Poissonovi točkovni procesi

Brkić, Andrijana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Andrijana Brkić

POISSONOVI TOČKOVNI PROCESI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Bojan Basrak

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Ovaj rad započet je pod vodstvom docenta Ante Mimice kojeg ćemo se uvijek sjećati po njegovoj susretljivosti i entuzijazmu s kojim je radio.

Točkovni procesi matematički su modeli kojima želimo opisati slučajnu distribuciju točaka u nekom d-dimenzionalnom prostoru. Primjer mogu biti pozicije i vremena potresa u zadnjih 100 godina, raspored stabala u šumi ili vremena dolazaka klijenata na šalter. Točkovni procesi do sada su se proučavali kroz dva različita pristupa. Prvi pristup raspored točaka u prostoru opisuje na jednostavan način - kao podskup u $\mathbb{R}^d$, dok drugi koristi naprednije alate - tzv. slučajne mjere. Ova dva pristupa nisu samo formalno različita, vidjet ćemo kasnije da pristup preko slučajnih mjera zapravo dopušta široj klasi procesa da zadovolje definiciju.

Na početku se odmah nameće potreba za svojevrsnim osnovnim modelom koji bi opisivao *potpuno slučajno razbacane* točke u prostoru, tj. točke među kojima nema interakcije. Kao rezultat toga nastali su Poissonovi točkovni procesi. Oni imaju dva osnovna svojstva:

- broj točaka u svakom podskupu ima Poissonovu distribuciju,
- broj točaka u disjunktnim podskupovima je nezavisan.

Drugo svojstvo se često naziva svojstvo potpune slučajnosti i ono matematički formalno definira naš intuitivni zahtjev da su točke *potpuno slučajno razbacane.*

Cilj nam je u ovom radu iskazati formalnu definiciju Poissonovih procesa i dati pregled osnovnih rezultata vezanih uz njih.

Poglavlje 1

Poissonova distribucija

Prije nego uvedemo koncept Poissonovih točkovnih procesa koji su glavna tema ovog rada, ponovit ćemo neka osnovna svojstva same Poissonove distribucije. Vidjet ćemo da se temeljne ideje, koje ovdje navodimo u kontekstu slučajnih varijabli, provlače u pozadini teorije Poissonovih procesa.

1.1 Poissonova, binomna i polinomijalna distribucija

Definicija 1.1.1. *Kažemo da slučajna varijabla X ima Poissonovu distribuciju sa parametrom $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, ako joj je distribucija zadana sa*

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Koristimo oznaku $X \sim Poiss(\lambda)$.

Iz praktičnih razloga dodefinirat ćemo Poissonove distribucije za vrijednosti parametra $\lambda = 0$ i $\lambda = \infty$ istom relacijom kao gore, tj. tako da po definciji vrijedi

$$X \sim Poiss(0) \iff X = 0\,(g.s.),$$
$$X \sim Poiss(\infty) \iff X = \infty\,(g.s.).$$

Poissonova distribucija usko je vezana uz binomnu te njeno višedimenzionalno poopćenje - polinomijalnu razdiobu.

Definicija 1.1.2. *Slučajna varijabla X ima binomnu distribuciju sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in [0, 1]$ ako je*

$$\mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Definicija 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ takvi da je $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$. Za k-dimenzionalni diskretni slučajni vektor $X = (X_1, \ldots, X_k)$ kažemo da ima polinomijalnu distribuciju s paramterima $n, p_1, \ldots, p_k$ ako*

$$\mathbb{P}\{X = (x_1, \ldots, x_n)\} = \begin{cases} \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \ \textit{ako } x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1, \ldots, n\}, \ \sum_{i=1}^{k} x_i = n \\ 0, \quad \textit{inače} \end{cases},$$

za $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^k$.

Binomnom slučajnom varijablom modeliramo ponavljanje n nezavisnih pokusa (npr. bacanja novčića) s vjerojatnošću uspjeha p. Očekivani (prosječan) broj uspjeha u jednoj realizaciji tada je np. No što ako novčić bacamo jako puno puta - beskonačno mnogo puta?

Fiksirajmo neki realni broj $\lambda > 0$. Da bi u n bacanja dobili u prosjeku λ uspjeha, vjerojatnost uspjeha u svakom pokusu mora biti $p_n = \lambda/n$. Dakle, povećavanjem broja pokušaja $n \to \infty$ i smanjivanjem vjerojatnosti $p_n \to 0$ održavamo prosjek uspjeha λ. Neka je $X_n \sim B(n, p_n)$, tada je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = k\} &= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},
\end{aligned}$$

što je jednako vjerojatnosti da Poissonova slučajna varijabla s parametrom (tj. očekivanjem) λ poprimi vjerojatnost k.

Dakle Poissonova slučajna varijabla nam daje model prebrojavanja koji nije kao u slučaju binomnog modela ograničen s gornjom ogradom pokušaja n, nego je dobiven puštanjem n u beskončanost. Formalno, iz prethodnog računa zapravo slijedi konveregencija po distribuciji slučajnih varijabli $X_n \sim B(n, p_n)$ prema Poissonovoj varijabli sa parametrom λ (Sarapa, [4], teorem 10.13). Time smo vidjeli način kako iz niza binomnih slučajnih varijabli možemo dobiti Poissonovu.

Prisjetimo se sada poznatog svojstva nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli.

Teorem 1.1.4. *Neka su X_1,...,X_n nezavisne Poissonove slučajne varijable s paramterima λ_1,...,λ_n. Tada za $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ vrijedi*

$$X \sim Poiss(\lambda),$$

pri čemu je $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Uzmimo X, X_1,....,X_n kao u teoremu, te neka su r_1,...,$r_n \in \mathbb{N}$ i $r = r_1 + \cdots + r_n$. Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = &r_1, \dots, X_n = r_n | X = r\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^{r_i} e^{-\lambda_i}}{r_i!} / \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \\
&= \frac{r!}{r_1! \cdots r_n!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)^{r_n}.
\end{aligned}$$

Dakle, uz uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(\cdot|X = r)$ zajednička distribucija Poissonovih varijabli je multinomijalna sa parametrima $r, \lambda_1/\lambda, \dots, \lambda_n/\lambda$.

Posebno, u slučaju kada je $n = 2$ lako dobivamo

$$\begin{aligned}
X_1 \mid X = r &\sim B(r, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}) \\
X_2 \mid X = r &\sim B(r, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}).
\end{aligned}$$

Dakle, uvjetovanjem Poissonovih slučajnih varijabli u odnosu na odgovarajući događaj, njihova (pojedinačna) distribucija postaje binomna, a zajednička polinomijalna. Kasnije ćemo vidjeti ovaj isti efekt između Poissonovih i Bernoullijevih točkovnih procesa.

Zanimljivo je da tvrdnja u slučaju $n = 2$ ima i svojevrsni obrat. Pretpostavimo da je X Poissonova slučajna varijabla sa parametrom λ te da je X_1 takva slučajna varijabla da vrijedi $X_1 \mid X = n \sim B(n, p)$. Stavimo $X_2 = X - X_1$ i računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_1 = m, X_2 = k\} &= \mathbb{P}\{X_1 = m, X = m + k\} \\
&= \mathbb{P}\{X = m + k\}\mathbb{P}\{X_1 = m \mid X = m + k\} \\
&= \frac{\lambda^{m+k}}{(m+k)!} e^{-\lambda} \cdot \binom{m+k}{m} p^m (1-p)^k \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)}.
\end{aligned}$$

Dobili smo da su X_1 i $X_2 = X - X_1$ nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λp i $\lambda(1 - p)$.

Ovo svojstvo koristit ćemo kod tzv. stanjivanja Poissonovih procesa.

1.2 Svojstvo prebrojive aditivnosti

U teoremu 1.1.4 smo se prisjetili poznatog svojstva aditivnosti n nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli. No ovo svojstvo ima i poopćenje za prebrojivo mnogo nezavisnih Poissonovi slučajnih varijabli.

Teorem 1.2.1. *Neka su* $(X_j,\ j \in \mathbb{N})$ *nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima* $\lambda_j,\ j \in \mathbb{N}$. *Ako*

$$\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \tag{1.1}$$

konvergira, onda i

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \tag{1.2}$$

konvergira gotovo sigurno, te je $S \sim Poiss(\sigma)$. *Ako* (1.1) *divergira, onda* S *divergira gotovo sigurno.*

Dokaz. Iz teorema 1.1.4 slijedi da je

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j \sim Poiss(\sigma_n),$$

pri čemu je

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Označimo sa $\pi_k(\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ vjerojatnost da Poissonova slučajna varijabla s parametrom μ poprimi vrijednost k. Za $r \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{S_n \leq r\} = \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n)$$

Kako je za fiksni r niz događaja $(\{S_n \leq r\})_n$ padajući i $\{S \leq r\} = \cap_n \{S_n \leq r\}$, po neprekidnosti vjerojatnosti na padajuće nizove događaja slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S \leq r\} &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n \leq r\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) \\
&= \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma),
\end{aligned}$$

pri čemu posljednja jednakost vrijedi zbog neprekidnosti funkcije π_k, u slučaju da (1.1) konvergira. Tada slijedi da je

$$\mathbb{P}\{S = r\} = \pi_r(\sigma),$$

pa je zaista $S \sim Poiss(\sigma)$.

Ukoliko pak $\sigma_n \to \infty$, onda

$$\sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) = e^{-\sigma_n} \sum_{k=0}^{r} \frac{\sigma_n^k}{k!} \to 0,$$

pa je

$$\mathbb{P}\{S \leq r\} = 0, \quad \forall r \in \mathbb{N}.$$

Dakle, $S = \infty$ gotovo sigurno. □

Primijetimo da smo u kontekstu definicije Poissonovih slučajnih varijabli sa parametrima 0 i ∞ mogli iskazati teorem i bez rastavljanja na dva slučaja (ovisno o konvergeniciji (1.1)). Naime u slučaju da je $\sigma = \infty$ dobivamo upravo da je $S = \infty$ gotovo sigurno, tj. $S \sim Poiss(\infty)$.

Vidjet ćemo kasnije da iz ovog svojstva proizlazi i važno svojstvo za Poissonove procese (teorem superpozicije).

1.3 Analitički alati za distribuciju

Često ćemo u daljnjem tekstu koristiti neke osnovne analitičke metode za opis distribucije poput funkcija izvodnica, Laplaceove transformacije i karakterističnih funkcija. Karakteristične funkcije najopćenitiji su alat primjenjiv za sve distribucije (tj. sve tipove slučajnih varijabli), dok je Laplaceova transformacija definirana za nenegativne slučajne varijable, a funkcija izvodnica za cjelobrojne. Ovdje ćemo ukratko ponoviti definicije i osnovna svojstva za svaku od tih transformacija.

Definicija 1.3.1. *Neka je X cjelobrojna slučajna varijabla sa zakonom razdiobe*

$$\mathbb{P}\{X = k\} = p_k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Funkcija izvodnica slučajne varijable X (odnosno distribucije $\{p_k\}$) je funkacija g_X zadana sa

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |z| \leq 1. \tag{1.3}$$

Kako je $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, red u (1.3) konvergira apsolutno i g_X je dobro definirana. Zbog jedinstvenosti razvoja u Taylorov red, jasno je da su distribucija $\{p_k\}$ i funkcija izvodnica g_X u 1-1 korespondenciji. Iz definicije direktno dobivamo

$$g_X(z) = \mathbb{E}[z^X], \quad z \in \mathbb{R}, \quad |z| \leq 1.$$

Iz posljednjeg izraza lako slijedi da je funkcija izvodnica zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka umnošku pojedinih funkcija izvodnica.

Za $X \sim Poiss(\lambda)$ lako se izračuna

$$g_X(z) = e^{-\lambda+\lambda z}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad |z| \leq 1.$$

Koristeći funkcije izvodnice, možemo računati i momente slučajnih varijabli (Sarapa, [4], propozicija 6.7).

Definicija 1.3.2. *Neka je X nenegativna slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Laplaceova transformacija od X (odnosno F) je funkcija L_X zadana sa*

$$L_X(z) = \int_0^\infty e^{-zx} dF(x), \quad z \geq 0.$$

Kako je $e^{-zx} \leq 1$ za $z \geq 0$, zaključujemo da je L_X dobro definirana. Pokazuje se da i u slučaju Laplaceove transformacije imamo jedinstvenost, tj. da različite distribucije imaju različite Laplaceove transformacije (to se može pokazati korištenjem Stone-Weierstrassovog teorema). Također, jasno je da vrijedi

$$L_X(z) = \mathbb{E}[e^{-zX}], \quad z \geq 0.$$

Kao i u slučaju funkcija izvodnica, slijedi da je Laplaceova transformacija zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka umnošku pojedinih Laplaceovih transformacija.

Korištenjem posljednje formule, lako dobijemo da u slučaju Poissonove slučajne varijable s parametrom λ imamo

$$L_X(z) = e^{\lambda(e^{-z}-1)}, \quad z \geq 0.$$

Deriviranjem Laplaceove transformacije možemo dobiti informacije o momentima slučajne varijable (Resnick, [3], poglavlje 3, sekcija 3.2.3).

