Konceptualna promjena i uključenost učenika u nastavu matematike

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Božić

KONCEPTUALNA PROMJENA I UKLJUČENOST UČENIKA U NASTAVU MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditeljice rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Doc. dr. sc. Daria Rovan

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo s ocjenom __________________________________.

Potpis članova povjerenstva

1. _________________________________

2. _________________________________

3. _________________________________

Zahvaljujem se mentoricama prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji i doc. dr. sc. Darii Rovan na aktivnoj suradnji, susretljivosti, profesionalnosti te velikoj pomoći i savjetima tijekom izrade diplomskoga rada.

Zahvaljujem se srednjoj školi i ravnateljici koja mi je omogućila provođenje istraživanja kao i profesorima koji su mi pomogli prilikom provođenja istraživanja, te učenicima 3.ga i 3.gb jer bez njih ne bih bila u mogućnosti izvršiti zadatak.

Zahvaljujem se svojoj obitelji i Skenderu na podršci i razumijevanju koje su mi pružali tijekom studiranja i tijekom izrade diplomskoga rada.

Sadržaj:

UVOD

Nastava je svrhoviti, dvosmjerni, planski i racionalno organizirani radni proces u kojemu se, pojednostavljeno rečeno, vrši prenošenje sintetiziranog iskustva starijih generacija na mlađe, sa svrhom njihovog osposobljavanja za samostalno i uspješno snalaženje u životnom okruženju. Odgojno-obrazovni proces (proces školovanja) je proces u kojemu se vrši svojevrsna reprodukcija društva, kojim se bitno doprinosi opstanku i u značajnoj mjeri stvaranju pretpostavke za razvoj pojedinca i društva u cjelini. Nastava matematike učenicima treba omogućiti razvoj pozitivnog stava prema matematici i interesa za nju, te samopouzdanja u vlastiti matematički potencijal, prihvaćanje matematike kao smislene aktivnosti i njene primjene kao korisnog alata u raznim situacijama – svakodnevnom životu i zanimanju. Usprkos tome, općepoznata činjenica je da veliki broj školaraca ne voli matematiku, smatraju je najtežim školskim predmetom, bore se s njom i mnogo su puta poželjeli da matematika nestane jednom i zauvijek. Uspjeh u ovome društvu velikim dijelom ovisi o sposobnostima kompetentnog korištenja matematičkih radnji i vještina. Preduvjet za uspješnu nastavu matematike je interes učenika prema predmetu. Međutim, matematika se ubraja među teže nastavne predmete jer zahtijeva kontinuirani rad. Učenici se prlikom samostalnog učenja susreću s problemima vezanima uz savladavanje nastavnog sadržaja. Da bi učenici lakše samostalno savladali nastavni sadržaj potrebno je povećati njihovu uključenost u nastavu.

Uključenost učenika u aktivnosti tijekom nastave bitan je preduvjet kvalitetnog učenja. Uključenost se pojavljuje u znanstvenoj i stručnoj literaturi definirana kroz tri međusobno povezana aspekta. Ponašajna uključenost se oslanja na ideju sudjelovanja: obuhvaća uključenost u školske i društvene ili izvanškolske aktivnosti i smatra se važnom za postizanje pozitivnih školskih rezultata. Emocionalna uključenost obuhvaća pozitivne i negativne reakcije na učitelje, učenike i školu, pretpostavlja se da stvara povezanost s ustanovom te utječe na volju za radom i učenjem. Kognitivna (spoznajna) uključenost temelji se na ideji o ulaganju. Kombinira promišljenost i volju za ulaganjem truda potrebnog kako bi se shvatile složene ideje i kako bi se ovladalo složenijim vještinama.

Osim o uključenosti, u ovome radu razmotrit ćemo još jedan problem vezan uz učenje matematike, odnosno problem konceptualne promjene. Matematika obiluje sadržajima koji zahtijevaju, ne samo njihovo poznavanje, nego i razumijevanje. Znanje u matematici, kao i u drugim predmetima, koje se temelji samo na poznavanju činjenica i zakona površno je i lako se zaboravlja. Ono zahtijeva da se činjenice i zakoni razumiju te da se mogu primijeniti u drugim područjima u matematici i svakodnevnom životu. Djeca su i prije škole okružena i izložena matematici te kroz svakodnevne primjere uočavaju različite geometrijske oblike oko sebe, uče brojati, zbrajati i oduzimati na raznim modelima kao što su kruške i jabuke, čokoladice i bomboni, lopte i ostale igračke i sl. Iako toga nisu svjesni. tako stvaraju određenu predodžbu i matematičke koncepte. Kad krenu u školu, na nastavi matematike susreću se s informacijama koje se ponekad ne slažu s njihovom predodžbom i postojećim shvaćanjem. Tako dolaze do spoznaje da je njihovo razmišljanje krivo i time se stvaraju problemi prilikom usvajanja novih sadržaja. Učenicima je teško prihvatiti nove ideje koje se ne slažu s njihovim uvjerenjima koje su sami izgradili. Da bismo izbjegli poteškoće u savladavanju novog sadržaja i kako bismo došli do smislenog učenja matematike, potrebno je potaknuti konceptualnu promjenu kod učenja.

1. UKLJUČENOST UČENIKA U NASTAVU MATEMATIKE

Uključenost učenika u aktivnosti tijekom nastave bitan je preduvjet kvalitetnog učenja. Učenici koji tijekom školovanja razviju motivaciju za učenje vjerojatno će nastaviti učiti čitavog života (Bezinović, Marušić, Ristić - Dedić, 2012.). Zbog toga je posebno važno da učitelj primjenjuje različite strategije poticanja interesa učenika i njihova aktivnog uključivanja u nastavu. Dobri učitelji koriste učinkovite načine upravljanja razredom u kojima je naglasak na motiviranju učenika za sudjelovanje u aktivnostima učenja te na njihovoj međusobnoj suradnji (Bezinović, Marušić, Ristić, Dedić, 2012.). Dobar će učitelj istaknuti ne samo što će se učiti već i zašto je to za učenike važno, nastojeći potaknuti i održati njihov interes. Ključno je da učenici sadržaje učenja povežu sa svojim svakodnevnim životom, pri čemu ih se potiče da iznose vlastite primjere da bi mogli uočiti korisnost sadržaja koje uče. Intrinzični interes za sadržaje učenja, ali i prepoznavanje vrijednosti onoga što se uči, povezan je s učinkovitijim uspjehom učenika, s boljim korištenjem strategija učenja i češćim uključivanjem učenika u različite aktivnosti tijekom budućeg školovanja (Bezinović, Marušić, Ristić, Dedić, 2012.).

Koncept uključenosti u nastavu važan je zbog toga što bi mogao biti sredstvo kojim će se spriječiti opadanje motivacije kod učenika. Pretpostavlja se da je koncept uključenosti u nastavu odgovor na kontekstualne značajke kako poboljšati i prilagoditi nastavu ovisno o učeničkom predznanju, interesu i suradnji. Koncept uključenosti podložan je promjenama, ovisno o okolini u kojoj se istraživanje provodi. Istraživači opisuju ponašajnu, emocionalnu i kognitivnu uključenost kao višeznačnu konstrukciju koncepta. U ovom radu definirat ćemo uključenost, opisati načine mjerenja te predstaviti uzroke i posljedice uključenosti.

Koncept uključenosti u nastavu je privukao povećan interes istraživača kao jedan od načina za prevladavanje niskih razina akademskih postignuća, visokih razina dosade i nezadovoljstva među učenicima, te visokih stopa napuštanja škole, u urbanim područjima. (Fredricks, Blumenfeld, Paris, 2004.).

Postoje povijesni, ekonomski, teoretski te praktični razlozi za rastući interes za uključenost u nastavu. Povjesničari zamjećuju opći pad u poštivanju autoriteta i institucija među učenicima. Jedna od posljedica jest ta da se više ne može računati na to da će svi učenici automatski poštovati i ponašati se u skladu s ponašajnim i akademskim očekivanjima nametnutima od strane učitelja i školske uprave. Novije, popularne knjige prikazuju učenike koji školovanje vide kao dosadno ili kao običnu igru s ocjenama u kojoj se oni pokušavaju provući sa što manje truda (Burkett, 2002; Pope, 2002., prema Fredricks, Blumenfeld, Paris, 2004). Ova zapažanja su posebno zabrinjavajuća s obzirom da nova, globalna i brzo mijenjajuća ekonomija, zahtijeva obrazovane radnike koji mogu sažimati i procjenjivati nove informacije i podatke, razmišljati kritički i rješavati probleme. Iako je pohađanje nastave obavezno, bitno je da učenici shvate važnost školovanja, učenja i znanja. Učenicima bi trebalo biti važno iskoristiti sve prednosti onoga što škola nudi, razviti sposobnosti koje su im potrebne kako bi uspjeli na trenutnom tržištu rada.

Definiranje i ispitivanje pojedinačnih komponenti uključenosti odvaja ponašanje, emocije i spoznaju učenika. U stvarnosti su ovi faktori dinamički povezani unutar svakog pojedinca; oni nisu nezavisni procesi. Ideja 'obveze' ili 'zalaganja' (dva termina koja se naizmjenično koriste) koja je centralna za opće razumijevanje pojma UKLJUČENOSTI, također čini uključenost zanimljivijim i vrjednijim konceptom jer on implicira na to kako mogu postojati kvalitativne razlike na razini ili stupnju uključenosti duž svake komponente.

Na primjer, ponašajna uključenost može varirati od samog obavljanja školskih obveza i praćenja pravila sve do sudjelovanja u učeničkom vijeću. Emocionalna uključenost može varirati od jednostavnog sviđanja do dubokog vrednovanja ili identifikacije sa institucijom. Spoznajna uključenost može varirati od jednostavnog pamćenja do korištenja samoregulacijskih strategija učenja koja promiču duboko razumijevanje i stručnost. Ove kvalitativne razlike unutar svake dimenzije ukazuju da uključenost može varirati u intenzitetu i trajanju; može biti kratkoročna i specifična u svakoj situaciji ili dugoročna i stabilna. Potencijalni razvoj intenziteta čini uključenost poželjnim rezultatom. Razumno je pretpostaviti kako se uključenost, jednom kad je utemeljena, gradi sama na sebi, na taj način pridonoseći željene rezultate. Drugi razlog za rastućim interesom za istraživanje uključenosti je taj što se smatra da je uključenost prilagodljiva. To rezultira iz interakcije pojedinca unutar konteksta i prilagodljiva je promjenama u okolini. Trenutno, mnoge intervencije, kao što su poboljšanje školske klime ili promjena kurikuluma i standarda, eksplicitno ili implicitno se fokusiraju na uključenost kao način za povećanje učinkovitosti učenja ili smanjenjem odustajanja od školovanja. Na primjer (Guthrie i Wigfield, 2000.; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris

2004.) tvrde da uključenost ima posredujuću ulogu u odnosu utjecaja kurikuluma i nastavnih reformi s postignućem učenika. Višedimenzionalni pristup podrazumijeva istraživanje toga kako pokušaji da se promijeni kontekst utječe na sva tri tipa uključenosti i određuju jesu li rezultati uzrokovani promjenama u jednoj ili više komponenti. Takva nam istraživanja nastoje pomoći da bolje razumijemo kompleksnost učeničkog iskustva u školi, da bismo tako mogli oblikovati više specificirane, ciljane i detaljne intervencije.

1.1. Bihevioralna (ponašajna) uključenost

Ponašajna uključenost se najčešće definira na tri načina. Prva definicija podrazumijeva uzorno vladanje, kao što je poštivanje pravila te prihvaćanje razrednih normi, kao i izostanak problematičnog ponašanja poput neopravdanih izostanaka s nastave te upadanja u probleme (Finn, 1993; Finn, Pannozzo, Voelkl, 1995; Finn, Rock . 1997., prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Druga definicija tiče se uključenosti u učenje i obavljanje školskih zadataka te uključuje ponašanja koja ukazuju na trud, upornost, koncentraciju, pažnju, postavljanje pitanja i sudjelovanje u razrednim diskusijama (Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Treća definicija se odnosi na sudjelovanje u školskim aktivnostima poput atletike ili aktivnostima koje se tiču upravljanja školom (Finn, 1993; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.).

Općenito gledajući, ove definicije ne rade razliku između raznih vrsta ponašanja, poput sudjelovanja u školskim i izvanškolskim aktivnostima. Jedina iznimka je Finnova (1989; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.) definicija ponašajne uključenosti. On dijeli sudjelovanje na četiri razine koje se kreću u rasponu od praćenja uputa učitelja do preuzimanja inicijative od strane učenika, poput uključenosti u razne izvannastavne aktivnosti i aktivnosti u učeničkom vijeću. Pretpostavka je da sudjelovanje učenika na višim razinama upućuje na razliku u kvaliteti uključenosti, odnosno da su takvi učenici više posvećeni instituciji.

1.2. Emocionalna uključenost

Emocionalna uključenost se odnosi na afektivne reakcije u razredu, poput interesa, dosade, sreće, tuge ili nervoze (Connell, Wellborn, 1991; Skinner i Belmont, 1993; prema

Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Neka istraživanja procjenjuju emocionalnu uključenost mjerenjem emocionalnih reakcija na školu i učitelja (Lee i Smith, 1995; Stipek, 2002; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Neki to prikazuju kroz identifikaciju sa školom (Finn, 1989; Voelkl, 1997; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Finn definira identifikaciju kao pripadanje (osjećaj važnosti u školi) i vrijednost (želju za uspjehom u školskim rezultatima).

Teorijski rad na temu vrijednosti također ističe preciznije razlike nego što su trenutno prisutne u literaturi o uključenosti. Eccles (1983; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.) opisuje četiri komponente vrijednosti: *interes* (uživanje u aktivnosti), *vrijednost postignuća* (važnost dobrog rezultata u obavljanju zadatka za stjecanje pozitivne slike o sebi), *korisnost/važnost* (važnost zadatka za buduće ciljeve), te *cijenu truda* (negativni aspekti uključenosti u zadatak). Nadalje, definicije emocionalne uključenosti ne čine kvalitativnu razliku između pozitivnih emocija i visoke razine uključenosti. Koncept *flowa* (toka) čini upravo ovu razliku: flow je subjektivno stanje potpune uključenosti i predanosti zadatku ili aktivnosti pri kojem je osoba toliko uključena u zadatak ili aktivnost da izgubi osjećaj za vrijeme i prostor (Csikzentmihalyi, 1988; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Definicija *flowa* pruža konceptualizaciju koja predstavlja visoku emocionalnu uključenost i ulog.

1.3. Kognitivna uključenost

Istraživanja kognitivne uključenosti dolaze iz literature o školskoj uključenosti koja ističe ulaganje truda u učenje i iz literature o učenju i poučavanju, koja sadrži samoregulaciju i korištenje strategija učenja (Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Jedan set definicija se fokusira na psihološko ulaganje pri učenju, želju da se postiže više od potrebnog te preferiranje izazova (Connel i Wellborn, 1991; Newmann et al., 1992; Wehlage et al., 1989; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Na primjer, Connell i Wellborn nude konceptualizaciju kognitivne uključenosti koja uključuje fleksibilnost pri rješavanju problema, preferiranje zahtjevnog rada, te pozitivan stav pri nošenju s neuspjehom. Druga istraživanja ističu opću definiciju uključenosti koja ističe unutrašnju psihološku kvalitetu i ulaganje u učenje, čime se implicira više od same ponašajne uključenosti. Na primjer, Newmann definira uključenost u školskom radu kao učenikovo psihološko ulaganje te trud usmjeren na učenje, razumijevanje, savladavanje znanja, vještina i zanata koje školski rad promovira. Slično tome, Wehlage definira uključenost kao „psihološko ulaganje koje je potrebno za razumijevanje i savladavanje znanja i vještina koje se eksplicitno uče u školama".

Ove definicije su dosta slične konstruktima u literaturi o motivaciji, kao što je motivacija za učenje (Brophy, 1987, prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004), ciljevi učenja (Ames, 1992; Dweck & Leggett, 1988; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004) i intrinzična motivacija (Harter, 1981; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Brophy opisuje učenika koji je motiviran za učenje kao onog koji cijeni učenje i ima želju za znanjem i savladavanjem gradiva. Slično tome, učenici koji kao cilj imaju učenje umjesto rezultata su usmjereni na učenje, savladavanje zadatka, razumijevanje i savladavanje izazova. Intrinzično motivirani učenici više vole izazov i ne odustaju kad su suočeni s preprekama. Svaki od ovih koncepata ističe stupanj učeničkog ulaganja u učenje i pretpostavlja da je to ulaganje slično (iako ne i ekvivalentno) strateškom učenju.

Literatura o učenju definira kognitivnu uključenost u terminima samoregulacije i strategije. Kako god da ih opisali: kao kognitivno angažirane ili sklone samoupravljanju, strateški orijentirani učenici koriste metakognitivne strategije kako bi planirali, nadzirali i procijenili vlastite spoznaje pri obavljanju zadatka (Pintrich i De Groot, 1990; Zimmerman, 1990, prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Oni koriste strategije učenja kao što su ponavljanje, sažimanje i elaboracija kako bi zapamtili, organizirali i razumjeli materijal (Corno i Madinach, 1983; Weinstein i Mayer, 1986; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Oni upravljaju i kontroliraju svoj trud pri obavljanju zadatka, na primjer, tako da ustraju i potiskuju sve što bi ih moglo omesti s ciljem da održe svoju kognitivnu uključenost (Corno, 1993; Pintrich i De Groot, 1990, prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004). Postoji kvalitativna razlika između uporabe dubinske i površinske strategije. Učenici koji koriste dubinski pristup su više kognitivno uključeni; oni koriste više mentalnog truda, kreiraju više poveznica među idejama te postižu veće razumijevanje ideja.

Nadalje, termin *trud* je problematičan jer se koristi u definiciji kako kognitivne uključenosti tako i bihevioralne ili ponašajne uključenosti. Radi toga je potrebno napraviti razliku između truda koji je primarno trud u ponašanju, onaj koji se tiče obavljanja zadatka, te onog koji je fokusiran na učenje i savladavanje materijala. Istraživanje u literaturi o motivaciji koje se bavi voljom bi moglo dati primjer za ovu razliku. Navedeno istraživanje ističe kognitivni i psihološki trud karakterizirajući volju kao „proces psihološkog upravljanja koji štiti koncentraciju i usmjereni trud od osobnih distraktora i distraktora iz okoline, te na takav način pomaže učenju i postizanju rezultata“ (Corno, 1993; prema Fredricks, Blumenfeld, Paris 2004.). Slično tome, veoma je važno napraviti razliku između raznih tipova ponašanja koja se tiču „obavljanja više od zahtijevanog“ kako bismo mogli bolje razlikovati mentalni trud i trud u ponašanju.

U sažetku, definicije kognitivne uključenosti proizlaze iz dvije linije istraživanja. Jedna grupa posebno ističe psihološko ulaganje pri učenju, dok druga ima u fokusu spoznaju te ističe strateško učenje. Međutim, niti jedna od te dvije definicije ne daje adekvatan opis kvalitativnih aspekata uključenosti. Učenici mogu biti i visoko strateški orijentirani pri učenju te puno ulagati u učenje; mogu biti strateški orijentirani samo kad je potrebno dobiti dobre ocjene, a ne zato jer su motivirani za učenje; a mogu biti i motivirani za učenje, međutim može im nedostajati vještina ili znanja u vezi toga kad i kako upotrebljavati strategije. Sveukupno, ideja kognitivne uključenosti bi bila vrjednija za razumijevanje školskog uspjeha kad bi stručnjaci integrirali razlike koje proizlaze iz kognitivnih procesa spomenutih u literaturi o samoregulaciji s definicijama o psihološkom ulogu koji se nalaze u literaturi o motivaciji.

Spomenuli smo nekoliko jakih strana i ograničenja trenutnih konceptualizacija koje se tiču emocionalne, kognitivne i ponašajne uključenosti. Prvo, definicija uključenosti uključuje širok raspon definicija. Na primjer, bihevioralna uključenost uključuje poštivanje pravila i obavljanje posla; emocionalna uključenost sadrži interes, vrijednosti i emocije; kognitivna uključenost uključuje motivaciju, trud i stratešku primjenu. Ova sveobuhvatnost ipak ima svoju cijenu. Neke od ovih definicija se gotovo u potpunosti preklapaju s onima iz prijašnjih konceptualizacija, poput onih o stavovima prema školi ili onih koje govore o tome kako učiteljevo ocjenjivanje ponašanja služi za procjenu uspjeha. Nadalje, mnoge definicije iz literature o uključenosti su općenitije od definicija iz drugih radova kojima se služi. Literatura o uključenosti je također puna dupliciranih koncepata te joj nedostaje preciznih razdioba u definicijama o raznim tipovima uključenosti. Na primjer, trud je uključen u definiciju kognitivne uključenosti i bihevioralne uključenosti te nije napravljena nikakva razlika između truda koji je usmjeren na ispunjavanje očekivanja i onog koji je usmjeren na razumijevanje materijala i usvajanje sadržaja. Na kraju, mnoge konceptualizacije o uključenosti uključuju samo jedan ili dva od ta tri tipa uključenosti.

2. KONCEPTUALNA PROMJENA

Da bi moglo doći do smislenog učenja matematike, potrebno je potaknuti konceptualnu promjenu kod učenika. Konceptualna promjena je radikalan intelektualni događaj, koji često nije moguće izazvati odjednom, nego će naći svoj put tek nakon što učenik u više različitih konteksta uoči važnost nove ideje pred starom, te bude spreman povezati novu ideju sa postojećim sustavom ideja.

Čovjek suočen s novom informacijom ili idejom, najprije pokušava razumjeti ideju, što znači povezati ju s onim što već zna, te je tako uklopiti u svoj postojeći sustav ideja i znanja. Ako je povezivanje moguće, ideju razumijemo, i ona postaje dio strukturiranog znanja. No, ako povezivanje nije moguće, jer nova ideja proturječi nekoj od dublje ukorijenjenih postojećih ideja, onda je osoba pred dvije mogućnosti: ili će prestrukturirati svoj postojeći sklop ideja i integrirati novu ideju, ili će odbaciti novu ideju. Prva mogućnost je puno zahtjevnija od druge, te će se najčešće dogoditi da nova ideja bude odbačena, ukoliko ne postoje jaki argumenti u njenu korist. Ukoliko dođe do konceptualne promjene, to će rezultirati novom, čvršćom, izgrađenijom i trajnijom strukturom ideja, koja će opet omogućiti lakše daljnje učenje.

Učenje koje za cilj ima intelektualni razvoj učenika od nastavnika zahtijeva:

- poznavanje i uvažavanje učeničkih predkoncepcija i stavova,
- analizu intelektualnih zahtjeva koji se na učenike postavljaju pri razvoju i promjeni koncepcija,
- odabir nastavnih tehnika koje će omogućiti konceptualnu promjenu.

Korijeni pristupa učenju konceptualne promjene mogu se naći u Thomas Kuhnovom radu o promjeni teorije u filozofiji i povijesti znanosti. Kuhnova klasična knjiga *Struktura znanstvene revolucije* (1962.) je prevedena na 18 jezika, te je prodano oko 20 milijuna primjeraka, što je vjerojatno najprodavanija knjigu o filozofiji i povijesti znanosti ikad (Machamer, 2007.; prema Reschly, Christenson, 2012.). Kuhn je tvrdio za kontekstualni pogled koncepata prema kojima one nisu apstraktne, definicije bazirane na pravilima koja sadrže određeni broj nužnih i dovoljnih uvjeta, dok je Wittgenstein pristalica uvjeta vezanih u mrežu međusobno povezanih obiteljskih sličnosti. Kada postoji pomak u skupu ideja/sustavu znanja, postoji "konceptualna promjena," odnosno, značenje pojmova ugrađenih u sustav također se mijenja. Znanstveni koncepti u novim idejama, čak i kada zadrže ime koje su imali u starim idejama, izrazito se razlikuju od onih starih. Kuhnove ideje o konceptualnoj promjeni razvijene u razvojnoj psihologiji kroz djelo Susan Carey te u znanosti obrazovanja kroz rad Michaela Posnera i njegovih kolega (Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008). Oboje su naglašavali racionalne aspekte promjena teorije, kako bi se opisalo kako se dječja struktura znanja mijenja tijekom spontanog kognitivnog razvoja, da objasne poteškoće s kojima se učenici suočavaju kada moraju naučiti nove znanstvene koncepte.

2.1. Konceptualna promjena u obrazovanju

U području obrazovnih znanosti činilo se da Kuhnovi prijedlozi pružaju toliko potreban teorijski okvir za objašnjavanje poteškoće učenika u razumijevanju pojmova. Kao što je navedeno u White i Gunstone (prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008) istraživači su posvetili veću pozornost učeničkim idejama i objašnjenjima fizičkih fenomena. Počeli su shvaćati da učenici imaju razne spoznaje, zablude, i alternativna uvjerenja, od kojih su se neka pokazala vrlo složena. U nekim slučajevima te zablude činile su se vrlo sličnima ranijim teorijama u povijesti znanosti, kao što su, na primjer, teorija poticaja u mehanici (McCloskey, 1983; prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008). Na osnovu gore navedenog, Posner (1982; prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008) povukao je analogiju između više vrsta promjena, potrebnih da bi učenici učili s razumijevanjem prirodoslovne predmete, i Kuhnovog objašnjenja promjena teorija u znanosti. Oni su tvrdili da studenti moraju proći radikalnu konceptualnu promjenu kada je u pitanju razumijevanje znanstvenih koncepata kao što su 'sila' ili 'toplina' ili 'energija'. Oni moraju zamijeniti svoje predrasude ili zablude s novim znanstvenim konceptima. Kombinirajući Kuhnove ideje s Piagetovim pojmom akomodacije i asimilacije, Posner je razvio teoriju, prema kojoj postoje četiri temeljna uvjeta koja trebaju biti ispunjena prije nego što može doći do konceptualne promjene u obrazovanju: (1) mora postojati nezadovoljstvo postojećim shvaćanjima, (2) mora se razviti novi koncept koji je razumljiv učenicima, (3) nova koncepcija mora biti uvjerljiva, i (4) nova koncepcija trebala bi omogućiti učinkovitu primjenu. Ovaj teorijski okvir, poznat kao 'klasični pristup ' konceptualnoj promjeni, postao je vodeća teorija koja vodi istraživanje u nastavnoj praksi. Prema tome, učenik je znanstvenik, proces učenja je racionalni proces zamjene, konceptualne promjene, koji se događa u kratkom vremenskom razdoblju, a kognitivni konflikt je glavna nastavna strategija za promicanje konceptualne promjene.

Teorijske i metodološke rasprave koje su se dogodile u procesu nadopune klasičnog pristupa konceptualne promjene su neke od najzanimljivijih u području učenja i poučavanja. Tijekom godina, znanstvenici su shvatili da su pitanja prikupljena klasičnim pristupom u obrazovanju mnogo kompliciranija, imaju veze s prirodom koncepata i s procesom konceptualne promjene, te da se ona mogu primijeniti na mnogim područjima učenja, a ne samo na učenju prirodnih predmeta. U tom procesu, moglo bi se utvrditi da je istraživanje konceptualne promjene moralo doživjeti radikalnu konceptualnu promjenu.

Danas, većina istraživača slaže se da konceptualna promjena istražuje kako pojmovi mijenjaju učenje i razvoj u pojedinim područjima predmeta ili domenu znanja, fokusirajući se na točnije objašnjavanje poteškoća učenicima u učenju naprednih i neintuitivnih pojmova u ovim područjima.

2.2. Procesi i mehanizmi konceptualne promjene

Dosadašnji empirijski nalazi su pokazali da je tijek konceptualne promjene konzervativan i spor proces. Čak i kada su istraživači tvrdili da se radikalne konceptualne promjene događaju na 'duge pruge', to su obično završna stanja sporog i postupnog procesa, a ne iznenadna i radikalna vrsta brze promjene (Caravita i Hallden, 1994; Vosniadou, 2003; Hatano i Inagaki, 1994). To je važno pitanje u konceptualnom istraživanju promjena i ima različite implikacije za pouku. Ako student ima teoriju A i treba ju zamijeniti teorijom B, koja je nemjerljiva sa teorijom A, kako se to može najbolje učiniti? Tu je obično neki temelj iz kojeg će student početi polako analizirati svoje početne stavove da bi ih promijenio u skladu sa znanstvenom teorijom. Nastavno na neke od gore navedenih ideja, neki istraživači rade razliku između "spontane" konceptualne promjene koje će se dogoditi u procesu kognitivnog razvoja i 'podukom - inducirane' konceptualne promjene proizvedene kao rezultat nastave (Vosniadou, 2003; Hatano i Inagaki, 1994).

2.3. Konceptualna promjena u matematici

Posljednjih godina provedena su brojna istraživanja u raznim područjima matematike u kojima se ispitivao proces konceptualne promjene. Najpoznatija od njih vezana su uz problem usvajanja koncepata racionalnih i realnih brojeva. Učenici su od malena izloženi usvajanju koncepata brojanja na raznim modelima poput igračaka i voća koji ih okružuju i kao takva nesvjesno su stvarala koncept prirodnih brojeva. Znaju da svaki prirodni broj ima svog prethodnika i sljedbenika, osim broja jedan. Usvajanje racionalnih brojeva stvara probleme jer racionalni brojevi nemaju prethodnika i sljedbenika pa djeca teško shvaćaju da se, na primjer, između brojeva jedan i dva nalazi beskonačno mnogo brojeva. Isto vrijedi i za realne brojeve (Merenluoto i Lehtinen, 2002; prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008).

Sam Thomas Kuhn je izuzeo matematiku iz obrasca znanstvenog razvoja i promjenu predstavio u članku *Strukture znanstvenih revolucija* (Mahoney, 1997; prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008). Učinio je to zato što se matematika temelji na deduktivnim dokazima, a ne na eksperimentu, i dokazano je da je vrlo tolerantna na anomalije. Za razliku od znanosti, formuliranje nove teorije iz matematike obično nosi matematiku više na opću razinu analize i omogućuje širu perspektivu koja stvara moguća rješenja koja nije bilo moguće formulirati prije (Corry, 1993; Dauben, 1984; prema Vosniadou, Vamvakoussi, Skopeliti, 2008). Uvjeti potrebni za konceptualnu promjenu zahtijevaju klimu u učionici koja potiče razmišljanje, propitkivanje ispravnosti vlastitih koncepcija te mogućnost njihovih ispravaka ili nadograđivanja. Takva se promjena ne događa odjednom, već traži duži vremenski period. Nastavnici ne mogu očekivati konceptualnu promjenu kod učenika nakon samo jednog nastavnog sata, odnosno nastavne lekcije. Učenici usvajaju nove koncepte generalizirajući postojeće, ispravljajući pogreške i boreći se s time da zamijene postojeće koncepte, koji su duboko ukorijenjeni, novima. Isto tako, konceptualna promjena zahtjeva više iskustva. Nove koncepte potrebno je primjenjivati u raznim slučajevima i primjerima kako bi učenici uspjeli promijeniti svoje razmišljanje. Potrebno je više od jednog iskustva da učenik počne sigurno koristiti novi koncept u svom pravom kontekstu. Nastavnik će morati pružiti učenicima više prilika kako bi pokazali ono što znaju i kako bi otkrili odgovarajuću primjenu novih koncepata. Takav način razmišljanja je početak usvajanja novih koncepata čija će se primjena kasnije širiti na zahtjevnije slučajeve i primjere. Isto tako, važno je učenicima omogućiti socijalnu interakciju s nastavnikom ili drugim učenicima. Nastavnik mora dobiti povratnu informaciju o tome prihvaćaju li učenici nove informacije koje se kose s njihovim konceptima. Ukoliko nema povratne informacije učenika, lako je moguće da neće doći do konceptualne promjene i da će učenici ostati zbunjeni s puno nejasnoća, što će implicirati lošim nastavkom obrade i usvajanja novih koncepata (Vosniadou, Vamvakoussi i Skopeliti, 2008; Vamvakoussi, 2007).

3. CILJ, PROBLEMI I METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA

Dosad provedena istraživanja razine uključenosti ili zalaganja učenika ukazuju da se radi o složenom konstruktu koji se sastoji od različitih komponenti. Bihevioralna uključenost odnosi se na sudjelovanje u nastavnim aktivnostima, emocionalna uključenost obuhvaća pozitivne i negativne afektivne reakcije, dok kognitivna uključenost uključuje spremnost da se uloži napor neophodan da se razumiju kompleksne ideje i svladaju zahtjevne vještine.

