8. *Neka je (X, d) metrički prostor koji ima svojstvo da se svaki otvoreni pokrivač od (X, d) može reducirati na konačan pokrivač. Tada je (X, d) kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X. Prema pretpostavci korolara topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ je kompaktan. Prema teoremu 3.3.6 postoji $a \in X$ tako da je a gomilište od (x_n) u $(X, \mathcal{T}_d)$. Tada je a gomilište od (x_n) i u metričkom prostoru (X, d). Prema propoziciji 1.7.16 postoji podniz od (x_n) koji konvergira prema a. Ovime smo pokazali da svaki niz u (X, d) ima konvergentan podniz.
Zaključak: (X, d) je kompaktan.

□

Definicija 3.3.9. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od (X, d). Neka je $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$. Za λ kažemo da je **Lebesgueov broj** pokrivača $\mathcal{U}$ ako za svaki neprazan podskup A od X takav da je diamA $< \lambda$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $A \subseteq U$.*

Primjer 3.3.10. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je $\mathcal{U} = \{\langle -\infty, 1\rangle, \langle 0, \infty\rangle\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od $(\mathbb{R}, d)$ te je 1 njegov Lebesgueov broj. Dokažimo to.*
Neka je A neprazan podskup od $\mathbb{R}$ tako da je diamA < 1. Imamo 2 slučaja:

1) *Za svaki $x \in A$ vrijedi $x < 1$. Tada je očito $A \subseteq \langle -\infty, 1\rangle$.*

2) *Postoji $a \in A$ tako da je $a \geq 1$. Neka je $x \in A$. Tvrdimo da je $x > 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada imamo:*
$$x \leq 0 < 1 \leq a \Rightarrow 1 \leq a - x$$
No $a - x = |a - x|$, pa je $|x - a| \geq 1$, to jest $d(a, x) \geq 1$. No iz $a, x \in A$ slijedi da je
$$d(a, x) \leq diamA < 1.$$
Kontradikcija. Dakle $x > 0$ za svaki $x \in A$. To znači da je $A \subseteq \langle 0, \infty\rangle$.

U svakom slučaju postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $A \subseteq U$. Prema tome, 1 je Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$.

Teorem 3.3.11. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Tada $\mathcal{U}$ ima Lebesgueov broj.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki $\lambda > 0$ vrijedi da λ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$. Posebno, ako je $n \in \mathbb{N}$, onda $\frac{1}{n}$ nije Lebesgueov broj od $\mathcal{U}$, pa postoji neki neprazan podskup A_n od X takav da je $diam A_n < \frac{1}{n}$, te takav da nije sadržan ni u jednom članu od $\mathcal{U}$.
Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberemo $x_n \in A_n$. Ovako smo dobili niz (x_n) u X. Budući da je (X, d) kompaktan postoji $a \in X$ takav da je a gomilište niza (x_n).
Budući da je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d) postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $a \in U$. Iz činjenice da je U otvoren skup, slijedi da postoji $r > 0$ tako da je $K(a, r) \subseteq U$.
Neka je $N \in \mathbb{N}$ takav da je $N > \frac{2}{r}$. Budući da je a gomilište od (x_n) postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \geq N$ i $x_n \in K(a, \frac{r}{2})$.
Iz $n \geq N$ slijedi:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}, \frac{1}{N} < \frac{r}{2}, \text{ pa je } \frac{1}{n} < \frac{r}{2}.$$

Sada iz $diam A_n < \frac{1}{n}$ slijedi $diam A_n < \frac{r}{2}$. Tvrdimo da je $A_n \subseteq K(a, r)$.
Iz $x_n \in K(a, \frac{r}{2})$ slijedi da je $d(x_n, a) < \frac{r}{2}$, a iz $diam A_n < \frac{r}{2}$ slijedi da je $d(x_n, x) < \frac{r}{2}$, za svaki $x \in A_n$. Iz ovoga slijedi da je

$$d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x_n, x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Dakle, $A_n \subseteq K(a, r)$, a $K(a, r) \subseteq U$, pa je i $A_n \subseteq U$. Kontradikcija.

□

Teorem 3.3.12. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan ako i samo ako se svaki otvoreni pokrivač od (X, d) može reducirati na konačan pokrivač.*

Dokaz. Ako je (X, d) metrički prostor u kojem se svaki otvoreni pokrivač može reducirati na konačan pokrivač onda je (X, d) kompaktan prema korolaru 3.3.8.
Pretpostavimo da je (X, d) kompaktan metrički prostor. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od (X, d). Želimo dokazati da se $\mathcal{U}$ može reducirati na konačan pokrivač.
Prena prethodnom teoremu $\mathcal{U}$ ima Lebesgueov broj, to jest postoji $\lambda > 0$ tako da je λ Lebesgueov broj za $\mathcal{U}$. Prema teoremu 3.2.7 metrički prostor (X,d) je potpuno omeđen. Stoga postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, ..., x_n \in X$ takvi da je

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \frac{\lambda}{3}).$$

Neka je $i \in \{1, ..., n\}$. Prema propoziciji 3.1.4 vrijedi

$$diam K(x_i, \frac{\lambda}{3}) \leq \frac{2\lambda}{3} < \lambda.$$

Stoga postoji $U_i \in \mathcal{U}$ tako da je $K(x_i, \frac{\lambda}{3}) \subseteq U_i$. Slijedi:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \frac{\lambda}{3}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Time je tvrdnja teorema dokazana.