Definicija 1.3.3. *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Karakteristična funkcija od X (odnosno F) jest funkcija definirana sa*

$$\varphi_X(z) = \int_{-\infty}^\infty e^{izx} dF(x), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Kako je $|e^{izx}| = 1$, φ_X je dobro definirana. F i φ_X su u 1-1 korespondenciji (to se također pokazuje preko Stone-Weierstrassovog teorema), te vrijedi

$$\varphi_X(z) = \mathbb{E}[e^{izX}], \quad z \in \mathbb{R},$$

iz čega slijedi da je karakteristična funkcija zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednaka umnošku karakterističnih funkcija pojedinih varijabli.

U slučaju Poissonove slučajne varijable s parametrom λ imamo

$$\varphi_X(z) = e^{\lambda(e^{iz}-1)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

I karakteristične funkcije daju nam informacije o momentima slučajne varijable (Sarapa, [4], poglavlje 13, sekcija 13.3).

Primijetimo da je u slučaju Poissonove slučajne varijable $X \sim Poiss(\lambda)$,

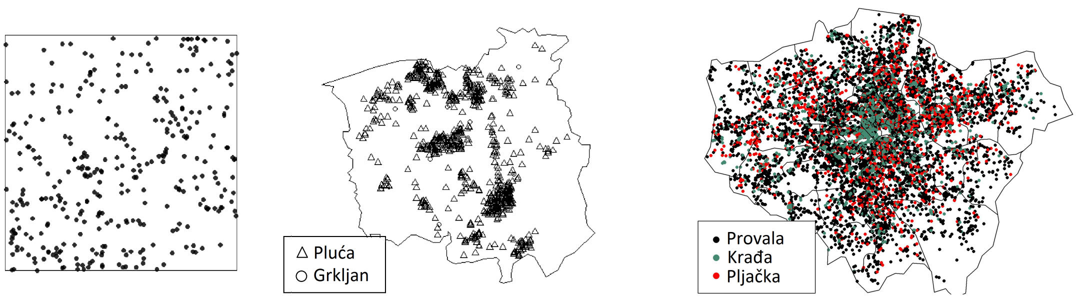
$$\mathbb{E}[e^{\theta X}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot e^{\theta k} = e^{\lambda(e^{\theta}-1)}$$

dobro definirano za svaki $\theta \in \mathbb{C}$. Formule za karakterističnu funkciju i Laplaceovu transformaciju samo su specijalni slučajevi prethodne formule.

Poglavlje 2

Definicija i osnovna svojstva Poissonovih točkovnih procesa

Zanima nas kako modelirati pozicije prebrojivo točaka u proizvoljnom prostoru. To mogu biti točke u jednodimenzionalnim prostorima – tipično, trenuci u vremenu poput dolazaka klijenata na šalter, vremena popravaka strojeva i slično, ili raspored nekih objekata u dvo- ili višedimenzionalnom prostoru, poput rasporeda stabala u šumi ili vremena i mjesta pojavljivanja potresa. Takve točke nasumično su raspoređene u prostoru, ne slijede nikakav konkretan obrazac, ali moguće je da su na nekim dijelovima gušće raspoređene nego na drugima. Mi ćemo ovdje također pretpostaviti je na omeđenom dijelu najviše konačno mnogo točaka.



Slika 2.1: Primjeri iz stvarnog života. Prva slika prikazuje raspored stabala crvenog hrasta u šumi (Lansing,SAD) pri čemu je mjerno područje pravokutnog oblika ([1]). Na drugoj slici vidimo raspored pojavljivanja dva tipa bolesti raka (grkljana i pluća) u gradu Chroley u Velikoj Britaniji ([1]). Na trećoj slici prikazane su provale, krađe i pljačke u Londonu (podaci preuzeti sa `data.police.uk/data`, s dopuštenjem Open Government Licence).

Vjerojatnosni modeli za takve pojave nazivaju se točkovni procesi. Dva su bitno različita pristupa u modeliranju točkovnih procesa, a objasnit ćemo ih u nastavku.

2.1 Točkovni procesi

Neka je zadan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i označimo sa E prostor u kojem promatramo točke. Taj skup najčešće je $[0, \infty\rangle$ (kada modeliramo vrijeme) ili $\mathbb{R}^d$ za neki $d \in \mathbb{N}$ (kada modeliramo prostor), ali može biti i neka kombinacija ili neki kompleksniji prostor koji je ekvivalentan $\mathbb{R}^d$.

Označimo sa $\mathcal{E}$ familiju podskupova od E koji nas zanimaju, u smislu da želimo promatrati koliko je slučajno odabranih točaka palo unutar takvih skupova. Obzirom da ćemo nad tim skupovima vjerojatno htjeti provoditi uobičajene skupovne operacije (unija, presjek,itd.), prirodno je zahtjevati da $\mathcal{E}$ bude σ-algebra podskupova od E. Također, želimo da ta σ-algebra bude dovoljno profinjena da raspoznaje jednočlane skupove. Taj uvjet se često formulira u malom jačem obliku da je dijagonala $D = \{(x, x) : x \in E\}$ izmjeriva u produktnoj σ-algebri $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$. Ukoliko je E metrički prostor, najčešće će $\mathcal{E}$ biti upravo Borelova σ-algebra na odgovarajućem skupu.

Definirajmo još i E^∞ kao familiju svih prebrojivih podskupova od E. Sada možemo definirati točkovni proces.

Definicija 2.1.1 (Prvi pristup)**.** ***Točkovni proces*** *sa skupom stanja u E je preslikavanje* $\Pi : \Omega \to E^\infty$*, pri čemu je za svaki* $A \in \mathcal{E}$*,*

$$N(A) = N(A)(\omega) = \#\{\Pi(\omega) \cap A\}, \tag{2.1}$$

slučajna varijabla. Pri tome je $N(A) < \infty$ *(g.s.) za svaki omeđen* $A \in \mathcal{E}$*.*

Zahtjev da je $N(A) : \Omega \to \mathbb{N}_0$ slučajna varijabla direktno proizlazi iz činjenice da želimo da su skupovi oblika $\{N(A) = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, događaji. Naime, lako se vidi da su ta dva zahtjeva ekvivalentna – ako je $N(A)$ slučajna varijabla onda je $\{N(A) = k\} = (N(A))^{-1}\{k\}$ događaj za svaki $A \in \mathcal{E}$ i $k \in \mathbb{N}_0$. I obratno, ako je $\{N(A) = k\}$ događaj za svaki $A \in \mathcal{E}$ i $k \in \mathbb{N}$, onda je, za $c \in \mathbb{R}$, $\{N(A) \leq c\} = \{N(A) \leq \lfloor c \rfloor\} = \cup_{k=0}^{\lfloor c \rfloor}\{N(A) \leq k\}$ unija događaja, dakle događaj, pa je $N(A)$ slučajna varijabla.

Ovdje treba naglasiti da smo točkovni proces definirali kao slučajni skup, samim time on razaznaje samo različite točke tog skupa pa ovakvim pristupom ne možemo direktno modelirati ponavljanje točaka. Ukoliko npr. modeliramo mjesta potresa na Zemlji, iz prirode problema je jasno će se potresi ponekad pojavljivati na istim mjestima kao i prije, no funkcija prebrojavanja N će takvo mjesto (tj. točku koja određuje to mjesto) brojati samo jednom.

2.2 Alternativni pristup točkovnim procesima

Primijetimo da se prethodna definicija točkovnog procesa koncentrira direktno na točke, tj. točkovni proces opisan je kao slučajan prebrojiv podskup od E. Pri tome nema direktnih zahtjeva na izmjerivost preslikavanja $\Pi : \Omega \to E^\infty$ kao što smo možda navikli u definicijama slučajne varijable ili vektora, nego se zahtjev postavlja na funkcije prebrojavanja $N(A)$, $A \in \mathcal{E}$. Ovaj pristup, iako možda prirodniji, često nailazi na neke tehničke poteškoće u dokazima.

Fiksirajmo sada $\omega \in \Omega$ te označimo $\Pi(\omega) = \{X_n(\omega)\}$ i $x_n = X_n(\omega)$ (ovdje možemo bez smanjena općenitosti pretpostaviti da je $n \in \mathbb{N}$ jer je $\Pi(\omega)$ po definiciji prebrojiv). Za točke $\{x_n\}$ definiramo funkciju $m_\omega : \mathcal{E} \to \mathbb{N}_0$ sa

$$m_\omega = \sum_i \epsilon_{x_i}, \tag{2.2}$$

gdje je

$$\epsilon_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in A \\ 0, & \text{ako } x \notin A \end{cases}, \tag{2.3}$$

mjera na $\mathcal{E}$ koncentrirana u točki x. Lako se vidi da je m_ω mjera na $\mathcal{E}$ te da je ona u 1-1 korespondenciji sa točkama $\{x_n\}$. To nam daje motivaciju da točkovni proces, umjesto preslikavanja koje elementarnom događaju ω pridružuje slučajan skup $\{X_n(\omega)\}$, možemo promatrati kao preslikavanje koje elementarnom događaju pridružuje slučajnu mjeru m_ω oblika 2.2. Drugim riječima, poistovjećujemo točke $\{X_n(\omega)\}$ sa mjerom m_ω generiranom tim točkama. Primijetimo da je $m_\omega(A) = N(A)(\omega)$, tj. m_ω predstavlja samo drugi aspekt funkcje N - umjesto da fiksiramo skupa A, fiksiramo elementarni događaj ω.

Definirajmo prvo točkovnu mjeru.

Definicija 2.2.1. ***Točkovna mjera*** *na* $(E, \mathcal{E})$ *je mjera oblika*

$$m = \sum_i \epsilon_{x_i}, \tag{2.4}$$

gdje su $x_i \in E$ *za svaki* $i \in \mathbb{N}$*, te svaki omeđen skup* $A \in \mathcal{E}$ *sadrži najviše konačno mnogo* x_i*. Prostor svih takvih mjera označavamo sa* $M_p = M_p(E)$*.*

Ideja je definirati točkovni proces kao preslikavanje sa $(\Omega, \mathcal{F})$ u M_p. Takvo preslikavanje želimo učiniti izmjerivim, tj. definirati neku smislenu σ-algebru na prostoru mjera u kojoj će točkovni proces biti izmjerivo preslikavanje, a istovremeno osigurati da su skupovi $\{N(A) = k\}$ događaji.

Definicija 2.2.2. *Na M_p definiramo σ-algebru $\mathcal{M}_p$ kao najmanju σ-algebru generiranu skupovima oblika*

$$\{m \in M_p : m(I) = k\}, \tag{2.5}$$

gdje je I omeđen pravokutnik u E, a $k \in \mathbb{N}_0$.

Sada možemo dati i drugu verziju definicije točkovnog procesa.

Definicija 2.2.3 (Drugi pristup)**.** ***Točkovni proces*** *sa skupom stanja u E definiramo kao izmjerivo preslikavanje $N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (M_p(E), \mathcal{M}_p(E))$.*

Primijetimo da smo sa (2.5) osigurali

$$\{N(I) = k\} = N^{-1}\{m \in M_p : m(I) = k\} \in \mathcal{F}, \tag{2.6}$$

tj. $\{N(I) = k\}$ je događaj za sve omeđene pravokutnike I i $k \in \mathbb{N}$, a onda je i $N(I)$ slučajna varijabla. Lako se pokaže da je onda $N(P)$ slučajna varijabla i za bilo koji (ne nužno omeđen) pravokutnik P, a onda i za svaki P koji je konačna unija disjunktnih pravokutnika. Tada se pokaže da tvrdnja vrijedi i za cijelu σ-algebru $\mathcal{E}$, pri čemu smo implicitno pretpostavili da je $\mathcal{E}$ generirana pravokutnicima, što je i istina za Borelovu σ-algebru.

Treba još jednom napomenuti da smo koristili oznaku N u prividno dvije različite svrhe – kao slučajnu varijablu $N(A)$ za $A \in \mathcal{E}$, te kao mjeru $N(\omega)$ za neki $\omega \in \Omega$. Zapravo, korektno bi bilo pisati N kao funkciju dva parametra $N(\omega, A)$, onda je za fiksni $\omega \in \Omega$, $N(\omega) = N(\omega, \cdot)$ mjera, a za fiksni $A \in \mathcal{E}$, $N(A) = N(\cdot, A)$ slučajna varijabla.