Cilj diplomskog rada je utvrditi kako su različite komponente uključenosti na nastavi matematike povezane s usvajanjem novih koncepata u matematici na primjeru koncepta parabole

S obzirom na navedeno, formulirani su sljedeći problemi istraživanja:

1. utvrditi uspješnost učenika u rješavanja zadataka koji zahtijevanju poznavanje i razumijevanje koncepta parabole
2. ispitati kako učenici shvaćaju ulogu uključenosti pri učenju matematike te kako procjenjuju svoju uključenost i samoefikasnost pri učenju matematike općenito te specifično pri učenju krivulja drugog reda
3. utvrditi povezanost uključenosti i samoefikasnosti s postignutom konceptualnom promjenom u razumijevanju koncepta parabole

3.1. Sudionici

U istraživanju je sudjelovao 41 učenik trećeg razreda iz dva razredna odjeljenja jedne opće gimnazije. Među njima je bilo 16 učenika (39.02%) i 25 učenica (60.98%), a njihova prosječna dob bila je 17.1 godina. Ukupni prosjek ocjena svih učenika je 3.9, prosjek očekivanih ocjena iz matematike na kraju trećeg razreda iznosi 3.2, dok je prosjek ocjena iz matematike na kraju drugog razreda 2.9. U posttestu sudjelovalo je 4 učenika manje, odnosno 37 učenika.

3.2. Postupak

Istraživanje je provedeno u dvije točke mjerenja. Provođenje ispitivanja bilo je nadgledano kako bi se smanjila mogućnost prepisivanja.

U prvoj točki mjerenja, koja je provedena prije obrade nastavne jedinice Parabola, ispitano je njihovo predznanje pomoću kratkog testa (predtest). Učenici su u vremenu od petnaest do dvadeset minuta morali samostalno, u što većem postotku riješiti test. Također su ispitana uvjerenja učenika o ulozi uključenosti pri učenju matematike, kao i njihova samoprocjena samoefikasnosti i uključenosti u nastavu matematike. Uvjerenja učenika o uključenosti ispitana su putem otvorenih pitanja ("*Po tvom mišljenju, što je potrebno da bi netko bio uspješan u matematici? Po čemu možeš zaključiti je li neki učenik uspješan u matematici? Što za tebe znači ulagati trud u učenje matematike? Po čemu možeš primijetiti da neki učenik ulaže trud u učenje matematike?* "), dok su samoprocjene dobivene primjenom upitnika. Osim toga prikupljeni su i osnovni demografski podaci i podaci o prethodnoj uspješnosti u matematici.

Nakon obrade nastavne jedinice Parabola, koja se obrađuje u sklopu nastavne cjeline Konike, provedena je druga točka mjerenja. U drugoj točki mjerenja također je kratkim testom ispitano znanje učenika o paraboli (posttest), a upitnikom je ispitana učenička procjena samoefikasnosti i uključenosti tijekom obrade nastavnih sadržaja vezanih uz krivulje drugog reda.

3.3. Instrumenti

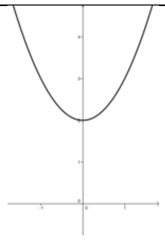
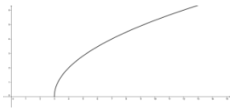
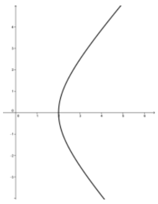
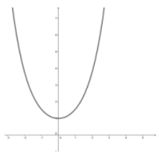
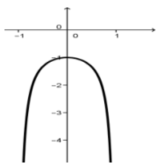
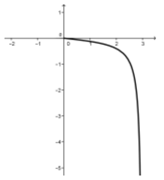
Predtest

Predtestom smo ispitivali kakvu predodžbu učenici imaju o paraboli, znaju li, svojim riječima, što preciznije opisati parabolu, razlikuju li parabolu od hiperbole, znaju li što je tangenta na parabolu, te ima li parabola asimptotu.

U prvom zadatku učenici su morali svojim riječima, što preciznije opisati što je parabola. Ovdje smo htjeli ispitati kakva je učenička predodžba o paraboli, što oni misle što parabola jest.

Točan odgovor je skupovna definicija parabole. Budući da se učenici do sada nisu susreli s takvom definicijom nismo očekivali ispravan odgovor, no to i nije bio cilj. Važno nam je bilo ustanoviti na koji način učenici vide parabolu.

U drugom zadatku ponuđeno je šest slika sa različitim krivuljama te pripadajućim jednadžbama. Učenici su morali zaokružiti slovo ispred onih krivulja za koje misle da predstavljaju parabolu, te su morali obrazložiti svoj odgovor, zašto je krivulja parabola odnosno zašto nije. Ovo pitanje daje nam uvid u to kako učenici prepoznaju krivulje, kad vide sliku vode li se jednadžbama, izgledom krivulje ili nečime trećim.

a)		$y = x^2 + 2$	Prikazana krivulja je parabola, osim sa slike i po jednadžbi možemo vidjeti da je riječ o paraboli.
b)		$y = \sqrt{4x - 12}$, $x \geq 3$	Krivulja na slici prikazuje pola parabole.
c)		$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, $x \geq 2$	Krivulja na slici prikazuje pola hiperbole, da je riječ o hiperboli lako možemo vidjeti iz dane jednadžbe.
d)		$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Krivulja na slici je lančanica, odnosno krivulja sa slike prikazuje graf funkcije kosinus hiperbolni.
e)		$y = \frac{1}{x^2 - 1}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$	Prikazana krivulja jest dio grafa racionalne funkcije.
f)		$y = \frac{x}{x^2 - 9}$; $0 < x < 3$	Krivulja sa slike prikazuje dio grafa racionalne funkcije.

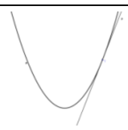
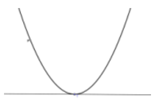
Tablica 3.3.1. Krivulje iz zadatka 2. – predtest

Jedini ispravan odgovor je odgovor pod a). Cilj ovog zadatka je ispitati kako učenici prepoznaju parabolu, odnosno na što obraćaju pažnju prilikom određivanja vrste krivulje. Je li to izgled, jednadžba ili nešto treće.

Treći zadatak ispituje znanje o tangenti na parabolu, odnosno učenici su morali svojim riječima što preciznije opisati što je tangenta na parabolu. Ovim smo zadatkom željeli provjeriti kako učenici opisuju tangentu. Je li im tangenta pravac koji s krivuljom ima jednu zajedničku točku ili je potreban još neki uvjet?!

Točan odgovor na ovo pitanje je da je tangenta na parabolu pravac koji parabolu dodiruje u jednoj točki, što su mnogi učenici ispravno zaključili.

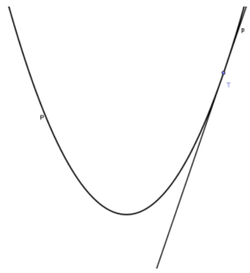
Četvrti je zadatak direktno vezan uz prethodni, treći, zadatak. Ponuđene su četiri slike te je potrebno zaokružiti slovo ispred one slike na kojoj je pravac p tangenta parabole P. Pomoću ovog zadatka možemo izvesti zaključak kako učenici gledaju na tangentu, što zapravo oni misle da je tangenta, odnosno znaju li dobro opisati što je tangenta te to povezati sa slikom.

a)		Pravac p sa slike jest tangenta parabole $\mathcal{P}$. Dodiruje parabolu u jednoj točki.
b)		Pravac p sa slike nije tangenta parabole $\mathcal{P}$. Pravac p i parabola $\mathcal{P}$ imaju samo jednu zajedničku točku, ali pravac p siječe parabolu $\mathcal{P}$ ne dodiruje ju.
c)		Pravac p sa slike jest tangenta parabole $\mathcal{P}$. Dodiruje parabolu u jednoj točki.
d)		Pravac p sa slike nije tangenta parabole $\mathcal{P}$. Pravac p siječe parabolu $\mathcal{P}$.

Tablica 3.3.2. Pravac i parabola iz zadatka 4. – predtest

Učenici koji su zaokružili slova a) i c) točno su odgovorili na ovo pitanje. Određivanje tangente u ovom zadatku usko je povezano sa prethodnim zadatkom jer su učenici zaokruživali odgovore u skladu s onime kako su opisali što tangenta na parabolu jest.

Posljednji, peti zadatak prikazuje parabolu $\mathcal{P}$ i pravac p (slika 3.3.3.) te je postavljeno pitanje je li pravac p asimptota parabole $\mathcal{P}$. Ovim smo pitanjem htjeli ispitati znaju li učenici što je asimptota te što oni misle, ima li parabola asimptotu.



Slika 3.3.3. Pravac i parabola iz zadatka 5. – predtest

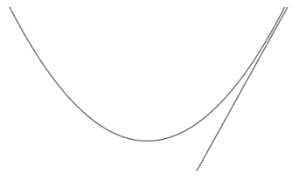
Odgovor na peto pitanje jest da parabola nema asimptota, ali da i pravac sa slike ne može biti asimptota budući da dodiruje parabolu.

Posttest

Za razliku od predtesta u kojemu smo provjeravali učeničku predodžbu i predznanje o parabolama u posttestu smo provjeravali znanje o parabolama koje su učenici usvojili nakon obrade nastavne jedinice. Ovim testom smo ispitali znaju li učenici definirati parabolu, znaju li prepoznati parabolu na slikama, kako definiraju tangentu na parabolu te ima li parabola asimptote. Budući da nam je cilj usporediti stečeno znanje s predznanjem posttest se nije bitno promijenio s obzirom na predtest. Preinake koje su se pojavile u posttestu jesu nova slika vezana uz peto pitanje o asimptotama te u skladu s time nadodano je šesto pitanje „*Ima li parabola asimptote?*“. U prvom testu slika prikazuje parabolu P, pravac p te točku T koja pripada i pravcu i paraboli, odnosno točka T zbunjuje učenike te im sugerira odgovor da je pravac sa slike zapravo tangenta na parabolu, a ne asimptota. Osim toga, u obrazloženju petog zadatka u predtestu učenici su opisivali što je asimptota, gotovo nitko nije razmišljao o tome ima li uopće parabola asimptota, iz tog razloga nadodano je šesto pitanje.

Prva četiri zadatka u posttestu identični su onima u predtestu te su kategorije odgovora jednake onima opisanim u predtestu.

Peti zadatak ima drugačiju sliku (slika 3.3.4.) uz jednak tekst zadatka. Od učenika se traži obrazloženje odgovora je li pravac sa slike asimptota parabole.



Slika 3.3.4. Pravac i parabola iz zadatka 5. – posttest

Šesto pitanje od učenika traži, bez obrazloženja, odgovor na pitanje ima li parabola asimptota.

Skala uključenosti.

Tvrdnje korištene u ovoj skali formirane su za potrebe ovog prema uzoru na skalu uključenosti za područje fizike (Putarek, Rovan i Vlahović-Štetić, 2016), a odnosile su se na uključenost pri učenju matematike općenito, odnosno nastavnih sadržaja vezanih uz krivulje drugog reda. Skala uključenosti sastojala se od tri komponente – bihevioralne (10 čestica, npr. „*Redovito učim matematiku. / Redovito sam učio/učila matematiku tijekom obrade ovog gradiva.*“; α = 0.93 za matematiku općenito, α = 0.90 za krivulje drugog reda), kognitivne (6 čestica, npr. *„Učim matematiku dok nisam siguran/sigurna da sve razumijem. / Učio/učila sam dok nisam bila sigurna da sve razumijem“*; α = 0.77 za matematiku općenito, α = 0.73 za krivulje drugog reda) i emocionalne uključenosti (8 čestica, npr. „*Općenito se osjećam dobro na satu matematike. / Općenito sam se osjećao/osjećala dobro na satu matematike prilikom obrade ovog gradiva.*“; α = 0.86 za matematiku općenito, α = 0.90 za krivulje drugog reda). U ovom istraživanju potvrđena je trofaktorska struktura upitnika. Učenici su tvrdnje procjenjivali na ljestvici od 1 do 5, pri čemu broj 1 znači potpuno neslaganje s tvrdnjom, a broj 5 potpuno slaganje s tvrdnjom. Ukupni rezultat računa se kao prosjek odgovora na svim česticama.

Skala samoefikasnosti

Skala samoefikasnosti (Rovan, 2011) korištena je za ispitivanje samoefikasnosti u matematici općenito, a za potrebe ovog istraživanja prilagođena je i za temu krivulja drugog reda. Ova se skala sastoji od 8 čestica u obliku tvrdnji koje se procjenjuju na ljestvici od 1 do 7, pri čemu broj 1 znači potpuno neslaganje s tvrdnjom, a broj 7 potpuno slaganje s tvrdnjom. Primjer čestice je: *Siguran/sigurna sam da mogu naučiti gradivo iz matematike/ dobro naučiti gradivo vezano uz krivulje drugog reda*. Ukupni rezultat računa se kao prosjek odgovora na svim česticama. Pouzdanost skale u ovom je istraživanju za računanje bila α = 0.94 za matematiku općenito te α = 0.96 za krivulje drugog reda.

Skala samoefikasnosti u samoregulaciji

Skala samoefikasnosti u samoregulaciji (Bandura, 2006) sastojala se od 9 čestica. Ova skala mjerila je uvjerenja učenika o njihovim vlastitim sposobnostima da sami reguliraju svoje učenje, a prilagođena je posebno za područje matematike. Kao i u Skali samoefikasnosti, tvrdnje su procjenjivane na ljestvici od 1 do 7, a ukupni rezultat čini prosjek odgovora na svim česticama. Primjeri čestice je: „*Siguran/na sam da se mogu natjerati na učenje unatoč drugim zanimljivim stvarima koje mogu raditi*". U ovom istraživanju pouzdanost skale izražena koeficijentom unutarnje konzistencije iznosi α = 0.91.

4. REZULTATI I RASPRAVA

Kao odgovor na prvi problem istraživanja analizirani su učenički odgovori na zadatke u predtestu i u posttestu. Odgovori na pitanja analizirani su pojedinačno, i jednako tako, uspoređeni su učenički odgovori oba testa te je uspoređena uspješnost pri rješavanju zadataka u predtestu i u posttestu.

Predtest, prvi zadatak

Stupčastim dijagramom frekvencija – Parabola (1) (slika 4.1) prikazan je broj učenika koji su dali sljedeće odgovore:

1 Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u ravnini M, tako da točka F ne pripada pravcu d. Skup svih točaka jednako udaljenih od zadanog pravca i zadane točke nazivamo parabola i označavamo ga sa $\mathcal{P} = \{T \in M \mid d(T,d) = d(T,F)\}$.

2 Parabola je krivulja u koordinatnom sustavu.

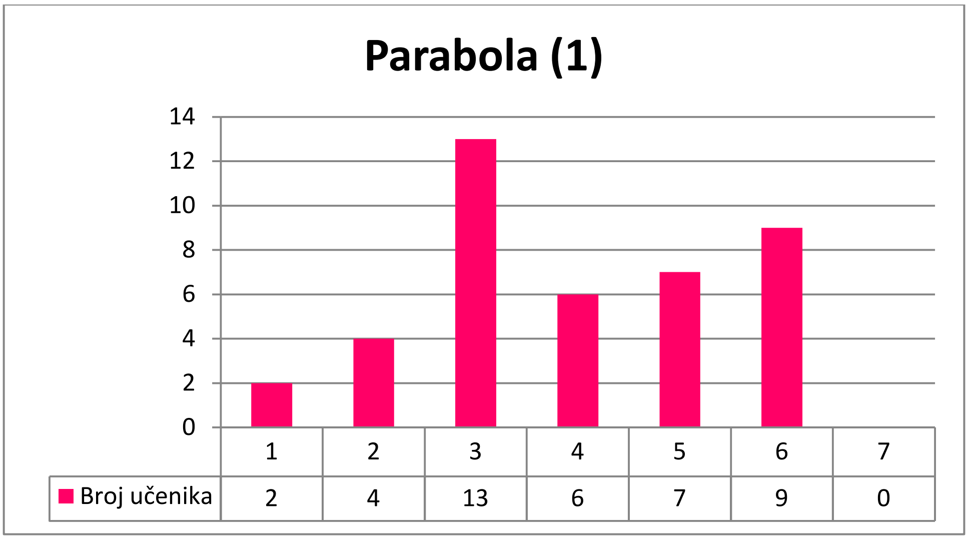
3 Parabola je krivulja drugog reda.

4 Parabola je krivulja koja ima svojstvo simetrije.

5 Parabola je graf kvadratne funkcije.

6 Ne znam.

7 Učenik nije ništa odgovorio.



Slika 4.1. Dijagram frekvencija – Parabola (1)

Iz dijagrama vidimo da su samo dva učenika prije obrade nastavne jedinice *Parabola* znali skupovnu definiciju parabole. Daljnjom provjerom utvrdili smo da se radi o učenicima s prosjekom ocjena 5.0. Zanemarimo li odgovor 1 koji je unaprijed naučen, primjećujemo da je odgovor „Parabola je krivulja drugog reda“ najučestaliji, tj. 13 učenika (31.7%) baš je tim riječima opisalo parabolu u prvom zadatku. Iz toga možemo zaključiti da učenici parabolu ispravno povezuju s već naučenim krivuljama drugog reda, odnosno s elipsom i hiperbolom. Odgovor 3 dala su 4 učenika (9.8%), iz čega možemo zaključiti da učenici krivulju ne vide kao objekt u prostoru, već isključivo kao krivulju koja se nalazi u 'lijepo namještenom' koordinatnom sustavu. Šest učenika od 41 ispitanih, odnosno 14.6%, odgovorilo je da je parabola krivulja koja ima svojstva simetrije. Ovaj odgovor govori nam da učenici parabolu doživljavaju na temelju izgleda, odnosno da primjećuju simetriju, no niti jedan od učenika nije napisao o kojoj simetriji je riječ niti s obzirom na što je parabola simetrična. S obzirom na predznanje, neki učenici, točnije 17.1%, odgovorilo je da je parabola graf kvadratne funkcije. Odgovor je nepotpun, graf kvadratne funkcije jest parabola, no nije svaka parabola graf kvadratne funkcije. Iako su svi učenici dali odgovor na ovo pitanje, ipak je 9 učenika (22.0%) odgovorilo da ne zna što je parabola.

Neki od konkretnih učeničkih odgovora su:

Učenik 1: *Parabola je krivulja u koordinatnom sustavu.*

Učenik 2: *Parabola je graf kvadratne funkcije.*

Učenik 3: *Parabola je beskonačna krivulja u koordinatnom sustavu.*

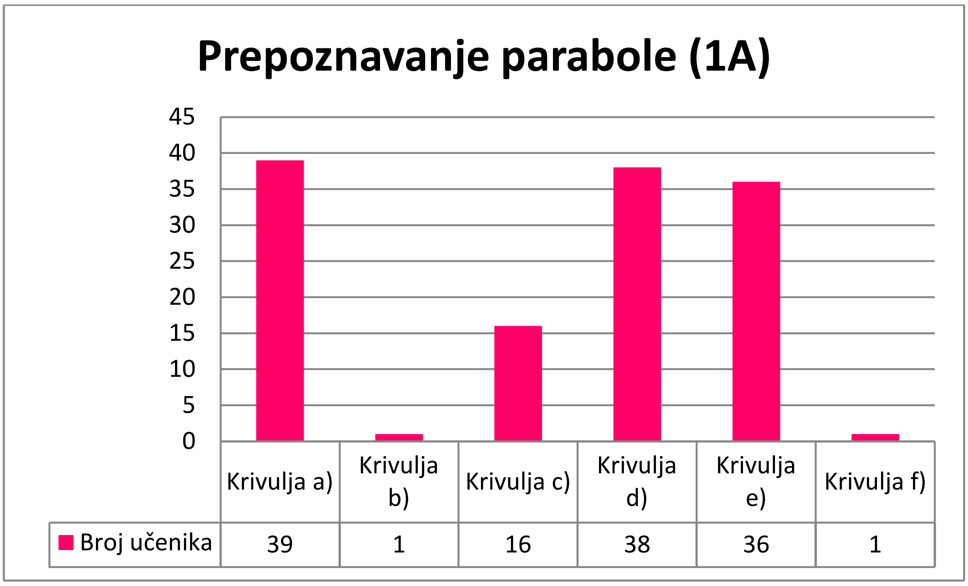
Učenik 4: *Parabola je krivulja drugog reda.*

Učenik 5: *Parabola je neka krivulja koju crtamo u koordinatnom sustavu.*

Budući da učenici parabolu usko vežu uz koordinatni sustav, bilo bi dobro da prilikom uvođenja parabole nastavnici dovoljno pažnje posvete geometrijskim svojstvima tog skupa točaka, ne vežući ga, odnosno ne smještajući ga odmah u koordinatni sustav.

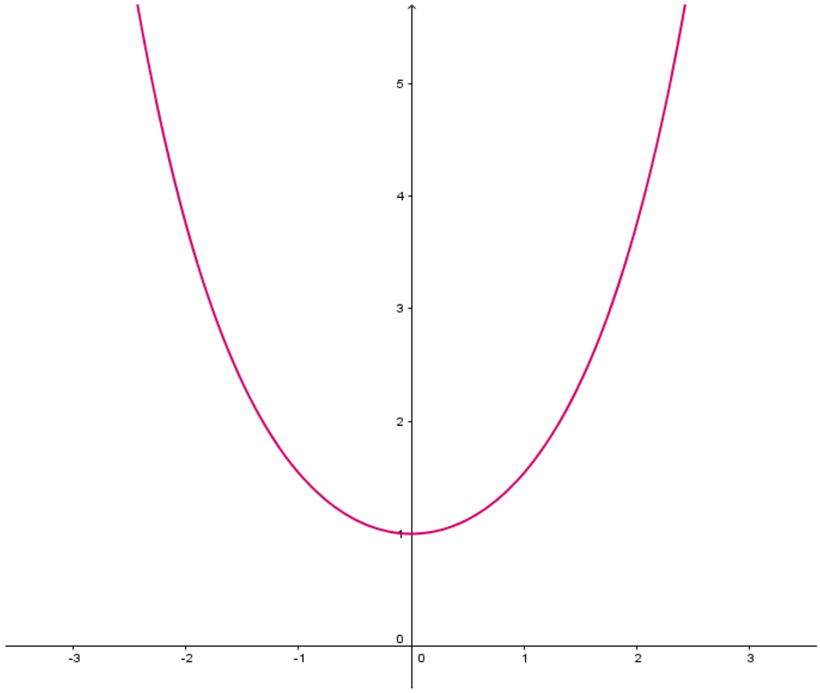
Predtest, drugi zadatak

Stupčasti dijagram frekvencija Prepoznavanje parabole (1A) (slika 4.2.) stupcima je prikazan broj učenika za svaku krivulju koju su učenici zaokružili. Krivulje u dijagramu navedene su jednakim redoslijedom kao i u tablici 3.3.1. Krivulje iz zadatka 2. – predtest.



Slika 4.2. Dijagram frekvencija – Prepoznavanje parabole (1A)

Na temelju dijagrama primjećujemo da je 39 učenika (95.12%) zaokružilo krivulju a), iz čega zaključujemo da gotovo svi graf kvadratne funkcije prepoznaju kao parabolu. Za krivulju b), jednako kao i za krivulju f), odlučio se samo jedan učenik (2,44%). Krivulja c), predstavlja polovinu hiperbole, i nju je kao parabolu prepoznalo 16 učenika (39.02%). Lančanica (slika 4.3.), odnosno graf funkcije kosinus hiperbolni, jest krivulja d). Nju je kao parabolu prepoznalo 38 učenika (92.68%). Razlog ovome može biti činjenica da je lančanica sličnog izgleda kao i parabola. Učenici se prije nisu susreli s ovom krivuljom niti s funkcijom kosinus hiperbolni pa ovu krivulju odabrali vodeći se vizualnim dojmom. Krivulja e), jest dio grafa racionalne funkcije, no u jednadžbi te krivulje se pojavljuje kvadratni član. Jednadžba krivulje, te sam njen izgled potakli su učenike da tu krivulju vide kao parabolu iznova na temelju vizualnog dojma.



Slika 4.3. Graf funkcije kosinus hiperbolni - lančanica

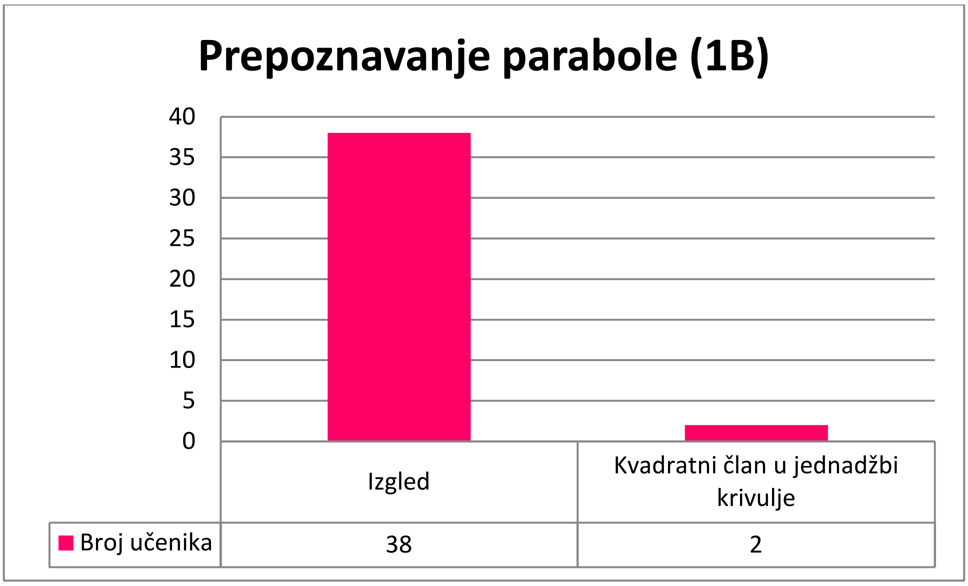
Analizom odgovora te objašnjenja koja se pojavljuju u sklopu drugog zadatka možemo složiti niže navedene kategorije.

Iz ovog smo razmatranja isključili učenika koji je jedini točno odgovorio na ovo pitanje zaokruživši samo krivulju a).

Stupčasti dijagram frekvencija – Prepoznavanje parabole (1B) (slika 4.4.) prikazuje sljedeće informacije o učeničkim odgovorima:

1 Učenik je zaokružio sve krivulje koje izgledom podsjećaju na parabolu te u objašnjenju napisao da krivulja izgleda, odnosno ne izgleda kao parabola. [a), d) i e)] – Učenik se vodio izgledom krivulje.

2 Učenik je zaokružio krivulje koje u jednadžbi imaju kvadratni član te u objašnjenju napisao da je parabola svaka krivulja čija jednadžba ima kvadratni član. [a), c), e) i f)] – Učenik se vodio jednadžbom.



Slika 4.4. Dijagram frekvencija – Prepoznavanje parabole (1B)

Iz dijagrama vidimo da je 95.0% učenika zaokružilo odgovore a), d) i e), odnosno one krivulje koje su ili parabola ili izgledom vrlo slične paraboli. S obzirom na kvadratni član u jednadžbi, 5.0% učenika zaokružilo je krivulje a), c), e) i f).

Neka od konkretnih učeničkih objašnjenja su:

- za krivulju c)

  Učenik 1: *Krivulja sa slike je parabola jer ima kvadrat u jednadžbi.*

  Učenik 2: *Krivulja sa slike nije parabola jer ne ide ni gore ni na dolje.*

  Učenik 3: *Mislim da krivulja sa slike nije parabola zato što se nalazi u I. i IV. kvadrantu.*

  Učenik 4: *Krivlja nije parabola jer se tjeme ne nalazi na ordinati.*

- za krivulju d)

  Učenik 1: *Krivulja sa slike je parabola jer ima eksponent.*

  Učenik 2: *Krivulja je parabola jer je jednaka i s lijeve i s desne strane osi x.*

  Učenik 3: *Krivulja je obična parabola sa nepoznanicom e i eksponentima.*

  Učenik 4: *Krivulja je parabola jer se krakovi šire jednako od zajedničkog tjemena.*

- za krivulju e)

  Učenik 1: *Krivulja je parabola jer joj je jednadžba kvadratna funkcija.*

Učenik 2: *Krivulja je parabola jer je simetrična i beskonačna.*

Učenik 3: *Krivulja nije parabola jer ima ograničenje intervala* $\langle -1, 1\rangle$.

Učenik 4: *Mislim da krivulja nije parabola jer ima čudnu jednadžbu.*

Predtest, treći zadatak

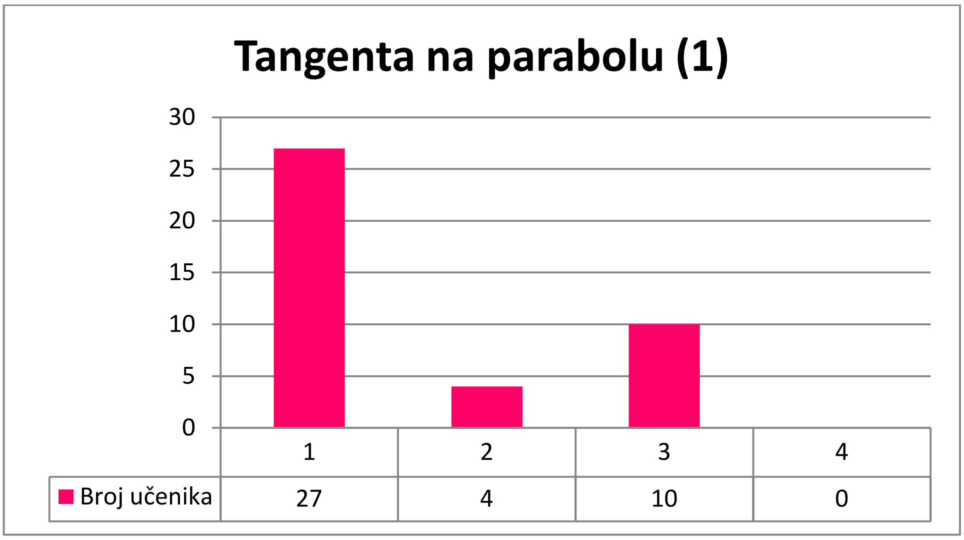
U trećem zadatku predtesta od učenika se tražilo da svojim riječima opišu što je tangenta na parabolu. U stupčastom dijagramu frekvencija – Tangenta na parabolu (1) (slika 4.5.) prikazane su frekvencije odgovora grupirane na sljedeći način:

1 Tangenta na parabolu je pravac koji parabolu dodiruje u jednoj točki.

2 Tangenta na parabolu je pravac koji sa parabolom ima jednu zajedničku točku.

3 Učenik je odgovorio „Ne znam“.

4 Učenik nije odgovorio na pitanje.



Slika 4.5. Dijagram frekvencija – Tangenta na parabolu(1)

Iz dijagrama je vidljivo da je 65.9%, odnosno 27 učenika točno odgovorilo na pitanje. Iz toga možemo zaključiti da su učenici naučili što je tangenta na kružnicu te su to direktnom analogijom primijenili i na ovome pitanju. Četiri učenika, odnosno 9.8%, odgovorilo je da je tangenta na parabolu pravac koji s parabolom ima jednu zajedničku točku. Jedan od mogućih razloga za ovaj odgovor je taj što je istina da tangenta s parabolom ima jednu zajedničku točku, no potrebno je naglasiti da tangenta dodiruje parabolu budući da postoje pravci koji s parabolom imaju jednu zajedničku točku, ali joj nisu tangenta. Svi takvi pravci su pravci paralelni s osi parabole (slika 4.6.). Deset učenika (24.4%) napisalo je da ne zna što je tangenta na parabolu.

Navedimo neke od konkretnih učeničkih odgovora:

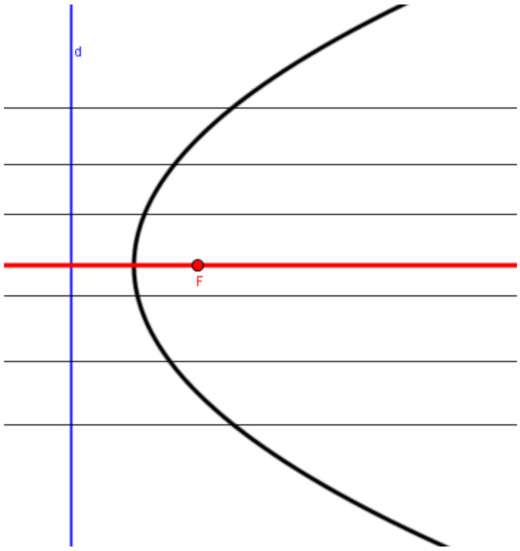
Učenik 1: *Tangenta je pravac koji dira parabolu u jednoj točki.*

Učenik 2: *Tangenta je pravac koji dodiruje parabolu.*

Učenik 3: *Tangenta je pravac koji se dodiruje u nekoj točki s parabolom.*

Učenik 4: *Tangenta je pravac koji s parabolom ima jednu zajedničku točku.*

Učenik 5: *Tangenta je pravac koji s parabolom ima jednu dodirnu točku.*



Slika 4.6. Pravci paralelni s osi parabole

Predtest, četvrti zadatak

Četvrti je zadatak direktno vezan uz prethodni, treći, zadatak. Ponuđene su četiri slike te je potrebno zaokružiti slovo ispred one slike na kojoj je pravac p tangenta parabole $\mathcal{P}$. Pomoću ovog zadatka možemo izvesti zaključak kako učenici gledaju na tangentu, što zapravo oni misle da je tangenta, odnosno znaju li dobro opisati što je tangenta te to povezati sa slikom.