□

Korolar 3.3.13. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je (X, d) kompaktan metrički prostor ako i samo ako je $(X, \mathcal{T}_d)$ kompaktan topološki prostor.*

□

3.4 Uniformna konvergencija

Definicija 3.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $F \subseteq X$. Za F kažemo da je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ ako je $X \setminus F$ otvoren, to jest ako je $X \setminus F \in \mathcal{T}$.*

Propozicija 3.4.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je (x_n) niz u F, te $a \in X$ tako da vrijedi $x_n \to a$. Tada je $a \in F$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $a \notin F$. Tada je $a \in X \setminus F$. Dakle $X \setminus F$ je okolina od a, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$x_n \in X \setminus F, \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je (x_n) niz u F. Prema tome, $a \in F$.

□

Korolar 3.4.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je F zatvoren skup u (X, d). Pretpostavimo da je (x_n) niz u F, te $a \in X$, tako da vrijedi $x_n \to a$. Tada je $a \in F$.*

Dokaz. Iz $x_n \to a$ u (X,d) slijedi da $x_n \to a$ u $(X, \mathcal{T}_d)$. Nadalje, iz činjenice da je F zatvoren u (X, d) slijedi da je $X \setminus F$ otvoren u (X, d), pa je otvoren i u (X, T_d). Stoga je F zatvoren u $(X, \mathcal{T}_d)$. Iz prethodne propozicije slijedi da je $a \in F$.

□

Propozicija 3.4.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $F \subseteq X$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće: Kad god je (x_n) niz u F te $a \in X$ i $x_n \to a$, onda je $a \in F$. Tada je F zatvoren.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada F nije zatvoren, pa $X \setminus F$ nije otvoren. Tada postoji $a \in X \setminus F$ za koji ne možemo naći $r > 0$ tako da je $K(a, r) \subseteq X \setminus F$.
Stoga za svaki $r > 0$ vrijedi $K(a, r) \cap F \neq \emptyset$.
Posebno za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $K(a, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$ pa postoji $x_n \in F$ tako da je $x_n \in K(a, \frac{1}{n})$.
Tada je

$$d(x_n, a) < \frac{1}{n}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa iz leme 1.5.7 slijedi da $x_n \to a$. No (x_n) je niz u F pa prema pretpostavci teorema vrijedi $a \in F$. Kontradikcija. Prema tome F je zatvoren.

□

Primjer 3.4.5. *Neka je $S = [0, 1]$, te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je p uniformna metrika na skupu $B(S, (\mathbb{R}, d))$ određena metrikom d. Neka su $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa*

$$f(x) = x \text{ i } g(x) = 0, \text{ za svaki } x \in [0, 1].$$

Tada je $f(S) = [0, 1]$ i $g(S) = \{0\}$. Očito su f(S) i g(S) omeđeni skupovi u $(\mathbb{R}, d)$. Dakle, f i g su omeđene funkcije s obzirom na metriku d. Prema tome, $f, g \in B(S, (\mathbb{R}, d))$. Imamo:

$$p(f, g) = sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in [0, 1]\} =$$

$$= sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0, 1]\} =$$

$$= sup\{|x - 0| \mid x \in [0, 1]\} =$$

$$= sup\{x \mid x \in [0, 1]\} =$$

$$= sup[0, 1] = 1$$

Dakle p(f,g)=1.
Nadalje, neka je $h : [0, 1] \to \mathbb{R}, h(x) = 1$, za svaki $x \in [0, 1]$. Očito je $h \in B(S, (\mathbb{R}, d))$. Imamo:

$$p(g, h) = \sup\{|g(x) - h(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{1\} = 1$$

Nadalje,

$$p(h, f) = \sup\{|h(x) - f(x)| \mid x \in [0, 1]\} = \sup\{|x - 1| \mid x \in [0, 1]\} = \sup[0, 1] = 1$$

Neka je $k : [0,1] \to \mathbb{R}, k(x) = \begin{cases} 0, \ x \in [0,1\rangle, \\ 1, \ x = 1. \end{cases}$ *Tada je* $k([0,1]) = \{0,1\}$, *pa slijedi* $k \in B([0,1], (\mathbb{R}, d))$. *Imamo:*

$$p(k,g) = \sup\{|k(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup\{0,1\} = 1$$

$$p(k,h) = \sup\{|k(x) - h(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup\{0,1\} = 1$$

$$p(k,f) = \sup\{|k(x) - f(x)| \mid x \in [0,1]\} = \sup(\{|0 - x| \mid x \in [0,1\rangle\} \cup \{0\}) = \sup[0,1\rangle = 1$$

Neka je X neprazan skup te (Y,d) metrički prostor. Neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $B(X,(Y,d))$ te neka je $g \in B(X,(Y,d))$ tako da $f_n \to g$ u metričkom prostoru $(B(X,(Y,d)), \rho)$, pri čemu je ρ uniformna metrika na $B(X,(Y,d))$. Tada kažemo da niz funkcija (f_n) **uniformno konvergira** funkciji g (s obzirom na metriku d).