Sada vidimo, da iako su ova dva pristupa naoko prilično različita, oni daju u suštini jako slične definicije. Ako je $\Pi = \{X_n\}$ točkovni proces u smislu prvog pristupa, tada će preslikavanje $\omega \to m_\omega = \sum \epsilon_{X_n(\omega)}$ zadovoljavati definiciju točkovnog procesa u smislu drugog pristupa. Naime, izmjerivost tog preslikavanja će slijediti direktno iz činjenice da su $N(I)$ slučajne varijable:

$$\begin{aligned} m_\omega^{-1}\{m \in M_p : m(I) = k\} &= \{\omega \in \Omega : m_\omega(I) = k\} && (2.7)\\ &= \{\omega \in \Omega : N(I)(\omega) = k\} && (2.8)\\ &= \{N(I) = k\} \in \mathcal{F}. && (2.9) \end{aligned}$$

(Tu treba primijetiti jednu malu razliku, a to je da po prvoj verziji definiciji m_ω nije nužno u M_p za svaki $\omega \in \Omega$, nego $m_\omega \in M_p$ (g.s).) I obratno, ako je N točkovni proces u smislu drugog pristupa, već smo komentirali da su tada $N(A)$ slučajne varijable za svaki $A \in \mathcal{E}$.

Ipak, postoji jedna bitna razlika u ta dva pristupa. Kao što smo naglasili nakon prve definicije, sa prvim pristupom ne možemo modelirati ponavljanje iste točke, tj. samim time što je $\Pi(\omega) = \{X_n(\omega)\}$ skup, implicitno pretpostavljamo da su točke $X_n(\omega)$ međusobno različite. Stoga, ako pogledamo točkovnu mjeru oblika (2.4) pridruženu skupu $\Pi(\omega)$, točke x_i iz definicije od m su međusobno različite.

S druge strane, u definiciji točovne mjere nismo zahtjevali da točke x_i moraju nužno biti različite, stoga točkovni proces u smislu drugog pristupa može modelirati ponavljanje točaka. Naime, uzmimo da je N točkovni proces i neka je za neki ω mjera $m = N(\omega) = \sum_i \epsilon_{x_i}$ takva da se u njenoj definiciji neka točka $\tilde{x}$ pojavljuje npr. tri puta - to upravo modelira događaj u kojem se točka $\tilde{x}$ ponovila tri puta.

Stoga, u prvom pristupu je nužno $N(\{x\}) \leq 1$, $\forall x$, dok u drugom pristupu nemamo takvo ograničenje.

Za točkovni proces definiramo još i zakon razdiobe. On određuje sve vjerojatnosti vezane uz točkovni proces.

Definicija 2.2.4. ***Zakon razdiobe ili distribucija točkovnog procesa*** $N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (M_p, \mathcal{M}_p)$ *je vjerojatnosna mjera* $\mathbb{P}_N = \mathbb{P} \circ N^{-1}$ *na* $(M_p, \mathcal{M}_p)$.

Također, bitne su nam i konačnodimenzionalne distribucije.

Definicija 2.2.5. ***Familija konačnodimenzionalnih distribucija točkovnog procesa*** $N : (\Omega, \mathcal{F}) \to (M_p, \mathcal{M}_p)$ *je familija*

$$\left\{p_{I_1,\dots,I_k}(n_1, \dots, n_k) : I_1, \dots, I_k \text{ omeđeni pravokutnici u } M_p, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\right\}, \tag{2.10}$$

pri čemu je

$$p_{I_1,\dots,I_k}(n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}(N(I_1) = n_1, \dots, N(I_k) = n_k). \tag{2.11}$$

Nije teško pokazati da je zakon razdiobe točkovnog procesa u potpunosti određen njegovim konačnodimenzonalnim distribucijama (Resnick, [3], propozicija 4.7.1.).

Često je praktično distribuciju okarakterizirati takozvanim Laplaceovim funkcionalom. Označimo sa $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B}_+(E)$ skup svih nenegativnih ograničenih funkcija na E. Za mjeru $m \in M_p$ i funkciju $f \in \mathcal{B}_+$ definiramo

$$m(f) = \int_E f(x)\mathrm{d}n(x) = \sum_i f(x_i),$$

gdje su $\{x_i\}$ točke iz definicije mjere m. Primijetimo da je $m(\mathbf{1}_A) = m(A)$.

Definicija 2.2.6. ***Laplaceov funkcional*** *točkovnog procesa N je nenegativna funkcija na $\mathcal{B}_+$ definirana sa*

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \mathbb{E}\exp\{-N(f)\} \\ &= \int_\Omega \exp\{-N(\omega, f)\}d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_{M_p} \exp\{-m(f)\}\mathbb{P}_N(dm).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Pokazuje se da Laplaceov funkcional jedinstveno određuje konačnodimenzionalne distribucije točkovnog procesa, a onda i njegov zakon razdiobe (Resnick, [3], propozicija 4.7.2).

2.3 Poissonovi točkovni procesi

Sada kada smo postavili bazu za naša razmatranja, možemo definirati Poissonov točkovni proces. Napomenimo da ćemo se primarno bazirati na prvom (jednostavnom) pristupu u definiciji točkovnog procesa, osim ako nije drugačije rečeno. Iako se sama definicija Poissonovog procesa može promatrati sa oba stajališta, rezultati za ta dva pristupa nisu uvijek jednaki, što je posljedica jedne ključne razlike u definicijama o kojoj smo govorili u prethodnom poglavlju.

Definicija 2.3.1. ***Poissonov točkovni proces*** *na skupu stanja E sa srednjom mjerom μ je točkovni proces takav da vrijedi*

(i) za sve disjunktne skupove $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}$, slučajne varijable $N(A_1), \dots, N(A_n)$ su nezavisne,

(ii) za $A \in \mathcal{E}$, $N(A)$ ima Poissonovu distribuciju sa parametrom $\mu = \mu(A)$, pri čemu je $0 \leq \mu \leq \infty$.

Napomena 2.3.2. *Često se umjesto termina Poissonov točkovni proces koristi termin Poissonova slučajna mjera. Takav naziv proizlazi iz druge verzije definicije točkovnog procesa i u tom slučaju se koristi oznaka $PRM(\mu)$ (engl. Poisson random measure).*

Napomena 2.3.3. *Svojstvo (i) iz definicije 2.3.1 zove se svojstvo potpune slučajnosti.*

Funkciju $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ iz definicije nazvali smo srednjom mjerom. Primijetimo da μ zaista jest mjera na $(E, \mathcal{E})$ pa je time taj naziv opravdan. Naime, funkcija je nenegativna te je $\mu(\emptyset) = \mathbb{E}[N(\emptyset)] = 0$ po definiciji od N. Također, za disjunktne izmjerive skupove $A_1, A_2, \dots$ je

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{E}\left[N\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} N(A_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[N(A_n)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),
\end{aligned}$$

pri čemu druga jednakost slijedi iz Beppo-Levijevog teorema.

Srednja mjera određuje razdiobu Poissonovih procesa. Što je neki skup A veći (tj. što je $\mu(A)$ veće), to je očekivani broj točaka u tom skupu veći. Ukoliko je μ proporcionalna Lebesgueovoj mjeri, prethodnu rečenicu možemo shvatiti doslovno - očekivani broj točaka je veći što je površina/volumen skupa veći.

Nadalje, srednja mjera nam daje izraze za zajedničke distribucije od $N(A)$ za različite A. Uzmimo npr. dva izmjeriva skupa A_1 i A_2 koja nisu nužno disjunktna, zanima nas kovarijanca $N(A_1)$ i $N(A_2)$. Intuitivno je za pretpostaviti da ona ovisi o mjeri presjeka $\mu(A_1 \cap A_2)$. Uvedimo oznake $B_1 = A_1 \setminus A_2$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$ i $B_3 = A_1 \cap A_2$. Ti skupovi su očito disjunktni te je

$$A_1 = B_1 \cup B_3, \quad A_2 = B_2 \cup B_3.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)] &= \mathbb{E}[N(B_1)N(B_2) + N(B_1)N(B_3) + N(B_2)N(B_3) + N(B_3)^2] \\
&= \mu(B_1)\mu(B_2) + \mu(B_1)\mu(B_3) + \mu(B_2)\mu(B_3) + \mu(B_3) + \mu(B_3)^2 \\
&= \mu(B_1)\,[\mu(B_2) + \mu(B_3)] + \mu(B_3)\,[\mu(B_2) + \mu(B_3)] + \mu(B_3) \\
&= \mu(B_1)\mu(A_2) + \mu(B_3)\mu(A_2) + \mu(B_3) \\
&= \mu(A_1)\mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2),
\end{aligned}$$

pa je zaista

$$\operatorname{cov}(N(A_1), N(A_2)) = \mathbb{E}[N(A_1)N(A_2)] - \mathbb{E}[N(A_1)]\mathbb{E}[N(A_2)] = \mu(A_1 \cap A_2). \tag{2.13}$$

Konkretno, naslućujemo da uvjeti (i) i (ii) iz definicije u potpunosti određuju razdiobu točkovnog procesa, a to nam govori i idući teorem.

Teorem 2.3.4. *Distribucija Poissonovog točkovnog procesa jedinstveno je određena uvjetima (i) i (ii) iz definicije. Također, točkovni proces je Poissonov točkovni proces sa srednjom mjerom μ ako i samo ako je Laplaceov funkcional od N dan sa*

$$\Psi_N(f) = \exp\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\}, \quad f \in \mathcal{B}_+. \tag{2.14}$$

Dokaz. Pokažimo prvo da iz (i) i (ii) slijedi da je Laplaceov funkcional od N zadan s 2.14 (time automatski slijedi da je distribucija jedinstveno određena). Dokaz provodimo Lebesguevom indukcijom.

1. Neka je $f = \mathbf{1}_A$, tada je $N(f) = N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$. Tada je

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \mathbb{E}e^{-\lambda N(A)} \\ &= \exp\{(e^{-\lambda} - 1)\mu(A)\} \\ &= \exp\{-\int_E (1 - e^{-\lambda})\mathbf{1}_A(x)\mu(dx)\} \\ &= \exp\{-\int_E (1 - e^{-\lambda \mathbf{1}_A(x)})\mu(dx)\}.\end{aligned}$$

2. Neka je $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$ za disjunktne $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$ te nenegativne $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, tj. f je jednostavna funkcija. Koristeći nezavisnost $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ te prethodnu tvrdnju, lako dobijemo da i ovdje vrijedi 4.14.

3. Uzmimo sad proizvoljnu $f \in \mathcal{B}_+$, ona se može aproksimirati rastućim nizom jednostavnih funkcija f_n, tj $0 \leq f_n(x) \uparrow f(x)$. No tada po Lebesgueovom teoremu o monotonoj konvergenciji slijedi da $N(f_n) \uparrow N(f)$, a zatim po teoremu o dominiranoj konvergenciji i da $\Psi_N(f) = \lim_{n\to\infty} \Psi_N(f_n)$. Dakle

$$\begin{aligned}\Psi_N(f) &= \lim_{n\to\infty} \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f_n(x)})\mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{-\lim_{n\to\infty}\int_E (1 - e^{-f_n(x)})\mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_E \lim_{n\to\infty}(1 - e^{-f_n(x)})\mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\right\},\end{aligned}$$

   pri čemu treća jednakost slijedi opet iz teorema o monotonoj konvergenciji.

Pokažimo sad obratni smjer. Pretpostavimo da je Laplaceov funkcional od N dan sa 2.14. Tada za $f = \lambda \mathbf{1}_A$, $A \in \mathcal{E}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{-\lambda N(A)} &= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-\lambda \mathbf{1}_A})\mu(dx)\right\} \\ &= \exp\left\{(e^{-\lambda} - 1)\mu(A)\right\},\end{aligned} \tag{2.15}$$

što je Laplaceova transformacija za Poissonovu slučajnu varijablu s parametrom $\mu(A)$, dakle dobili smo uvjet (i).

Stavimo sad $f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}$ za disjunktne skupove $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$ i nenegativne $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Iz 4.14 dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i N(A_i)} &= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}}) d\mu\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_E \sum_{i=1}^{k} (1 - e^{-\lambda_i \mathbf{1}_{A_i}}) d\mu\right\} \\
&= \prod_{i=1}^{k} exp\{-(a - e^{-\lambda_i})\mu(A_i)\} \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}e^{-\lambda_i N(A_i)}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dobili smo da je Laplaceova transformacija vektora $(N(A_1), \ldots, N(A_k))$ jednaka umnošku Laplaceovih transformacija slučajnih varijabli $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ pa slijedi da su te slučajne varijable nezavisne, tj. dokazali smo (ii). □

Vidjeli smo da srednja mjera ima ključnu ulogu u razdiobi točkovnog procesa, stoga nam je bitno razlučiti kakve sve mogu biti srednje mjere Poissonovih procesa. Uočimo da je posljednji teorem primjenjiv bez obzira na pristup u definiciji točkovnih procesa. Razlika među pristupima očituje se upravo u tome koje klase mjera mogu biti srednje mjere.