Stupčasti dijagram frekvencija – Prepoznavanje tangente (1) (slika 4.7.) prikazuje broj učenika s obzirom na to koji su odgovor odabrali. Navedene opcije vezane su uz tablicu 3.3.2. Pravac i parabola iz zadatka 4. – predtest. Učeničke odgovore grupirali smo na sljedeći način:

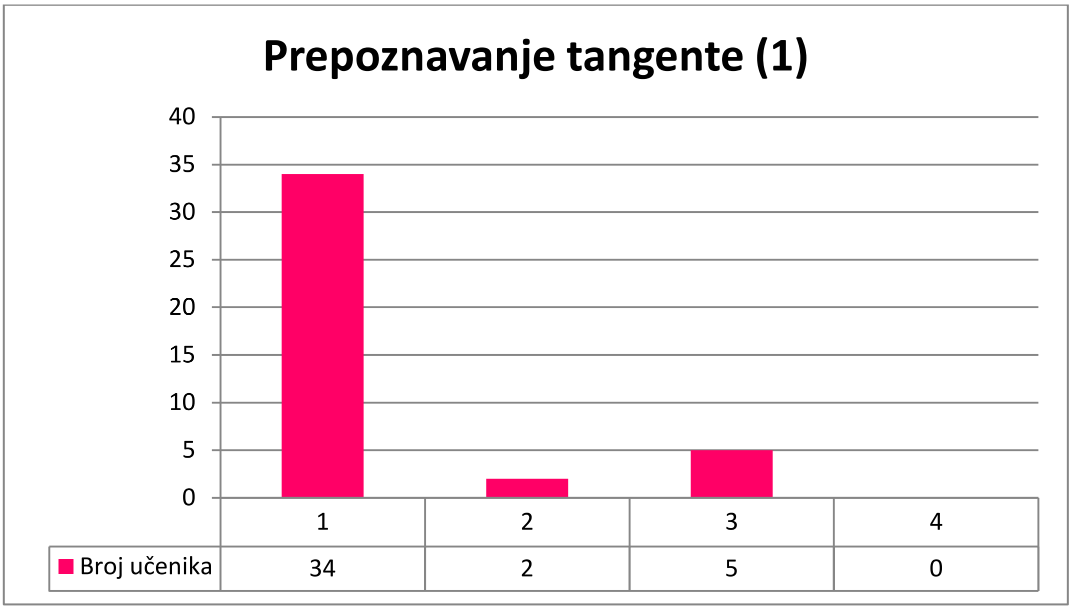
1 Učenik je zaokružio slova a) i c), tj. tangentu prepoznaju kao pravac koji dodiruje parabolu u jednoj točki.

2 Učenik je zaokružio odgovore a), b) i c) tj tangentu prepoznaju kao pravac koji ima jednu zajedničku točku s parabolom.

3 Učenik nije zaokružio niti jedan ponuđeni odgovor.

4 Učenik je zaokružio sve ponuđene odgovore.

Učenici koji su zaokružili slova a) i c) točno su odgovorili na ovo pitanje.



Slika 4.7. Dijagram frekvencija – Prepoznavanje parabole (1)

Promatrajući dijagram, možemo zaključiti da su prepoznali tangentu na parabolu u skladu s definicijama koje su napisali u prethodnom zadatku. Vidimo iz dijagrama da je 82.9% učenika, odnosno njih 34, zaokružilo ispravne odgovore. Zaključak koji iz toga proizlazi jest taj da učenici vizualno lakše prepoznaju tangentu na parabolu nego što opisuju riječima što tangenta na parabolu zapravo jest. Dva su učenika (4.9%) uz odgovore a) i c) zaokružili i odgovor b) iz čega možemo izvesti zaključak da su tangentu definirali kao pravac koji s krivuljom ima jednu zajedničku točku bez drugih uvjeta. Niti jedan odgovor nije zaokružilo pet učenika, što je 12.2% od ukupnog broja ispitanih. Povezujući ovaj zadatak s prethodnim možemo zaključiti da je učenicima lakše odrediti tangentu na slici nego što ju mogu samostalno opisati i/ili definirati riječima.

Uspoređujući podatke iz trećeg i četvrtog zadatka predtesta dobili smo sljedeće rezultate, prikazane matricom (slika 4.8.).

$$\begin{pmatrix} 27 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 4.8. Usporedba odgovora u trećem i četvrtom zadatku

Stupci matrice predstavljaju vrstu odgovora koji su se pojavili u trećem zadatku predtesta, dok retci matrice govore koji su odgovori zaokruženi u četvrtom zadatku. Gledajući retke matrice, iščitavamo sljedeće; 27 učenika u trećem pitanju opisalo je tangentu na parabolu kao pravac koji dodiruje parabolu u jednoj točki te su u skladu s tim odgovorom, u četvrtom zadatku zaokružili odgovore a) i c). Da je tangenta na parabolu pravac koji ima s parabolom jednu zajedničku točku pojavio se kod 4 učenika, ipak 2 učenika su u četvrtom zadatku točno zaokružila ponuđene odgovore. Iz toga možemo zaključiti da učenici nedovoljno precizno riječima definiraju tangentu na parabolu, ali ju vizualno dobro prepoznaju. Nadalje, 5 učenika je odgovorilo da ne zna što je tangenta na parabolu, ali ipak, u četvrtom zadatku ispravno prepoznaju tangentu na parabolu. Zaključak koji možemo izvesti jednak je prethodnom zaključku. Sljedeći red matrice govori nam da su 2 učenika tangentu opisali kao pravac koji s tangentom ima jednu zajedničku točku. U skladu s time zaokružili su ponuđene odgovore u četvrtom zadatku, odnosno uz a) i c) zaokružili su i b). (odgovor b) prikazuje parabolu i pravac paralelan s osi – tablica 3.3.2. b)). Treći red matrice ukazuje na činjenicu da je 5 učenika odgovorilo da ne zna odgovor na treće pitanje i jednako tako nisu zaokružili niti jedan od ponuđenih odgovora. Nule u četvrtom retku i stupcu ukazuju na to da niti jedan učenik nije zaokružio sve ponuđene odgovore, te su svi pokušali odgovoriti na pitanje u trećem zadatku.

Predtest, peti zadatak

Stupčasti dijagram frekvencija – Asimptote parabole (1) (slika 4.9.) prikazuje broj učenika koji su odgovorili na pitanje je li pravac sa slike (slika 3.3.3.) asimptota parabole. Osim odgovora, učenici su morali dati i obrazloženje.

Analizom odgovora sastavili smo sljedeće kategorije:

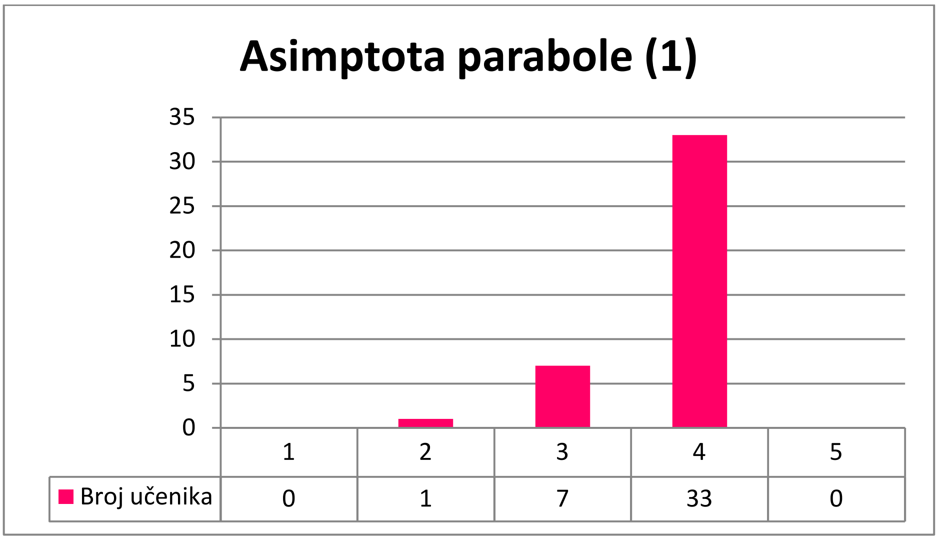
1 Parabola nema asimptote.

2 Pravac p nije asimptota parabole $\mathcal{P}$ jer se parabola i pravac sijeku, a da bi pravac bio asimptota parabole trebali bi se sijeći u nedostižnoj točki.

3 Pravac p nije asimptota parabole $\mathcal{P}$ jer asimptota je pravac kojem se krivulja približava, ali ga ne dodiruje, odnosno asimptota i parabola nemaju zajedničkih točaka.

4 Učenik je napisao da ne zna odgovor.

5 Učenik nije odgovorio na pitanje.



Slika 4.9. Dijagram frekvencija – Asimptote parabole (1)

Vidljivo je da nitko od ispitanih nije točno odgovorio na pitanje, jedan je učenik (2.4%) odgovorio da pravac sa slike ne može biti asimptota jer siječe parabolu, no nije naglasio da parabola nema asimptote. Sedam učenika (17.1%) točno je definiralo asimptotu, nitko od njih nije naglasio da parabola nema asimptota. Najveći broj učenika, njih 33 (80.5%), napisalo je da ne zna odgovor na ovo pitanje.

Neki od konkretnih učeničkih odgovora:

Učenik 1: *Pravac sa slike nije asimptota jer je asimptota pravac koji se neprestano približava krivulji, ali ju ne dodiruje.*

Učenik 2: *Pravac sa slike nije asimptota jer dira parabolu, a asimptota se približava paraboli, ali ju nikad ne dira.*

Učenik 3: *Pravac sa slike nije asimptota jer se pravac i parabola sijeku, a asimptota i parabola trebali bi se sjeći u nedostižnoj točki.*

Pogledamo li dobivene rezultate predtesta, zaključujemo da su učenici imali najveći problem s definiranjem parabole, te s prepoznavanjem parabole na slici. Učenici su zaključili da svaka krivulja koja izgleda kao parabola ili u jednadžbi ima kvadratni član zapravo jest parabola, zanemarujući ostale uvjete. Jednako tako možemo zaključiti da učenici ne vide parabolu kao samostalan objekt već ju čvrsto vežu uz koordinatni sustav. Zato je važno naglasiti da nastavnici, prilikom obrade nastavne jedinice *Parabola,* moraju obratiti pozornost na uvođenje parabole bez koordinatnog sustava, na točnu i potpunu definiciju parabole te na razliku parabole kao krivulje i parabole kao grafa kvadratne funkcije. Više o tome reći ćemo u potpoglavlju *Usvajanje koncepta parabole* u kojemu ćemo navesti aktivnosti za rad u školi kojima će se omogućiti lakše savladavanje i trajnije usvajanje koncepta parabole.

Nakon obrađene jedinice Parabola, izvršen je drugi dio istraživanja u obliku posttesta. Posttest se nije bitno razlikovao od predtesta, osim što je nadodano jedno pitanje. Analizom učeničkih odgovora dobili smo niže navedene zaključke.

Posttest, prvi zadatak

U posttestu sudjelovalo je 37 učenika, s obzirom na to rezultate ćemo prikazati u skladu s tim brojem.

U stupčastom dijagramu frekvencija – Parabola (2) (slika 4.10.) stupcima je prikazan broj učenika koji su opisali parabolu na sljedeće načine: (kategorije odgovora jednake su onima s početka istraživanja)

1 Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u ravnini M, tako da točka F ne pripada pravcu d. Skup svih točaka jednako udaljenih od zadanog pravca i zadane točke nazivamo parabola i označavamo ga $\mathcal{P} = \{T \in M \mid d(T,d) = d(T,F)\}$.

2 Parabola je krivulja u koordinatnom sustavu.

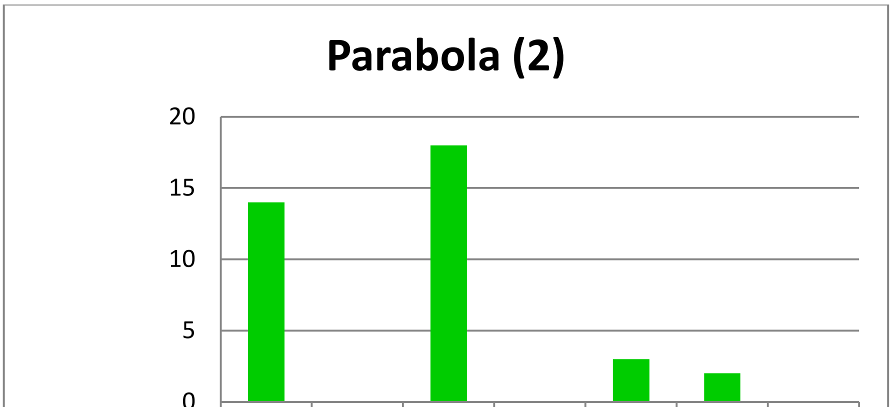
3 Parabola je krivulja drugog reda.

4 Parabola je krivulja koja ima svojstvo simetrije.

5 Parabola je graf kvadratne funkcije.

6 Ne znam.

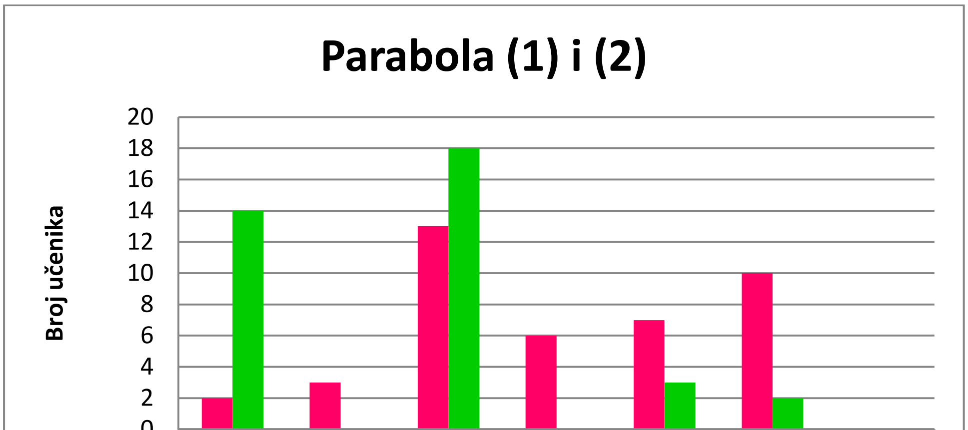
7 Učenik nije ništa odgovorio.



	1	2	3	4	5	6	7
Broj učenika	14	0	18	0	3	2	0

Slika 4.10. Dijagram frekvencija – Parabola (2)

Iz dijagrama vidimo da je 14 učenika (37.8%) parabolu opisalo skupovnom definicijom. Osamnaest učenika (48.6%) odgovorilo je da je parabola krivulja drugog reda, bez ikakvog drugog objašnjenja ili opisa. Iz čega možemo zaključiti da učenici nisu u potpunosti savladali definiciju parabole, odnosno da imaju problema s iznošenjem potpunih i ispravnih definicija. Tri učenika (8.1%) odgovorila su da je parabola graf kvadratne funkcije, dok su dva učenika (5.4%) odgovorila da ne znaju što je parabola. Iz navedenog možemo izvesti dva zaključka, prvi je taj da učenici još uvijek usko povezuju parabolu i graf kvadratne funkcije ili pak u nedostatku interesa odgovaraju ono što im prvo pada na pamet odnosno ne odgovaraju na pitanje.



	1	2	3	4	5	6	7
Predtest	2	3	13	6	7	10	0
Posttest	14	0	18	0	3	2	0

Slika 4.11. Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta

Dijagram usporedbe (slika 4.11.) pokazuje nam razliku u odgovorima prije učenja parabole, te neposredno nakon učenja parabole. Vidimo pomak koji se dogodio prilikom definiranja parabole. Na drugom testu, 14 učenika (37.8%) opisalo je parabolu skupovnom definicijom. Uspoređujući početne rezultate gdje su svega 2 učenika (4.9%) opisala parabolu skupovnom definicijom i rezultate posttesta možemo izvesti zaključak da je 12 učenika (32.43%) naučilo korektno i kompletno definirati parabolu. Da je parabola krivulja drugog reda odgovorila je većina učenika, takav opis parabole nije kriv, no nakon naučenog gradiva od većine učenika se očekuje da parabolu znaju definirati skupovnom definicijom. S obzirom na predtest, u posttestu je 5 učenika više (13.51%) parabolu opisalo kao krivulju drugog reda. Ovaj podatak možemo interpretirati na dva načina prvi je taj da učenici ne znaju dobro i potpuno definirati krivulju ili odgovaraju ono što znaju da je općenito parabola. Razlog koji dovodi do ovakvog odgovora možemo samo pretpostaviti. Ili je riječ o nezainteresiranosti ili o strahu od netočnog odgovora.

Navest ćemo neke od konkretnih učeničkih odgovora:

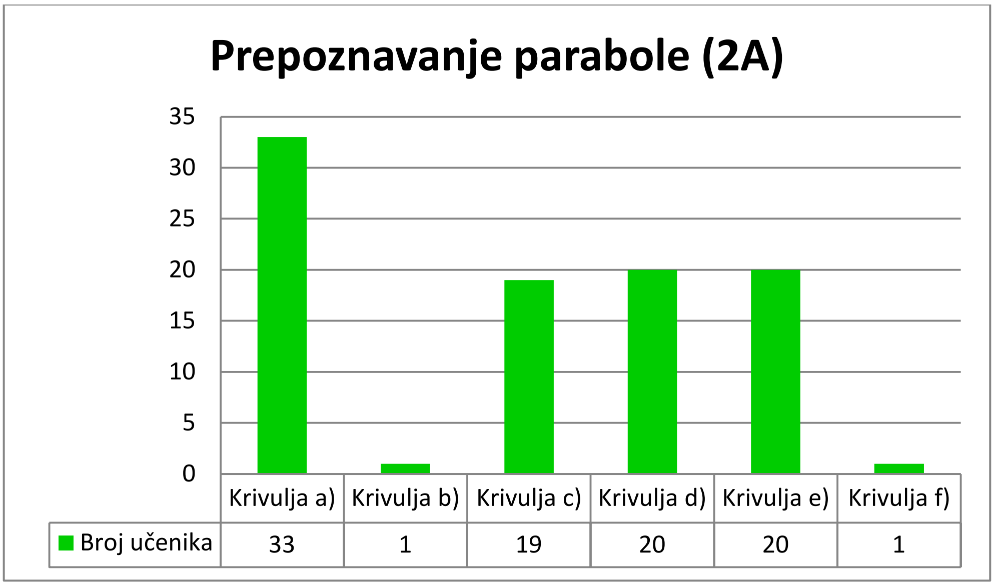
Učenik 1: *Parabola je skup točaka ravnine koja ima ravnalicu jednako udaljenu od središta kao i tjeme od središta.*

Učenik 2: *To je krivulja drugog reda, odnosno skup svih točaka čija je udaljenost od pravca p i žarišta F jednaka.*

Učenik 3: *Parabola je skup svih točaka ravnine jednako udaljenih od pravca d i žarišta F.*

Posttest, drugi zadatak

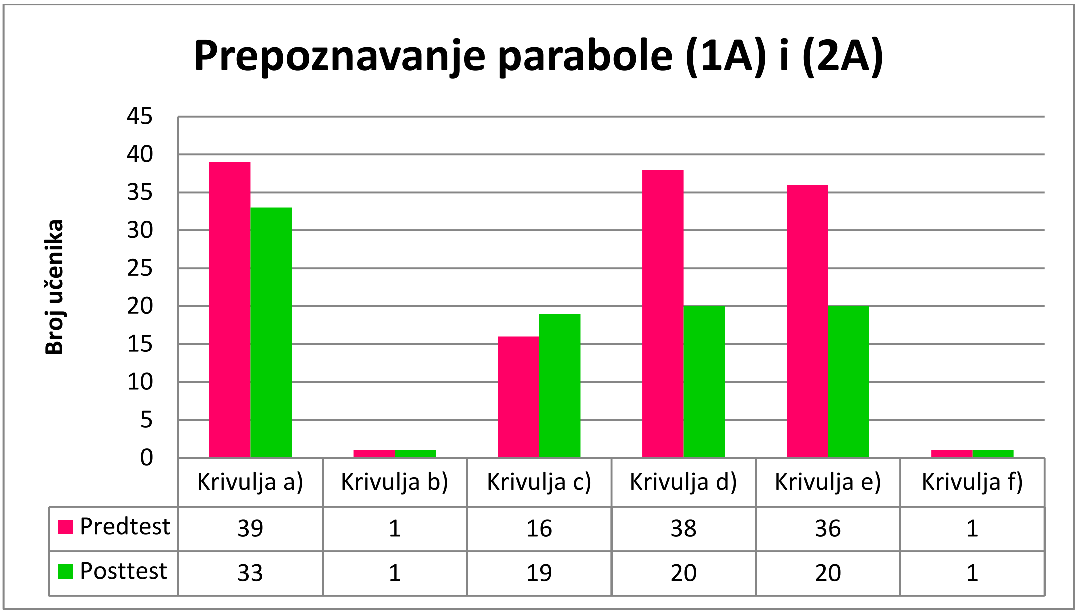
Dijagram frekvencija (slika 4.12.) stupcima prikazuje koje su krivulje ispitani učenici prepoznali kao parabolu. Krivulje u dijagramu navedene su redosljedom kao u tablici 3.3.1.



Slika 4.12. Dijagram frekvencija – Prepoznavanje parabole (2A)

Iz dijagrama se jasno vidi da je većina učenika, njih 33 (89.19%), krivulju a) prepoznalo kao parabolu. Taj odgovor je ujedno i jedini ispravan odgovor. Problem se javlja kod krivulje c), koja predstavlja polovinu hiperbole. Tu je krivulju kao parabolu prepoznalo 19 učenika (51.35%) što nam ukazuje na to da položaj krivulje utječe na učenička razmišljanja, te ponovno zaključujemo da učenicima treba ukazati na razlike između navedenih krivulja, te razbiti predrasude o tome da parabola uvijek 'lijepo' leži u koordinatnom sustavu. Krivulje d) i e) kao parabolu prepoznalo je 20 učenika (54.05%). Navedene krivulje su lančanica (krivulja d)) i dio grafa racionalne funkcije (krivulja e)). Te krivulje slično izgledaju kao parabola. Budući da su te krivulje nepoznanica ispitanim učenicima, te oni ne znaju gotovo ništa o njima i njihovim formulama, jasno je zašto su ih prepoznali kao parabole. Iz navedenih podataka vidimo da se učenici, kod prepoznavanja parabole, većinom vode vizualnim dojmom.

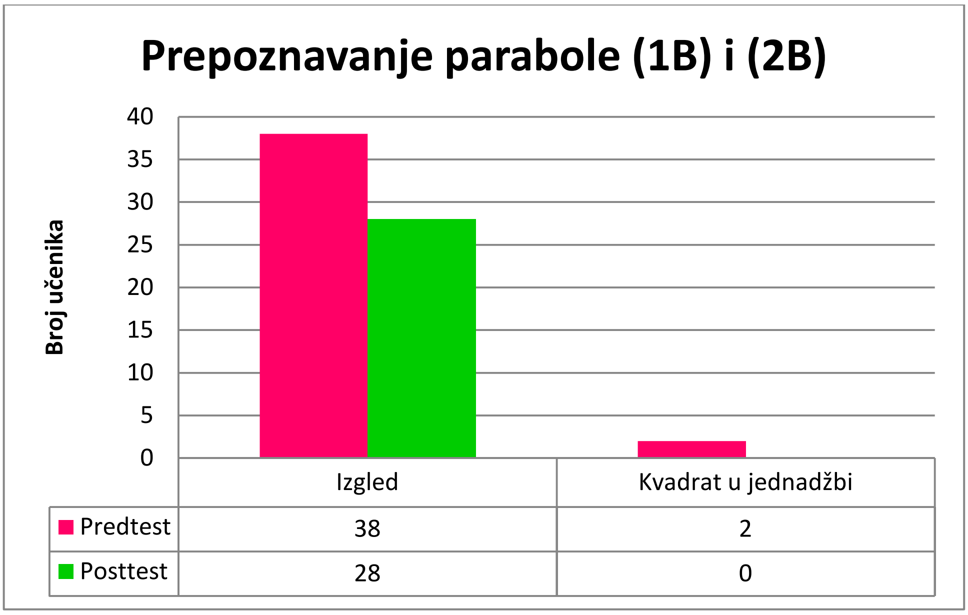
Usporedimo li dobivene rezultate predtesta i posttesta (slika 4.13.) s dijagramom, primjetit ćemo neke promjene.



Slika 4.13. Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta

Značajna promjena u rezultatima očituje se u odgovorima d) i e). Krivulju d9 kao parabolu u predtestu prepoznalo je 38 učenika, a u posttestu 18 učenika manje, što čini 48.65% ukupnog broja ispitanih učenika. Krivulju e) kao parabolu na posttestu je prepoznalo 16 učenika manje nego na prestest, a to je 43.24% ukupnog broja ispitanih učenika. Značajne razlike u odgovorima ukazuju na činjenicu da su učenici promijenili način razmišljanja, odnosno ne vode se samo izgledom krivulje nego u promatranje uzimaju i formulu.

Dijagramom usporedbe rezultata (slika 4.14.) prikazani su dobiveni rezultati prestesta i posttesta, koje smo kategorizirali s obzirom na učeničke odgovore. Ukoliko su se učenici pozivali na izgled parabole, odnosno na kvadratni član u jednadžbi, smjestili smo ih u pripadajuću kategoriju. Od 37 ispitanih učenika na posttestu, točan odgovor, odnosno zaokruženu samo krivulju a), imalo je 6 učenika (16.21%). Izuzimanjem tih učenika od ostatka dobili smo podatke prikazane u dijagramu.



Slika 4.14. Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta

Većina učenika vodila se vizualnim dojmom, njih 28 (75.67%). Iz toga zaključujemo da se učenici vode onime što vide. Od 37 ispitanika 3 su zaokružila sve ponuđene odgovore (8.11%).

Neka od konkretnih učeničkih objašnjenja na posttestu:

- za krivulju c)

  Učenik 1: *Napisana je jednadžba hiperbole pa to ne može biti parabola.*

  Učenik 2: *Prikazana funkcija nije parabola zato što je zadana jednadžba hiperbole.*

  Učenik 3: *Prikazana krivulja je parabola jer ima simetrične krakove*

- za krivulju d)

  Učenik 1: *Parabola je jer ima eksponente na x.*

  Učenik 2: *To je parabola jer izgleda kao parabola.*

  Učenik 3: *Nije parabola već neka meni nepoznata krivulja.*

- za krivulju e)

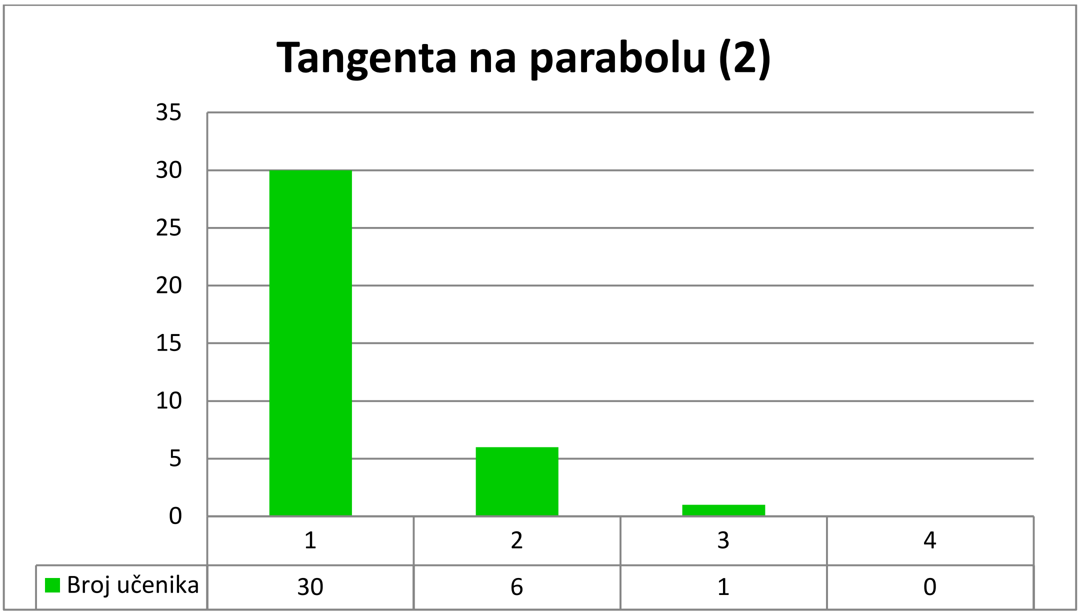
  Učenik 1: *Na slici je parabola jer ima formulu parabole.*

  Učenik 2: *Nije parabola, ali ne znam koja je krivulja.*

  Učenik 3: *Na slici je prikazana parabola jer izgleda kao parabola. Formula je nepoznata, ali ima simetrične krakove.*

Posttest, treći zadatak

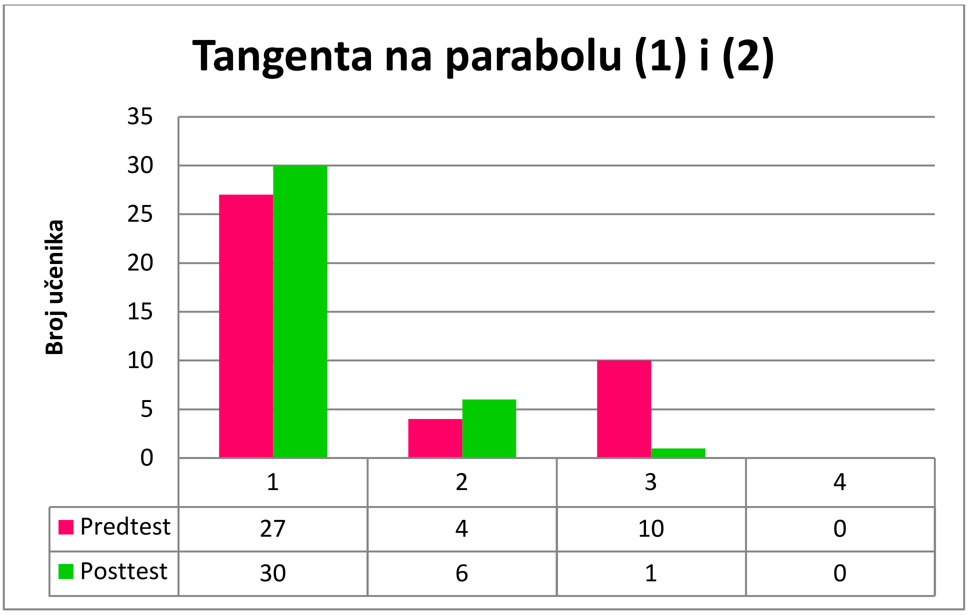
Tangenta na parabolu (2) (slika 4.15.) jest stupčasti dijagram frekvencija koji nam pokazuje na koji su način učenici opisali što za njih znači tangenta na parabolu. Odgovori koji su se pojavili klasificirani su po tome dodiruju li se pravac i krivulja te imaju li zajedničku točku.



Slika 4.15. Dijagram frekvencija – Tangenta na parabolu (2)

Iz gornjeg dijagrama iščitavamo sljedeće podatke: pojavilo se 30 (81.1%) odgovora koji kažu da je tangenta pravac koji dodiruje parabolu u jednoj točki. Većina učenika ispravno je odgovorila na ovo pitanje iz čega zaključujemo da su savladali pojam tangente. Odgovor da je tangenta na parabolu pravac koji s parabolom ima jednu zajedničku točku pojavio se kod 6 učenika (16.2%), dok je 1 učenik (2.7%) odgovorio da ne zna odgovor.

Dijagram usporedbe odgovora (slika 4.16.) prikazuje nam odnose odgovora vezanih uz tangentu na parabolu iz predtesta i posttesta.



Slika 4.16. Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta

Iz dijagrama je vidljivo da su učenici upoznati s pojmom tangente na kružnicu, te povezuju naučeno direktnom analogijom s novim gradivom. Gotovo je jednak broj učenika koji su na predtestu (65.3%) i posttestuu (81.1%) ispravno odgovorili na pitanje. Isto tako možemo vidjeti da je broj učenika koji nisu znali što je tangenta na predtestu (24.4%) raspršen na broj učenika koji su u posttestu odgovorili da je tangenta pravac koji s parabolom ima jednu zajedničku točku (16.2%). Zaključak koji izvodimo iz dobivenih odgovora kazuje nam da učenici koji su nepotpuno, odnosno nisu odgovorili na pitanje, ili ne znaju opisati što tangenta na parabolu jest ili u nedostatku vremena nepotpuno odgovaraju na pitanje, odnosno ne odgovaraju uopće.