Propozicija 3.4.6. *Neka je X neprazan skup te* (Y,d) *metrički prostor. Neka je* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *niz u* $B(X,(Y,d))$, *te neka je* $g \in B(X,(Y,d))$. *Tada niz* (f_n) *uniformno konvergira prema g ako i samo ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je*

$$d(g(x), f(x)) < \varepsilon \text{ za svaki } n \geq n_0 \text{ i za svaki } x \in X. \tag{3.2}$$

Dokaz. Neka je ρ uniformna metrika na $B(X,(Y,d))$. Pretpostavimo da (f_n) uniformno konvergira prema g. To znači da $f_n \to g$ u metričkom prostoru $(B(X,(Y,d)), \rho)$.Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\rho(g, f_n) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$.
Neka je $n \geq n_0$. Budući da je $\rho(g, f_n) = sup\{d(g(x), f_n(x)) \mid x \in X\}$, za svaki $x \in X$ vrijedi

$$d(g(x), f_n(x)) \leq \rho(g, f_n) < \varepsilon \text{ , to jest } d(g(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi (3.2). Dokažimo da $f_n \to g$ u metričkom prostoru $(B(X,(Y,d)), \rho)$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$d(g(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $x \in X$. Neka je $n \geq n_0$. Tada je $\frac{\varepsilon}{2}$ gornja međa skupa $\{d(g(x), f_n(x)) | x \in X\}$, pa je supremum tog skupa manji ili jednak $\frac{\varepsilon}{2}$.
Dakle $\rho(g, f_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, pa je $\rho(g, f_n) < \varepsilon$. Time je dokazano da (f_n) uniformno konvergira prema g.

□

Definicija 3.4.7. *Neka je X neprazan skup te* (Y, d) *metrički prostor. Neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $B(X, (Y, d))$, *te neka je* $g \in B(X, (Y, d))$. *Kažemo da niz* (f_n) *teži prema g po točkama ako za svaki* $x \in X$ *vrijedi da*

$$f_n(x) \to g(x)$$

u metričkom prostoru (Y, d).

Uočimo da, uz oznake iz prethodne propozicije, vrijedi sljedeće:
Ako (f_n) konvergira uniformno prema g, onda (f_n) konvergira prema g po točkama. Naime, neka je $x_0 \in X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada prema propoziciji 3.4.6 postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(g(x), f_n(x)) < \varepsilon, \text{ za svaki } n \geq n_0 \text{ i za svaki x iz X.}$$

Posebno, $d(g(x_0), f_n(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Dakle, $f_n(x_0) \to g(x_0)$.

Primjer 3.4.8. *Za* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana sa*

$$f_n(x) = x^n.$$

Nadalje, neka je $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } x \in [0, 1\rangle, \\ 1, \text{ ako je } x = 1. \end{cases}$$

Očito je $f_n \in B([0, 1], \mathbb{R})$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *te također* $g \in B([0, 1], \mathbb{R})$. *Tvrdimo da* (f_n) *konvergira prema g po točkama.*
Neka je $x \in [0, 1]$. *Ako je* $x = 0$ *ili* $x = 1$ *onda očito* $f_n(x) \to g(x)$.
S druge strane, ako je $x \in \langle 0, 1\rangle$, *onda prema primjeru 1.6.29 vrijedi da* $x^n \to 0$, *to jest* $f_n(x) \to g(x)$. *Dakle* (f_n) *teži prema g po točkama.*

Teorem 3.4.9. *Neka su* $(x_n), (y_n)$ *nizovi realnih brojeva, te neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da* $x_n \to a$ *i* $y_n \to b$. *Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1) $|x_n| \to |a|$

2) $-x_n \to -a$

3) $x_n + y_n \to a + b$

4) $x_n \cdot y_n \to a \cdot b$

5) Ako je $x_n \neq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, te $a \neq 0$ onda $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a}$

Dokaz. 1) Uočimo prije svega da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|.$$

Naime imamo

$$|\alpha| = |\alpha - \beta + \beta| \leq |\alpha - \beta| + |\beta|,$$

pa slijedi $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$. Zamjenom mjesta α i β dobivamo $|\beta| - |\alpha| \leq |\alpha - \beta|$. Iz ovoga slijedi

$$||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| \tag{3.3}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|x_n - a| < \varepsilon$ za svaki $n \geq n_0$. Iz (3.3) slijedi da je

$$||x_n| - |a|| \leq \varepsilon, \text{ za svaki } n \geq n_0.$$

Time je tvrdnja (1) dokazana.

2) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|(-x_n) - (-a)| = |x_n - a|$, pa tvrdnja slijedi kao pod (1).

3) Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $n \geq n_0$. Nadalje, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $|y_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $m \geq m_0$. Neka je $n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Tada je $n \geq n_0$ i $n \geq m_0$ pa dobivamo:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Dakle, $|(x_n + y_n) - (a + b)| < \varepsilon$ za sve $n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Prema tome $x_n + y_n \to a + b$.

4) Prema (1) niz $(|x_n|)$ je konvergentan. Prema propoziciji 3.2.7 i 3.2.5 niz $(|x_n|)$ je omeđen u $\mathbb{R}$, pa postoji $M > 0$ takav da je $|x_n| \leq M$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $K = \max\{M, |b|\}$. Tada je očito $K > 0$.
Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ takvi da je $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ za svaki $n \geq n_0$, i $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$ za svaki $n \geq m_0$.
Neka je $n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Tada je $n \geq m_0$ i $n \geq n_0$ pa vrijedi:

$$|x_n \cdot y_n - a \cdot b| = |x_n \cdot y_n - x_n \cdot b + x_n \cdot b - a \cdot b| =$$

$$= |x_n \cdot (y_n - b) + (x_n - a) \cdot b| \leq |x_n| \cdot |(y_n - b)| + |(x_n - a)| \cdot |b| \leq$$

$$\leq K \cdot |y_n - b| + K \cdot |x_n - a| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon$$

Dakle $|x_n \cdot y_n - a \cdot b| < \varepsilon$ za svaki $n \geq \max\{n_0, m_0\}$. Time je tvrdnja (4) dokazana.

5) Prema (1) vrijedi $|x_n| \to |a|$. Stoga za $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za svaki $n \geq n_0$

$$|x_n| \in \langle |a| - \varepsilon, |a| + \varepsilon \rangle.$$

Slijedi $|x_n| > |a| - \varepsilon = |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, za svaki $n \geq n_0$. stoga je $\frac{1}{|x_n|} < \frac{|a|}{2}$ za svaki $n \geq n_0$.

Neka je $M = \max\{\frac{1}{|x_1|}, \ldots, \frac{1}{|x_{n_0}|}, \frac{2}{|a|}\}$. Tada je $M > 0$ i $\frac{1}{|x_n|} \leq M$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = \frac{|x_n - a|}{|x_n| \cdot |a|} = |x_n - a| \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot \frac{1}{|a|} \leq |x_n - a| \cdot \frac{M}{|a|}. \tag{3.4}$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq m_0$ vrijedi

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon |a|}{M}.$$

Tada za svaki $n \geq m_0$ prema (3.4) vrijedi

$$|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| \leq |x_n - a| \cdot \frac{M}{|a|} < \frac{\varepsilon \cdot |a|}{M} \cdot \frac{M}{|a|} = \varepsilon.$$

Dakle, $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$. Time je tvrdnja dokazana.

□

Definicija 3.4.10. *Neka je X skup te $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije. Tada definiramo funkcije $|f|, -f, f+g, f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ sa:*

$$|f|(x) = |f(x)|$$
$$(-f)(x) = -f(x)$$
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

za svaki $x \in X$. Ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in X$ onda definiramo i funkciju $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ sa

$$(\frac{1}{f})(x) = \frac{1}{f(x)}, \text{ za svaki } x \in X.$$

Teorem 3.4.11. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $x_0 \in X$. Pretpostavimo da su $f, g : X \to \mathbb{R}$ funkcije neprekidne u točki x_0 (s obzirom na metrike d i d_E, pri čemu je d_E euklidska metrika na $\mathbb{R}$). Tada su i funkcije $|f|, -f, f+g, f \cdot g$ neprekidne u točki x_0. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in X$, onda je i $\frac{1}{f}$ neprekidna u točki x_0.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u X takav da je $x_n \to x_0$. Iz teorema 1.5.6 slijedi da $f(x_n) \to f(x_0)$ te također da $g(x_n) \to g(x_0)$. Prema teoremu 3.4.9 vrijedi da

$$f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0),$$

$$\text{to jest } (f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0).$$

Dakle kad god je (x_n) niz u X takav da $x_n \to x_0$ onda $(f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0)$. Prema teoremu 1.5.8 funkcija $f+g$ je neprekidna u x_0. Analogno dokazujemo i ostale tvrdnje iz teorema.