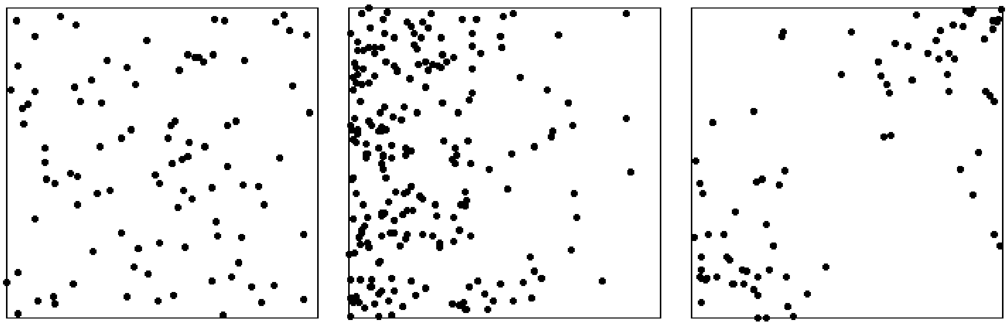
Prilično je lako primijetiti da, ukoliko govorimo o točkovnom procesu u smislu prvog pristupa, jedna klasa mjera nikako ne može biti srednja mjera, a to su mjere koje nekom jednočlanom skupu pridružuju pozitivnu vrijednost (za takve mjere ćemo reći da *imaju atome*). Naime, neka je μ mjera takva da za neki $x \in E$ vrijedi $\mu(\{x\}) > 0$ te pretpostavimo da postoji Poissonov točkovni proces kojemu je μ srednja mjera. Tada $N(\{x\})$ ima Poissonovu distribuciju sa parametrom koji nije 0 te je

$$\mathbb{P}(N(\{x\}) \geq 2) > 0, \tag{2.17}$$

što je u kontradikciji sa definicijom od N. Primijetimo da u slučaju drugog pristupa nemamo ovakvo ograničenje jer tim pristupom možemo modelirati ponavljanje točaka. Dakle, vratimo li se prvom pristupu, zaključujemo da je odsutnost atoma nužan uvjet da bi neka mjera bila srednja mjera. Kao rezultat toga, srednja mjera poprima 0 na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (to je posljedica konačne i σ-aditivnosti mjere). Pokazat ćemo kasnije u teoremu egzistencije da vrijedi i svojevrsni obrat, tj. da je svaka σ-konačna mjera koja nema atome srednja mjera nekog Poissonovog procesa.

U slučaju $E = \mathbb{R}^d$, srednja mjera je često zadana preko tzv. intenziteta. Intenzitet srednje mjere je nenegativna izmjeriva funkcija λ na E takva da

$$\mu(A) = \int_A \lambda(x) \mathrm{d}x. \tag{2.18}$$



Slika 2.2: Simulacije točovnih procesa za razne funkcije intenziteta λ. S lijeve strane je uniforman proces s $\lambda = 5$, u sredini proces s $\lambda(x, y) = 8e^{-x}$, s desne strane proces s $\lambda(x, y) = 2(x + y)^2$.

Ako je λ konstanta, onda je

$$\mu(A) = \lambda|A|, \tag{2.19}$$

i za Poissonov točkovni proces sa takvom srednjom mjerom kažemo da je uniforman.

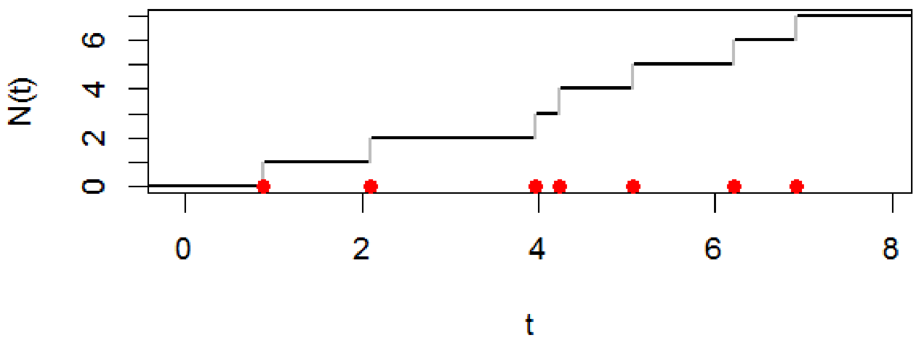
Prije nego prijeđemo na daljnje analiziranje Poissonovih procesa, bitno je vidjeti u kojim kontekstima se takvi procesi pojavljuju. Poissonovi točkovni procesi prvotno su se pojavili u jednoj dimenziji predstavljajući vremenske trenutke.

Primjer 2.3.5. ***Jednodimenzionalni Poissonov proces.***

Često se u literaturi može naći definicija Poissonovog procesa na $[0, \infty\rangle$ *u smislu procesa obnavljanja formulirana na sljedeći način: neka su* $\{E_j, j \geq 1\}$ *nezavisne i jednako distribuirane eksponencijalne slučajne varijable sa parametrom* $\lambda > 0$ *te neka je* $\Gamma = \{\Gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ *proces obnavljanja zadan sa* $\Gamma_n = \sum_{i=1}^{n} E_i$*. Tada pridruženi brojeći proces* $N = \{N_t : t \geq 0\}$, $N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{1}_{\langle 0,t]}(\Gamma_n)$ *zovemo (homogenim) Poissonovim procesom sa intenzitetom* λ*. Primijetimo da ovakva definicija definira jednodimenzionalni točkovni proces u smislu drugog pristupa.*

Dakle, vremena obnavljanja Γ_n *su točke u prostoru* $[0, \infty\rangle$*, a proces N broji točke u intervalima oblika* $\langle 0, t]$ *(iako možemo promatrati i druge podskupove od* $[0, \infty\rangle$*). Može se pokazati da takav proces zadovoljava defınciju Poissonovog točkovnog procesa sa srednjom mjerom intenziteta* λ *iz ovog poglavlja ([3], poglavlje 4, propozicije 4.2.1 i 4.8.1).*

S druge strane, neka je zadan homogeni Poissonov točkovni proces na $[0, \infty\rangle$ *sa srednjom mjerom intenziteta* λ*, tada točke procesa u sortiranom redoslijedu tvore proces obnavljanja čija su vremena između dva susjedna obnavljanja eksponencijalno distribuirana sa parametrom* λ*.*



Slika 2.3: Primjer jednodimenzionalnog Poissonovog procesa. Točke su slučajno generirane tako da su razmaci među njima eksponencijalno distribuirani sa parametrom 1, stoga točke (odnosno funkcija prebrojavanja N) čine Poissonov proces s intenzitetom 1.

Primijetimo da je glavna razlika u teoriji jednodimenzionalnih i višedimenzionalnih točkovnih procesa uređaj. U jednoj dimenziji, pogotovo u kontekstu vremena, uređaj među točkama se prirodno nameće pa i funkcije prebrojavanja definiramo samo za skupove oblika $\langle 0, t]$. *U više dimenzija možemo definirati razne uređaje, ali u općenitom smislu oni ne odražavaju neku korisnu informaciju.*

Također, iz ovog primjera jasno možemo interpretirati parametar λ. *Naime, kako je* $N(\langle 0, t]) \sim Poiss(\lambda t)$, *slijedi da je*

$$\mathbb{E}N(\langle 0, t]) = \lambda t$$

pa možemo reći da je λ *očekivana stopa (brzina) obnavljanja. Ovo nam također daje ideju da u praksi, ako imamo podatke za koje pretpostavljamo da ih možemo modelirati homogenim točkovnim procesom, možemo intenzitet procijeniti kao* $N(\langle 0, t])/t$.

U prethodnom primjeru vidjeli smo jedan način konstrukcije Poissonovog procesa - jednostavno uzmemo vremena obnavljanja kao točke u $[0, \infty\rangle$. Uskoro ćemo u teoremu egzistencije vidjeti da se Poissonov proces u više dimenzija može dobiti tako da uniformno rasporedimo Poissonov broj nezavisnih točaka na nekom ograničenom području. Što to formalno znači, vidjet ćemo u samom dokazu teorema, a prije toga ćemo se osvrnuti na ključnu ideju koja nam je potrebna za taj dokaz - vezu između Bernoullijevih i Poissonovih procesa. Ta veza proizlazi direktno iz veze polinomijalne i Poissonove distribucije o kojoj smo govorili još u prvom poglavlju.

Definirajmo prvo Bernoullijev proces, a onda ćemo pokazati kako je on povezan sa Poissonovim točkovnim procesom.

Definicija 2.3.6. *Neka je Π slučajan konačan podskup od E takav da je $\#\Pi = n$. Kažemo da je Π Bernoullijev proces s parametrima n i p, gdje je p vjerojatnosna mjera na E, ako za disjunktne izmjerive $A_1, \dots, A_k$, te $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ takve da je $n_1 + \cdots + n_k \leq n$, vrijedi*

$$\mathbb{P}\{N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k\} = \frac{n!}{n_0! n_1! \cdots n_k!} p(A_0)^{n_0} \cdots p(A_k)^{n_k},$$

pri čemu je $n_0 = n - \sum_{i=1}^k n_i$.

Drugim riječima, za disjunktne $A_1, \dots, A_k$ vektor $(n - \sum_i N(A_i), N(A_1), \dots, N(A_k))$ ima polinomijalnu razdiobu s parametrima $n, 1 - \sum_i p(A_i), p(A_1), \dots, p(A_k)$. Za Bernoullijev proces također definiramo srednju mjeru kao $\mathbb{E}[N(A)] = np(A)$.

Primjer 2.3.7. ***Veza sa Bernoullijevim procesom.*** *Neka je Π Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom μ i pretpostavimo da je $\mu(E) < \infty$. Tada je broj točaka procesa gotovo sigurno konačan i može nas zanimati kako se proces ponaša pod uvjetom da je ukupan broj točaka fiksan.*

Neka su $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ disjunktni i označimo $A_0 = E \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k | N(E) = n\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{N(A_0) = n_0, N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k\} / \mathbb{P}\{N(E) = n\} \\
&\quad = \left(\prod_{j=0}^{k} \frac{e^{-\mu(A_j)} \mu(A_j)^{n_j}}{n_j!} \right) \Bigg/ \frac{e^{-\mu(E)} \mu(E)^n}{n!} \\
&\quad = \frac{n!}{n_0! n_1! \cdots n_k!} \left(\frac{\mu(A_0)}{\mu(E)} \right)^{n_0} \cdots \left(\frac{\mu(A_k)}{\mu(E)} \right)^{n_k}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Označimo li sa $\mathbb{P}_n$ uvjetnu vjerojatnost u odnosu na događaj $\{N(E) = n\}$, vidimo da u odnosu na tu vjerojatnost Poissonov proces prelazi u Bernoullijev sa distribucijom $p(\cdot) = \mu(\cdot)/\mu(E)$.

Veza između Bernoullijevog i Poissonovog procesa nam je izrazito bitna upravo zbog sljedećeg teorema.

Teorem 2.3.8 (Teorem egzistencije)**.** *Neka je μ mjera na E koja nema atome i koja se može zapisati kao*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \quad \mu_n(E) < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada postoji Poissonov proces na E sa srednjom mjerom μ.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mu_n(E) > 0$ za sve n. Definiramo nezavisne slučajne varijable/vektore

$$N_n, \quad X_{nr} \quad (n, r = 1, 2, 3, \dots)$$

takve da su N_n Poissonove s parametrima $\mu_n(S)$ te da X_{nr} imaju zakon razdiobe $p_n = \mu_n/\mu_n(E)$ (X_{nr} su vektori tj. točke dimenzije prostora E).

Stavimo sada da je

$$\Pi_n = \{X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nN_n}\}$$

te

$$N_n(A) = \#\{\Pi_n \cap A\}.$$

Neka su $A_1, \dots, A_k$ disjunktni i $A_0 = E \setminus \cup_{i=1}^k A_i$ te $m, m_0, \dots, m_1 \in \mathbb{N}$ takvi da je $\sum_{i=0}^k m_i = m$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k | N_n = m\} \\ &\qquad = \frac{m!}{m_0! m_1! \cdots m_k!} p_n(A_0)^{m_0} p_n(A_1)^{m_1} \cdots p_n(A_k)^{m_k}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Označimo sa $\pi_k(\lambda)$ vjerojatnost da Poissonova slučajna varijabla s parametrom λ poprimi vrijednost k. Računamo

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{N_n(A_1) = m_1, N_n(A_2) = m_2, \dots, N_n(A_k) = m_k\} \\ &\quad = \sum_{m=\sum m_i}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n(E)}\mu_n(E)^m}{m!} \frac{m!}{m_0! m_1! \cdots m_k!} \prod_{j=0}^{k} p_n(A_j)^{m_j} \\ &\quad = \sum_{m=\sum m_i}^{\infty} \mu_n(E)^m \prod_{j=0}^{k} \frac{p_n(A_j)^{m_j}}{m_j!} e^{-\mu_n(A_j)} \\ &\quad = \sum_{m=\sum m_i}^{\infty} \mu_n(E)^m \frac{1}{\mu_n(E)^{m_0} \cdots \mu_n(E)^{m_k}} \prod_{j=0}^{k} \frac{\mu_n(A_j)^{m_j}}{m_j!} e^{-\mu_n(A_j)} \\ &\quad = \sum_{m=\sum m_i}^{\infty} 1 \cdot \prod_{j=0}^{k} \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)) \\ &\quad = \prod_{j=1}^{k} \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)) \sum_{m=\sum m_i}^{\infty} \frac{\mu_n(A_0)^{m_0}}{m_0!} e^{-\mu_n(A_0)} \\ &\quad = \prod_{j=1}^{k} \pi_{m_j}(\mu_n(A_j)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Dakle $N_n(A_j)$ su nezavisne slučajne varijable sa Poissonovom distribucijom s parametrom $\mu_n(A_j)$, iz čega slijedi da su Π_n nezavisni Poissonovi procesi sa srednjim mjerama μ_n.