Neki od konkretnih učeničkih odgovora:

Učenik 1: *Tangenta na parabolu je pravac koji dira parabolu.*

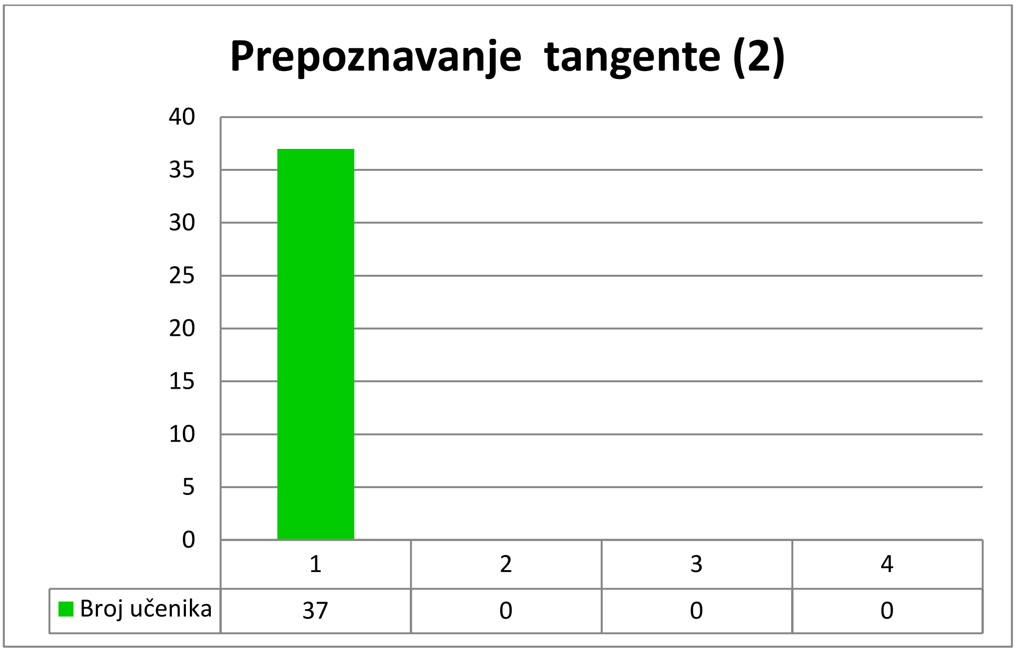
Učenik 2: *Tangenta na parabolu je pravac koji dira parabolu u jednoj točki.*

Učenik 3: *Tangenta je pravac koji ima zajedničku točku s parabolom, ali ne siječe parabolu već ju samo dodiruje.*

Učenik 4: *Tangenta je pravac koji dira parabolu samo na jednom mjestu.*

Posttest, četvrti zadatak

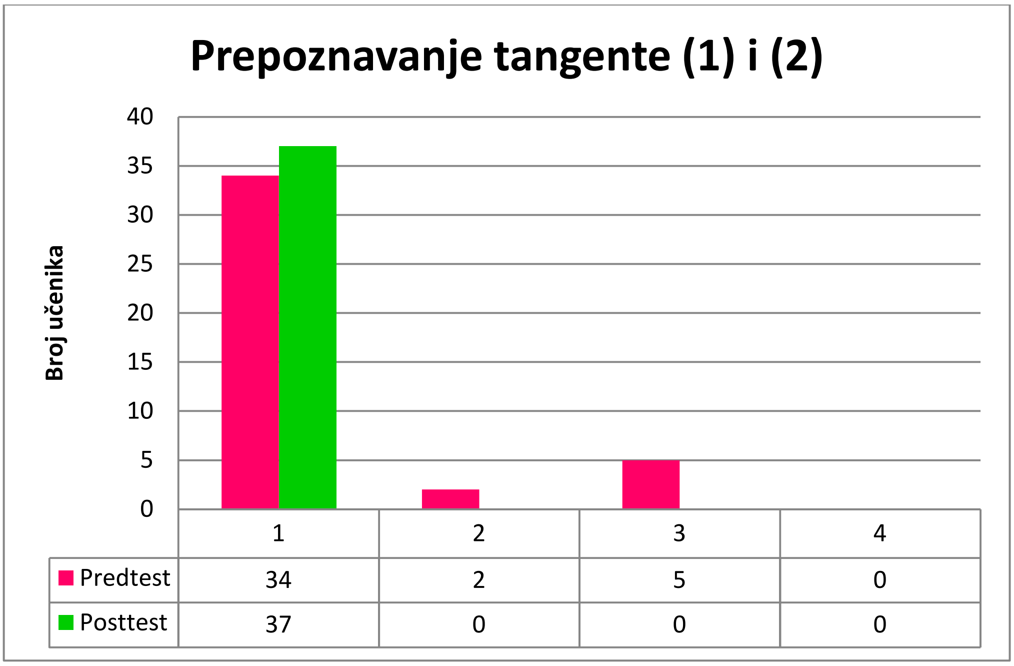
Četvrti zadatak u posttestu, usko je vezan uz treći zadatak. U ovom zadatku se od učenika traži da prepoznaju parabolu i tangentu na parabolu. Stupčasti dijagram frekvencija (slika 4.17.) pokazuje nam da su svi od ispitanih učenika točno prepoznali parabolu i tangentu na parabolu, odnosno u testu su zaokružili odgovore a) i c).



Slika 4.17. Dijagram frekvencija – Prepoznavanje tangente (2)

Uspoređujući odgovore na treće i četvrto pitanje u posttestu možemo zaključiti da iako učenici ne znaju precizno i potpuno definirati tangentu na parabolu s lakoćom prepoznaju tangentu na parabolu. Izvodimo zaključak, učenici vizualno lakše pamte i povezuju nego što riječima točno i potpuno izriču definicije.

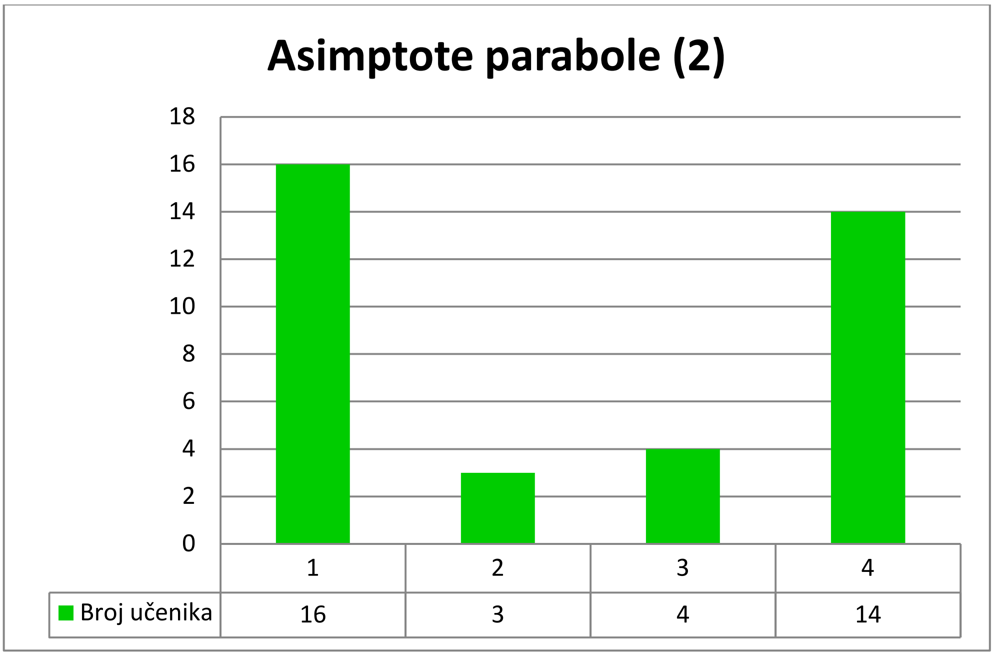
Pogledamo li dijagram usporedbe (slika 4.18) odgovora s predtesta i posttesta, možemo zaključiti da su učenici savladali značenje pojma tangente, odnosno, s lakoćom prepoznaju koji pravac jest, a koji nije tangenta na parabolu.



Slika 4.18. Dijagram usporedbe rezultata dobivenih na predtestu i posttestu

Posttest, peti zadatak

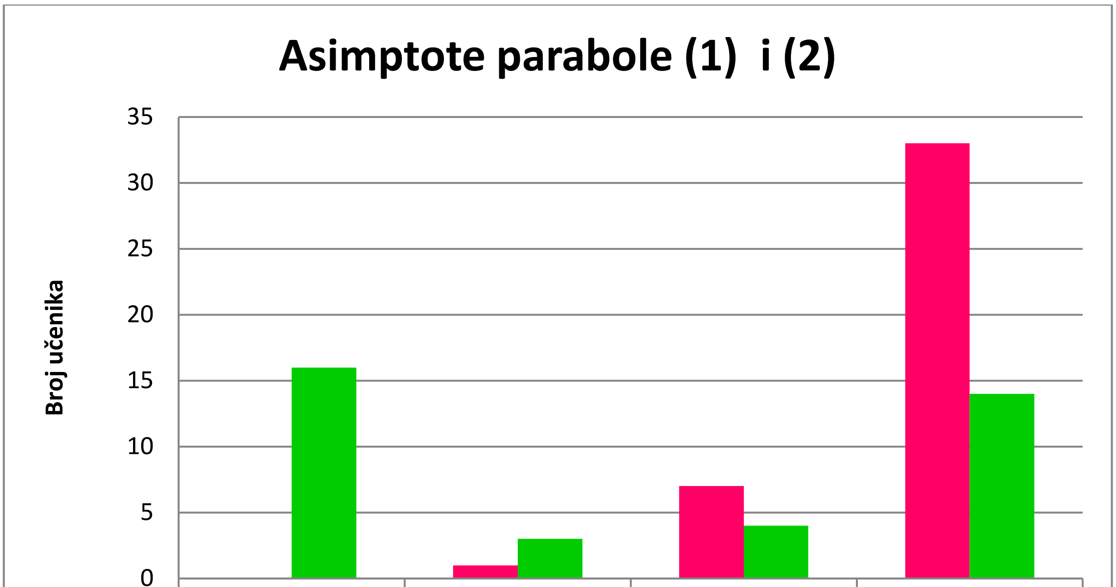
U petom zadatku učenici su morali odrediti je li pravac sa slike (slika 3.3.4.) asimptota parabole. Dijagram – Asimptote parabole (2) (slika 4.19.) prikazuje frekvencije učeničkih odgovora s obzirom na kategoriju u koju odgovor pripada. Kategorije su jednake kao i u petom zadatku u predtestu.



Slika 4. 19. Dijagram frekvencija – Asimptote parabole (2)

Iz podataka koji su u dijagramu možemo iščitati da je 16 učenika (43.2%) odgovorilo ispravno i potpuno na pitanje, odnosno da parabola nema asimptota. Pritom su u svojim odgovorima opisali što je zapravo asimptota. Od ukupnog broja ispitanih učenika njih 3 (8.1%) je odgovorilo da parabola nema asimptote i asimptotu su opisali kao pravac koji siječe parabolu u nedostižnoj točki. Odgovor da pravac p nije asimptota parabole $\mathcal{P}$ jer asimptota je pravac kojem se krivulja približava, ali ga ne dodiruje, odnosno asimptota i parabola nemaju zajedničkih točaka. pojavio se kod 4 učenika (10.8%), dok odgovor na pitanje nije znalo 14 učenika (37.8%).

Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta (slika 4.20.) prikazuje odnos rezultata sakupljenih prije obrade parabole, te nakon.



	1	2	3	4
Predtest	0	1	7	33
Posttest	16	3	4	14

Slika 4.20. Dijagram usporedbe rezultata predtesta i posttesta

S obzirom na početne rezultate možemo reći da se dogodio pomak. Uspoređujući rezultate predtesta, na kojem nitko nije odgovorio točno i kompletno na pitanje, i posttesta vidimo da su učenici, točnije njih 16 (43.2%), točno odgovorili na postavljeno pitanje. Velika promjena može se primijetiti i u odgovoru ne znam. Na prvom testu 33 učenika (80.5%) odgovorilo je da ne zna odgovor, dok se na drugom testu taj broj smanjio za 19, odnosno jednako tako odgovorilo je 14 učenika (37.8%).

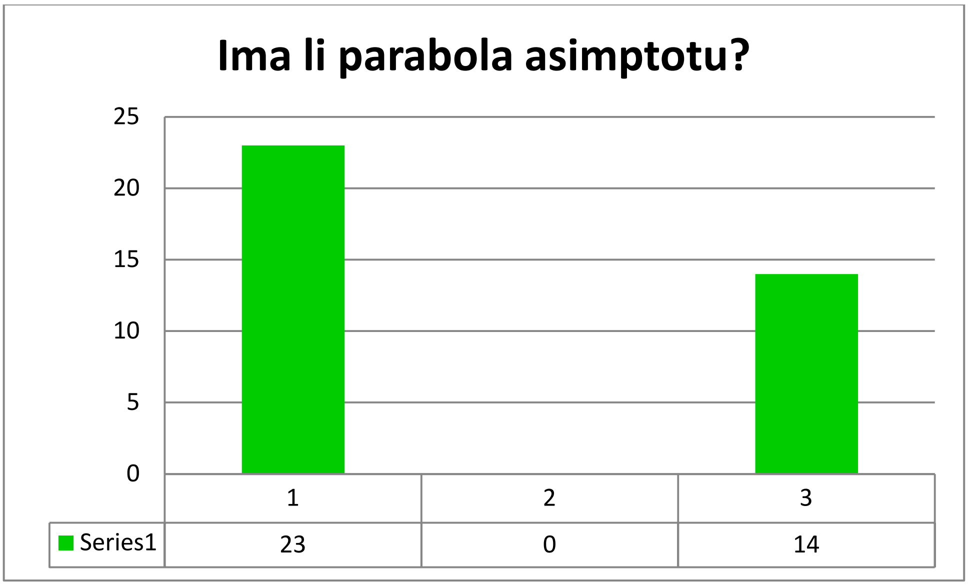
Neki od konkretnih učeničkih odgovora:

Učenik 1: *Pravac sa slike nije asimptota jer parabola nema asimptotu. Asimptota je pravac kojemu se krivulja približava, ali nikad ga ne dodirne.*

Učenik 2: *Pravac nije asmptota jer parabola nema asimptota.*

Posttest, šesti zadatak

Budući da su odgovori u petom pitanju u predtestu bili nedovoljno jasni, odnosno iz njih nismo mogli zaključiti znaju li učenici odrediti ima li parabola asimptotu ili ne, u posttest smo dodali još jedan zadatak. Pitanje ovog zadatka bilo je jasno i konkretno: „Ima li parabola asimptotu?“. Dijagram frekvencija – Ima li parabola asimptotu (slika 4.21.) prikazuje nam frekvencije odgovora koje su učenici napisali.



Slika 4.21. Dijagram frekvencija – Ima li parabola asimptotu

Da parabola nema asimptote odgovorilo je 23 učenika (62.2%). Zaključak koji izvodimo je taj da su učenici u većini savladali činjenicu da parabola nema asimptota. To nam i potvrđuje druga kategorija odgovora, niti jedan od ispitanih učenika nije odgovorio da parabola ima asimptote. U skladu s prethodnim pitanjem, odgovor „Ne znam“ napisalo je 14 učenika (37.8%). Iz tog podatka zaključujemo da su učenici iskreno odgovorili na oba pitanja, te stvarno ne znaju odgovor. Razlog tome može biti ili nezainteresiranost za gradivo, ili neprisustvovanje nastavi, ili nedostatak razumijevanja obrađenog gradiva.

Usporedba rezultata na predtestu i posttestu

Kako bi se usporedilo jesu li uistinu učenici bili uspješniji u rješavanju zadataka nakon obrađene nastavne cjeline, testirana je značajnost razlika u rezultatima na predtestu i posttestu (tablica 4.22.). Za ukupan rezultat proveden je t-test za zavisne uzorke. Rezultati testa ukazuju da su učenici u posttestu bili značajno uspješniji (t = - 7.64; df = 36; $p < 0.01$). Kako distribucije u pojedinim zadacima uglavnom značajno odstupaju od normalne, za testiranje razlika u pojedinim zadacima proveden je neparametrijski Wilcoxonov test. Rezultati ovog testa ukazuju na značajno veću uspješnost učenika u drugom (z = - 3.77; $p < 0.01$) i petom zadatku posttesta (z = - 3.51; $p < 0.01$). U trećem zadatku učenici su bili lošiji u postestu (z = 2.72; $p < 0.01$), dok u prvom (z = - 1.34; $p > 0.05$) i četvrtom zadatku (z = 1.72; $p > 0.05$) nema značajne razlike u rezultatima u predtestu i posttestu.

	Predtest		Posttest	
	M	***SD***	***M***	***SD***
Ukupan rezultat	10.03	2.01	13.46	2.21
1. zadatak	3.27	1.47	3.84	1.89
2. zadatak	1.08	0.36	2.11	1.13
3. zadatak	1.65	0.89	1.22	0.48
4. zadatak	1.32	0.71	1.08	0.49
5. zadatak	2.70	0.40	3.41	0.60

Tablica 4.22. Deskriptivna statistika za rezultate učenika na predtestu i posttestu (N = 37)

Promjene u uspješnosti koje su se dogodile u drugom i četvrtom zadatku su očekivane. Drugi zadatak temelji se na prepoznavanju parabole uzimajući u obzir vizualni dojam i jednadžbu krivulje koja se pojavljuje u zadatku. Učenici u predtestu nisu upoznati s parabolom kao samostalnom krivuljom, već kao s grafom kvadratne funkcije. Nakon obrade iste jedinice, možemo reći da je ta predrasuda razbijena, te da učenici prepoznaju parabolu kao samostalnu krivulju, no ono od čega se ne mogu odvojiti jest vizualni dojam. Vodeći se njime, kao parabolu prepoznaju sve krivulje koje su izledom slične paraboli. Peti zadatak vezan je uz asimptote parabole. Pojam asimptote, učenicima nije nepoznanica, no poistovjete li parabolu s hiperbolom vrlo vjerojatno će, vodeći se analogijom, doći do zaključka da parabola ima asimptotu, što nije točno. U petom zadatku, vidimo napredak, a to nam ukazuje na to da je pojam asimptote kod parabole naučen, odnosno po završetku obrade učenici s lakoćom određuju činjenicu da parabola nema asimptote. Treći zadatak vezan je uz samostalno opisivanje tangente i ono što je neobično jest to da su učenici u trećem zadatku neuspješniji na posttestu nego na predtestu. Razlog ovome možemo samo predpostaviti, budući da je pojam tangente do sada trebao biti jasan. Jedan od razloga može biti nedostatak vremena prilikom rješavanja posttesta, nezainteresiranost za gradivo ili pak samo učenička površnost. Iako su nisu pokazali napredak u trećem zadatku, osvrnemo li se na četvrti zadatak, koji je usko vezan uz treći, zaključit ćemo da učenici jednako dobro prepoznaju tangentu na parabolu i u predtestu i u posttestu. Vodeći se vizualnim dojmom lakše iskazuju naučeno nego što se verbalno izražavaju.

Uključenost učenika pri učenju

Da bi se odgovorilo na drugi problem istraživanja prvo su analizirani učenički odgovori na otvorena pitanja. Analizom odgovora učenika na pitanje što je prema njihovom mišljenju potrebno da se bude uspješan u matematici, većina učenika (N = 33; 81%) prepoznaje važnost ulaganja truda (npr. *"Potreban je rad i konstantno vježbanje gradiva."*). Kao važne odrednice uspjeha, učenici često ističu i sposobnosti (N = 13; 32%; npr. "*Potreban je prije svega talent"*) te motivaciju (N = 11; 28%; npr. *"volja za rješavanje zadataka"*). Pritom treba istaknuti da mnogi učenici prepoznaju kako je za uspjeh u matematici važno međudjelovanje navedenih čimbenika (npr.*"Po mom mišljenju, matematika nije laka za svakoga. Moraš biti nadaren za nju, ali je moguće i naučiti ju te dobiti ocjenu na temelju truda, volje i pristupa."*). Manji broj učenika prepoznaje i utjecaj koji na uspjeh u matematici imaju instrukcije (N = 2; 5%), predznanje (N = 2; 5%) i kvalitetno poučavanje (N = 1; 2%).

Odgovarajući na pitanje po čemu se može zaključiti je li neki učenik uspješan u matematici učenici navode dva ključna pokazatelja. To su razumijevanje i primjena znanja (N = 17; 42%; npr. *"Zaključujem po dobrom, lakom i spretnom načinu prilikom rješavanja zadataka i problema koji su zadani."*) te ocjene i uspjeh na ispitima (N = 20; 49%; npr. *"Možemo to zaključiti po njegovim rezultatima."*).

Kad se učenike upita što znači ulagati trud u učenje matematike te po čemu se može primijetiti da netko ulaže trud, oni navode cijeli niz pokazatelja uključenosti u nastavu matematike. Najčešće ističu aktivnost na satu (*N* = 23; 56%; npr. "*Po tome ako sudjeluje na satu i rješava zadatke.*"), izvršavanje zadataka (*N* = 22; 54%; npr. "*pisanje domaće zadaće, vježbanje zadataka kod kuće itd.*") te usmjerenost na razumijevanje (*N* = 21; 51%; npr. *"To znači da netko daje sve od sebe da shvati gradivo"*). Dvoje učenika (5%) također i naglašava emocionalne aspekte uključenosti (*"na satu koliko god se trudila, jednostavno osjećam preveliki strah "*). Možemo primijetiti da ove kategorije odgovora učenika pokrivaju sve tri komponente uključenosti – bihevioralnu (aktivnost na satu i izvršavanje zadataka), kognitivnu (usmjerenost na razumijevanje) i emocionalnu. Osim toga, učenici primjećuju povezanost ulaganja truda s postignućem (*N* = 13; 32%; npr. *"Ako ulažemo više truda dobit ćemo bolju ocjenu."*). U njihovim odgovorima prepoznaje se da uočavaju redovitost (*N* = 8; 20%; npr. *"Učenik ulaže trud ako redovito vrši svoje obaveze i redovito uči."*) i ustrajnost (*N* = 4; 10%; npr. *" Kad ti ne ide neko gradivo, a ti ne odustaješ nego pokušavaš shvatiti i sve dok ne naučiš za pozitivnu ocjenu ne odustaješ."*) kao bitne odrednice uključenosti učenika u učenje. Učenici prepoznaju i da je razina uključenosti povezana s traženjem pomoći od drugih, bilo od profesora ili prijatelja (*N* = 6; 15%), bilo putem instrukcija (*N* = 2; 5%).

Samoprocjene učenika o njihovoj samoefikasnosti i uključenosti u učenje matematike općenito te tijekom obrade nastavnih sadržaja vezanih uz temu krivulja drugog reda, kao i međusobne korelacije svih pokazatelja uključenosti i samoefikasnosti prikazane su u tablici 4.23. Na temelju ovih rezultata može se vidjeti da učenici samoefikasnost u matematici procjenjuju dosta visoko, kao i samoefikasnost vezanu uz temu krivulja drugog reda, a isto vrijedi i za ponašajnu i kognitivnu uključenost. Emocionalna uključenost nešto je manje izražena što znači da su kod učenika u nešto većoj mjeri prisutne neugodne emocije. Kad pogledamo međusobne povezanosti različitih pokazatelja samoefikasnosti i uključenosti, možemo uočiti umjerene do visoke povezanosti među različitim mjerama samoefikasnosti te ponašajne i kognitivne uključenosti i za opći kontekst učenja matematike, kao i za specifični kontekst učenja krivulja drugog reda. Emocionalna uključenost nije značajno povezana s tim pokazateljima, dok je dobivena visoka korelacija među samoprocjenama za učenje matematike općenito i krivulja drugog reda specifično.

Temeljem gore navedenih podataka možemo izvesti zaključak da učenici uviđaju potrebu konstantnog rada i ulaganja truda da bi postigli uspjeh u matematici te da su svjesni važnosti svih komponenti uključenosti – bihevioralne, kognitivne i emocionalne. Važno je naglasiti da učenici žele biti uključeni te žele imati dobre rezultate, no zbog straha od krivog odgovora, odnosno neuspješnosti, ponekad ostaju suzdržani. Nadalje, na temelju značajnih i relativno visokih korelacija između samoprocjena vezanih uz parabolu i matematiku općenito, možemo zaključiti da učenici pristup novoj nastavnoj temi grade u kontekstu svojih prijašnjih iskustava s matematikom te je važno osigurati atmosferu u učionici, pristup profesora te suradnju među učenicima koja će kontinuirano pridonositi većoj uključenosti tijekom nastave matematike.

	N	*Min*	*Max*	*M*	*SD*	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Matematika														
1. Samoefikasnost	41	2.25	6.75	5.00	1.05	-	0.61**	0.45**	0.53**	0.14	0.50**	0.27	0.47**	0.16
2. Samoefikasnost u samoregulaciji	41	2.56	6.78	4.88	1.14		-	0.49**	0.67**	0.17	0.54**	0.45**	0.57**	0.19
3. Ponašajna uključenost	41	1.60	5.00	3.26	0.88			-	0.65**	-0.10	0.41*	0.57**	0.61**	0.07
4. Kognitivna uključenost	41	1.50	4.50	3.32	0.77				-	0.19	0.50**	0.41*	0.67**	0.20
5. Emocionalna uključenost	41	1.00	4.75	2.60	0.90					-	-0.07	-0.36*	-0.20	0.69**
Krivulje drugog reda														
6. Samoefikasnost	37	2.63	7.00	4.83	1.25						-	0.56**	0.55**	-0.07
7. Ponašajna uključenost	37	1.60	5.00	3.54	0.86							-	0.74**	-0.31
8. Kognitivna uključenost	37	1.67	4.67	3.20	0.79								-	-0.14
9. Emocionalna uključenost	37	1.00	4.75	2.27	1.01									-

* $p < 0.05$; ** $p < 0.01$

Tablica 4.23. Deskriptivna statistika i međusobne korelacije za samoefikasnost i uključenost pri učenju

Povezanost uključenosti s postignućem u matematici

Da bismo odgovorili na treći problem istraživanja, analizirane su međusobne povezanosti učeničkih procjena uključenosti i samoefikasnosti s uratkom na posttestu (tablica 4.24.) pri čemu su izračunate parcijalne korelacije kako bi se veličina te povezanosti korigirala u odnosu na rezultat na predtestu. Također su izračunate i povezanosti s ocjenama iz matematike. Kao što se može vidjeti u tablici, korelacije uključenosti i samoefikasnosti s ocjenama većinom su značajne što se slaže s dosadašnjim istraživanjima u kojima je utvrđena veza akademskog postignuća i kvalitete uključenosti učenika tijekom nastave. Međutim, povezanosti učeničkih procjena uključenosti i samoefikasnosti s uspješnošću na posttestu bile su neznačajne. Izostanak značajnih povezanosti najvećim je dijelom vezan uz veličinu uzorka koji je u ovom istraživanju bio prilično mali. Naime, istraživanja uglavnom ukazuju da su povezanosti uratka učenika u različitim zadacima s njihovim samoprocjenama vezanim uz motivaciju ili pristupu učenju najčešće značajne, ali niske do umjerene veličine pa se najčešće ne mogu s pouzdanošću utvrditi na malim uzorcima. Ipak, na temelju dobivenih rezultata možemo pretpostaviti da bi se, ukoliko bi se istraživanje provelo na većem uzorku, mogla potvrditi određena povezanost kognitivne uključenosti (općenite i specifično vezane uz gradivo koje se obrađuje) te emocionalnog odnosa prema matematici s uratkom u testu.

Varijabla	Posttest[1]	Prethodna ocjena	Očekivana ocjena
Matematika			
1. Samoefikasnost	0.10	0.36*	0.54**
2. Samoefikasnost u samoregulaciji	0.12	0.16	0.36*
3. Ponašajna uključenost	0.16	0.39*	0.36*
4. Kognitivna uključenost	0.30	0.16	0.41*
5. Emocionalna uključenost	0.26	-0.01	0.24
Krivulje drugog reda			
6. Samoefikasnost	-0.12	0.03	0.24
7. Ponašajna uključenost	-0.02	0.02	0.13
8. Kognitivna uključenost	0.26	0.14	0.35*
9. Emocionalna uključenost	0.08	0.06	0.28

* $p < 0.05$

[1] Parcijalna korelacija korigirana u odnosu na rezultate na predtestu

Tablica 4.24. Korelacije samoprocjena s rezultatima u predtestu i posttestu te ocjenama iz matematike ($N = 37$)

Nakon analize svih podataka treba spomenuti ograničenja nalaza ovog istraživanja. Jedno ograničenje predstavlja odabir uzorka koji je bio prigodan. Ispitani su samo učenici dva razreda jedne opće gimnazije. Stoga ne možemo sa sigurnošću generalizirati rezultate i na učenike drugih škola, posebno na one koji matematiku slušaju prema drugačijem nastavnom planu i programu. Zbog malog broja ispitanika, nije bilo moguće sa sigurnošću utvrditi postoji li povezanost kognitivne uključenosti te emocionalnog odnosa prema matematici s uratkom u testu. No, s obzirom da smo utvrdili da učenici prepoznaju važnost kvalitete njihove uključenosti u učenje i da se uključenost u učenje pojedine teme formira u kontekstu općenitog pristupa matematici, ono na što bi bilo dobro usmjeriti pažnju prilikom poučavanja jest svakako aktivnost na satu koja će uključiti svakog učenika u raspravu, na način da nastavnik usmjeri učenika na pravi put, no ipak da mu ostavi prostora za samostalno zaključivanje. Znanje u matematici koje se temelji samo na poznavanju činjenica i zakona je površno i lako se zaboravlja. Ono zahtijeva da se te činjenice i zakoni razumiju i da se mogu primijeniti u drugim područjima u matematici i šire. Jednako tako, treba biti prisutna usmjerenost na razumijevanje, odnosno jasno objašnjavanje, te zoran prikaz informacija koje bi učenici trebali usvojiti. Angažman učenika možemo povećati ukoliko uvedemo veći broj radionica i aktivnosti na nastavi u kojima će učenici slobodno iznositi svoja razmišljanja te dobrim vodstvom doći do ispravnog zaključka. Na kraju, važno je i osigurati dobru atmosferu u razredu tako da se svaki učenik dobro osjeća na nastavi te da se osjeća slobodnim iznijeti svoja razmišljanja bez straha, bilo da su ona ispravna ili ne.

5. USVAJANJE KONCEPTA PARABOLE

Prema važećem Nastavnom planu i programu za gimnazije učenici se s pojmom parabole prvi put susreću u drugom razredu srednje škole u nastavnoj cjelini *Polinom drugog stupnja i njegov graf* u sklopu nastavne jedinice *Grafovi polinoma* $f(x) = a^2, f(x) = a^2 + c, f(x) = a(x - x_0)^2 + c \; i \; f(x) = ax^2 + bx + c.$ Te u trećem razredu u sklopu nastavne cjeline *Analitička geometrija ravnine.* Navedena nastavna cjelina ujedno je i najopsežnija nastavna cjelina u trećem razredu. Od 40 nastavnih sati, 17 ih je posvećeno krivuljama drugog reda, od čega je 3 sata posvećeno samo paraboli, odnosno jednadžbi parabole (gdje definiramo fokus, direktrisu, poluparametar, tjeme i os parabole; osnu, odnosno tjemenu jednadžbu parabole, te crtamo parabolu). Jedan sat posvećen je jedinici *Kružnica, elipsa, parabola i hiperbola kao presjeci stožaste (konusne) plohe ravninom (pojam krivulje drugog reda, odnosno drugog stupnja)*. Čitava cjelina završava jedinicom *Pravac i krivulje drugog reda (određivanje međusobnog položaja pravca i krivulje drugog reda traženjem njihovih zajedničkih točaka, jednadžba tangente i normale u točki elipse, hiperbole, odnosno* *parabole)* koja se obrađuje 4 nastavna sata. Zadaci koje su učenici obavezni usvojiti prilikom obrade krivulja drugog reda su sljedeći :

- definirati elipsu, hiperbolu i parabolu i napisati njihove jednadžbe
- napisati jednadžbu tangente i normale u točki elipse , hiperbole i parabole
- definirati pojam krivulje drugog reda
- naći presjek pravca i krivulje drugog reda

Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj, opće obvezno obrazovanje i srednjoškolsko obrazovanje očekivana učenička postignuća vezana uz nastavnu cjelinu *Polinom drugog stupnja i njegov graf,* koja se obrađuje u drugom razredu srednje škole, opisuje u četvrtom obrazovnom ciklusu, koji obuhvaća sve razrede gimnazije. Jednako tako četvrti obrazovni ciklus za gimnazije opisom obuhvaća i nastavnu cjelinu *Krivulje drugog reda*.