□

Korolar 3.4.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije. Tada su i funkcije $|f|, -f, f+g, f \cdot g$ neprekidne. Nadalje, ako je $f(x) \neq 0$ za svaki $x \in X$, onda je i $\frac{1}{f}$ neprekidna funkcija.*

Primjer 3.4.13. *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f(x) = x^2 - 5x + 2$. Tada je f neprekidna funkcija i do tog zaključka dolazimo koristeći prethodni korolar i to na sljedeći način:*
Neka su $u, v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa:

$$u(x) = x$$

$$v(x) = -5$$

$$w(x) = 2$$

Funkcije u, v, w su očito neprekidne, a vrijedi $f = (u \cdot u + v \cdot u) + w$, pa iz korolara slijedi da je f neprekidna.

Definicija 3.4.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$, te neka su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada za funkciju f kažemo da je polinom.

Primjer 3.4.15. *Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa $f_n(x) = x^n$. Tada je f_n neprekidna funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$ i to dokazujemo indukcijom po n.*
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna (f_1 je identiteta).
Pretpostavimo da je f_n neprekidna za neki $n \in \mathbb{N}$.
Tada iz $f_{n+1} = f_n \cdot f_1$ i korolara 3.4.12 slijedi da je f_{n+1} neprekidna funkcija. Nadalje, ako su $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}$, onda je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = a \cdot x^n$ također neprekidna kao produkt neprekidnih funkcija.

Uočimo i sljedeće: ako je $n \in \mathbb{N}$ te ako su $h_0, \dots, h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcije, onda je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa $g(x) = h_0(x) + \cdots + h_n(x)$ neprekidna za svaki $x \in \mathbb{R}$. Ovo lako slijedi iz prethodnog korolara i indukcijom po n. Sada imamo i sljedeći zaključak: Svaki polinom je neprekidna funkcija.

Propozicija 3.4.16. *Neka su (X, d) i (Z, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Z$ funkcija. Neka je (Y, p) potprostor od (X, d) te neka je $y_0 \in Y$ točka takva da je funkcija f neprekidna u y_0 s obzirom na metrike d, q. Tada je $f|_y : Y \to Z$ funkcija neprekidna u y_0 s obzirom na metrike p, q.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ takav da je $d(x, y_0) < \delta$ vrijedi $q(f(x), f(y_0)) < \varepsilon$.
Tada očito za svaki $x \in Y$ takav da je $p(x, y_0) < \delta$ vrijedi $q(f(x), f(y_0)) < \varepsilon$, to jest

$$q(f|_y(x), f|_y(y_0)) < \varepsilon.$$

Zaključak: $f|_y$ je neprekidna u y_0.

□

Korolar 3.4.17. *Neka su (X, d) i (Z, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Z$ neprekidna funkcija s obzirom na d, q. Neka je (Y, p) potprostor od (X, d). Tada je $f|_y : Y \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike p, q.*

Neka su (X, p) i (Y, d) metrički prostori. Neka je $BC((X, p), (Y, d))$ skup svih funkcija $f : X \to Y$ koje su neprekidne s obzirom na metrike p i d, te koje su omeđene (s obzirom na metriku d). Uočimo da je $BC((X, p), (Y, d)) \subseteq B(X, (Y, d))$.

Primjer 3.4.18. *Neka je p euklidska metrika na $[0, 1]$, te d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka je za $n \in \mathbb{N}$ funkcija $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana sa $f_n(x) = x^n$. Prema primjeru 3.4.15 i korolaru 3.4.17 funkcija f_n je neprekidna (s obzirom na metrike p, d) za svaki $n \in \mathbb{N}$. Jasno je da su funkcije $f_n, n \in \mathbb{N}$ omeđene (primjer 3.4.8).*

Stoga je $f_n \in BC(([0,1], p), (\mathbb{R}, d))$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Prema primjeru 3.4.8 niz* f_n *konvergira po točkama prema funkciji* $g \in B([0,1], (\mathbb{R}, d))$ *koja je definirana na sljedeći način:*

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in [0,1\rangle, \\ 1, & \text{ako je } x = 1. \end{cases}$$

No $g \notin BC(([0,1], p), (\mathbb{R}, d))$, *to jest g nije neprekidna funkcija. Zašto?*
Tvrdimo da g nije neprekidna u točki 1. Pretpostavimo suprotno. Tada za $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svaki* $x \in [0,1]$ *takav da je* $|x-1| < \delta$ *vrijedi* $|g(x) - 1| < \varepsilon$.
Možemo pretpostaviti da je $\delta < 1$. *Neka je* $x = 1 - \frac{\delta}{2}$. *Tada je* $0 < x < 1$ *pa je* $x \in [0,1]$.
Imamo:

$$|x - 1| = |1 - \frac{\delta}{2} - 1| = |-\frac{\delta}{2}| < \delta.$$

Stoga je $|g(x) - 1| < \varepsilon = \frac{1}{2}$. *No* $x < 1$ *povlači da je* $g(x) = 0$, *pa slijedi* $|0 - 1| < \frac{1}{2}$.
Kontradikcija.