Na kraju definiramo proces

$$\Pi = \cup_{n=1}^{\infty} \Pi_n.$$

Iz teorema superpozicije, koji će biti dokazan u sljedećem poglavlju, direktno slijedi da je Π Poissonov proces sa srednjom mjerom μ. $\square$

Poglavlje 3

Operacije nad Poissonovim točkovnim procesima

Cilj ovog poglavlja nam je proučiti razne transformacije i operacije nad točkovnim procesima. Ako poznajemo svojstvo prebrojive aditivnosti Poissonovih slučajnih varijabli, mogli bi se zapitati vrijedi li slično i za Poissonove točkovne procese, tj. dobivamo li unijom nezavisnih procesa također Poissonov točkovni proces? Odgovor na ovo pitanje je potvrdan, a detalje ćemo dati u takozvanom teoremu superpozicije. Također, može nas zanimati što se događa s procesom ako ga nekom funkcijom preslikamo u drugi prostor - ostaje li on Poissonov točkovni proces i pod kojim uvjetima. Odgovore na ta pitanja daje nam teorem preslikavanja. Na kraju ćemo još reći nešto o stanjivanju i označavanju točkovnog procesa.

3.1 Teorem superpozicije

Prije samog dokaza teorema, navest ćemo jedan tehnički rezultat koji nam je za to potreban.

Lema 3.1.1. *Neka su* Π_1 *i* Π_2 *nezavisni Poissonovi točkovni procesi na* E *sa srednjim mjerama* μ_1 *i* μ_2 *te neka je* $A \in \mathcal{E}$ *takav da* $\mu_1(A) < \infty$ *i* $\mu_2(A) < \infty$*. Tada su* Π_1 *i* Π_2 *disjunktni s vjerojatnošću* 1 *na* A*.*

Dokaz. Definirajmo sa A^f familiju svih konačnih podskupova od A, te sa $(A \times A)^f$ familiju svih konačnih podskupova od $A \times A$. Promatramo preslikavanje $\eta : A^f \times A^f \to (A \times A)^f$, $\eta(\Lambda_1, \Lambda_2) = \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Želimo to preslikavanje učiniti izmjerivim pa definirajmo σ-algebre na domeni i kodomeni.

Definirajmo σ-algebru na A^f. U tu svrhu, za $B \in E$, $B \subseteq A$ definirajmo prvo preslikavanja $F_B : A^f \to \mathbb{N}_0$ sa

$$F_B(\Lambda) = \#\{B \cap \Lambda\}.$$

Stavimo da je

$$\mathcal{A}^f = \sigma\{F_B^{-1}(\{n\}) : B \in \mathcal{E}, B \subseteq A, n \in \mathbb{N}_0\},$$

tj. $\mathcal{A}^f$ je najmanja σ-algebra u kojoj su sva preslikavanja F_B izmjeriva. Sada na Kartezijevom produktu $A^f \times A^f$ promatramo produktnu σ-algebru generiranu pravokutnicima $\sigma(\mathcal{A}^f \times \mathcal{A}^f)$.

U kodomeni radimo slično. Za $C \subseteq A \times A$, $C \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$ definiramo preslikavanja $G_C : (A \times A)^f \to \mathbb{N}_0$ sa

$$G_C(\Theta) = \#\{C \cap \Theta\},$$

pa onda definiramo σ-algebru

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^f = \sigma\{G_C^{-1}(\{n\}) : C \in \sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}), C \subseteq A \times A, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Pokažimo sada da je η izmjerivo preslikavanje u paru $(\sigma(\mathcal{A}^f \times \mathcal{A}^f), \mathcal{A}\mathcal{A}^f)$. Za to je dovoljno provjeriti praslike skupova koji su generatori σ-algebre u kodomeni, tj. dovoljno je pokazati

$$\eta^{-1}(G_C^{-1}(\{n\})) = \eta^{-1}(\Theta \in (A \times A)^f : \#\{C \cap \Theta\} = n) \in \sigma(\mathcal{A}^f \times \mathcal{A}^f), \tag{3.1}$$

i to za svaki izmjerivi $C \subseteq A \times A$. Označimo sa $\mathcal{L}$ familiju svih skupova koji zadovoljavaju (3.1). Prvo uočimo da su svi pravokutnici u $\mathcal{L}$. Naime, stavimo $C = B_1 \times B_2$, u tom slučaju (3.1) glasi

$$\begin{aligned}
&\eta^{-1}(\Theta \in (A \times A)^f : \#\{B_1 \times B_2 \cap \Theta\} = n) \\
&\quad = \bigcup_{n_1 \cdot n_2 = n} \{\Lambda_1 \in A^f : F_{B_1}^{-1}(\Lambda_1) = n_1\} \times \{\Lambda_2 \in A^f : F_{B_2}^{-1}(\Lambda_2) = n_2\} \\
&\quad = \bigcup_{n_1 \cdot n_2 = n} F_{B_1}^{-1}(\{n_1\}) \times F_{B_2}^{-1}(\{n_1\}) \quad \in \sigma(\mathcal{A}^f \times \mathcal{A}^f).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Sada se na standardan način tvrdnja proširuje - pokaže se da (3.1) vrijedi i za sve konačne disjunktne unije pravokutnika (a to je algebra), zatim se pokaže da je $\mathcal{L}$ monotona familija. Zato je $\mathcal{L} = \mathcal{M}(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L})$ (oznaka $\mathcal{M}$ označava najmanju monotonu familiju generiranu danim skupom), iz čega naposlijetku imamo da $\mathcal{L}$ sadrži sve izmjerive $C \subseteq A \times A$ (sjetimo se da je produktna σ-algebra po definiciji generirana pravokutnicima). Dakle, η je izmjerivo preslikavanje.

Već prije smo napomenuli kako pretpostavljamo da je dijagonala D izmjeriva u produktnom prostoru. Tada je i restrikcija dijagonale $D_A = D \cap A \times A$ izmjeriva u $A \times A$, pa je skup

$$J = J_A = \eta^{-1}\{G_{D_A}^{-1}(\{0\}\} \in \sigma(\mathcal{A}^f \times \mathcal{A}^f).$$

Primijetimo da je tvrdnja teorema ekvivalentna činjenici da je

$$\mathbb{P}\{\Pi_1 \times \Pi_2 \in J\} = 1. \tag{3.3}$$

Označimo sa $\mathbb{P}_1$, odnosno $\mathbb{P}_2$ zakone razdiobe od Π_1 i Π_2. Kako su Π_1 i Π_2 nezavisni, njihov zajednički zakon razidobe je jednak produktnoj vjerojatnosti $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$ pa (3.3) možemo pisati kao

$$\begin{aligned} 1 &= (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(J) \\ &= \int_{A^f} \mathbb{P}_1(J_{\Lambda_2}) d\mathbb{P}_2(\Lambda_2), \end{aligned}$$

pri čemu je J_{Λ_2} prerez od J u Λ_2, tj. $J_{\Lambda_2} = \{\Lambda_1 : (\Lambda_1, \Lambda_2) \in J\}$. Dakle tvrdnja vrijedi ako je

$$\mathbb{P}_1\{\Lambda_1 : (\Lambda_1, \Lambda_2) \in J\} = 1, \quad \mathbb{P}_2\text{-g.s.},$$

tj. ako je

$$\mathbb{P}_1\{\Lambda_1 : N_1(\Lambda_2) = 0\} = 1, \quad \mathbb{P}_2\text{-g.s..}$$

No kako je Λ_2 konačan onda je $\mu_1(\Lambda_2) = 0$ pa je $N_1(\Lambda_2) = 0$, $\mathbb{P}_1$-g.s. (za svaki Λ_2). Time je tvrdnja dokazana. □

Bitno nam je vidjeti kako se tvrdnja leme proširuje i na skupove $A \in \mathcal{E}$ koji su prebrojive unije izmjerivih skupova na kojima su μ_1 i μ_2 konačne.

Uzmimo dakle da je $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, gdje su $A_n \in \mathcal{E}$ i $\mu_1(A_n) < \infty$ te $\mu_2(A_n) < \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz tvrdnje leme slijedi da je

$$\mathbb{P}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n = \emptyset\} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa komplementiranjem dobivamo

$$\mathbb{P}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n \neq \emptyset\} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz σ-poluaditivnosti vjerojatnosti slijedi da je

$$0 \leq \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n \neq \emptyset\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n \neq \emptyset\} = 0$$

iz čega komplementiranjem slijedi da je

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n = \emptyset\}) = 1.$$

Preostaje primijetiti da je događaj u kojem su svi skupovi $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap A_n$ prazni jednak događaju gdje je $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$ prazan. Dakle dobili smo

$$\mathbb{P}\{\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap (\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \emptyset\} = 1.$$

Primijetimo da onda tvrdnja leme vrijedi za $A = E$ ukoliko su mjere μ_1 i μ_2 σ-konačne. Pokažimo sada teorem.

Teorem 3.1.2 (Teorem superpozicije)**.** *Neka je* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ *niz nezavisnih Poissonovih točkovnih procesa sa srednjim mjerama* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *Tada je*

$$\Pi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$$

Poissonov točkovni proces sa srednjom mjerom

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n.$$

Π *zovemo superpozicijom procesa* $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$

Dokaz. Pokažimo da Π zadovoljava svojstva (i) i (ii) iz definicije Poissonovog točkovnog procesa.

Za $A \in \mathcal{E}$, označimo sa $N_n(A)$ broj točaka procesa Π_n koje su upale u A, a sa $N(A)$ ukupan broj točaka procesa Π koje su upale u A. Tada je zbog prethodne leme i nezavisnosti procesa Π_n vrijedi da je

$$N(A) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(A), \tag{3.4}$$

za sve $A \in \mathcal{E}$ za koje je $\mu_n(A) < \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremu prebrojive aditivnosti za Poissonove slučajne varijable direktno dobivamo da je $N(A)$ Poissonova sa parametrom $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$. Također, ukoliko je za neki $n \in \mathbb{N}$ $\mu_n(A) = \infty$, onda je $N(A) = \infty$ te u ovom slučaju 3.4 slijedi trivijalno. Time je pokazano svojstvo (ii).

Uzmimo sada disjunktne $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$. Primijetimo da su zbog međusobne nezavisnosti Π_n i svojstva (i) za Π_n slučajne varijable $N_n(A_j)$, $n \in \mathbb{N}$ i $j = 1, 2, ..., k$ nezavisne. No onda su i $N(A_j) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(A_j)$, $j = 1, 2, ..., k$ međusobno nezavisne jer su to funkcije disjunktnih podskupova niza nezavisnih slučajnih varijabli. Dakle vrijedi (i). $\square$

Uočimo da je lema o disjunktnosti nezavisnih Poissonovih procesa svojstvena isključivo prvom pristupu. U drugom pristupu, u kojem je dopušteno ponavljanje točaka, jasno je da takvo svojstvo nikako ne može vrijediti. Ipak, to nam ne bi predstavljalo prepreku u dokazu teorema. Naime, lema nam je bila potrebna upravo da dobijemo jednakost (3.4), koja pak u drugom pristupu slijedi trivijalno.

3.2 Teorem preslikavanja

Kao što smo rekli, zanima nas da li će za neku funkciju $f : E \to E'$ i Poissonovi točkovni proces Π, $f(\Pi)$ također biti Poissonov točkovni proces. Pokažimo prvo da će to uvijek biti istinito za injektivne funkcije.

Propozicija 3.2.1. *Neka je Π Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom μ te neka je $f : (E, \mathcal{E}) \to (E', \mathcal{E}')$ izmjeriva injekcija. Tada je $f(\Pi)$ Poissonov točkovni proces na E' sa srednjom mjerom $\mu \circ f^{-1}$.*

Dokaz. Označimo sa $N'(A)$, $A \in \mathcal{E}'$, broj točaka $f(\Pi)$ koje su upale u A. Kako je f injekcija, slijedi da je

$$N'(A) = N(f^{-1}(A))$$

pa $N'(A)$ ima Poissonovu distribuciju s paramterom $\mu(f^{-1}(A))$, čime smo dokazali svojstvo (ii) iz definicije.