Do kraja četvrtog obrazovnog ciklusa za gimnazije od učenika se očekuje da će:

- prepoznati, odrediti i protumačiti karakteristične elemente i svojstva jednostavnih funkcija, analizirati linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske funkcije te rabiti njihova svojstva (*Algebra i funkcije*)
- primijeniti funkcije i njihove grafove te jednadžbe i nejednadžbe u rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu (*Algebra i funkcije*)
- prepoznati ravninske i prostorne oblike i njihova svojstva u svakodnevnomu okružju i umjetnosti te ih upotrijebiti za opis i analizu svijeta oko sebe (*Oblik i prostor*)
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnoj situaciji te primijeniti mjerenje pri rješavanju matematičkih problema i problema u ostalim odgojno-obrazovnim područjima i svakodnevnomu životu (*Mjerenje*)

Matematički procesi su opće matematičke kompetencije, odnosno opće matematičke vještine i spoznaje do kojih učenici dolaze nastavnim metodama. Vezano za matematičke procese, do kraja četvrtog obrazovnog ciklusa od učenika se očekuje da će:

- organizirano prikazati matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja riječima, slikama, crtežima, maketama, dijagramima, grafovima, listama, tablicama, brojevima, simbolima i misaono (*Prikazivanje i komunikacija*)
- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima, idejama, pojmovima, prikazima i postupcima te oblikovati cjeline njihovim nadovezivanjem (*Povezivanje*)
- postavljati matematici svojstvena pitanja (Postoji li? Ako postoji, koliko? Kako ćemo ih pronaći? Zbog čega? i slična) te stvarati i istraživati na njima zasnovane matematičke pretpostavke (*Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje*)
- istraživati i analizirati matematičke ideje, eksperimentirati s njima te provjeravati pretpostavke pomoću džepnih računala i raznovrsnih računalnih programa, naročito programa dinamične geometrije i programa za izradbu proračunskih tablica (*Primjena tehnologije*)
- razumjeti prednosti i nedostatke primjene tehnologije (*Primjena tehnologije*)

Ispitni katalog za državnu maturu 2014./2015. navodi obrazovne ishode za višu razinu ispita u sklopu kojeg se navode obrazovni ishodi vezani uz *Analitičku geometriju*, odnosno *Krivulje drugog reda*. Vezano uz parabolu od učenika se očekuje da će

- odrediti jednadžbu iz njezinih elemenata i obrnuto
- odrediti odnos između krivulje drugog reda i pravca
- odrediti jednadžbu tangente u točki krivulje

Prateći zadatke koje su učenici obavezni usvojiti te obrazovne ishode vezane uz državnu maturu osmislili smo nekoliko aktivnosti koje će nam pomoći u boljem usvajanju parabole, definicije parabole, jednadžbe parabole te crtanju parabole.

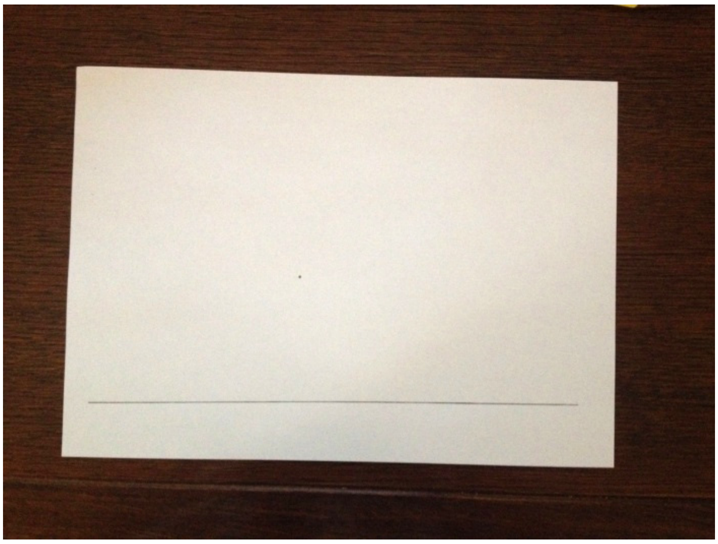
5.1. Uvođenje parabole

Izgradnju koncepta parabole započinjemo praktičnom aktivnošću crtanja parabole pomoću mehaničkih pomagala ili u računalnoj učionici pomoću programa dinamične geometrije. U sljedećim aktivnostima pokazat ćemo kako provesti aktivnosti te kako

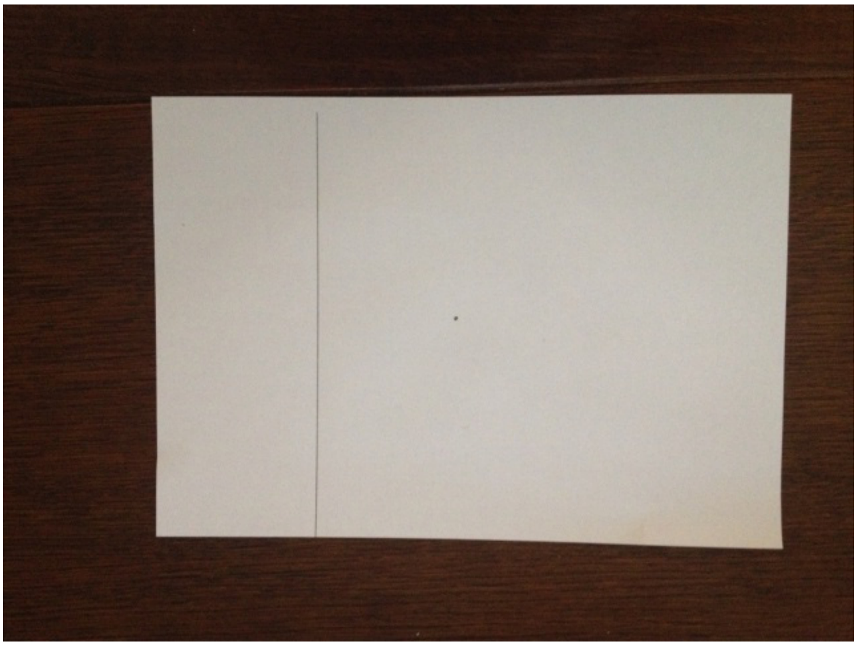
učenike potaknuti na samostalno razmišljanje i zaključivanje. Aktivnosti bi trebale potaknuti učenike na suradnju te veću uključenost u nastavu matematike.
Za uvodni sat, prilikom upoznavanja sa samom parabolom pripremili smo dvije aktivnosti. Jedan nastavni sat predviđen je za svaku od aktivnosti, aktivnosti se provode ovisno o mogućnostima u školi ili u učionici matematike ili u učionici koja je opskrbljena računalima.

5.1.1. Konstrukcija parabole mehaničkim pomagalima

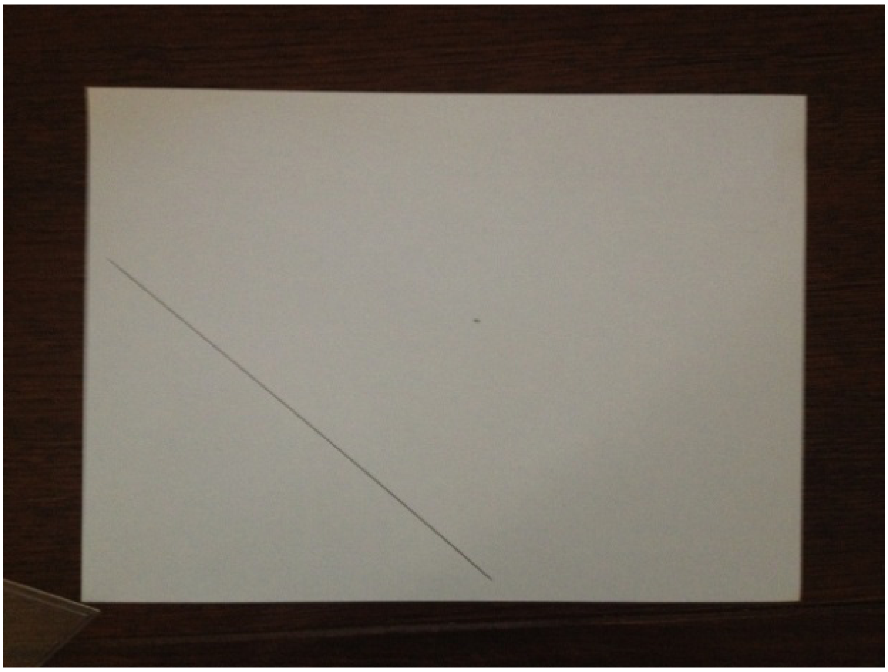
Aktivnost je predviđena za prvi sat obrade parabole, te je za nju potrebno izdvojiti cijeli školski sat. Cilj ove praktične aktivnosti jest da učenici, radeći suradnički u paru, nacrtaju parabolu. Potreban materijal je olovka, ravnalo, pravokutni trokut, konac, ljepljiva vrpca te unaprijed pripremljeni nastavni listić s uputama (slika 5.1.1.4.) i papir na kojemu su istaknuti jedan pravac i jedna točka koja ne pripada na tom pravcu. Pravac i točka nalaze se u tri različita položaja pravac je postavljen paralelno uz dulju liniju papira, a točka se nalazi iznad pravca (slika 5.1.1.1.); pravac je postavljen okomito na dulju liniju papira i točka mu je s desna (5.1.1.2.); pravac je postavljen uz jedan kut papira i točka mu je s desna (slika 5.1.1.3.). Nastavnik podjelu vrši ovisno redu u kojem učenici sjede. Svaki red dobiva papir sa različitim položajem pravca i točke.



Slika 5.1.1.1. Početni položaj pravca i točke – prvi položaj



Slika 5.1.1.2. Početni položaj pravca i točke – drugi položaj



Slika 5.1.1.3. Početni položaj pravca i točke – treći položaj

Otkrij krivulju

1. Na papiru je nacrtan pravac te je istaknuta jedna točku koja ne pripada tom pravcu.

2. Uz jednu katetu pravokutnog trokuta prislonite konac i odrežite komad konca duljine jednake duljini te katete pravokutnog trokuta.

3. Jedan kraj odrezanog konca zalijepite u vrh trokuta koji je krajnja točka odabrane katete i različit od vrha pravog kuta, a drugi u istaknutu točku.

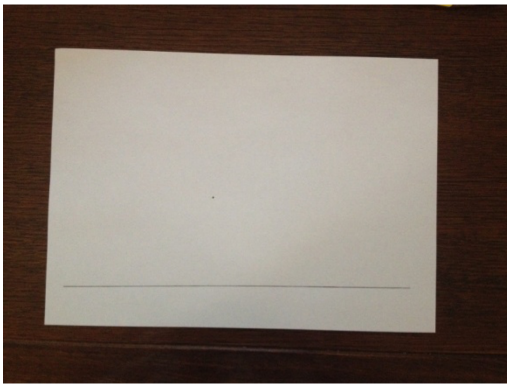
4. Ravnalo prislonite uz istaknutu liniju, a pravokutni trokut s pričvršćenim koncem postavite okomito u odnosu na ravnalo.

5. Olovkom primaknite konac uz rub katete pri vrhu trokuta u kojem je konac pričvršćen tako da bude zategnut.

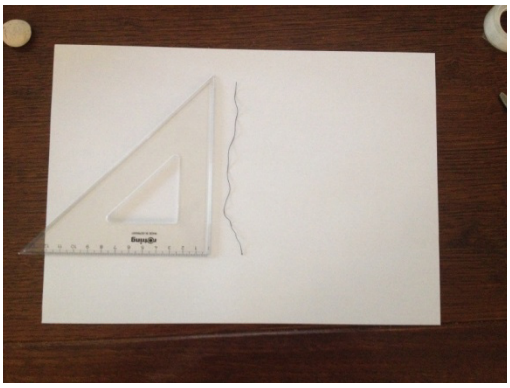
6. Pomičite trokut duž ravnala pazeći na to da je konac cijelo vrijeme zategnut, a da olovka pritom ostavlja trag.

Slika 5.1.1.4. Nastavni listić – Otkrij krivulju

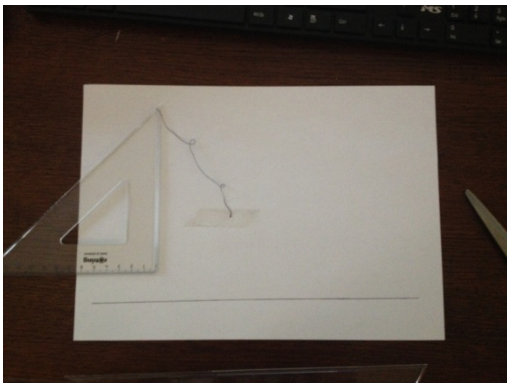
Tijek aktivnosti je opisan na oglednom primjeru nastavnog listića (slika 5.1.1.4.), a popraćen je slikama koje prikazuju svaki korak (slike od 5.1.1.5. do 5.1.1.10.) te, završni izgled svake vrste zadataka ovisno o početnom položaju točke i pravca (slike 5.1.1.11., 5.1.1.12. i 5.1.1.13.).



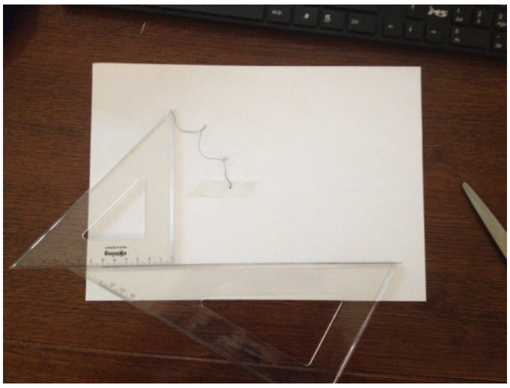
Slika 5.1.1.5. Početni položaj



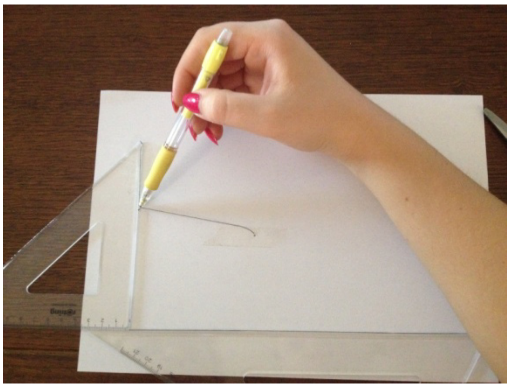
Slika 5.1.1.6. Drugi korak



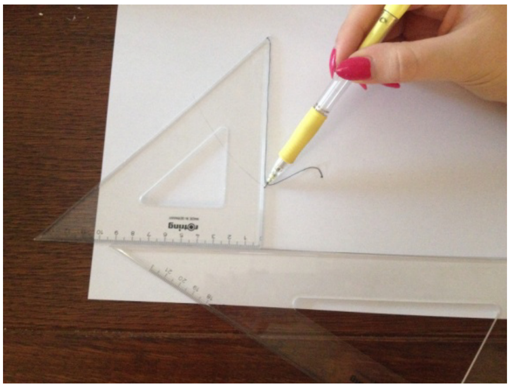
Slika 5.1.1.7. Treći korak



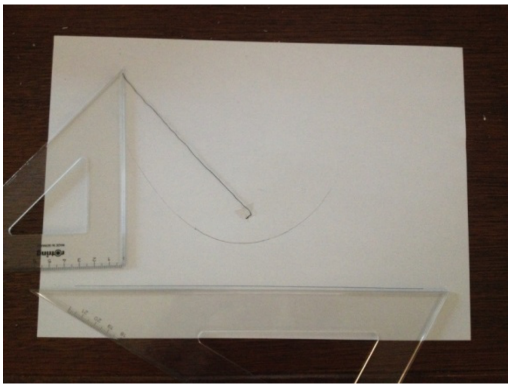
Slika 5.1.1.8. Četvrti korak



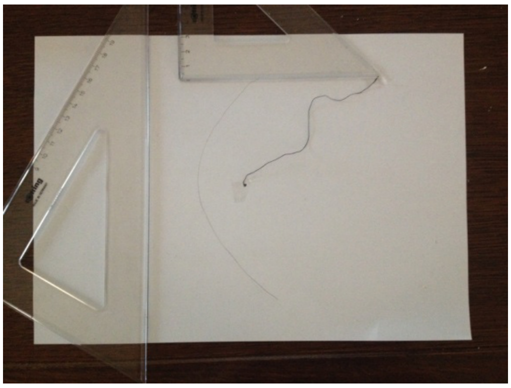
Slika 5.1.1.9. Peti korak



Slika 5.1.1.10. Šesti korak



Slika 5.1.1.11. Završni izgled – prvi položaj

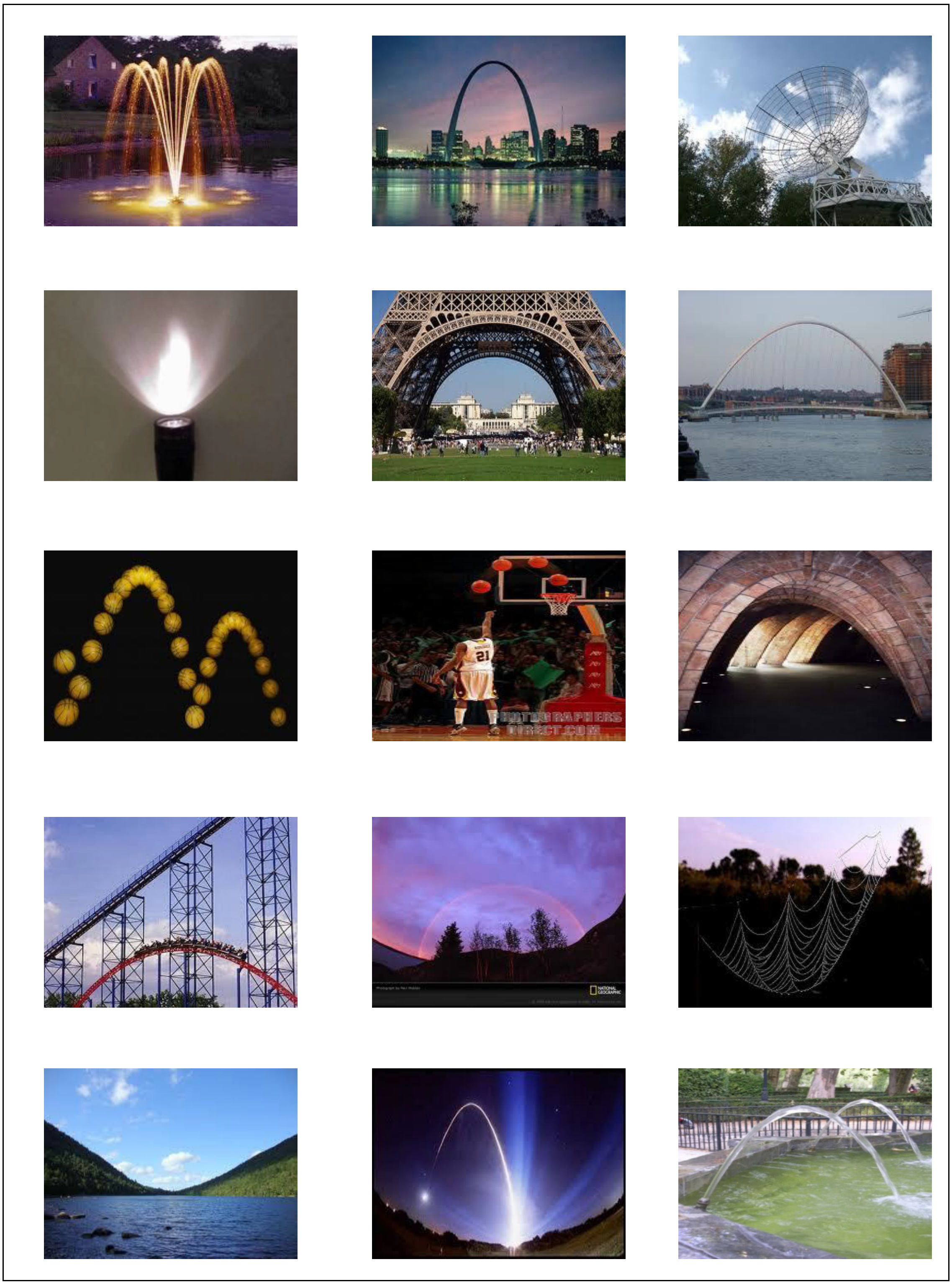


Slika 5.1.1.12. Završni izgled – drugi položaj

Slika 5.1.1.13. Završni izgled – treći položaj

Nakon što svaka grupa izvrši zadatak nastavnik pokreće diskusiju u kojoj učenike pokušava navesti na odgovore. Prvo ih pita što su nacrtali, te kako se zove nacrtana krivulja. Na kraju diskusije nastavnik od učenika pokušava saznati znaju li gdje se u stvarnom životu mogu susresti sa parabolom.

Nakon kratke diskusije na prethodno pripremljenoj prezentaciji ili na plakatu nastavnik bi trebao pokazati primjere iz svakodnevnog života u kojima se pojavljuje parabola. (slika 5.1.1.14.)



Slika 5.1.1.14. Parabola u svakodnevnom životu

5.1.2. Konstrukcija parabole u programu dinamične geometrije

Alternativna aktivnost jest otkrivanje parabole u programu dinamične geometrije. Ova aktivnost primjerena je za uvodni sat, obrada nastavne jedinice Parabola, te je za odradu ove aktivnosti potrebno izdvojiti cijeli školski sat u informatičkoj učionici. Cilj je da učenici istraživanjem u alatu dinamične geometrije otkriju parabolu. Oblik rada je suradnički rad u paru. Potrebni materijal je pripremljena radna bilježnica u alatu dinamične geometrije, nastavni listić s pitanjima i uputama (slika 5.1.2.1.). Aktivnost započinjemo otvaranjem radne bilježnice u alatu dinamične geometrije, nastavljamo prateći upute te pritom odgovaramo na postavljena pitanja.

GeoGebra – Otkrijte krivulju

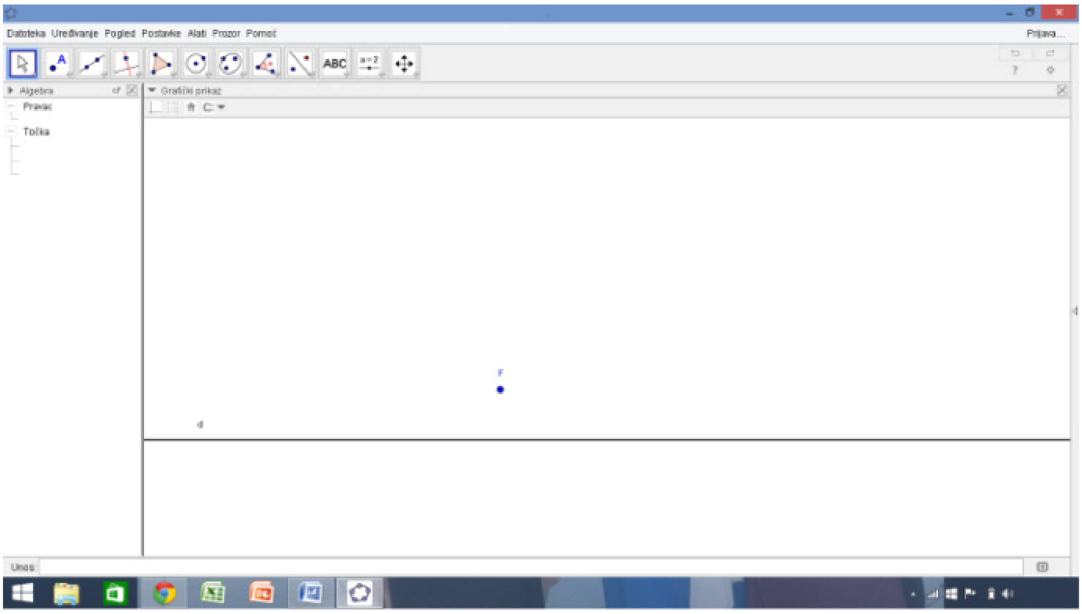
1. Zadana je točka F i pravac d
2. Na pravcu d odaberite proizvoljnu točku A
3. Odredite dužinu $\overline{AF}$ te odredite njezino polovište i označite ga s P
4. Konstruirajte okomicu a na dužinu $\overline{AF}$ kroz točku P
5. Konstruirajte okomicu b na pravac d kroz točku A
6. Odredite sjecište pravaca a i b te ga označite slovom T
7. Uključite trag točke T te točku A pomičite po pravcu d

Povlačenjem točke A po pravcu d dobili smo neku krivulju, koju?

Je li točka T jednako udaljena i od pravca d i od točke F?

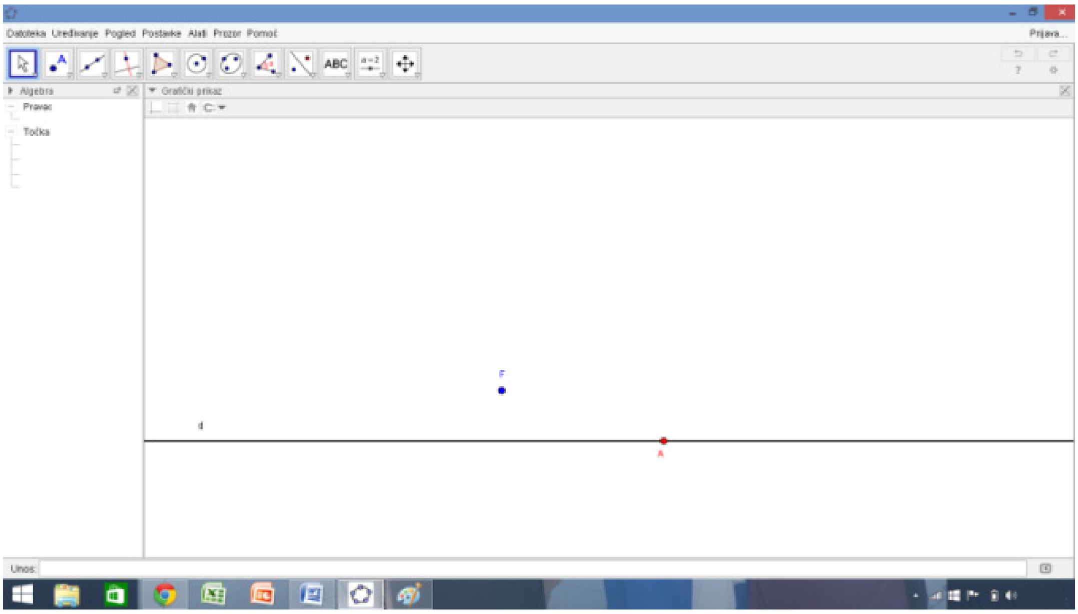
Slika 5.1.2.1. Nastavni listić – GeoGebra – Otkrij krivulju

Izgled radne bilježnice prilikom otvaranja programa prikazana je na slici 5.1.2.2..



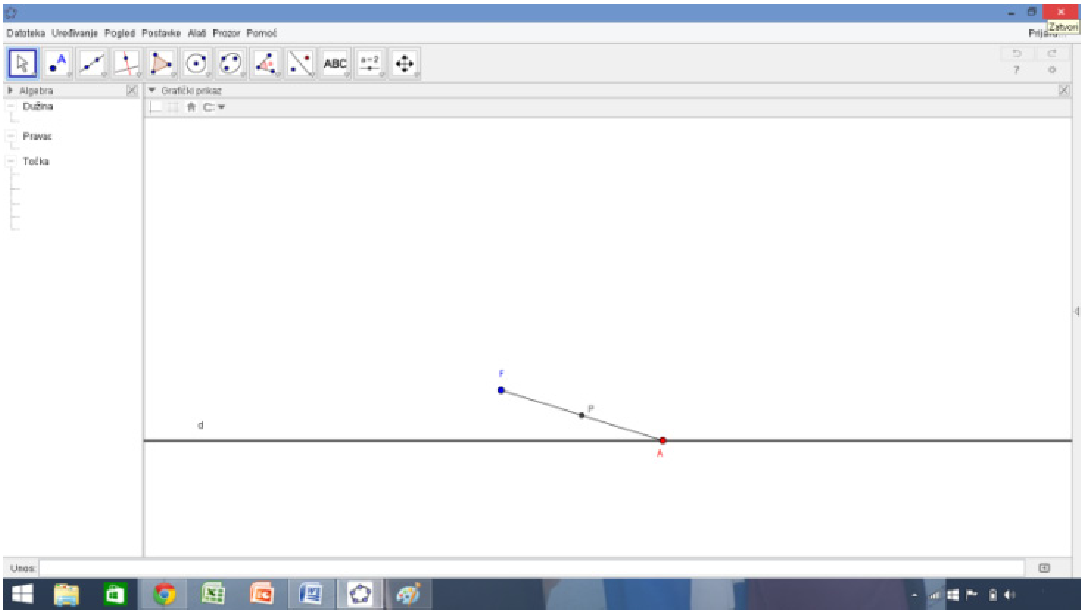
Slika 5.1.2.2. Početni izgled radne bilježnice prilikom otvaranja

Učenici proizvoljno odabiru točku A na pravcu d. (slika 5.1.2.3.)



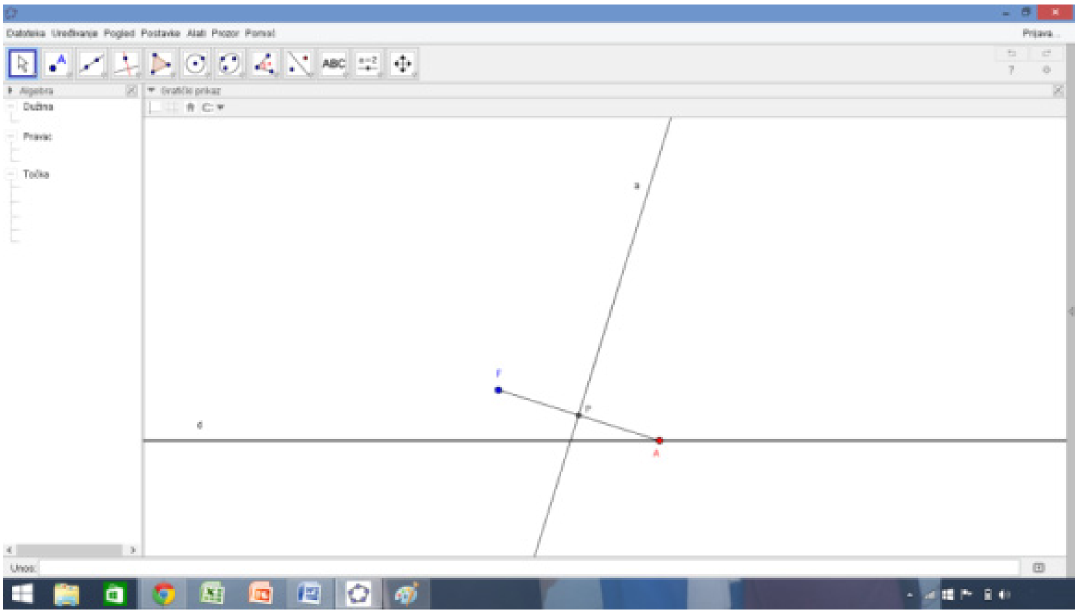
Slika 5.1.2.3. Drugi korak točkovne konstrukcije parabole

Pomoću alata *DUŽINA* konstruiraju dužinu $\overline{AF}$ te alatom *POLOVIŠTE* određuju polovište dužine $\overline{AF}$ te ga preimenuju u P. (slika 5.1.2.4.)



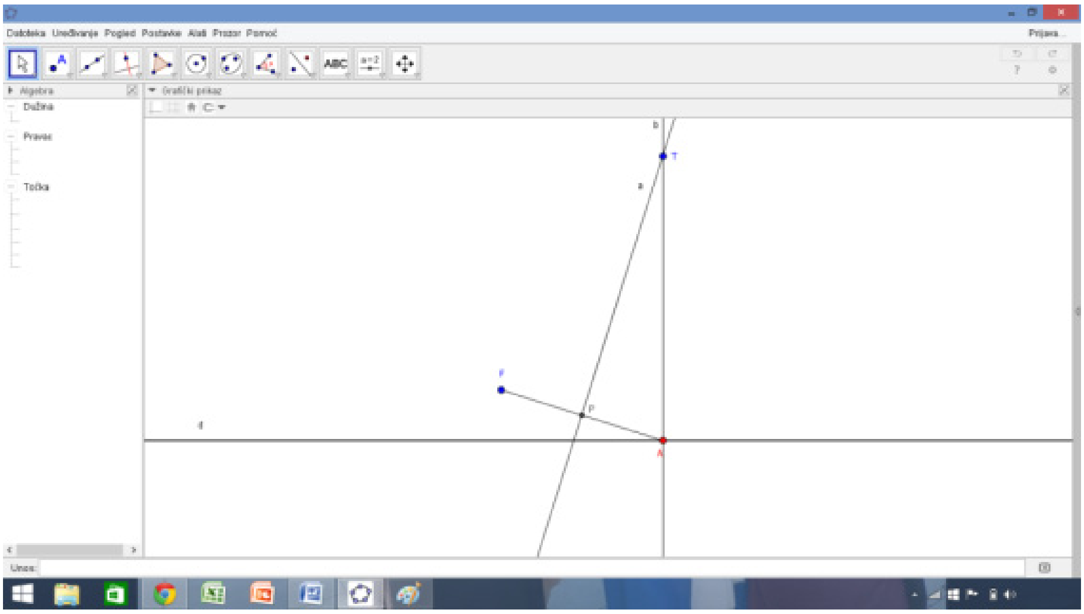
Slika 5.1.2.4. Treći korak točkovne konstrukcije parabole

Alatom *OKOMICA* konstruiraju pravac a okomit na dužinu $\overline{AF}$ kroz točku P (slika 5.1.2.5.)