Teorem 3.4.19. *Neka su* $(X, p), (Y, d)$ *metrički prostori, neka je* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz u* $BC((X, p), (Y, d))$ *te neka je* $g \in B(X, (Y, d))$ *tako da niz* (f_n) *uniformno konvergira prema g (s obzirom na metriku d). Tada je* $g \in BC((X, p), (Y, d))$.

Dokaz. Treba dokazati da je g neprekidna funkcija. Neka je $x_0 \in X$. Neka je $\varepsilon > 0$. Neka je d_∞ uniformna metrika na $B(X, (Y, d))$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d_\infty(f_n, g) < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki $n \geq n_0$.
Odaberimo neki $n \geq n_0$ (na primjer $n = n_0$).
Vrijedi da je $d_\infty(f_n, g) < \frac{\varepsilon}{3}$ pa je $d(f_n(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ za svaki $x \in X$. Prema pretpostavci f_n je neprekidna funkcija pa postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in X$ vrijedi sljedeća implikacija:

$$p(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$ imamo:

$$d(g(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f_n(x)) + d(f_n(x), g(x_0)) \leq$$

$$\leq d(g(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), g(x_0)) \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Dakle $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in X$ takav da je $p(x, x_0) < \delta$. Prema tome, g je neprekidna u x_0.

□

Primjer 3.4.20. *Neka su f_n i g funkcije definirane kao u primjeru 3.4.18. Znamo da je $f_n \in BC(([0,1], p), (\mathbb{R}, d))$, da je $g \in B([0,1], (\mathbb{R}, d))$, te da niz (f_n) teži po točkama prema g.*
No (f_n) ne teži uniformno prema g. Naime, kada bi (F_n) težio uniformno prema g onda bi, prema teoremu 3.4.19, vrijedilo da je $g \in BC(([0,1], p), (\mathbb{R}, d))$, to jest da je g neprekidna funkcija, a znamo da g nije neprekidna (primjer 3.4.18).

Propozicija 3.4.21. *Neka su $(X, p), (Y, d)$ metrički prostori, te neka je d_∞ uniformna metrika na $B(X, (Y, d))$. Tada je $BC((X, p), (Y, d))$ zatvoren skup u metričkom prostoru $(B(X, (Y, d)), d_\infty)$.*

Dokaz. Dovoljno je, prema propoziciji 3.4.4, dokazati sljedeće:
Ako je (f_n) niz u $BC((X, p), (Y, d))$ te $g \in B(X, (Y, d))$, te ako $f_n \to g$ u metričkom prostoru $(B(X, (Y, d)), d_\infty)$, onda je $g \in BC((X, p), (Y, d))$.
No ovo vrijedi prema teoremu 3.4.19. Time je propozicija dokazana.

□

Napomena 3.4.22. *Ako su (X, d) i (Y, p) metrički prostori tako da je (Y, p) potprostor od (X, d), te ako je (x_n) niz u Y i $a \in Y$, onda $x_n \to a$ u metričkom prostoru (Y, p) ako i samo ako $x_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d).*

3.5 Kompaktni skupovi u metričkom prostoru

Definicija 3.5.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $K \subseteq X, K \neq \emptyset$. Za skup K kažemo da je kompaktan u metričkom prostoru (X, d) ako je metrički prostor (K, p) kompaktan, pri čemu je p metrika na K takva da je (K, p) potprostor od (X, d), to jest*

$$p = d|_{K \times K}.$$

Propozicija 3.5.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $K \subseteq X, K \neq \emptyset$. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako svaki niz u K ima podniz koji u metričkom prostoru (X, d) konvergira nekoj točki $a \in K$.*

Dokaz. Neka je $p = d|_{K \times K}$.
Pretpostavimo da je K kompaktan u (X, d). Neka je (x_n) niz u K. Budući da je K kompaktan u (X, d), metrički prostor (K, p) je kompaktan, pa postoji (y_n) podniz od (x_n) tako da je (y_n)

konvergentan u metričkom prostoru (K, p). To znači da postoji $a \in K$ takav da $y_n \to a$ u (K, p), pa vrijedi i $y_n \to a$ u (X, d).
Obratno, pretpostavimo da svaki niz (x_n) u K ima konvergentan podniz koji u (X, d) konvergira nekoj točki iz K.
Neka je (x_n) niz u K. Tada postoje podniz (y_n) od (x_n) i $a \in K$ takvi da $y_n \to a$ u metričkom prostoru (X, d). No tada vrijedi i da $y_n \to a$ u metričkom prostoru (K, p).
Dakle svaki niz u K ima podniz koji je konvergentan u (K, p). Prema tome, (K, p) je kompaktan metrički prostor, to jest K je kompaktan skup u (X, d) i time je tvrdnja dokazana.

□

Uočimo:
Metrički prostor (X, d) je kompaktan ako i samo ako je X kompaktan skup u (X, d).