Također, ako su $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}'$ disjunktni, tada su i njihove praslike disjunktne, pa svojstvo (i) za $f(\Pi)$ slijedi direktno iz svojstva (i) za Π. □

Uvjet injektivnosti može se još dodatno oslabiti. Primijetimo prvo da injektivnost od f povlači da $\mu \circ f^{-1}$ nema atome. Naime, pretpostavimo suprotno - neka je $\mu \circ f^{-1}(\{t'\}) > 0$ za neki $t' \in E'$ i označimo $A = f^{-1}(\{t'\})$. Tada je $\mu(A) > 0$, no μ je srednja mjera Poissonovog točkovnog procesa, a za nju znamo da ne može imati atome, pa skup A mora nužno sadržavati više od jednog elementa, što je u kontradikciji sa injektivnošću od f.

Dakle, injektivnost od f jači je uvjet od odsutnosti atoma kod $\mu \circ f^{-1}$. Pitamo se možemo li tvrditi isto kao u prethodnoj propoziciji, ali uz taj slabiji uvjet? Pokazuje se da možemo ukoliko pretpostavimo još i σ-konačnost od μ, što ćemo uskoro vidjeti u teoremu preslikavanja. Prije samog teorema, navedimo još jednu propoziciju koja nam treba u dokazu.

Propozicija 3.2.2. *Neka je Π Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom μ i neka je $E_1 \in \mathcal{E}$. Tada je $\Pi_1 = \Pi \cap E_1$*

(a) Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom μ_1, definiranom sa $\mu_1(A) = \mu(A \cap E_1)$, te

(b) Poissonov točkovni proces na E_1 sa srednjom mjerom $\mu|_{E_1}$.

Dokaz propozicije se svodi na jednostavnu provjeru definicije.

Teorem 3.2.3 (Teorem preslikavanja)**.** *Neka je Π Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom μ koja je σ-konačna, te neka je $f : (E, \mathcal{E}) \to (E', \mathcal{E}')$ izmjeriva funkcija takva da mjera $\mu' = \mu \circ f^{-1}$ nema atome. Tada je $f(\Pi)$ Poissonov točkovni proces na E' sa srednjom mjerom μ'.*

Dokaz. Pokažimo prvo slučaj kada je $\mu(E) < \infty$. Za izmjeriv skup A stavimo da su $\Pi_1 = \Pi \cap A$ i $\Pi_2 = \Pi \cap A^c$ restrikcije procesa Π. Jasno je da su oni, zbog disjunktnosti A i A^c i svojstva potpune slučajnosti, međusobno nezavisni. Analogno kao u dokazu leme o disjunktnosti pokazuje se da su $f(\Pi_1)$ i $f(\Pi_2)$ disjunktni s vjerojatnošću 1.

Označimo sa M mjeru na $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ takvu da za skup $B \subseteq E\times E$ $M(B)$ predstavlja očekivani broj parova $(x, y) \in B$, $x \in \Pi$, $y \in \Pi$ t.d. je $f(x) = f(y)$. Kako su $f(\Pi_1)$ i $f(\Pi_2)$ disjunktni s vjerojatnošću 1, jasno je da vrijedi

$$M(A \times A^c) = 0.$$

Neka je $m(B) = M(B \times B)$. Lako se vidi da zbog aditivnosti mjere i činjenice da je $M(A \times A^c) = 0$ vrijedi

$$M(A \times B) = m(A \cap B).$$

Primijetimo da je $m(B) = M(B \times E)$ pa se lako vidi da m zadovoljava svojstva mjere, tj. m je mjera na $\mathcal{E}$. Označimo sa M_1 mjeru na dijagonali $D \subseteq E \times E$ induciranu sa m. Tada je

$$M_1(A \times B) = m(A \cap B).$$

No to znači da je

$$M(A \times B) = M_1(A \times B),$$

za sve izmjerive A i B. Dakle, M i M_1 poklapaju se na svim pravokutnicima iz $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ pa su zbog jedinstvenosti proširenja te mjere jednake. Stoga slijedi da je M koncentrirana na dijagonali D, što znači da s vjerojatnošću 1 nema različitih točaka $x \in \Pi$ i $y \in \Pi$ takvih da je $f(x) = f(y)$. Dalje dokazujemo kao u propoziciji 3.2.1.

Sada pokažimo da tvrdnja vrijedi i bez pretpostavke $\mu(E) < \infty$. Kako je μ σ-konačna, postoje disjunktni izmjerivi skupovi $(E_n : n \in \mathbb{N})$ takvi da je

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \mu(E_n) < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sa Π_n označimo restrikciju od Π na E_n. Π_n su nezavisni Poissonovi procesi sa srednjim mjerama μ_n (restrikcija mjere μ na E_n). Prema upravo dokazanom, $f(\Pi_n)$ su nezavisni Poissonovi procesi sa srednjim mjerama $\mu_n' = \mu \circ f^{-1}$. Tada je

$$f(\Pi) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(\Pi_n)$$

njihova superpozicija, dakle Poissonov proces sa srednjom mjerom

$$\mu' = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n' = \mu \circ f^{-1}.$$

Time je pokazana tvrdnja teorema. □

Sjetimo se, prema prvoj (jednostavnoj) definiciji točkovnog procesa nužno je $N(\{x\}) \leq 1$, za svaki $x \in E$. Ono što nam u preslikavanju stvara tehničke poteškoće je upravo slučaj kada se dvije različite točke iz E preslikaju u istu točku u kodomeni pa broj točaka u nekom skupu $B \subseteq E$ nije nužno jednak broju točaka u skupu $f(B)$. Kada bismo dopustili da se ta točka kodomene *broji dva puta*, ne bismo više imali taj problem. Stoga, u slučaju drugog pristupa u definiciji točkovnog procesa, analogon teorema preslikavanja tehnički je puno manje zahtjevan, a uvjeti na preslikavanje f još slabiji, što možemo vidjeti u idućoj propoziciji.

Propozicija 3.2.4 (Teorem preslikavanja za drugi pristup)**.** *Neka je $f : E \to E'$ funkcija takva da je za svaki omeđen skup $B' \subseteq E'$ i praslika $f^{-1}(B')$ omeđena. Ako je N PRM(μ) na E sa točkama $\{X_n\}$ onda je $N' = N \circ f^{-1}$ PRM(μ') na E' sa točkama $\{f(X_n)\}$ pri čemu je $\mu' = \mu \circ f^{-1}$.*

Dokaz. Jednostavno se vidi da ako je N oblika

$$N = \sum_n \epsilon_{X_n},$$

onda je

$$N' = \sum_n \epsilon_{f(X_n)}.$$

Pokažimo da N' zadovoljava uvjete iz definicije. Za izmjerivi $B' \subseteq E'$ vrijedi

$$\mathbb{P}\{N'(B') = k\} = \mathbb{P}\{N(f^{-1}(B')) = k\},$$

a desna strana je upravo jednaka vjerojatnosti da Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\mu(f^{-1}(B')) = \mu'(B')$ poprimi vrijednost k.

Također, ako su $B'_1, \dots, B'_m$ disjunktni izmjerivi podskupovi od E', tada su i praslike $f^{-1}(B'_1), \dots, f^{-1}(B'_m)$ disjunktne, a kako je

$$(N'(B'_1), \dots, N'(B'_m)) = (N(f^{-1}(B'_1)), \dots, N(f^{-1}(B'_m)).$$

onda iz nezavisnosti komponenti sa desne strane slijedi i nezavisnost od $N'(B'_1), \dots, N'(B'_m)$. □

Iz teorema preslikavanja slijede neka poželjna svojstva poput činjenice da je projekcija Poissonovog procesa na nižedimenzionalni prostor i dalje Poissonov proces.

Primjer 3.2.5. *Neka je Π Poissonov proces na $\mathbb{R}^D$ sa intenzitetom λ te neka je $f : \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$ projekcija*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_D) = (x_1, x_2, \dots, x_d),$$

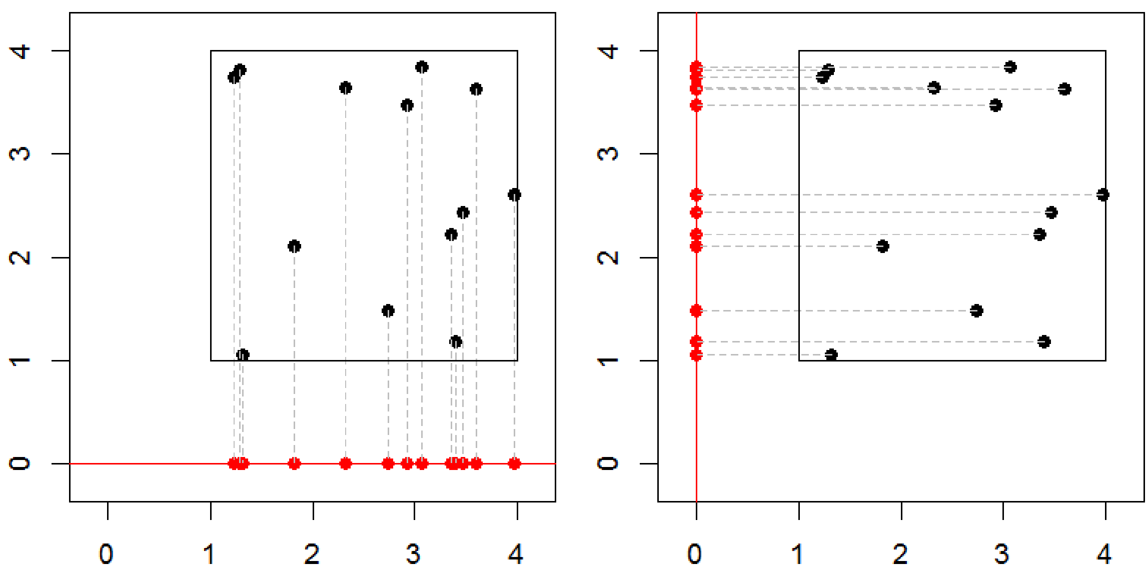
pri čemu je $d \leq D$. Tada za $B \subseteq \mathbb{R}^d$ po Fubinijevom teoremu vrijedi

$$\mu'(B) = \int_{B\times\mathbb{R}^{D-d}} \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_D)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_D$$
$$= \int_B \lambda'(x_1, x_2, \ldots, x_d)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_d,$$

gdje je

$$\lambda'(x_1, x_2, \ldots, x_d) = \int_{\mathbb{R}^{D-d}} \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_D)\, dx_{d+1} dx_{d+2} \ldots dx_D.$$

Prema tome, μ' je σ-konačna te nema atome (jer je apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru na $\mathbb{R}^d$). Stoga prema teoremu o preslikavanju zaključujemo da je projekcija $f(\Pi)$ Poissonov proces sa intenzitetom λ'.



Slika 3.1: Primjer projekcije dvodimenzionalnog Poissonovog procesa na x i y osi. Originalni proces ima konstantni intenzitet 1 na kvadratu $[1,4]\times[1,4]$, a 0 izvan kvadrata, stoga projekcije imaju konstantan intenzitet 3 na intervalu $[1,4]$, a 0 izvan intervala.

Također, procese sada možemo promatrati i u nekim drugim koordinatama. Najosnovniji primjer su polarne koordinate u dvodimenzionalnom prostoru.

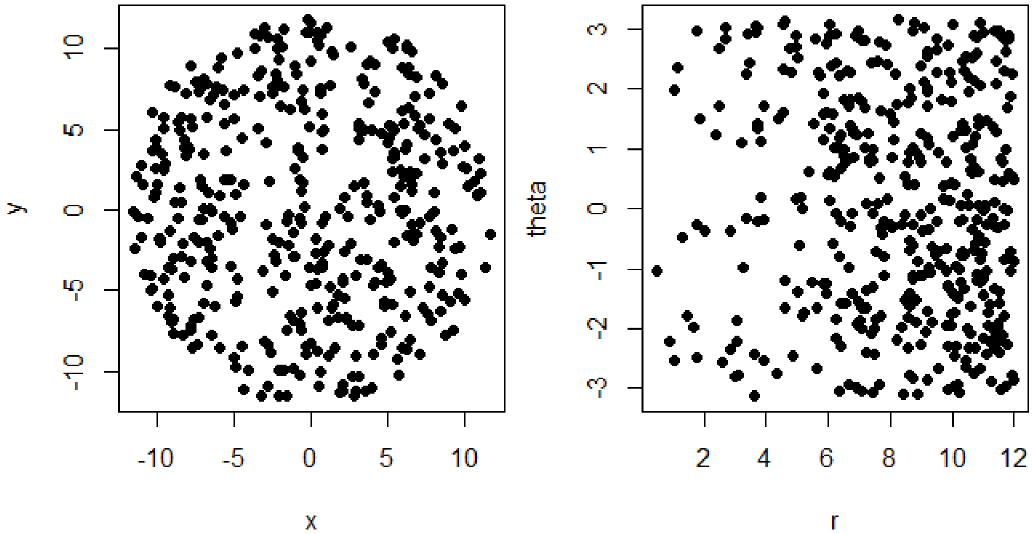
Primjer 3.2.6. *Neka je Π uniforman Poissonov proces sa konstantnim intenzitetom λ na $\mathbb{R}^2$ te neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \langle 0, \infty\rangle \times [0, 2\pi\rangle$*

$$f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1}(y/x)\right).$$

Tada za $B \subseteq \mathbb{R}^2$ *po teoremu o zamjeni varijabli vrijedi*

$$\mu'(B) = \int_{f^{-1}(B)} \lambda \, dxdy = \int_B \lambda r \, drd\theta.$$

Opet, prema teoremu o preslikavanju, dobivamo da je proces u polarnim kordinatama $f(\Pi)$ *i dalje Poissonov proces. Uočimo da transformirani proces više nije uniforman.*



Slika 3.2: Primjer transformacije koordinata Poissonovog procesa u polarne. Početni proces generiran je u krugu radijusa 12.