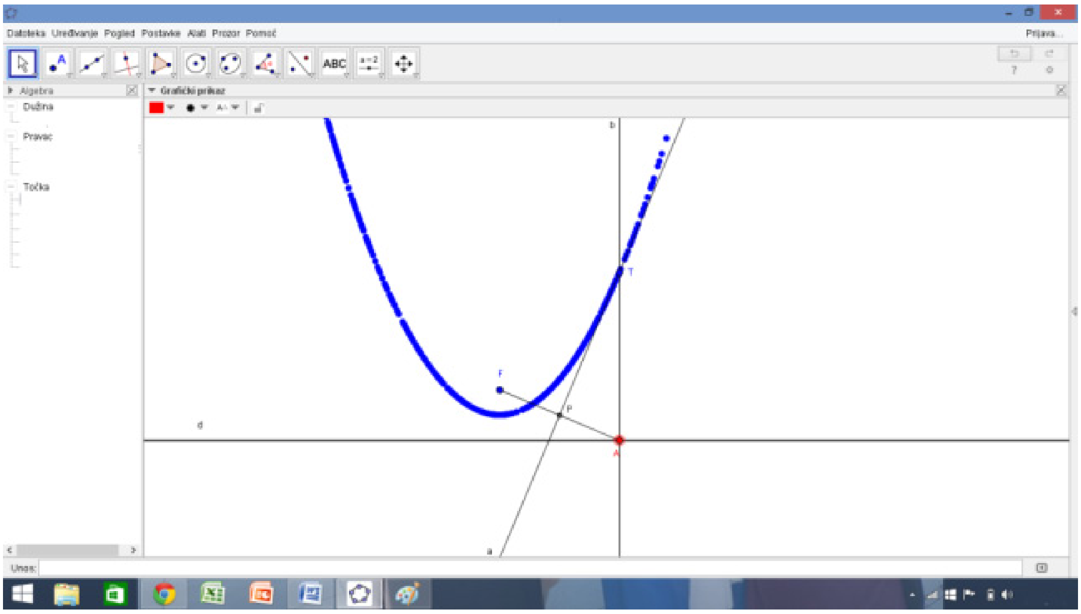
Slika 5.1.2.5. Četvrti korak točkovne konstrukcije parabole

Istim alatom konstruiraju pravac b okomit na pravac d kroz točku A. Te alatom *SJECIŠTE* odrede sjecište pravaca a i b i označe ga slovom T. (slika 5.1.2.6.)



Slika 5.1.2.6. Peti korak točkovne konstrukcije parabole

Nakon svih koraka konstrukcije, učenici uključe trag točke T te pomičući točku A po pravcu d dobivaju krivulju (slika 5.1.2.7.) te odgovaraju na pitanja na nastavnom listiću (slika 5.1.2.8.).



Slika 5.1.2.7. Šesti korak točkovne konstrukcije parabole

GeoGebra – Otkrijte krivulju

1. Zadana je točka F i pravac d
2. Na pravcu d odaberite proizvoljnu točku A
3. Odredite dužinu $\overline{AF}$ te odredite njezino polovište i označite ga s P
4. Konstruirajte okomicu a na dužinu $\overline{AF}$ kroz točku P
5. Konstruirajte okomicu b na pravac d kroz točku A
6. Odredite sjecište pravaca a i b te ga označite slovom T
7. Uključite trag točke T te točku A pomičite po pravcu d

Povlačenjem točke A po pravcu d dobili smo neku krivulju, koju?

Parabolu.

Je li točka T jednako udaljena i od pravca d i od točke F?

Točka T jednako je udaljena i od pravca d i od točke F zato jer se nalazi na simetrali dužine $\overline{\mathrm{AF}}$, dakle jednako je udaljena i od točke F i od točke A, a točka A leži na pravcu d.

Slika 5.1.2.8. Ogledni izgled popunjenog nastavnog listića na kraju aktivnosti

Po završetku konstrukcije nastavnik s učenicima vodi dijalog te učenici odgovaraju na postavljena pitanja. Koju smo krivulju dobili povlačenjem točke A po pravcu d? Je li točka T jednako udaljena i od pravca d i od točke F? Nakon čega izvodimo zaključak:

Točka T jednako je udaljena i od pravca d *i od točke* F *zato jer se nalazi na simetrali dužine* $\overline{AF}$, *dakle jednako je udaljena i od točke F i od točke A, a točka A leži na pravcu d.*

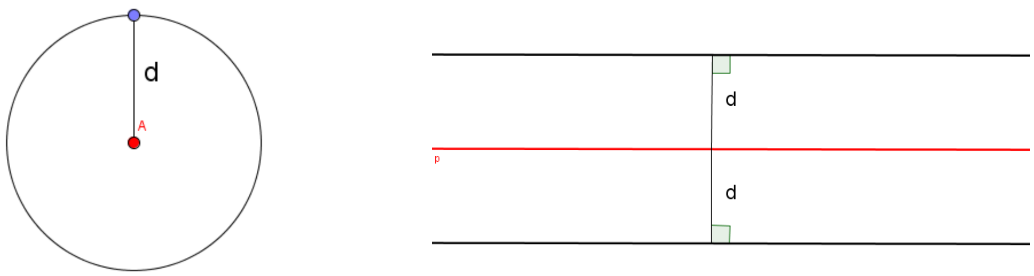
Nakon ove aktivnosti vrlo lako možemo prijeći na aktivnost u kojoj će učenici otkriti definiciju parabole.

5.2. Definicija parabole

Nakon što učenici otkriju parabolu prirodno slijedi da otkriju i njezinu definiciju. Ovisno o aktivnosti kojom započinjemo otkrivanje parabole nastavljamo sa sljedećim aktivnostima. Navedene aktivnosti predviđene su za nastavni sat nakon otkrivanja parabole.

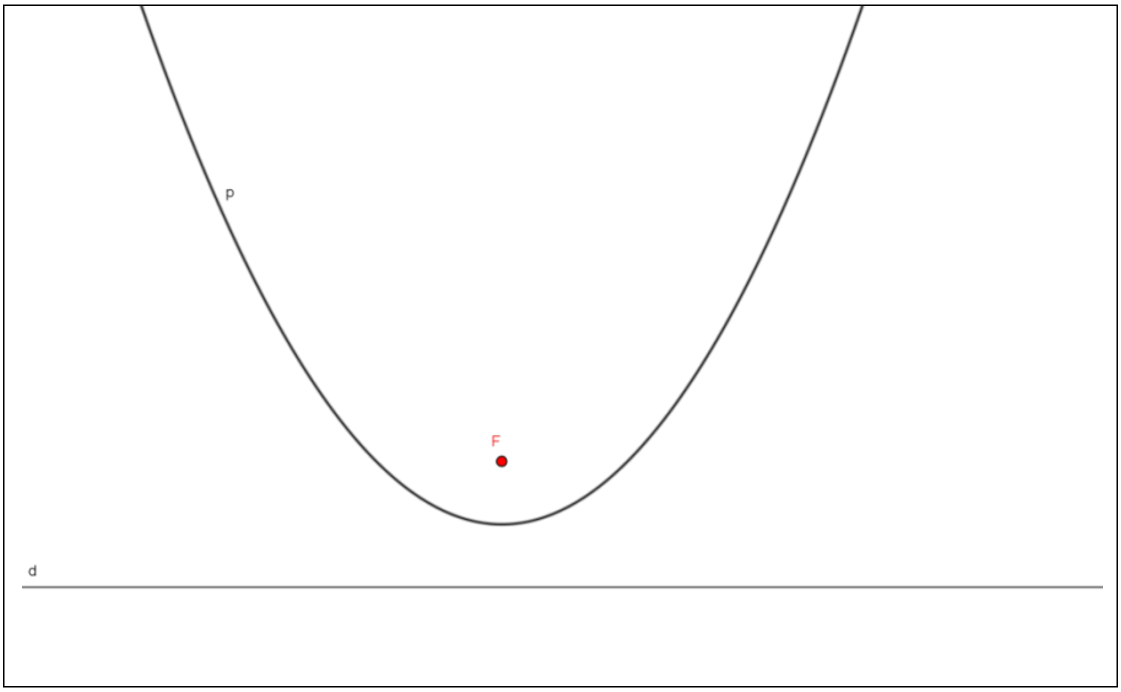
5.2.1. Otkrivanje svojstva parabole mjerenjem

Prije nego krenemo na otkrivanje definicije parabole, bilo bi dobro ponoviti kako se određuje udaljenost od točke i udaljenost od pravca. Provedemo diskusiju te tako ponovimo da sve točke jednako udaljene od jedne čvrste točke pripadaju kružnici čiji je radijus jednak traženoj udaljenosti, te da sve točke jednako udaljene od pravca pripadaju uniji dvaju pravaca paralelnih zadanome pravcu na traženoj udaljenosti (slika 5.2.1.1.).

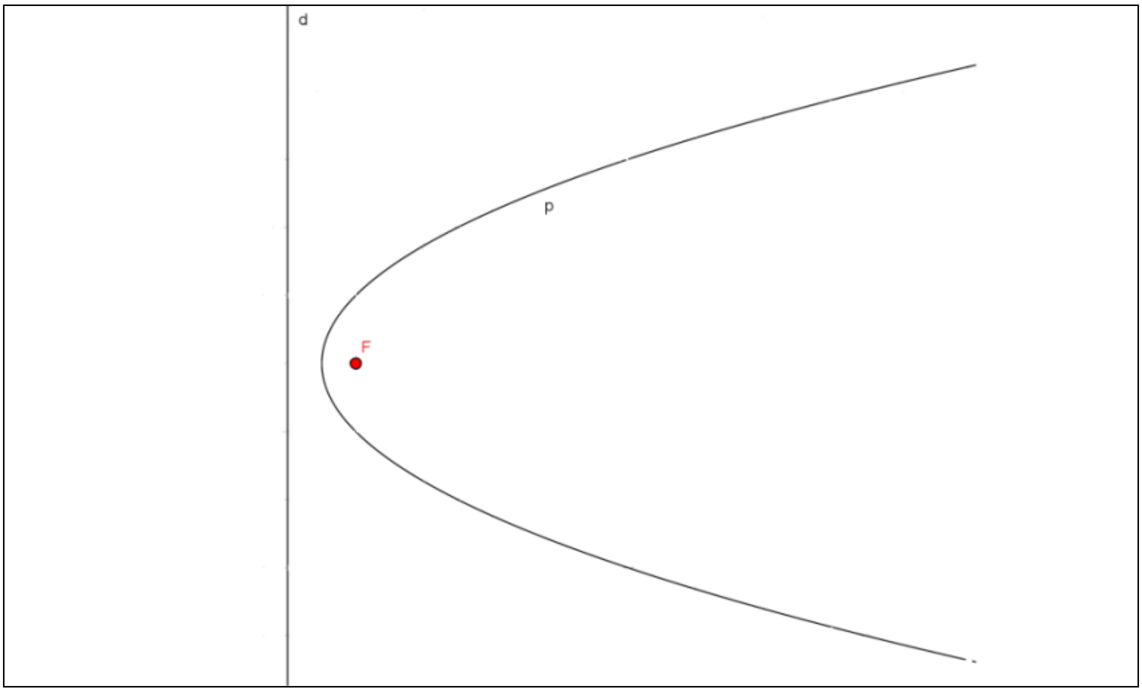


Slika 5.2.1.1. Udaljenosti u ravnini

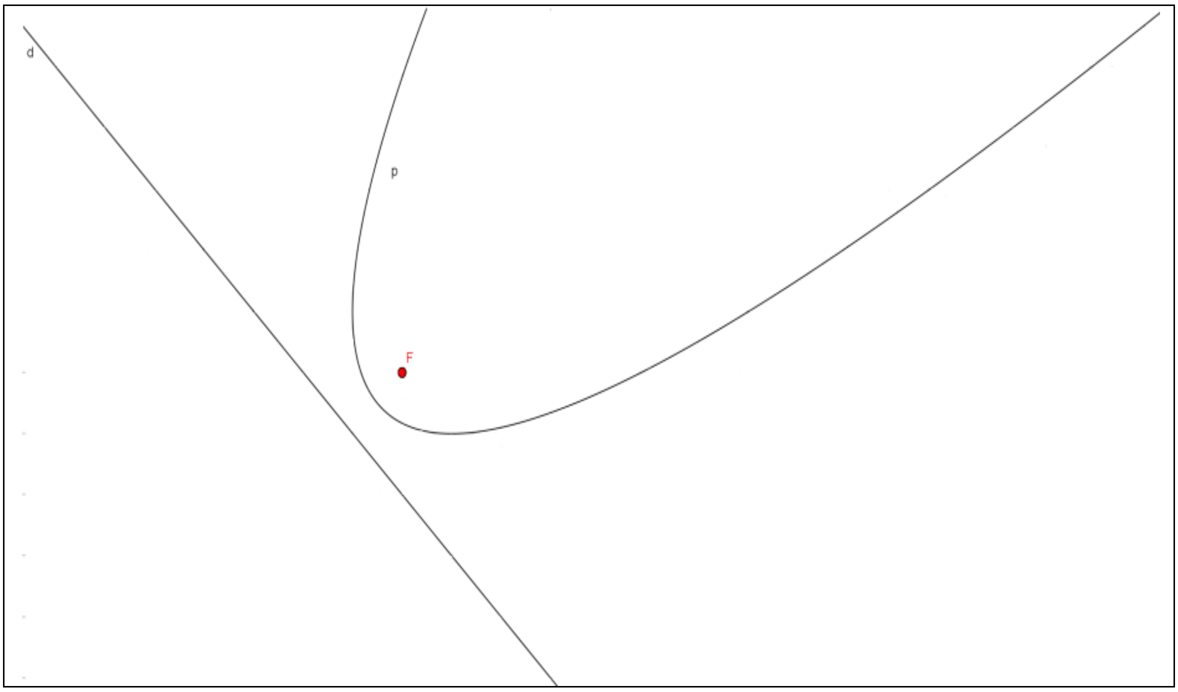
Radi se o praktičnoj aktivnosti čiji je cilj da učenici, radeći suradnički u paru, otkriju definiciju parabole. Potreban materijal je olovka, ravnalo, šestar, te unaprijed pripremljeni nastavni listić s uputama i tablicom u koju učenici upisuju podatke (slika 5.2.1.5.). Učenici dobivaju i papir na kojem se nalazi parabola s pripadajućim fokusom i pripadajućom ravnalicom. S obzirom na položaj fokusa i direktrise parabole se nalaze u tri različita položaja kao na slikama. Prvi red dobiva papir s parabolom sa slike 5.2.1.2., srednji red papir sa slike 5.2.1.3., te zadnji red dobiva papir sa slike 5.2.1.4.. Po završetku provodimo diskusiju i analiziramo podatke dobivene mjerenjem te izvodimo zaključak.



Slika 5.2.1.2. Parabola (A)



Slika 5.2.1.3. Parabola (B)



Slika 5.2.1.4. Parabola (C)

Definicija parabole

Na paraboli odaberite proizvoljno pet točaka T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5.

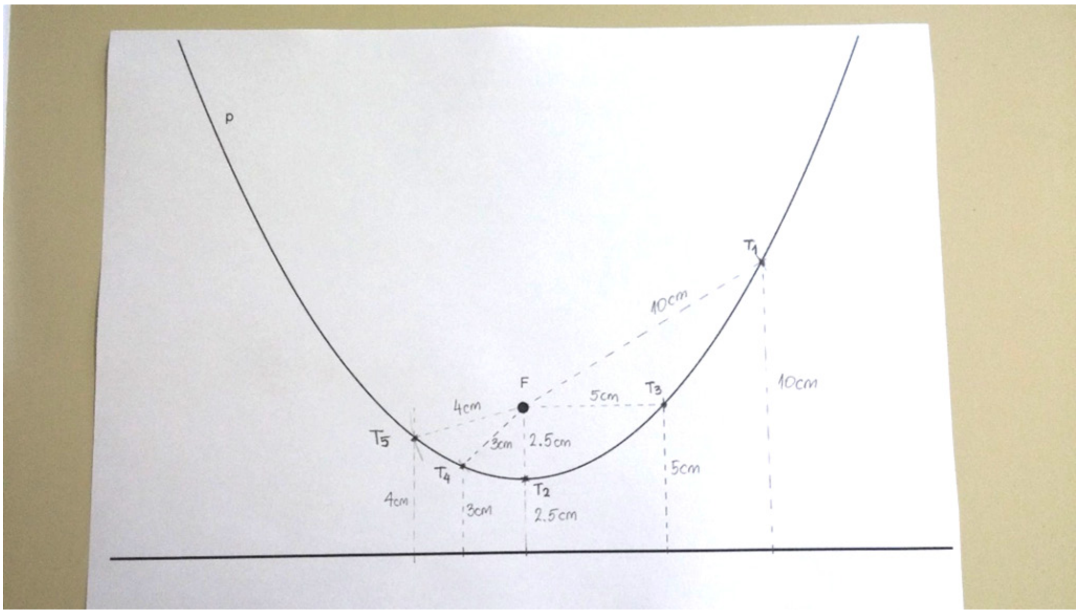
Odredite udaljenost odabranih točaka do točke F i do pravca d.

Ispunite tablicu!

Točka	$d(T,F)$	$d(T,d)$
T_1		
T_2		
T_3		
T_4		
T_5		

Što primjećujete?

Slika 5.2.1.5. Nastavni listić – Definicija parabole



Slika 5.2.1.6. Ogledni izgled Parabole (A) nakon izvršene aktivnosti

Definicija parabole

Na paraboli odaberite proizvoljno pet točaka T_1, T_2, T_3, T_4 i T_5.

Odredite udaljenost odabranih točaka do točke F i do pravca d.

Ispunite tablicu!

Točka	$d(T,F)$	$d(T,d)$
T_1	10 cm	10 cm
T_2	2.5 cm	2.5 cm
T_3	5 cm	5 cm
T_4	3 cm	3 cm
T_5	4 cm	4 cm

Što primjećujete?

Točke na paraboli jednako su udaljene i od točke F i od pravca d.

Slika 5.2.1.6. Ogledni izgled nastavnog listića nakon izvršene aktivnosti

Nakon analize svih grupa dolazimo do zaključka da su sve točke na paraboli jednako udaljene od točke F i od pravca d. Zajedno izvedemo zaključak da skup svih točaka jednako udaljenih od jedne čvrste točke i od jednog čvrstog pravca nazivamo parabola.

Na kraju, zaključujemo da je parabola skup svih točaka jednako udaljenih od jedne čvrste točke i jednog čvrstog pravca te ispisujemo definiciju:

Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u ravnini M, tako da točka F ne pripada pravcu d. Skup svih točaka jednako udaljenih od zadanog pravca i zadane točke nazivamo parabola i označavamo ga

$$P = \{T \in M \mid d(T,d) = d(T,F)\}.$$

5.2.2. Otkrivanje definicije parabole u GeoGebri

Jednako kao i kod otkrivanja parabole, prilikom otkrivanja definicije parabole imamo alternativnu aktivnost. Za izvršavanje aktivnosti predviđen je cijeli nastavni sat u učionici s računalima. Cilj je da učenici istraživanjem u alatu dinamične geometrije otkriju definiciju parabole. Oblik rada je suradnički rad učenika u paru. Potrebni materijal sastoji se od pripremljene radne bilježnice u alatu dinamične geometrije, nastavni listić s pitanjima i uputama (slika 5.2.2.4.). Aktivnost teče tako da učenici otvore radnu bilježnicu u alatu dinamične geometrije, naprave aktivnost prema uputama te odgovore na postavljena pitanja. Ovisno o mjestu na kojem sjede, učenici mogu dobiti tri različita početna primjera, odnosno različite početne položaje točke i pravca. Prvi položaj parabole prikazan je na slici 5.2.2.1., drugi na slici 5.2.2.2. i treći položaj na slici 5.2.2.3.

GeoGebra – Definicija parabole

1. Zadana je točka T i pravac p, točka T ne pripada pravcu p te kružnice i pravci u različitim bojama.
2. Odredite sve točke koje se nalaze i na pravcu i na kružnici, a da su pritom te točke jednako udaljene i od točke T i od pravca p. (npr. Kružnica roze boje sadrži sve točke udaljene od točke T za 3, rozi pravac sadrži sve točke udaljene od pravca p za 3. Presjek roze kružnice i rozog pravca tražene su točke.)

Nastavak radnog listića – GeoGebra – Definicija parabole

Koristite alat *SJECIŠTE* za traženje tih točaka.

Dobivene točke označite redom $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$ i T_9.

3. Alatom *KONIKA KROZ PET TOČAKA* odredite koju krivulju određuju točke $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$ i T_9. (odaberite bilo kojih pet točaka između točaka $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8$ i T_9).

Koju krivulju određuju dobivene točke?

____

Što je pravac p dobivenoj krivulji?

____

Što je točka T dobivenoj krivulji?

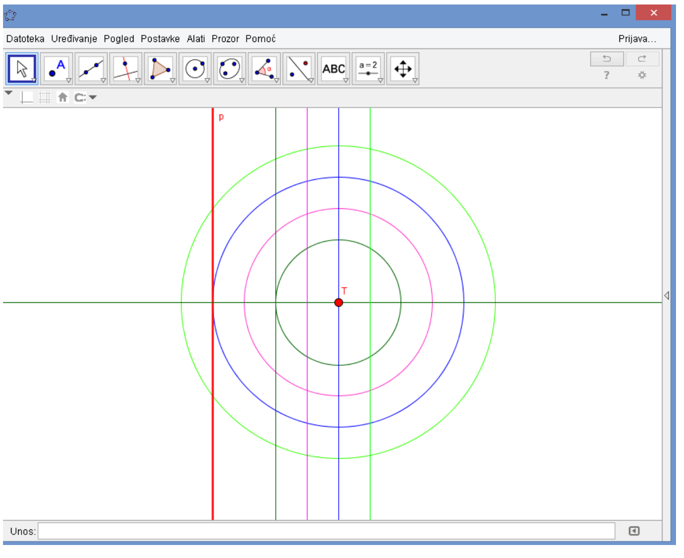
____

Alatom *UDALJENOST* provjerite je li svaka dobivena točka jednako udaljena od točke T i pravca p.

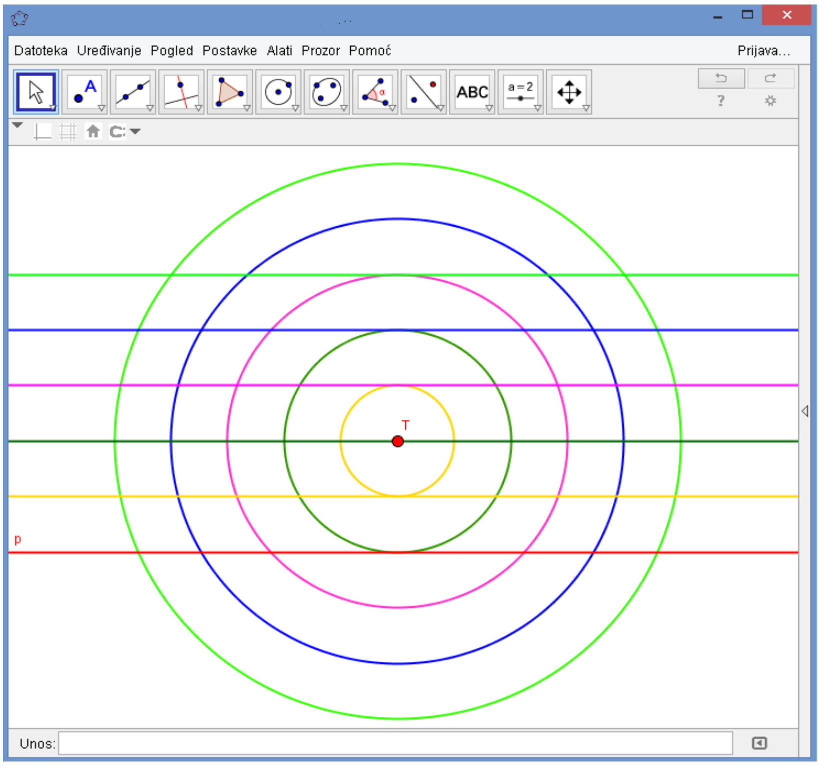
Što zaključujete?

____

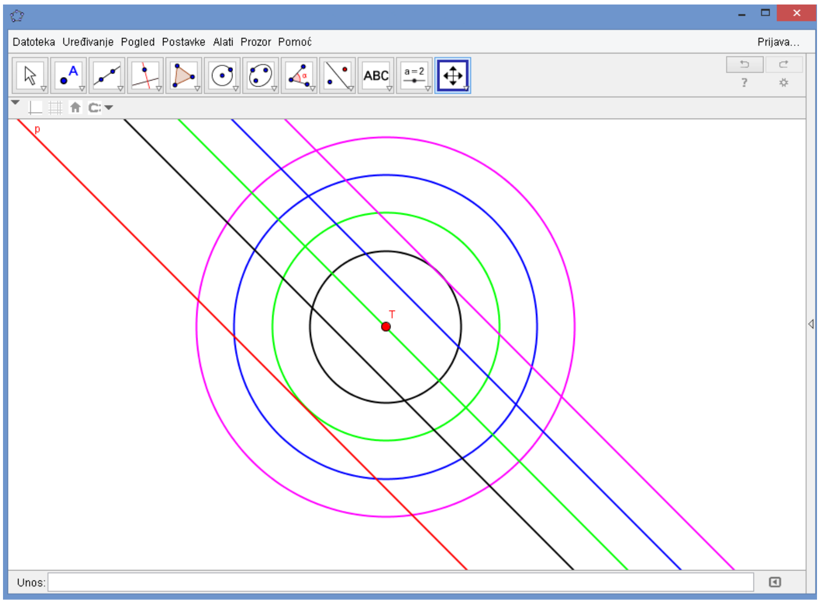
Slika 5.2.2.4. Nastavni listić – GeoGebra - Definicija parabole



Slika 5.2.2.1. Parabola (A)

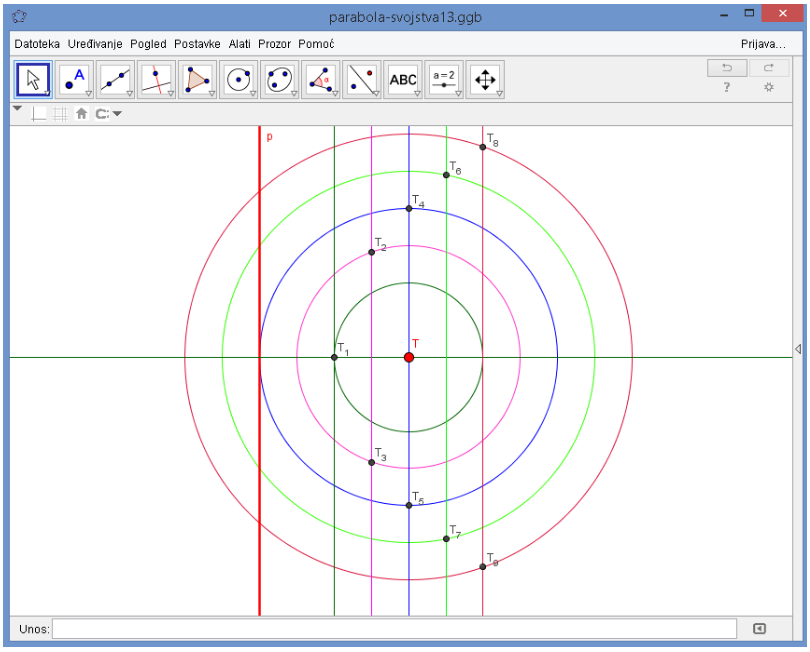


Slika 5.2.2.2. Parabola (B)

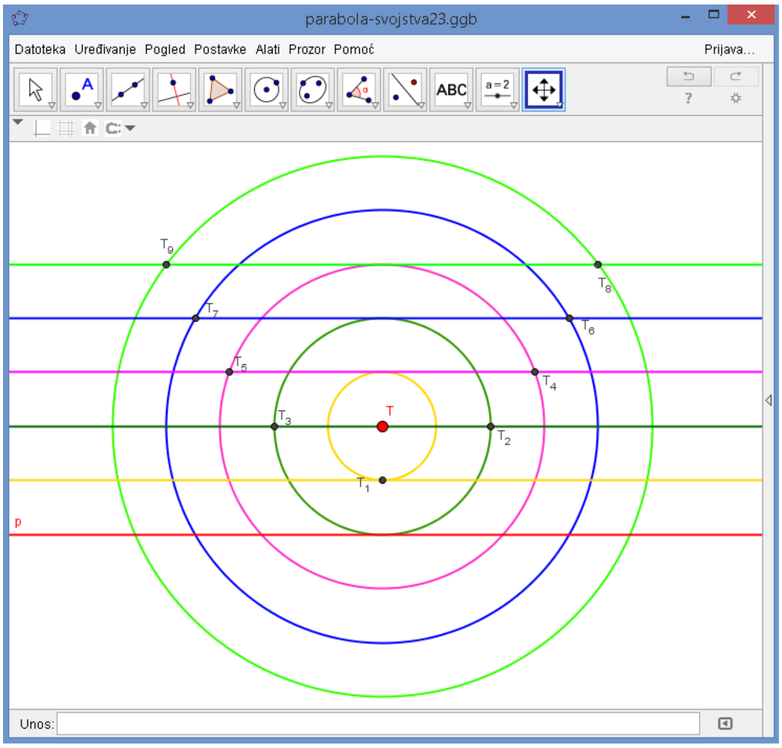


Slika 5.2.2.3. Parabola (C)

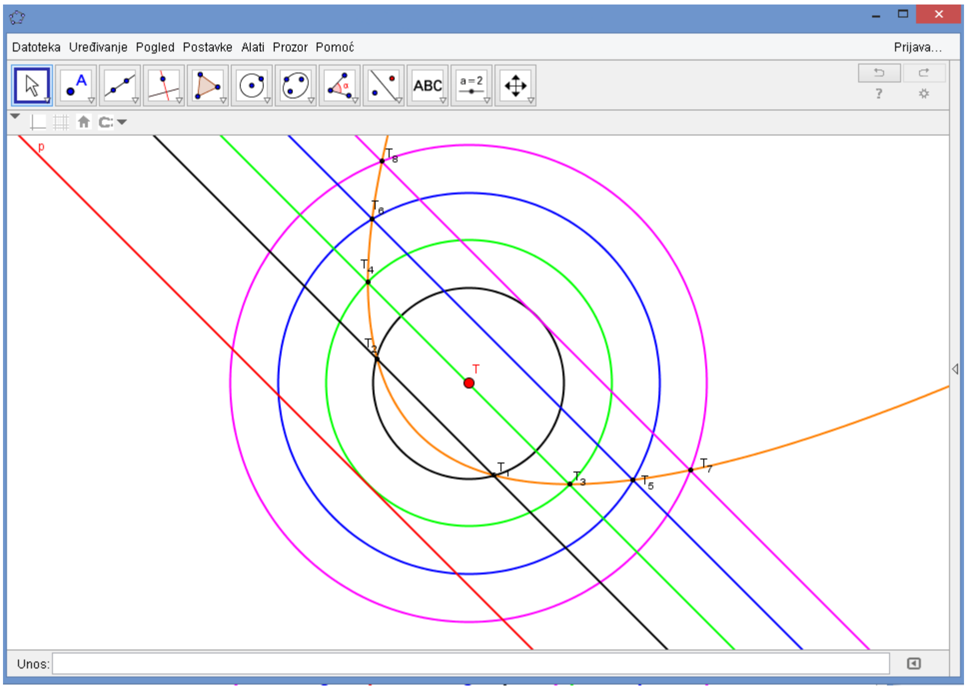
Sljedeći korak je naći odgovarajuća sjecišta alatom *SJECIŠTE*. Te dobivene točke preimenovati u $T_1, \ldots, T_9$. (slike 5.2.2.4, 5.2.2.5 i 5.2.2.6.)