Propozicija 3.5.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K zatvoren u (X, d).*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_n) niz u K, te da je $a \in X$ točka takva da $x_n \to a$. Želimo dokazati da je $a \in K$. Ako to dokažemo iz propozicije 3.4.4 će slijediti da je K zatvoren skup.
Budući da je K kompaktan, prema propoziciji 3.5.2, postoje (y_n) podniz od (x_n), te $b \in K$ takvi da $y_n \to b$. Iz propozicije 1.7.13 slijedi $y_n \to a$. Budući da je limes niza u metričkom prostoru jedinstven imamo $a = b$. Prema tome, $a \in K$ i time smo dokazali da je K zatvoren skup.

□

Propozicija 3.5.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada je K omeđen u (X, d).*

Dokaz. Neka je $p = d|_{K \times K}$. Imamo da je (K, p) kompaktan metrički prostor. Iz teorema 3.2.7 i propozicije 3.2.5 slijedi da je (K, p) omeđen metrički prostor. To znači da postoje $x_0 \in K$ i $r > 0$ takvi da je

$$K = K(x_0, r; p).$$

No očito je $K(x_o, r; p) \subseteq K(x_0, r; d)$ pa je

$$K \subseteq K(x_0, r; d).$$

Prema tome, K je omeđen u (X, d).

□

Korolar 3.5.5. *Ako je (X, d) metrički prostor, te K kompaktan skup u (X, d), onda je K zatvoren i omeđen.*

Primjer 3.5.6. *Neka je X beskonačan skup te neka je d diskretna metrika na X. Odaberimo $x_0 \in X$. Tada je $K(x_0, 2) = X$. Dakle X je omeđen skup u (X, d). Očito je X zatvoren skup u (X, d). No X nije kompaktan skup u (X, d), to jest (X, d) nije kompaktan metrički prostor. Naime, kada bi (X, d) bio kompaktan onda bi bio i potpuno omeđen, a prema primjeru 3.2.6 (X, d) nije potpuno omeđen.*

Teorem 3.5.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka je K neprazan, zatvoren i omeđen skup u $(\mathbb{R}^n, d)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je K kompaktan u $(\mathbb{R}^n, d)$.*

Dokaz. Neka je (x_n) niz u K. Tada je (x_n) omeđen niz u $(\mathbb{R}^n, d)$ jer je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$, a K je omeđen u $(\mathbb{R}^n, d)$.
Iz teorema 1.7.22 slijedi da postoji podniz (y_n) od (x_n) koji je konvergentan u $(\mathbb{R}^n, d)$. Dakle postoji $a \in \mathbb{R}^n$ takav da $y_n \to a$. No (y_n) je niz u K, pa budući da je K zatvoren imamo $a \in K$ (korolar 3.4.3).
Dakle svaki niz u K ima podniz koji konvergira nekoj točki iz K. Prema tome, K je kompaktan skup u $(\mathbb{R}^n, d)$.

□

Propozicija 3.5.8. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike p i q. Neka je K kompaktan skup u (X, p). Tada je $f(K)$ kompaktan skup u (Y, q).*

Dokaz. Neka je (y_n) niz u $f(K)$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $y_n \in f(K)$ pa postoji $x_n \in K$ takav da je $y_n = f(x_n)$. Na ovaj način smo dobili niz (x_n) u K, a budući da je K kompaktan postoji strogo rastuća funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ te $x_0 \in K$ takav da $x_{a_n} \to x_0$.
Iz činjenice da je f neprekidna slijedi da $f(x_{a_n}) \to f(x_0)$, to jest $y_{a_n} \to f(x_0)$.
Uočimo da je $f(x_0) \in f(K)$ te da je (y_{a_n}) podniz od (y_n). Time smo dokazali da je $f(K)$ kompaktan.

□

Korolar 3.5.9. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na metrike p i q. Pretpostavimo da je (X, p) kompaktan metrički prostor. Tada je f omeđena funkcija.*

Dokaz. Budući da je (X, p) kompaktan, X je kompaktan skup u metričkom prostoru (X, p). Iz prethodne propozicije slijedi da je onda $f(X)$ kompaktan u metričkom prostoru (Y, q). Slijedi da je $f(X)$ omeđen skup u (Y, q). Prema tome, f je omeđena funkcija.

□

Definicija 3.5.10. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori. Označimo sa $C((X, p), (Y, q))$ skup svih funkcija $X \to Y$ koje su neprekidne s obzirom na metrike p i q. Iz prethodnog* *korolara slijedi da je $C((X, p), (Y, q)) = BC((X, p), (Y, q))$ ako je (X, p) kompaktan.*

Propozicija 3.5.11. *Neka je K neprazan kompaktan podskup od $\mathbb{R}$. Tada K ima minimum i maksimum.*

Dokaz. Budući da je K kompaktan imamo da je K omeđen u $\mathbb{R}$ pa postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je $a = \sup K$. Tvrdimo da je $a \in K$.
Pretpostavimo suprotno. Tada $a \notin K$ pa je $a \in K^c$. Budući da je K zatvoren (jer je kompaktan) imamo da je K^c otvoren pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(a, r; d) \subseteq K^c,$$

gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Dakle $\langle a - r, a + r\rangle \subseteq K^c$. Budući da je $a = \sup K$ postoji $x \in K$ takav da je $a - r < x$. Imamo

$$a - r < x \leq a < a + r$$

pa je $x \in \langle a - r, a + r\rangle$ iz čega slijedi da je $x \in K^c$. Kontradikcija.
Dakle $a \in K$ pa je a maksimum od K.
Analogno dobivamo da K ima minimum.