Možemo otići i korak dalje pa pogledat projekciju procesa u polarnim koordinatama na prvu koordinatu. Prema prethodnom primjeru, to će opet biti Poissonov proces sa intenzitetom

$$\lambda''(r) = \int_0^{2\pi} \lambda'(r, \theta) \, d\theta = 2\pi\lambda r. \tag{3.5}$$

Dakle, dobili smo da udaljenosti točaka uniformnog Poissonovog procesa Π *od ishodišta tvore Poissonov točkovni proces na* $\langle 0, \infty \rangle$ *sa intenzitetom* λ''*. Primijetimo da iz formule* (3.5) *kao i sa slike 3.2 možemo vidjeti da udaljenosti od ishodišta nisu uniformne. Intuitivno, broj točaka koje su udaljene za manje od* 1 *je proporcionalan površini kruga površine* Π*, dok je recimo broj točaka koje su udaljene za barem* 1*, a manje od* 2*, proporcionalan površini kružnog vijenca koja iznosi* 3Π*. Stoga je jasno da očekivani broj točaka u intervalu* $\langle 0, 1 \rangle$ *i intervalu* $\langle 1, 2 \rangle$ *neće biti približno jednaki pa tako ni mjere tih skupova. Na taj način možemo se uvjeriti da dobiveni rezultat potkrepljuje i intuitivne zaključke.*

Za posljednji primjer primjene teorema preslikavanja pokazat ćemo kako u jednoj dimenziji fundamentalnu ulogu igra upravo uniforman Poisssonov točkovni proces, tj. da se odgovarajućim preslikavanjima jednodimenzionalan (neuniforman) Poissonov proces uvijek može svesti na uniforman.

Primjer 3.2.7. *Neka je Π Poissonov proces na $\mathbb{R}$ sa σ-konačnom srednjom mjerom μ. Definiramo funkciju $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kao*

$$M(t) = \mu(\langle 0, t]), \quad t \geq 0,$$
$$M(t) = -\mu(\langle 0, t]), \quad t < 0.$$

Ovako definirana M je monotono rastuća te vrijedi

$$\mu\langle a, b] = M(b) - M(a), \quad a < b.$$

Kako je μ u potpunosti određena svojim vrijednostima na poluotvorenim intervalima, slijedi da su M i μ u 1-1 korespondenciji te kažemo da je μ Stieltjesova mjera određena sa M.

Uzmimo sada da je $f = M$. Tada je za $t > 0$ i $x = M(t)$

$$\mu'(\langle 0, x]) = \mu'(\langle 0, M(t)]) = \mu(\langle 0, t]) = M(t) = x,$$

te analogno $\mu'(\langle -x, 0]) = x$. Stoga je $M(\Pi)$ uniforman Poissonov proces s intenzitetom 1 na $\langle M(-\infty), M(\infty)\rangle$.

3.3 Stanjivanje i označavanje Poissonovih procesa

U ovoj sekciji opisat ćemo ukratko još jedan zanimljiv koncept u promatranju Poissonovih točkovnih procesa.

Prisjetimo se prvog poglavlja gdje smo govorili o vezi Poissonove i binomne distribucije. Jedan od zaključaka koje smo tamo naveli bio je i sljedeći: ukoliko je $N \sim Poiss(\mu)$ te M slučajna varijabla takva da je $M|N \sim B(N, p)$, tada su M i $N - M$ međusobno nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima $p\mu$ i $(1 - p)\mu$, respektivno.

Neka je Π Poissonov proces na E sa srednjom mjerom μ. Obojimo točke procesa nasumično u dvije boje - crvenu i zelenu, pri čemu je vjerojatnost da biramo crvenu p, a zelenu $q = 1 - p$. Sada za proizvoljan skup $A \subseteq E$, možemo promatrati $N(A)$, $N_r(A)$, $N_g(A)$, dakle broj točaka iz Π koje su upale u A te broj crvenih i zelenih točaka u A. Primijetimo da je po definiciji Poissonovog procesa $N(A) \sim Poiss(\mu(A))$, a zbog načina kako smo bojali točke je $N_r(A)|N(A) \sim B(N(A), p)$. Stoga su $N_r(A)$ i $N_g(A) = N(A) - N_r(A)$ nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima $p\mu(A)$ i $q\mu(A)$.

Štoviše, ako su $A_1, \ldots, A_n$ disjunktni podskupovi od E, onda su trojke

$$(N(A_j), N_r(A_j), N_g(A_j)), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

međusobno nezavisne, a onda su i

$$N_r(A_j),\ N_g(A_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

nezavisne. Iz toga slijedi da skup crvenih točki i skup zelenih točki tvore nezavisne Poissonove procese sa srednjim mjerama $p\mu$ i $q\mu$.

Tvrdnja se može induktivno poopćiti na k boja, za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$.

Teorem 3.3.1 (Teorem o bojanju)**.** *Neka je Π Poissonov proces na E sa srednjom mjerom μ te neka su njegove točke obojane u k boja, pri čemu je vjerojatnost i-te boje p_i. Pri tome su boje različitih točaka nezavisne (međusobno i od pozicija točaka). Neka Π_i predstavlja skup točaka obojan i-tom bojom. Tada su Π_i nezavisni Poissonovi procesi sa srednjim mjerama $\mu_i = p_i\mu$.*

Primjer 3.3.2. *Vratimo se nakratko na slučaj sa dvije boje i probajmo razmišljati u drugom kontekstu - umjesto bojanja točaka u dvije boje, zamislimo da sa vjerojatnošću p neku točku zadržimo, a s vjerojatnošću $q = 1 - p$ izbacimo iz skupa Π, pri čemu su ti izbori međusobno nezavisni za svaku točku te nezavisni od pozicije točke. Time smo dobili novi podskup $\Pi' \subseteq \Pi$ za koji, na potpuno isti način kao i u slučaju bojanja, zaključujemo da je Poissonov točkovni proces sa srednjom mjerom $p\mu$. Taj postupak zovemo stanjivanjem Poissonovog procesa.*

Na slici 3.3 možemo vidjeti primjer procesa obojanog u tri boje - crvenu s vjerojatnosti 0.5, zelenu s vjerojatnosti 0.3 i crnu s vjerojatnosti 0.2. S druge strane, ako uzmemo na primjer samo crveno obojane točke, dobijemo stanjeni točkovni proces za $p = 0.5$.

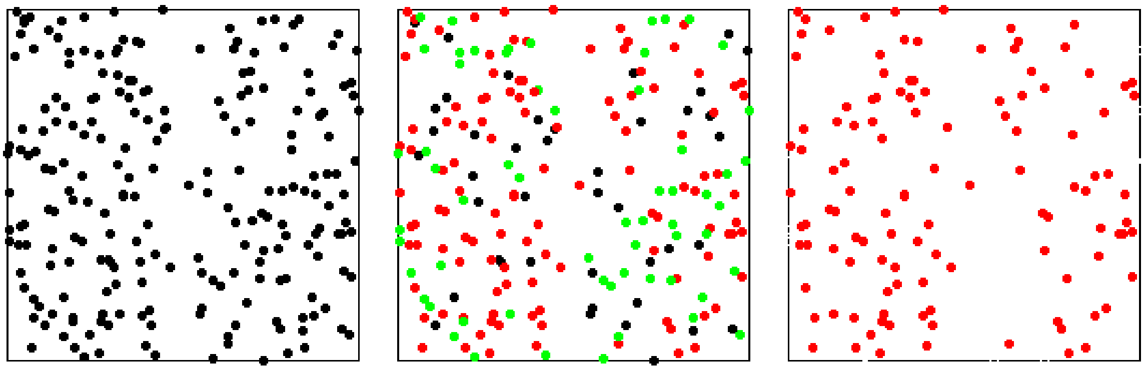
Korištenjem teorema o bojanju u primjenama, pokazuje se da je svojstvno nezavisnosti boje od pozicije točke dosta restriktivno, stoga je nastala potreba da se taj teorem dodatno poopći.

Neka je opet Π Poissonov proces na E sa srednjom mjerom μ. Uz svaku točku X skupa Π povezujemo slučajnu varijablu m_X koja predstavlja oznaku (eng. *mark*) od X, a područje vrijednosti joj je neki skup M. Oznaka nam predstavlja poopćenje boje koje u ovom slučaju može ovisiti o samoj točki X, ali je nezavisno s ostalim točkama i njihovim oznakama.

Točku $X^* = (X, m_X)$ možemo promatrati kao slučajnu točku skupa $E \times M$. Štoviše, pokazuje se da je

$$\Pi^* = \{(X, m_X) : X \in \Pi\},$$

Poissonov proces na $S \times M$. Iduća definicija i teorem na formalan način iskazuju tvrdnje iz ovog razmatranja.



Slika 3.3: Originalni uniformni Poissonovi proces, proces nakon bojanja te stanjeni proces.

Definicija 3.3.3. *Neka je Π Poissonov proces na E sa srednjom mjerom μ, te neka je za svaki $x \in E$ zadana vjerojatnosna distribucija $p(x, \cdot)$ na M takva da je za $B \subseteq M$, $p(\cdot, B)$ izmjeriva funkcija na E. Označavanje od Π je slučajan podskup $\Pi^* = \{(X, m_X) : X \in \Pi\}$ od $E \times M$ takav da uvjetna distribucija od Π^* uz dano Π čini m_X nezavisnima s distribucijama $p(X, \cdot)$.*

Teorem 3.3.4 (Teorem o označavanju)**.** *Π^* je Poissonov proces na $E \times M$ sa srednjom mjerom μ^* danom sa*

$$\mu^*(C) = \int_{(x,m)\in C} \mu(dx)p(x, dm).$$

Poglavlje 4

Sume nad Poissonovim procesima

U ovom poglavlju promatrat ćemo sume oblika

$$\Sigma = \sum_{X \in \Pi} f(X), \tag{4.1}$$

pri čemu je Π Poissonov proces, a f realna izmjeriva funkcija. Može nas zanimati pod kojim uvjetima suma ovog oblika konvergira, kolika je očekivana suma, kolika je varijanca sume, itd.

Takvi rezultati bitni su u nam u primjenama jer se sume oblika (4.1) prirodno pojavljuju u raznim problemima. Jedan od povijesno prvih primjera je tzv. *shot effect* (efekt udarca), gdje se točke pojavljuju u raznim trenucima, a efekt njihovog djelovanja traje još neko vrijeme nakon njihova pojavljivanja. Konkretno, pretpostavimo da imamo uređaj koji mjeri učinak čestica koje se emitiraju iz nekog radioaktivnog materijala, i to tako da na česticu koja se pojavila u trenutku T_j, uređaj u trenutku t reagira sa intenzitetom $\Phi(t - T_j)$. Tada je ukupna reakcija uređaja u trenutku t

$$\sum_j \Phi(t - T_j).$$

Ukoliko se vremena emitiranja čestica mogu opisati kao Poissonov proces na $\langle 0, \infty \rangle$, posljednji izraz je upravo oblika (4.1).

Višedimenzionalni primjer može biti npr. računanje ukupne gravitacijske sile okolnih zvijezda na jednu određenu zvijezdu.