Slika 5.2.2.4. Drugi korak (A)

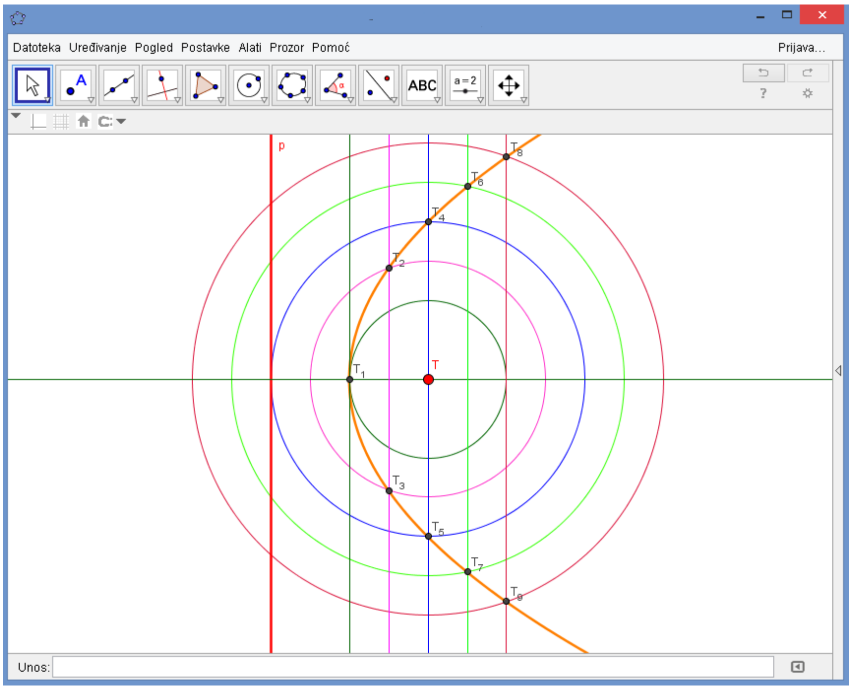


Slika 5.2.2.5. Drugi korak (B)

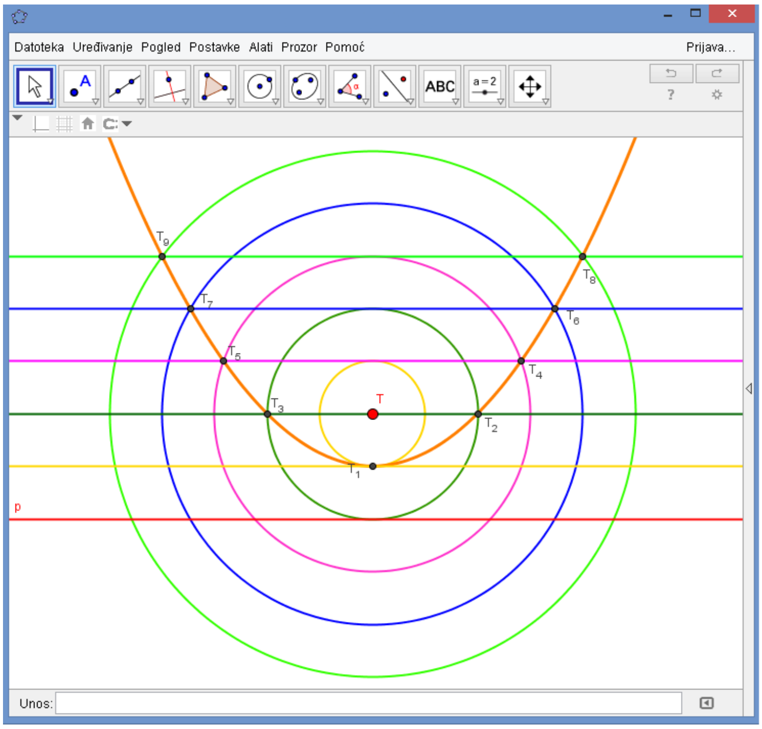


Slika 5.2.2.6. Drugi korak (C)

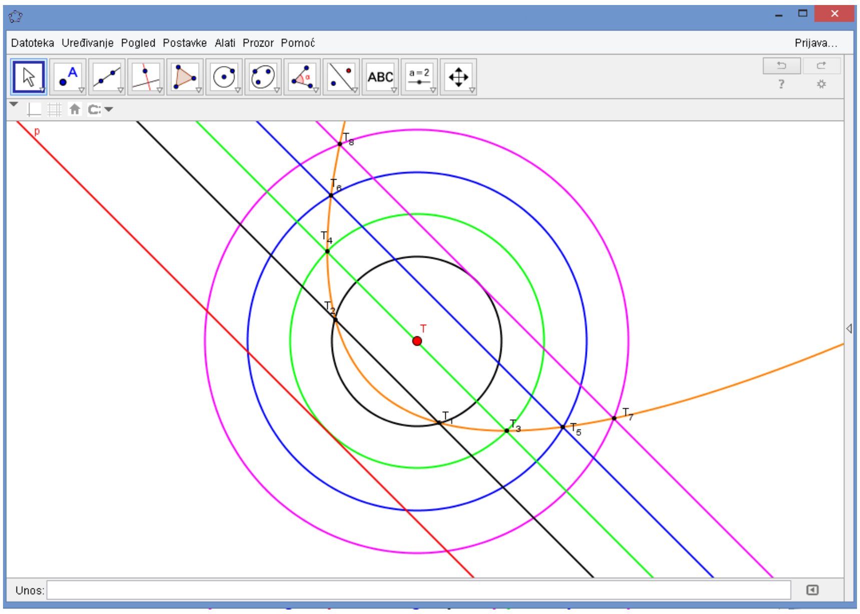
Alatom *KONIKA KROZ PET TOČAKA* treba odrediti koju koniku čine točke $T_1, \ldots T_9$. (slike 5.2.2.7, 5.2.2.8. i 5.2.2.9.)



Slika 5.2.2.7. Treći korak (A)



Slika 5.2.2.8. Treći korak (B)



Slika 5.2.2.9. Treći korak (C)

Nakon što dobijemo krivulju, ispunjavamo nastavni listić (slika 5.2.2.4.)

GeoGebra – Definicija parabole

1. Zadana je točka T i pravac p, točka T ne pripada pravcu p te kružnice i pravci u različitim bojama.
2. Odredite sve točke koje se nalaze i na pravcu i na kružnici, a da su pritom te točke jednako udaljene i od točke T i od pravca p. (npr. Kružnica roze boje sadrži sve točke udaljene od točke T za 3, rozi pravac sadrži sve točke udaljene od pravca p za 3. Presjek roze kružnice i rozog pravca tražene su točke.)

   Koristite alat *SJECIŠTE* za traženje tih točaka.

   Dobivene točke označite redom $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 \; i \; T_9$.
3. Alatom *KONIKA KROZ PET TOČAKA* odredite koju krivulju određuju točke $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 \; i \; T_9$. (odaberite bilo kojih pet točaka između točaka $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 \; i \; T_9$).

Koju krivulju određuju dobivene točke?

Točke određuju parabolu.

Što je pravac p dobivenoj krivulji?

Pravac p je direktrisa ili ravnalica dobivene parabole.

Što je točka T dobivenoj krivulji?

Točka T je fokus ili žarište dobivene parabole.

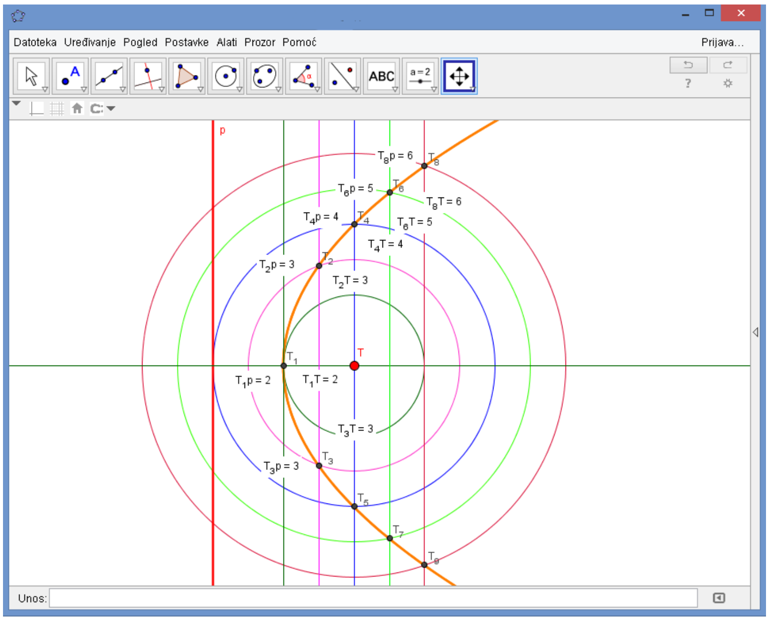
Alatom *UDALJENOST* provjerite je li svaka dobivena točka jednako udaljena od točke T i pravca p.

Što zaključujemo?

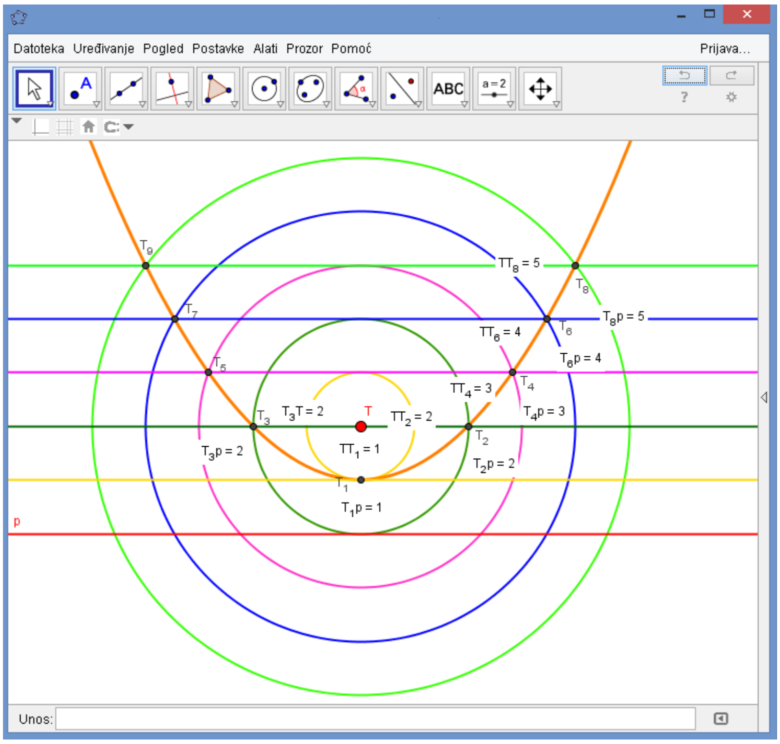
Zaključujemo da je parabola skup točaka koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke i jednog čvrstog pravca u ravnini.

Slika 5.2.2.10. Ogledni izgled popunjenog nastavnog listića

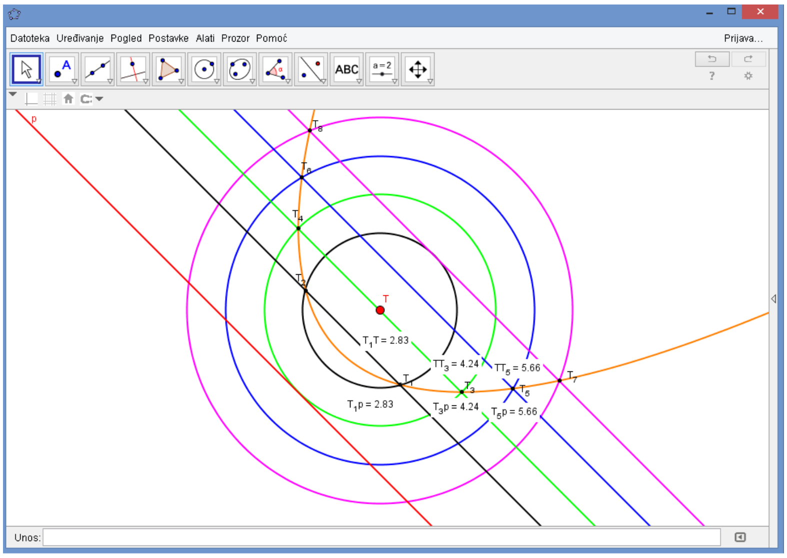
Alatom *UDALJENOST* provjerimo jesu li udaljenosti jednake. (slike 5.2.2.11., 5.2.2.12. i 5.2.2.13.)



Slika 5.2.2.11. Završni izgled (A)



Slika 5.2.2.12. Završni izgled (B)



Slika 5.2.2.13. Završni izgled (C)

Nakon što odredimo udaljenosti i uvjerimo se da je parabola skup točaka jednako udaljenih od jednog čvrstog pravca i jedne čvrste točke, koja ne leži na danom pravcu, u ravnini, tada možemo izreći skupovnu definiciju parabole:

Neka je d čvrsti pravac i F čvrsta točka u ravnini M, tako da točka F ne pripada pravcu d. Skup svih točaka jednako udaljenih od zadanog pravca i zadane točke nazivamo parabola i označavamo ga

$$P = \{T \in M \mid d(T,d) = d(T,F)\}.$$

5.3. Otkrivanje svojstva parabole u programu dinamične geometrije

Cilj ove aktivnosti je da učenici istraživanjem u alatu dinamične geometrije otkriju svojstva parabole. Oblik rada je suradnički rad učenika u paru. Potrebni materijal sastoji se od pripremljene radne bilježnice u alatu dinamične geometrije, nastavni listić s pitanjima i uputama (slika 5.3.1.). Aktivnost teče tako da učenici najprije otvaraju radnu bilježnicu u alatu dinamične geometrije, napravne aktivnost prema uputama te odgovore na postavljena pitanja. Naravno za izvođenje ove aktivnosti potrebno je nastavni sat održati u računalnoj učionici, za provođenje ove aktivnosti potrebno je izdvojiti jedan nastavni sat.

Svojstvo parabole – GeoGebra

1. Na paraboli proizvoljno odaberi točku T (koristi alat TOČKA NA OBJEKTU).
2. Alatom OKOMICA konstruiraj okomicu na direktrisu kroz točku T, alatom SJECIŠTE odredi točku N koja je sjecište okomice i direktrise.
3. Alatom DUŽINA konstruiraj dužine $\overline{TN}$ i $\overline{TF}$. Nakon konstrukcije dužina desnim klikom na okomicu odaberemo sakrij objekt.

Čemu je jednaka duljina dužine $\overline{TN}$?

Čemu je jednaka duljina dužine $\overline{TF}$?

4. Alatom UDALJENOST odredi udaljenost točke T od direktrise, te točke T od fokusa F parabole.
5. Alatom POMICANJE proizvoljno pomiči točku T po paraboli. Promatraj kako se udaljenosti mijenjaju. Što uočavaš?

6. Odredi maksimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole. Postoji li takva udaljenost?
7. Odredi minimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole.

Gdje se ta točka nalazi?

Kako smo nazvali $''vrh''$ parabole kod grafa kvadratne funkcije?

Kako bismo mogli nazvati točku parabole koja je najbliža direktrisi odnosno fokusu parabole?

8. Alatom UDALJENOST odredi udaljenost direktrise od fokusa parabole. Kolika je udaljenost tjemena parabole od direktrise odnosno od fokusa?

9. Istraži postoje li dvije točke koje su jednako udaljene od fokusa odnosno od direktrise parabole. (odaberite još jednu proizvoljnu točku na paraboli, odredi njenu udaljenost od direktrise i od fokusa, te pomicanjem točke T i nove točke pokušaj naći dvije točke jedanko udaljene).

Koliko ima takvih točaka?

Za koje točke vrijedi to svojstvo?

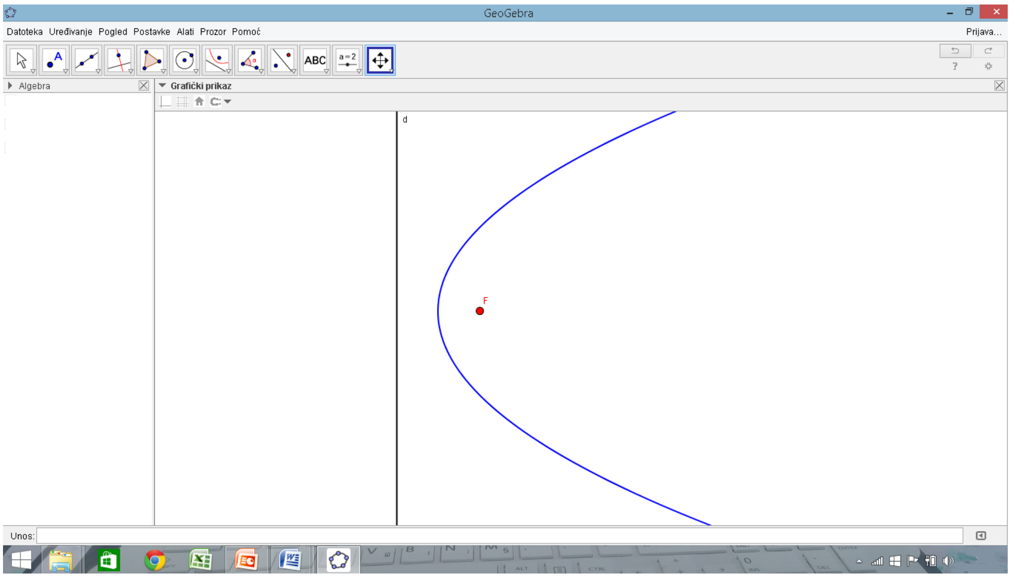
U kakvom su odnosu točke s navedenim svojstvom?

Kako nazivamo to svojstvo?

Kako bismo nazvali pravac s navedenim svojstvom?

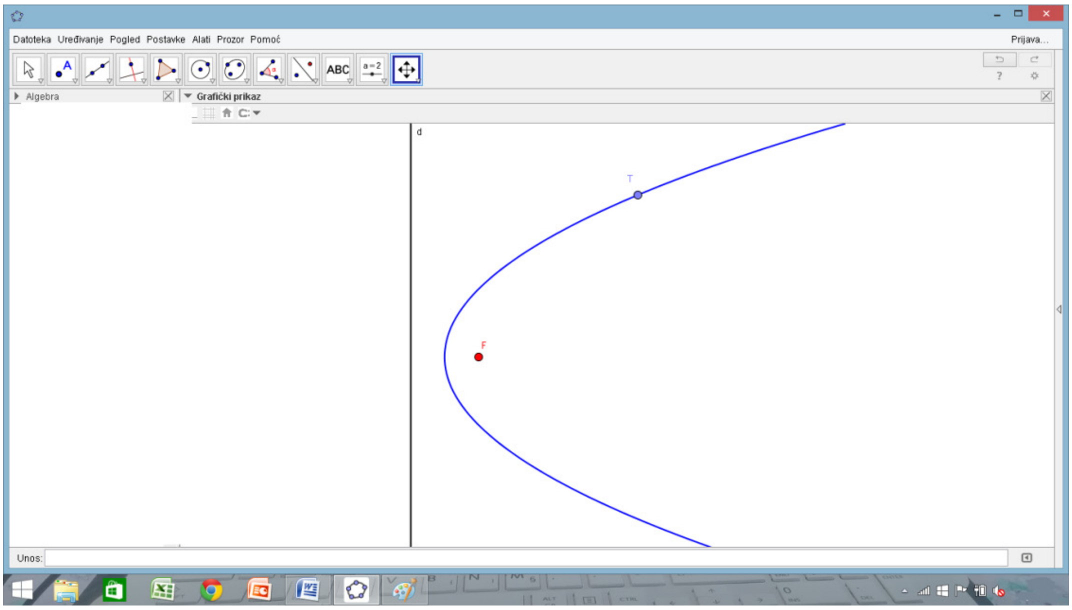
Slika 5.3.1. Ogledni izgled nastavnog listića

Aktivnost započinjemo otvaranjem pripremljene radne bilježnice u programu dinamične geometije – GeoGebra. Početni izgled (slika 5.3.2.) sadrži unaprijed konstuiranu parabolu, direktisu parabole te fokus.



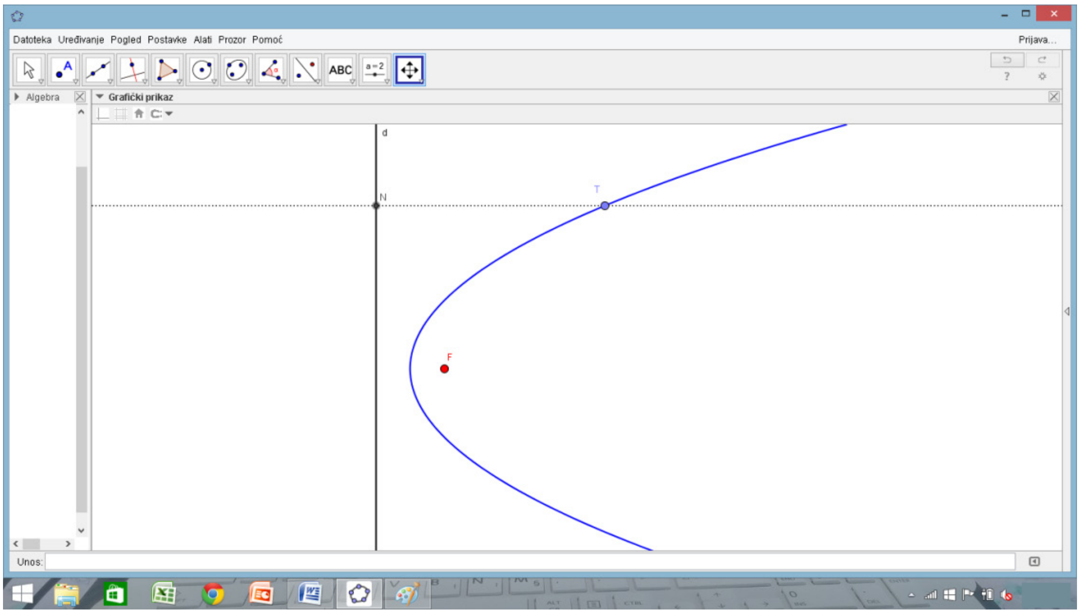
Slika 5.3.2. Početni izgled radne bilježnice

Prateći nastavni listić krećemo s prvim korakom. Na paraboli proizvoljno odaberemo točku T, pritom koristimo alat *TOČKA NA OBJEKTU*. (slika 5.3.3.)



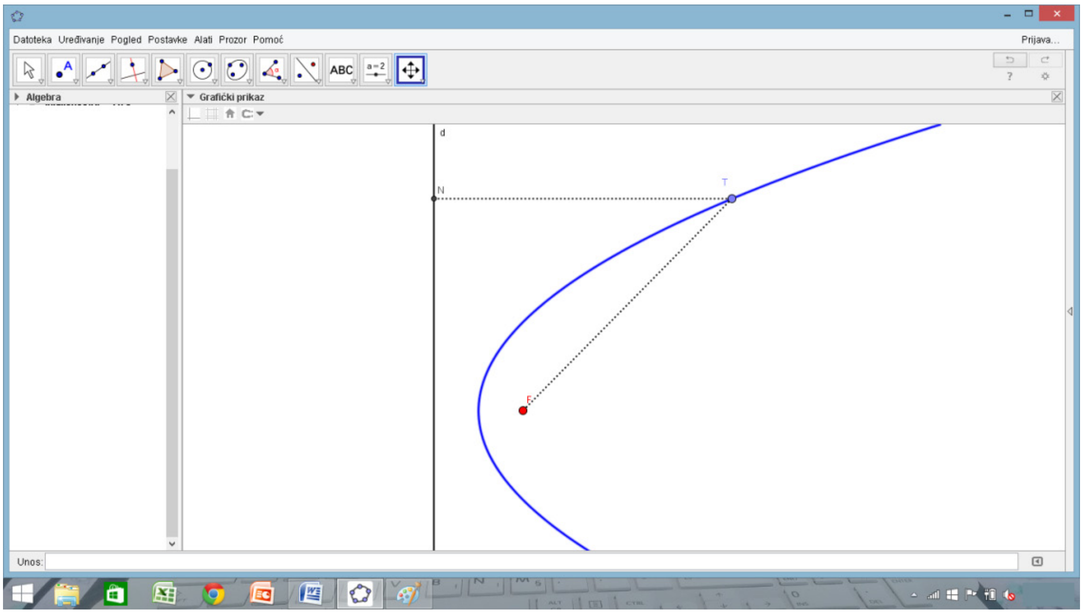
Slika 5.3.3. Prvi korak

Alatom *OKOMICA* konstruiramo okomicu na direktrisu kroz točku T, te alatom *SJECIŠTE* odredimo točku N koja je sjecište okomice i direktrise.(slika 5.3.4.).



Slika 5.3.4. Drugi korak

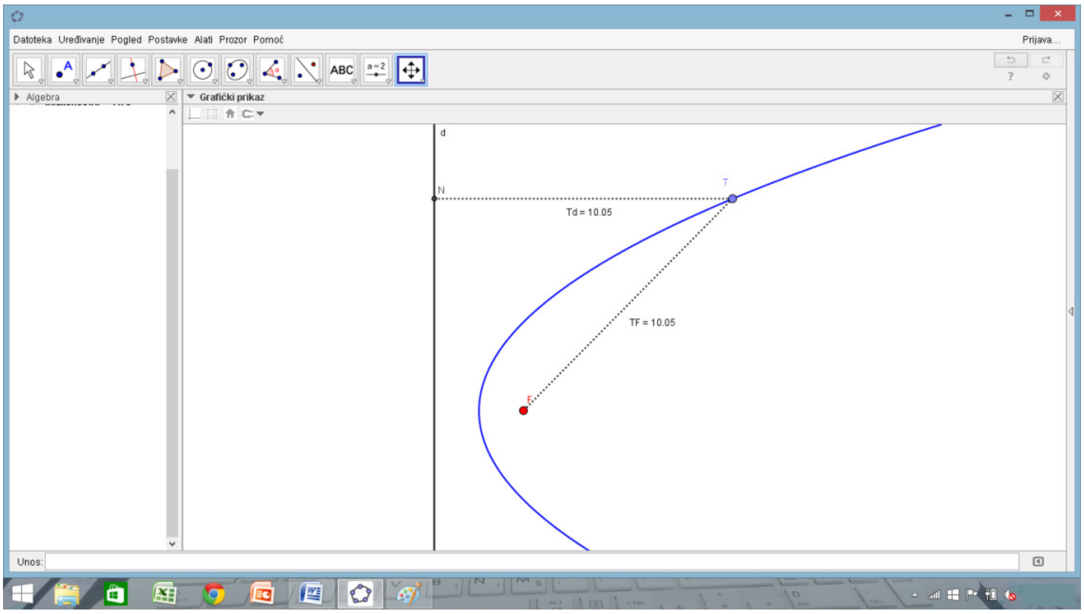
Konstruiramo dužine $\overline{TN}$ i $\overline{TF}$ koristeći alat *DUŽINA*. U istom koraku 'sakrijemo objekt', odnosno sakrijemo okomicu kroz točku T zbog preglednije slike. (slika 5.3.5.)



Slika 5.3.5. Treći korak

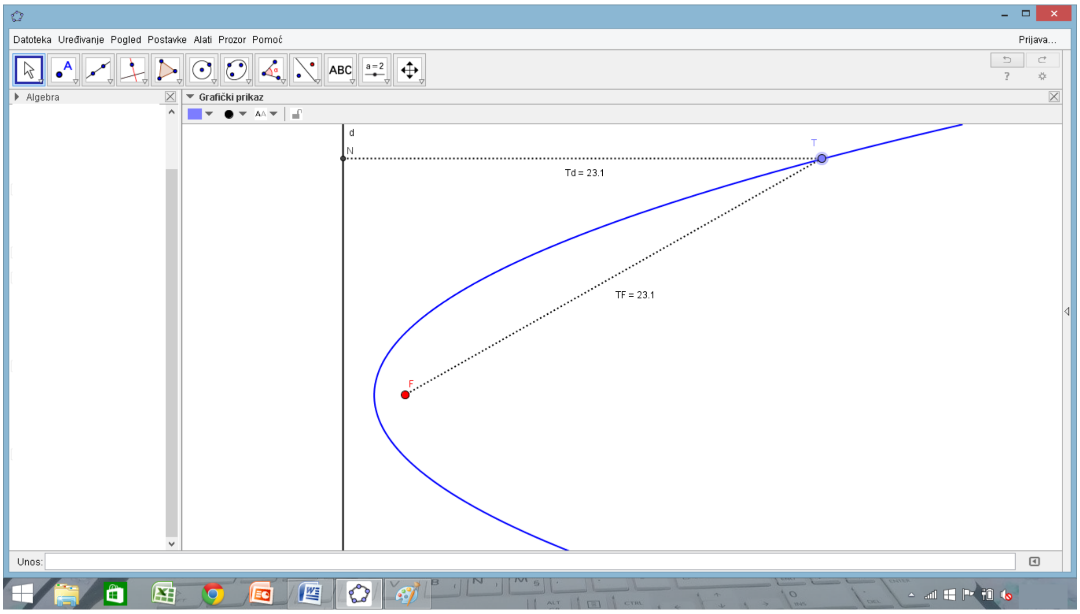
Nakon ovog koraka započnemo kratku diskusiju i zaključak zapisujemo na nastavni listić. U diskusiji pitanjima s nastavnog listića, učenike navedemo na zaključak da su dužine $\overline{TN}$ i $\overline{TF}$ jednake udaljenosti točke T od direktrise d, odnosno udaljenosti točke T of fokusa F parabole.

Alatom *UDALJENOST* odredimo udaljenost točke T od direktrise, te točke T od fokusa F parabole. (slika 5.3.6.). Kratkim pitanjem u ovom koraku izvodimo i još jedan zaključak. Udaljenosti točke T od direktrise, te točke T od fokusa F parabole međusobno su jednake, što odgovara definiciji parabole.



Slika 5.3.6. Četvrti korak

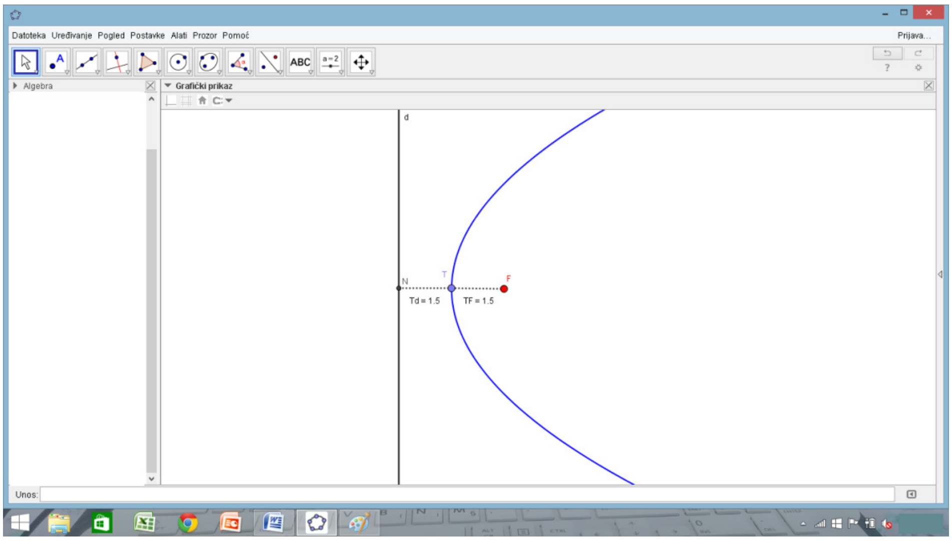
Alatom *POMICANJE* proizvoljno pomičemo točku T po paraboli (slika 5.3.7.). Uočavamo da se pomicanjem točke udaljenosti smanjuju i povećavaju s obzirom na položaj točke, no međusobno su te udaljenosti uvijek jednake.



Slika 5.3.7. Peti korak

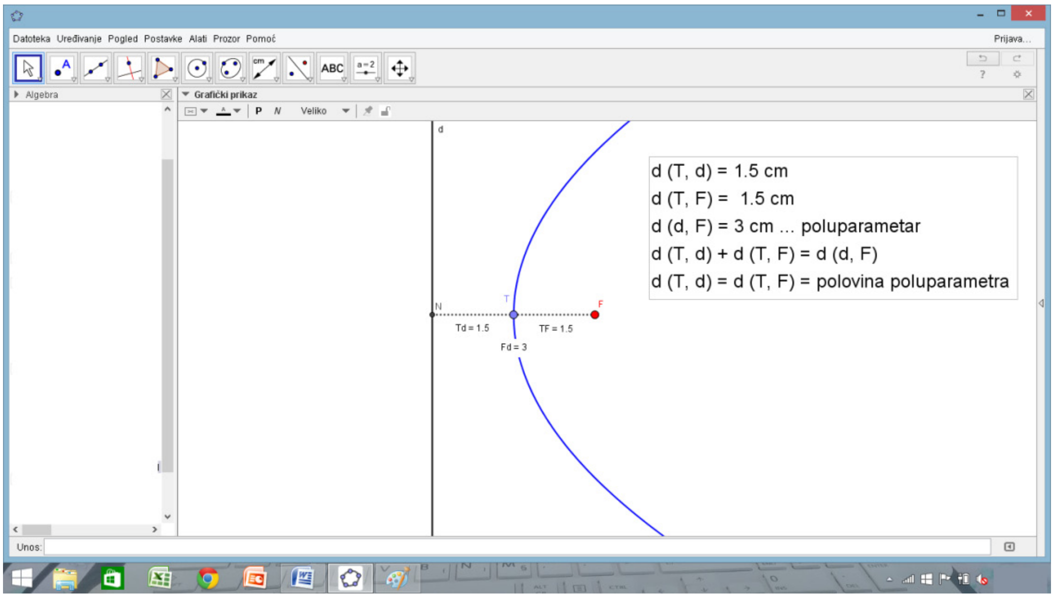
U ovom koraku ponovno napravimo kratku diskusiju. Moramo odrediti maksimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole. Pomicanjem točke 'prema gore' po paraboli uočavamo da se udaljenosti povećavaju, no isto tako uočavamo da koliko god daleko pomakli točku uvijek postoji još veća udaljenost. Dakle odgovor na pitanje „Postoji li takva udaljenost?“ je negativan, ne postoji maksimalna udaljenost budući da parabola 'ide' u beskonačnost.