□

Teorem 3.5.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka je K kompaktan skup u (X, d). Tada f poprima minimum i maksimum na K, to jest postoje $a, b \in K$ takvi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svaki $x \in K$.*

Dokaz. Iz propozicije 3.5.8 slijedi da je $f(K)$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$. Stoga iz propozicije 3.5.11 slijedi da $f(K)$ ima minimum i maksimum. Neka je $m = \min f(K)$ i $M = \max f(K)$. Iz $m \in f(K)$ i $M \in f(K)$ slijedi da postoje $a, b \in K$ takvi da je $m = f(a)$ i $M = f(b)$.
Tada očito vrijedi da je $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ za svaki $x \in K$.

□

Korolar 3.5.13. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ te neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada f poprima minimum i maksimum na $[a, b]$.*

Dokaz. Neka je p euklidska metrika na $[a, b]$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Znamo da je $[a, b]$ kompaktan skup (jer je omeđen i zatvoren). To povlači da je $([a, b], p)$ kompaktan metrički prostor.
Neka je $K = [a, b]$. Imamo da je K kompaktan u $([a, b], p)$, a f je neprekidna s obzirom na p i d. Iz prethodnog teorema slijedi da f poprima minimum i maksimum na K. Time je tvrdnja korolara dokazana.

□

Propozicija 3.5.14. *Neka je* (X, d) *kompaktan metrički prostor te neka je* ρ *uniformna metrika na* $BC((X, d), (\mathbb{R}, d_E))$*, pri čemu je* d_E *euklidska metrika na* $\mathbb{R}$*. Neka su* $f, g \in BC((X, d), (\mathbb{R}, d_E))$*. Tada postoji* $x_0 \in X$ *takav da je*

$$\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : X \to \mathbb{R}$ sa $h(x) = |f(x) - g(x)|$ za svaki $x \in X$. Funkcija h je neprekidna jer je kompozicija funkcija $f + (-g) : X \to \mathbb{R}$ i funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. Iz teorema 3.5.12 slijedi da h poprima maksimum na X, to jest postoji $x_0 \in X$ takav da je $h(x) \leq h(x_0)$ za svaki $x \in X$.
Ovo znači da je

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x_0) - g(x_0)| \tag{3.5}$$

za svaki $x \in X$. Znamo da je $\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$. Iz (3.5) slijedi da je $\rho(f, g) = |f(x_0) - g(x_0)|$.

□

Bibliografija

(1) W.A.Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.

(2) C.O.Christenson, W.L.Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

Sažetak

U prvom poglavlju se definiraju metrika i metrički prostori. Proučavaju se otvoreni, zatvoreni i omeđeni skupovi u metričkom prostoru. Specijalno se promatraju neprekidne funkcije u metričkom prostoru te povezanost neprekidnih funkcija i konvergencije.

U drugom poglavlju se upoznajemo sa osnovnim pojmovima iz topologije. Definira se topološki prostor, potprostor topološkog prostora i baza topologije. I ovdje se najviše proučavaju neprekidne funkcije.

Treće poglavlje je posvećeno kompaktnosti i uniformnoj metrici. Definira se uniformna metrika te kompaktni metrički i topološki prostor. Osobito se proučava uniformna konvergencija. Ovo poglavlje ujedno prikazuje povezanost metričkih i pripadnih topoloških prostora.

Summary

The first chapter defines the metric and metric spaces. Open, closed and bounded sets in a metric space are studied here. Continuous functions in a metric space and convergent sequences in a metric space are especially observed.

The second chapter is an introduction to the basic concepts of topology. We define the topological space, subspace of an topological space and the base of topology. Even here are continuous function and convergent sequences specially observed.

The third chapter is devoted to compactness and uniform metrics. We define the uniform metric and compact metric and topological spaces. Special emphasis is on the study of uniform convergence. This section also shows the connection between metric and associated topological spaces.

Životopis

Rođena sam 24. siječnja 1986. u Zagrebu. Za vrijeme Domovinskog rata obitelj seli u Njemačku, te sam u Bad Durrheimu završila prva dva razreda osnovne škole. Vrativši se u Hrvatsku, završila sam osnovnu školu u Jakovlju i 2000. godine upisala Gimnaziju Lucijana Vranjanina u Zagrebu.
2005. godine sam upisala Preddiplomski studij na PMF Matematičkom odjelu.
2011. godine sam upisala Diplomski studij matematike i informatike, smjer nastavnički.