Daljnjim pomicanjem točke određujemo minimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole (slika 5.3.8.). Pitanjima s nastavnog listića brzo dolazimo do očekivanih zaključaka. Na pitanje gdje se ta točka nalazi, očekujemo odgovor da se nalazi u "vrhu" parabole. Diskusijom dolazimo do odgovora da se "vrh" parabole naziva tjeme, jednako kao i točka parabole koja je najbliža direktrisi i fokusu parabole.



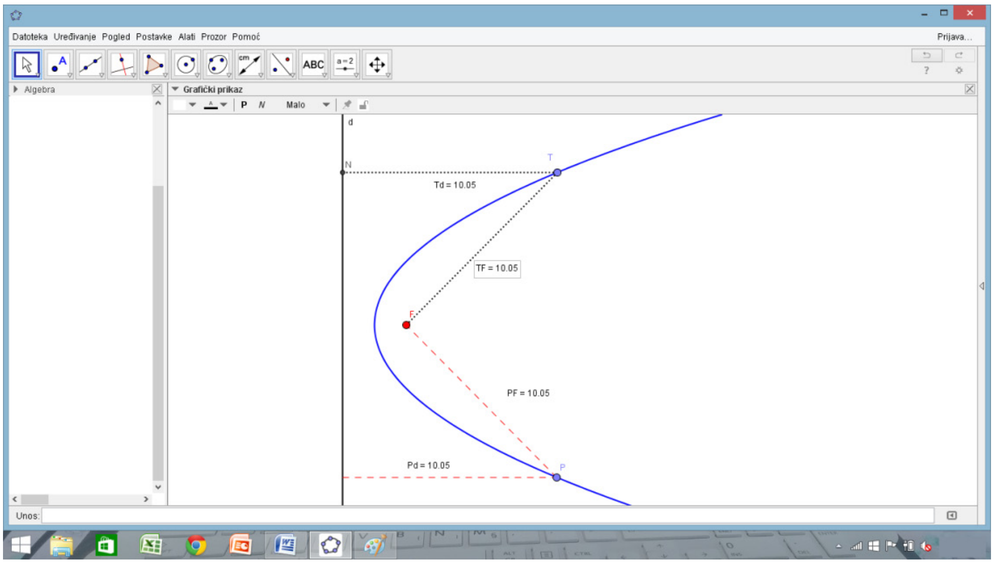
Slika 5.3.8. Šesti korak

Alatom *UDALJENOST* odredimo udaljenost direktrise od fokusa parabole. Te uočavamo da je ta udaljenost jednaka zbroju udaljenosti točke *T* do direktrise d i udaljenosti točke *T* do fokusa *F* (slika 5.3.9.). Nakon uočavanja ove činjenice napravimo zaključak, udaljenost tjemena parabole do direktise, odnosno do fokusa jednaka polovini poluparametra parabole, (u ovom se trenu od učenika očekuje da znaju što je poluparametar, odnosno da je to udaljenost fokusa od direktrise).



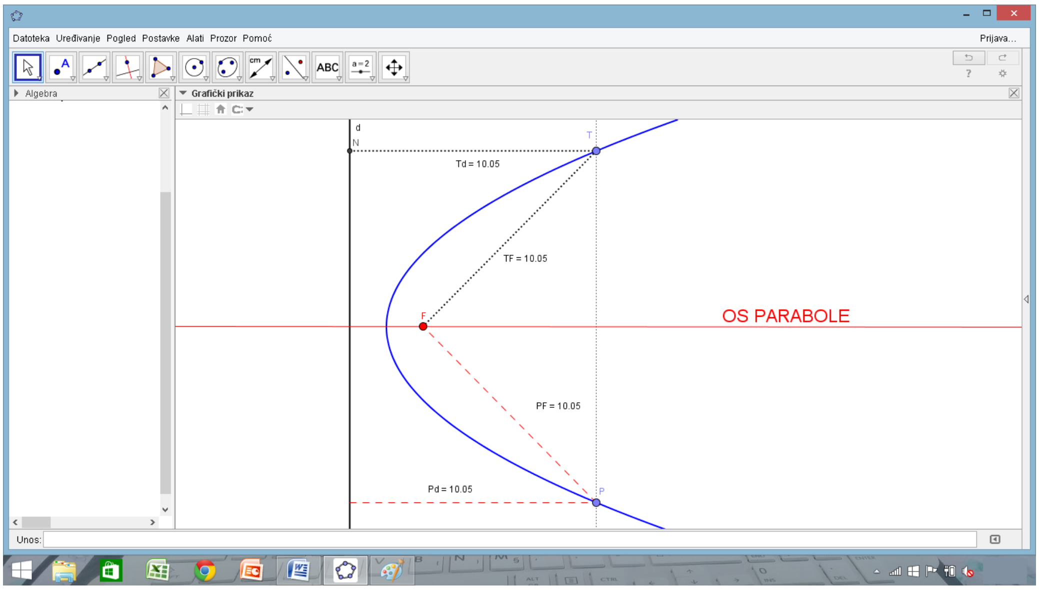
Slika 5.3.9. Sedmi korak

Nakon izvođenja prethodnog zaključka nastavljamo s aktivnošću, u sljedećem se koraku pitamo postoje li dvije točke koje su jednako udaljene od fokusa odnosno od direktrise parabole. Odaberemo još jednu proizvoljnu točku na paraboli, odredimo njenu udaljenost od direktrise i od fokusa, te pomicanjem točke T i nove točke pokušavamo naći položaj tih točaka u kojemu su udaljenosti jednake (slika 5.3.10.).



Slika 5.3.10. Osmi korak

Odgovaranjem na pitanja s nastavnog listića (slika 5.3.1.) razvijamo diskusiju i izvodimo zaključke. Prvi je da simetričnih točaka ima beskonačno mnogo, odnosno da svojstvo vrijedi za sve točke parabole, osim za tjeme. Nadalje, uočavamo da su točke na paraboli koje su jednako udaljene od fokusa međusobno simetrične s obzirom na pravac koji prolazi fokusom i okomit je na direktrisu. Od učenika se očekuje i da znaju kako nazivamo to svojstvo, odnosno da je riječ o osnoj simetriji, te da pravac s navedenim svojstvom nazivamo os simetrije i tu činjenicu povezati s pravcem koji prolazi fokusom i okomit je na direktrisu te zaključiti da se onda taj pravac naziva os parabole (slika 5.3.11.).



Slika 5.3.11. Završni izgled radne bilježnice

Svojstvo parabole – GeoGebra
1. Na paraboli proizvoljno odaberi točku T (koristi alat TOČKA NA OBJEKTU). 2. Alatom OKOMICA konstruiraj okomicu na direktrisu kroz točku T, alatom SJECIŠTE odredi točku N koja je sjecište okomice i direktrise. 3. Alatom DUŽINA konstruiraj dužine $\overline{TN}$ i $\overline{TF}$. Nakon konstrukcije dužina desnim klikom na okomicu odaberemo sakrij objekt. Čemu je jednaka duljina dužine $\overline{TN}$? Jednaka je udaljenosti točke T od direktrise. Čemu je jednaka duljina dužine $\overline{TF}$? Jednaka je udaljenosti točke T od fokusa. 4. Alatom UDALJENOST odredi udaljenost točke T od direktrise, te točke T od fokusa F parabole. 5. Alatom POMICANJE proizvoljno pomiči točku T po paraboli. Promatraj kako se udaljenosti mijenjaju. Što uočavaš? S obzirom na položaj točke udaljenosti se ili povećavaju ili smanjuju, ali međusobno su uvijek jednake. 6. Odredi maksimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole. Postoji li takva udaljenost? Maksimalna udaljenost ne postoji. 7. Odredi minimalnu udaljenost točke T od direktrise d i od fokusa F parabole. Gdje se ta točka nalazi? Točka se nalazi u VRHU parabole. Kako smo nazvali $''vrh''$ parabole kod grafa kvadratne funkcije? Tjeme.

Nastavak radnog listića Svojstvo parabole – GeoGebra

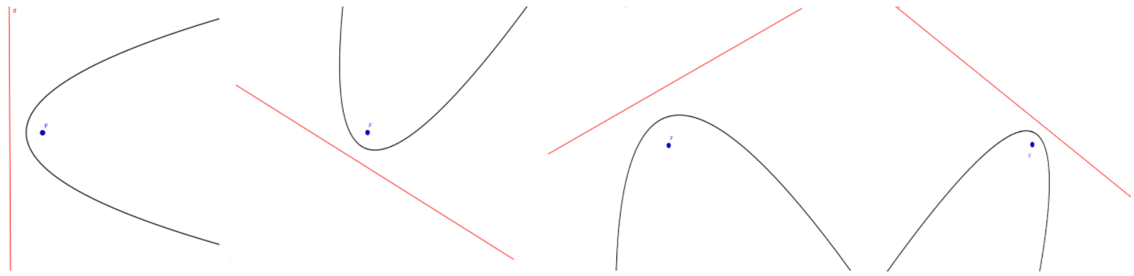
Kako bismo mogli nazvati točku parabole koja je najbliža direktrisi odnosno fokusu parabole? Tjeme parabole.

8. Alatom UDALJENOST odredi udaljenost direktrise od fokusa parabole. Kolika je udaljenost tjemena parabole od direktrise odnosno od fokusa?Udaljenost je jednaka polovini poluparametra.
9. Istraži postoje li dvije točke koje su jednako udaljene od fokusa odnosno od direktrise parabole. (odaberite još jednu proizvoljnu točku na paraboli, odredi njenu udaljenost od direktrise i od fokusa, te pomicanjem točke T i nove točke pokušaj naći dvije točke jedanko udaljene).
   Koliko ima takvih točaka? Beskonačno mnogo.
   Za koje točke vrijedi to svojstvo? Za sve točke parabole, osim tjemena
   U kakvom su odnosu točke s navedenim svojstvom? Simetrične su s obzirom na pravac koji je okomit na direktrisu i prolazi fokusom.
   Kako nazivamo to svojstvo? Osna simetrija.
   Kako bismo nazvali pravac s navedenim svojstvom? Os parabole.

Slika 5.3.12. Ogledni izgled nastavnog listića nakon izvršene aktivnosti

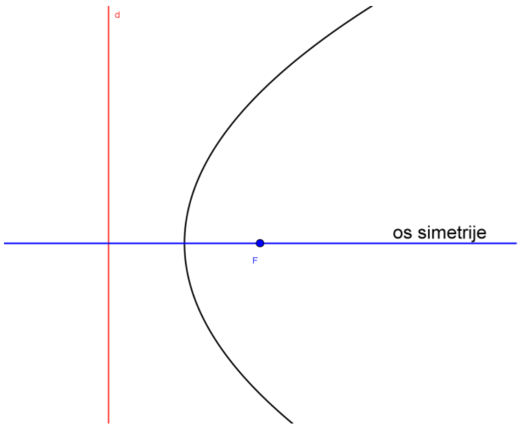
5.4. Izvođenje formule – jednadžba parabole

Aktivnosti kojom ćemo učenike navesti da sami otkriju jednadžbu parabole, prethodi smještanje parabole u koordinatni sustav. Budući da svi lakše pamtimo slike, tako i učenici krivulje pamte po onome što vide. Iz navedenog razloga važno je razbiti očekivanja da je parabola uvijek otvorena prema gore, da direktrisa nije neki 'kosi' pravac i sl. Prije početka smještanja parabole, bilo bi dobro učenicima pokazati primjere takvih položaja (slika 5.4.1.). Prilikom pokazivanja primjera važno je naglasiti da bez obzira na položaj u kojem se parabola nalazi, možemo 'manipulirati' koordinatnim sustavom tako da parabolu 'lijepo' smjestimo u koordinatni sustav.



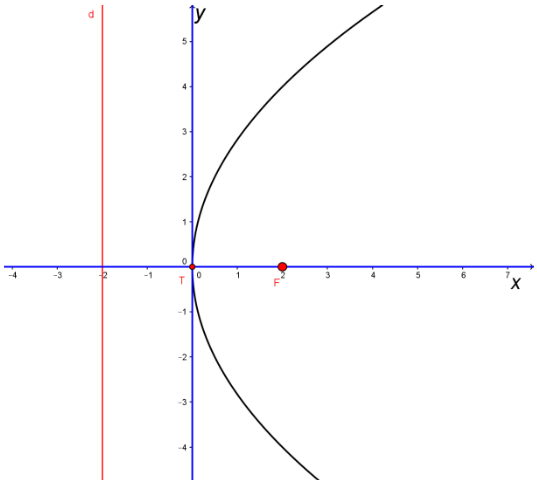
Slika 5.4.1. Parabola u različitim položajima

Na računalu, koristeći projektor, prikazujemo razne primjere položaja parabole. Usmeno diskutiramo s učenicima te zaključujemo, parabola ima jednu os simetrije, neovisno o njenom polozaju, te se pitamo kako bismo najprikladnije odabrali koordinatne osi? (slika 5.4.2.).



Slika 5.4.2. Pravac simetrije kod parabole

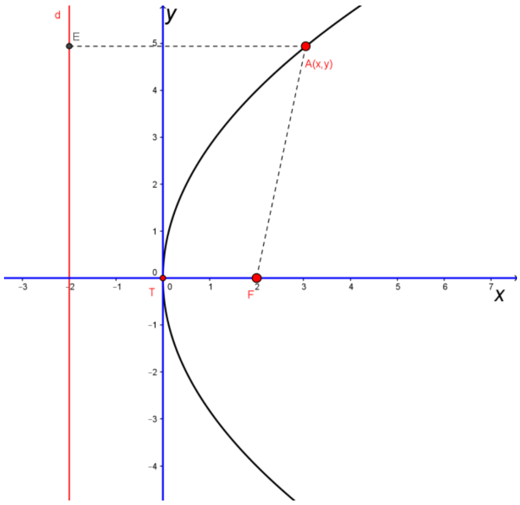
Učenici će uočiti da je najprikladnije odabrati koordinatni sustav tako da se tjeme parabole podudara s ishodištem koordinatnog sustava, os parabole podudara se s $x-osi$, pravac okomit na os parabole koji prolazi tjemenom parabole podudara se s $y-osi$ (slika 5.4.3.).



Slika 5.4.3. Smještanje koordinatnog sustava

Iz diskusije, koju očekujemo nakon smještanja parabole u koordinatni sustav, izvodimo zaključke da tjeme ima koordinate $T(0,0)$, udaljenost između fokusa i direktrise jednaka je duljini poluparametra p iz čega proizlaze koordinate fokusa $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ te jednadžba direktrise $x = -\frac{p}{2}$.

Nakon što smo sjestili koordinatni sustav možemo započeti s aktivnošću otkrivanja jednadže parabole. Za ovu je aktivnost, potrebno izdvojiti jedan školski sat, te ju provesti odmah nakon smještanja koordinatnog sustava. Cilj aktivnosti je da učenici otkriju jednadžbu parabole. Aktivnost se provodi kroz individualni rad učenika, te frontalnu nastavu. Potreban materijal, osim bilježnica i pribora za pisanje koje bi svaki učenik trebao imati, potrebno nam je računalo s programom dinamične geometrije. Aktivnost će teći tako da učenici kroz razrednu diskusiju otkriju jednadžbu parabole. Započinjemo odabirom proizvoljne točke A na paraboli (slika 5.4.4.). Točka A ima koordinate $A(x_A, y_A)$.



Slika 5.4.4. Točka A pripada paraboli

U sljedećem koraku pitamo se kolika je udaljenost točke A od direktrise d i udaljenost točke A od fokusa F, te uočavamo da su te udaljenosti jednake i iznose

$$d(A,d) = d(A,F) = \frac{p}{2} + x_A.$$

Koordinate točke F znamo, vrijedi

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Odavde je

$$d(A,F) = \frac{p}{2} + x_A.$$

Iskoristimo li formulu za udaljenost točaka u koordinatnom sustavu dobivamo

$$\sqrt{(x_A - x_F)^2 + (y_A - y_F)^2} = \frac{p}{2} + x_A.$$

Uvrštavamo poznate koordinate točaka i dobivamo

$$\sqrt{\left(x_A - \frac{p}{2}\right)^2 + (y_A - 0)^2} = \frac{p}{2} + x_A.$$

Nadalje, kvadriranjem izraza dobijemo

$$x_A^2 - px_A + y_A^2 = \frac{p^2}{4} + px_A + x_A^2,$$

te sređivanjem dobivamo

$$y_A^2 = 2px_A.$$

Zaključujemo da točka pripada paraboli ako njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu:

$$y^2 = 2px.$$

LITERATURA

1. Balković, I., Boban, A., Ivačić, N., Kolar, S., Pugar,,A., Sorić, L., *Koordinatni sustav.Kružnica.Krivulje drugog reda. – SREDNJA ŠKOLA,* Powerpoint prezentacija, seminarski rad iz kolegija Metodika nastave matematike 4, mentorica A. Čižmešija. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet, Matematički odsjek, 2014.
2. Bezinović, P., Marušić, I., Ristić Dedić, Z., *Opažanje i unapređivanje školske nastave,* Agencija za odgoj i obrazovanje, Zagreb, 2012., 38. – 39.
3. Dakić, B., Elezović, N., *Matematika 3 – udžbenik i zbirka zadataka za 2. razred gimnazija i tehničkih škola; 2. dio*, Element, Zagreb, 2014
4. Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C., Paris, A. H. (2004.), School Engagement: Potential of the Concept, State of the Evidence, *Review of Educational Research*, 74 (1), 59-109.
5. Limon, M., Mason, L., Merenluoto, K., *Reconsidering Conceptual Change: Issues in Theory and Practice* u E. Lehtinen, *Conceptual change in mathematics: Understanding the Real Numbers,* Kluwer Academic Publishers, New York, 2002, 233-257.
6. Planinić, M., *Osnovne tehnike induciranja konceptualne promjene*, dostupno na: https://www.google.hr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwi4qP-z_aLLAhUL83IKHcCuCHcQFggZMAA&url=https%3A%2F%2Fbib.irb.hr%2Fdatoteka%2F218815.Osnovne_tehnike.doc&usg=AFQjCNHqIHRqRZcW9L2IjgwxpgyhAee2Ow&sig2=6l-9sBrhgYm3wAPCUu2NJw (posjećeno: prosinac 2015.)
7. Putarek, V., Rovan, D., Vlahović-Štetić, V., (2016) Odnos uključenosti učenika u učenje fizike s ciljevima postignuća, subjektivnom vrijednošću zadatka i zavisnim samopoštovanjem*, Društvena istraživanja*, u tisku
8. Reschly, A. L., Christenson, S. L., *Jingle, Jangle, and Conceptual Haziness: Evolution and Future Directions of the Engagement Construct* u S. L. Christenson, A. L. Reschly, C. Wylie, *Handbook of Research on Student Engagement*, Springer, New York, 2012, 3-17.
9. Rovan, D., *Odrednice odabira ciljeva pri učenju matematike u visokom obrazovanju,* neobjavljeni doktorski rad, Zagreb: Odsjek za psihologiju Filozofskog fakulteta u Zagreb, 2011.
10. Skinner, E.A., Pitzer, J. R., *Developmental Dynamics of Student Engagement, Coping, and Everyday Resilience* u S. L. Christenson, A. L. Reschly, C. Wylie, *Handbook of Research on Student Engagement*, Springer, New York, 2012, 21-37.
11. Šuljić, Š., *Zašto je matematika mnogima bauk?*, MiŠ, 51 (2011), 21 – 28

12. Vamvakoussi, X. *Extending The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning: An Introduction* u: Vosniadou, S., Baltas, A., Vamvakoussi, X. (Ur.) *Reframing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction,* Earli, Amsterdam, 2007, 239-246.
13. Vosniadou, X., Vamvakoussi, I., Skopeliti, S., *The Framework Theory Approach to Problem of Conceptual Change* u: Vosniadou, S. (Ur.) *International Handbook of Research on Conceptual Change*, Routledge, New York, 2008, 3-34.
14. Ispitni katalog za državnu maturu u školskoj godini 2014./2015. , Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, dostupno na: http://dokumenti.ncvvo.hr/Ispitni_katalozi_14-15/Hrvatski/IK-mat.pdf (rujan, 2014.)
15. Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje, Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, dostupno na: http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (studeni, 2014.)
16. Nastavni program matematike za treći razred gimnazije, Element, dostupno na: https://element.hr/artikli/file/1267 (posjećeno: studeni 2015.)

PRILOG 1: Predtest

1. Svojim riječima što preciznije opiši što je parabola.

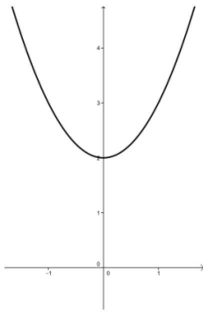
____

____

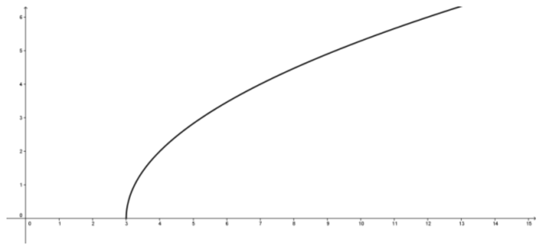
____

2. Na slikama su krivulje zadane danim jednadžbama. Zaokruži slovo ispred onih koje predstavljaju parabolu. Obrazloži svoj odgovor za c), d) i e). (Zašto je krivulja parabola ili zašto nije?)

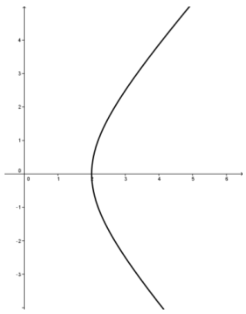
a) $y = x^2 + 2$



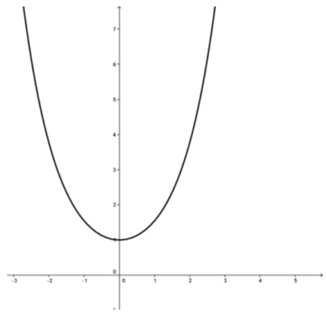
b) $y = \sqrt{4x - 12}\,, x \geq 3$



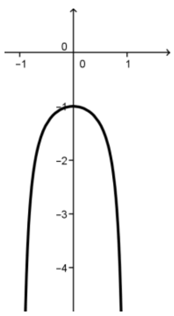
c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1\,, x \geq 2$



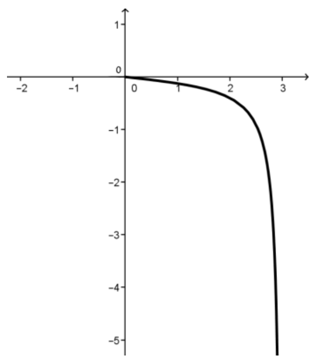
d) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



e) $y = \frac{1}{x^2 - 1}\,, x \in \langle -1, 1 \rangle$



f) $y = \frac{x}{x^2 - 9}\,;\ 0 < x < 3$



c)____

____

d) ____

____

e) ____

____

3. Svojim riječima što preciznije opiši što je tangenta na parabolu.

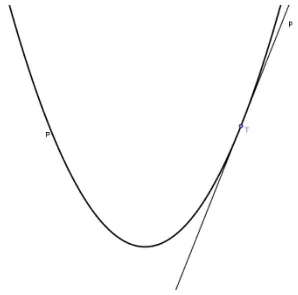
____

____

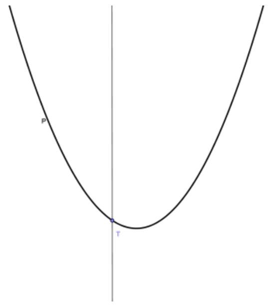
____

4. Zaokruži slovo ispred svake slike na kojoj je pravac p tangenta nacrtane parabole P.

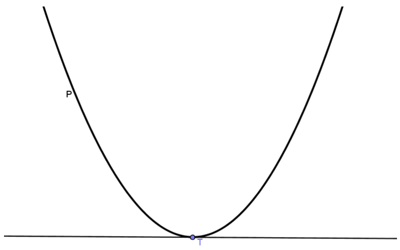
a)



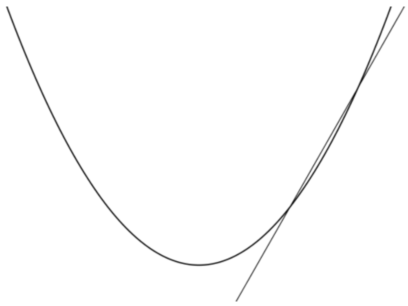
b)



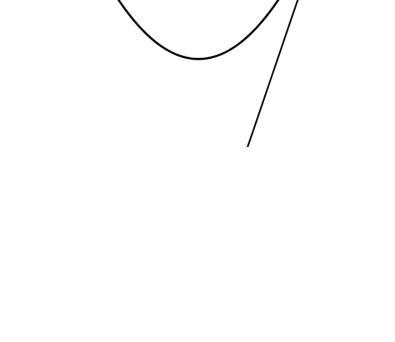
c)



d)



5. Na slici je parabola P i pravac p. Je li pravac p asimptota parabole P? Obrazloži svoj odgovor.



____

____

____

____

____

____

____

____

____

PRILOG 2: Posttest

1. Svojim riječima što preciznije opiši što je parabola.

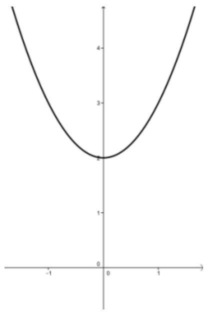
____

____

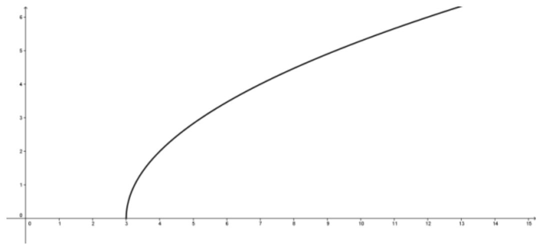
____

2. Na slikama su krivulje zadane danim jednadžbama. Zaokruži slovo ispred onih koje predstavljaju parabolu. Obrazloži svoj odgovor za c), d) i e). (Zašto je krivulja parabola ili zašto nije?)

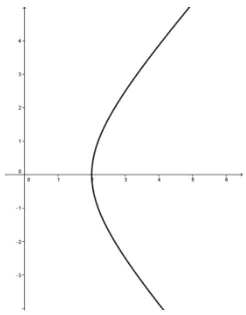
g) $y = x^2 + 2$



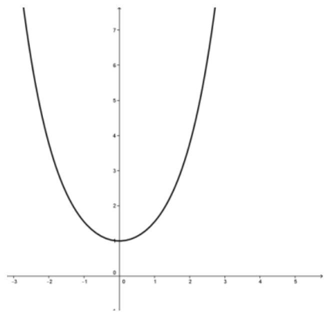
h) $y = \sqrt{4x - 12}, x \geq 3$



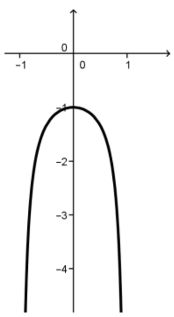
i) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1, x \geq 2$



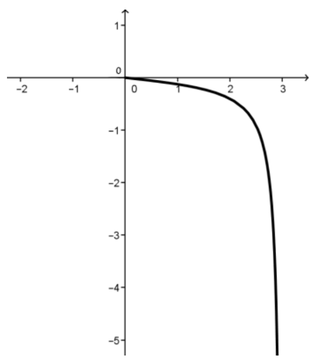
j) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



k) $y = \frac{1}{x^2 - 1}, x \in \langle -1, 1 \rangle$



l) $y = \frac{x}{x^2 - 9}; 0 < x < 3$



c)____

____

d)____

____

e)____

____

3. Svojim riječima što preciznije opiši što je tangenta na parabolu.

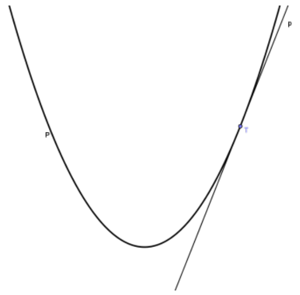
____

____

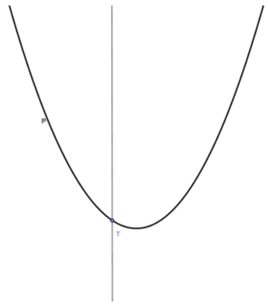
____

4. Zaokruži slovo ispred svake slike na kojoj je pravac p tangenta nacrtane parabole P.

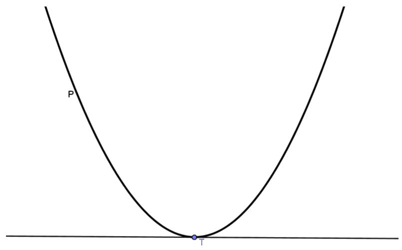
e)



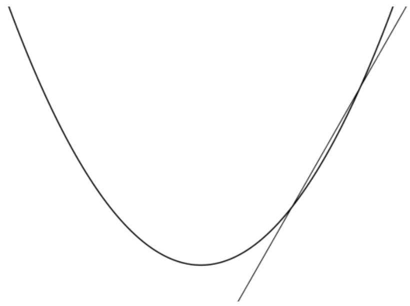
f)



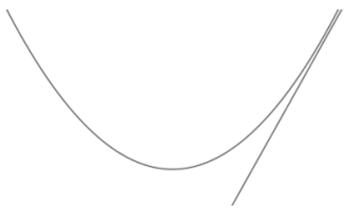
g)



h)



5. Na slici je parabola P i pravac p. Je li pravac p asimptota parabole P? Obrazloži svoj odgovor.



____

____

____

____

____

____

6. Ima li parabola asimptotu? ____

SAŽETAK

Cilj diplomskog rada bio je odrediti učeničku uključenost prilikom usvajanja koncepata vezanih uz parabolu. Osim o uključenosti, u ovome radu razmotrit ćemo još jedan problem vezan uz učenje matematike, odnosno problem konceptualne promjene. Provjerili smo učeničku predodžbu parabole kao krivulje, sposobnost prepoznavanja parabole, prepoznavanje tangente na parabolu i sposobnost opisa iste. Nadalje, ispitali smo kako učenici definiraju asimptote, te znaju li odrediti ima li parabola asimptotu ili ne. Istražili smo uključenost učenika prilikom obrade nastavnog sadržaja vezanog uz koncept parabole. Povezali smo uključenost s postignućima u matematici. Rezultati pokazuju očekivano, učenici su postigli bolje rezultate u posttestu, odnosno nakon obrade nastavnog sadržaja učenici imaju veće znanje. Temeljem rezultata ankete možemo vidjeti da učenici imaju visoke procjene samoefikasnosti, bihevioralne i kognitivne uključenosti kako u matematici općenito, tako i specifično, vezano uz temu krivulja drugog reda te da razumiju ulogu kvalitete uključenosti učenika pri učenju matematičkih sadržaja. Na samom kraju ovog rada opisane su aktivnosti koje pokrivaju problematična područja koja se mogu pojaviti prilikom obrade parabole.

SUMMARY

The aim of thesis was to determine students' involvement in the adoption of concepts related to the parabola. In addition to the inclusion, in this paper we will consider another issue related to the teaching of mathematics, the problem of conceptual change. We examined the students' perception of the parabola as the curve, the ability to recognize the parabola, the identification of the tangent to the parabola, and the ability of description of the tangent to the parabola. Furthermore, we examined how students define asymptote, and do they know to determine whether the parabola has asymptote or not. We investigated the involvement of students in the processing of the content related to the concept of a parabola. We connected with the involvement of achievements in mathematics. Based on results of the survey we can see that students have high selfefficacy assessment, behavioral and cognitive involvement both in mathematics in general, and specifically, regarding to the subject of the curve of the second order and to understand the role of quality of students' involvement in learning mathematics. At the end of this paper we described the activities that cover the problem areas that may arise during the teaching process of the parabola.

ŽIVOTOPIS

Anamarija Božić rođena je u Rijeci 18. travnja 1991. godine. Pohađala je Osnovnu školu Fran Krsto Frankopan u Malinskoj, na otoku Krku. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja, upisuje opću gimnaziju u SŠ Hrvatski kralj Zvonimir u Krku u kojoj završava svoje srednjoškolsko obrazovanje. Nakon toga, odlazi u Zagreb studirati matematiku na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Zagrebu. Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički upisuje 2010. godine, a završava ga 2013. godine. Nakon toga, 2013. godine upisuje diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički i završava ga 2016. godine.