4.1 Campbellov teorem

Osnovni rezultat koji nam daje nužne i dovoljne uvjete za konvergenciju sume u (4.1) je Campbellov teorem. Da bi stekli bolju intuiciju, prije nego prijeđemo na sam teorem, probajmo analizirati slučaj za jednostavne funkcije. Dakle, pretpostavimo da $f : E \to \mathbb{R}$ poprima konačno mnogo ne-nul vrijednosti $f_1, \ldots, f_k$ te da je jednaka nuli izvan nekog skupa konačne μ-mjere. Tada su

$$A_j = \{x : f(x) = f_j\}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

disjunktni izmjerivi skupovi te vrijedi

$$m_j = \mu(A_j) < \infty, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Označimo

$$N_j = N(A_j) \sim Poiss(m_j).$$

N_j su nezavisne te vrijedi

$$\Sigma = \sum_{X \in \Pi} f(X) = \sum_{j=1}^{k} f_j N_j, \tag{4.2}$$

što u potpunosti određuje distribuciju od Σ. Za $\theta \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{\theta\Sigma}) &= \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}(e^{\theta f_j N_j}) \\
&= \prod_{j=1}^{k} \exp\{(e^{\theta f_j} - 1)m_j\} \\
&= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_{E} (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\}.
\end{aligned}$$

Uzmemo li posebno da je θ čisto imaginaran, dobivamo karakterističnu funkciju od Σ

$$\varphi_\Sigma(t) = \mathbb{E}(e^{it\Sigma}) = \exp\left\{\int_{E} (e^{itf(x)} - 1)\mu(dx)\right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sada koristeći vezu između karakterističnih funkcija i momenata slučajne varijable, možemo iz gornje formule izračunati očekivanje i varijancu (primijetimo da zbog (4.2) u ovom slučaju Σ ima prva dva momenta). Prisjetimo se da vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Sigma) &= \frac{1}{i}\varphi_\Sigma'(0) \\
\mathbb{E}(\Sigma^2) &= \frac{1}{i^2}\varphi_\Sigma''(0).
\end{aligned}$$

Označimo li

$$I(t) = \int_E (e^{itf(x)} - 1)\mu(dx),$$

imamo

$$\varphi'_\Sigma(t) = \frac{d}{dt}e^{I(t)} = e^{I(t)}\frac{d}{dt}I(t) = e^{I(t)}\int_E if(x)e^{itf(x)}\mu(dx),$$

pri čemu je derivacija mogla preći pod integral jer je derivacija podintegralne funkcije apsolutno integrabilna (Sarapa, [4], korolar 10.2). Posebno je

$$\varphi'_\Sigma(0) = i\int_E f(x)\mu(dx)$$

pa je

$$\mathbb{E}(\Sigma) = \int_S f(x)\mu(dx).$$

Na sličan način dobivamo i

$$\mathrm{var}(\Sigma) = \int_S f(x)^2\mu(dx).$$

Ova razmatranja su zapravo prvi korak u dokazu Campbellovog teorema. Prije samog teorema, treba nam još jedna pomoćna tvrdnja koju ćemo koristiti u njegovom dokazu.

Lema 4.1.1. *Neka je $f : E \to \mathbb{R}$ nenegativna izmjeriva funkcija te neka je $u \in \mathbb{R}$, $u > 0$. Tada vrijedi*

$$\int_E \min(f(x), 1)\mu(dx) < \infty \iff \int_E (1 - e^{-uf(x)})\mu(dx) < \infty. \tag{4.3}$$

Dokaz. Koristit ćemo sljedeće poznate nejednakosti

$$\frac{x}{x+1} \le 1 - e^{-x} \le x, \quad x \ge 0. \tag{4.4}$$

Primijetimo da vrijedi

$$1 - e^{-uf(x)} \le 1, \quad \forall x \in E \tag{4.5}$$

$$1 - e^{-uf(x)} \le uf(x), \quad \forall x \in E. \tag{4.6}$$

Ako je $u \le 1$, (4.6) povlači da je $1 - e^{-uf(x)} \le f(x)$, pa to skupa sa (4.5) daje

$$1 - e^{-uf(x)} \le \min(f(x), 1).$$

Ako je pak $u \ge 1$, (4.5) povlači da je $1 - e^{-uf(x)} \le u$, pa to skupa sa (4.6) daje

$$1 - e^{-uf(x)} \le u\min(f(x), 1).$$

Dakle, za sve $u > 0$ i $x \in E$ vrijedi

$$1 - e^{-uf(x)} \leq \max(u, 1) \min(f(x), 1). \tag{4.7}$$

S druge strane, imamo sljedeće. Za $x \in E$ takve da $f(x) \leq 1$ vrijedi

$$1 - e^{-uf(x)} \geq \frac{uf(x)}{uf(x) + 1} \geq \frac{uf(x)}{u + 1} \geq \frac{u}{u + 1} \min(f(x), 1).$$

Za $x \in E$ takve da $f(x) \geq 1$ vrijedi

$$1 - e^{-uf(x)} \geq 1 - e^{-u} = (1 - e^{-u}) \cdot 1 = (1 - e^{-u}) \min(f(x), 1) \geq \frac{u}{u + 1} \min(f(x), 1).$$

Dakle, za sve $x \in E$ i $u > 0$ vrijedi

$$1 - e^{-uf(x)} \geq \frac{u}{u + 1} \min(f(x), 1). \tag{4.8}$$

Sada (4.7) i (4.8) skupa daju

$$\frac{u}{u + 1} \min(f(x), 1) \leq 1 - e^{-uf(x)} \leq \max(u, 1) \min(f(x), 1),$$

pa iz monotonosti integrala slijedi tvrdnja leme.

□

Teorem 4.1.2 (Campbell)**.** *Neka je* Π *Poissonov točkovni proces na E sa srednjom mjerom* μ *te neka je* $f : E \to \mathbb{R}$ *izmjeriva funkcija. Suma*

$$\Sigma = \sum_{X \in \Pi} f(X)$$

apsolutno konvergira sa vjerojatnošću 1 *ako i samo ako*

$$\int_E \min(|f(x)|, 1)\mu(dx) < \infty. \tag{4.9}$$

U slučaju konvergencije vrijedi

$$\mathbb{E}(e^{\theta\Sigma}) = \exp\left\{\int_E (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \tag{4.10}$$

za svaki $\theta \in \mathbb{C}$ *za koji integral na desnoj strani konvergira, a posebno za svaki čisto imaginarni* θ*. Nadalje, vrijedi*

$$\mathbb{E}(\Sigma) = \int_E f(x)\mu(dx) \tag{4.11}$$

u smislu da očekivanje od Σ postoji ako i samo ako integral s desne strane konvergira i u tom slučaju su jednaki. Ako (4.11) *konvergira, onda je*

$$\mathrm{var}(\Sigma) = \int_E f(x)^2 \mu(dx),$$

konačno ili beskonačno.

Dokaz. Dokaz provodimo Lebesgueovom indukcijom. Prvi slučaj, kada je f jednostavna funkcija, već smo pokazali. U tom slučaju, (4.10) vrijedi za sve $\theta \in \mathbb{C}$.

Svaka pozitivna izmjeriva funkcija f može se prikazati kao limes rastućeg niza jednostavnih funkcija (f_n), tj. $f = \lim_j f_j$. Stavimo da je $\theta = -u$, gdje je u realan pozitivan broj, te označimo $\Sigma_j = \Sigma f_j(X)$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-u\Sigma}] &= \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}[e^{-u\Sigma_j}] \\
&= \lim_{j\to\infty} \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-uf_j(x)})\mu(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{-\int_E (1 - e^{-uf(x)})\mu(dx)\right\}
\end{aligned}$$

pri čemu prva jednakost slijedi iz teorema o dominiranoj konvergenciji, druga po prethodno dokazanoj tvrdnji za jednostavne funkcije, a treća iz teorema o monotonoj konvergenciji.

Primijetimo da iz prethodne leme znamo da posljednji integral konvergira za svaki $u > 0$ ako i samo ako je ispunjeno (4.9).

U slučaju da integral ne konvergira (tj. divergira u ∞), dobivamo da je $\mathbb{E}[e^{-u\Sigma}] = 0$ za svaki $u > 0$, pa je zbog

$$0 = \mathbb{E}[e^{-u\Sigma}] = \mathbb{E}[e^{-u\Sigma}\mathbf{1}_{\{\Sigma<\infty\}}],$$

nužno $\mathbb{P}(\{\Sigma < \infty\}) = 0$, dakle $\Sigma = \infty$ gotovo sigurno.

U slučaju konvergencije, puštanjem $u \to 0$, dobivamo da je

$$\mathbb{E}[e^{-u\Sigma}] \to 1.$$

Kako je za svaki u

$$\mathbb{E}[e^{-u\Sigma}] = \mathbb{E}[e^{-u\Sigma}\mathbf{1}_{\{\Sigma<\infty\}}] + \mathbb{E}[e^{-u\Sigma}\mathbf{1}_{\{\Sigma=\infty\}}] = \mathbb{E}[e^{-u\Sigma}\mathbf{1}_{\{\Sigma<\infty\}}] \leq \mathbb{P}(\{\Sigma < \infty\}) \leq 1,$$

po teoremu o sendviču slijedi da je $\Sigma < \infty$ gotovo sigurno pa vrijedi prva tvrdnja teorema.

U slučaju kada je ispunjeno (4.9) tj. kada je Σ konačna g.s., može se pokazati da su lijeva i desna strana od (4.10) analitičke funkcije od θ za $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$. Kako se te dvije analitičke funkcije poklapaju na negativnom dijelu realne osi, po principu jedinstvenosti analitičke (holomorfne) funkcije (Ungar, [5], korolar 37.6), one su nužno jednake. Posebno, (4.10) vrijedi za sve $\mathrm{Re}\,\theta \leq 0$.

Formule za očekivanje i varijancu dobijemo slično kao i u slučaju za jednostavne funkcije koristeći vezu momenata slučajne varijable i karakteristične funkcije (ili Laplaceove transformacije). Time smo dokazali tvrdnju teorema za slučaj $f \geq 0$.

Za općenitu funkciju f, stavimo $f = f^+ - f^-$, gdje je $f^+ = \max(0, f)$ te $f^- = \max(0, -f)$. Tada Σ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergiraju obje sume

$$\begin{aligned}
\Sigma_+ &= \sum_{X \in \Pi} f^+(X) = \sum_{X \in \Pi_+} f(X), \\
\Sigma_- &= \sum_{X \in \Pi} f^-(X) = -\sum_{X \in \Pi_-} f(X),
\end{aligned}$$

pri čemu su Π_+ i Π_- restrikcije procesa Π na $E_+ = \{f > 0\}$ odnosno $E_- = \{f < 0\}$. Prema prethodno dokazanom, nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju tih dviju suma je da vrijedi (4.9) u odnosu na mjere $\mu(\cdot \cap E_+)$ i $\mu(\cdot \cap E_-)$, a to je pak ekvivalentno upravo sa (4.9) za μ.

Dakle (4.9) je nužan i dovoljan uvjet za konvergenciju od Σ. Obzirom da su E_+ i E_- disjunktni, Π_+ i Π_- su nezavisni procesi, pa za θ čisto imaginaran vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{\theta\Sigma}] &= \mathbb{E}[e^{\theta\Sigma_+}]\mathbb{E}[e^{\theta\Sigma_-}] \\
&= \exp\left\{\int_E (e^{\theta f^+(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \exp\left\{\int_E (e^{\theta f^-(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_E (e^{\theta f^+(x)} - 1 + e^{\theta f^-(x)} - 1)\mu(dx)\right\} \\
&= \exp\left\{\int_E (e^{\theta f(x)} - 1)\mu(dx)\right\}.
\end{aligned}$$

Time je dokazano da (4.10) vrijedi za imaginarne θ, pa se izrazi za očekivanje i varijancu dobivaju opet na sličan način. Tvrdnja se proširuje i na $\theta \in \mathbb{C}$ za koje integral na desnoj strani konvergira korištenjem principa jedinstvenosti.

□

Direktna posljedica Campbellovog teorema je idući korolar.

Korolar 4.1.3. *Neka su $f_1, \ldots, f_n$ funkcije za koje je zadovoljen uvjet Campbellovog teorema* (4.10)*. Tada znamo da sume*

$$\Sigma_j = \sum_{X \in \Pi} f_j(X)$$

konvergiraju gotovo sigurno i vrijedi

$$\mathbb{E}[e^{it_1\Sigma_1 + \cdots + it_n\Sigma_n}] = \exp\left\{\int_E (e^{it_1 f_1(x) + \cdots + it_n f_n(x)} - 1)\mu(dx)\right\}. \tag{4.12}$$

Ako f_j zadovoljavaju

$$\int_E f_j(x)^2 \mu(dx) < \infty,$$

onda je

$$\mathrm{cov}(\Sigma_j, \Sigma_k) = \int_E f_j(x) f_k(x) \mu(dx).$$

Dokaz. Relacija (4.12) slijedi direktno iz Campbellovog teorema za $f = t_1 f_1 + \cdots t_n f_n$ i $\theta = i$.

Ukoliko je

$$\mathrm{var}(\Sigma_j) = \int_E f_j(x)^2 \mu(dx) < \infty, \quad j = 1, \ldots, n,$$

kovarijanca $\mathrm{cov}(\Sigma_j, \Sigma_k)$ je dobro definirana za sve j i k. Kako posebno vrijedi

$$\mathbb{E}[e^{it_j\Sigma_j + it_k\Sigma_k}] = \exp\left\{\int_E (e^{it_j f_j(x) + it_k f_k(x)} - 1)\mu(dx)\right\},$$

može se slično kao i za momente dobiti da je $\mathbb{E}[\Sigma_j \Sigma_k]$ jednako koeficijentu uz $it_j it_k$ u razvoju lijeve strane u red. Taj koeficijent možemo dobiti parcijalnim deriviranjem desne strane po t_j i t_k, dijeljenjem s i^2 te uvrštavanjem $t_j = 0$ i $t_k = 0$. Tako dobivamo

$$\mathbb{E}(\Sigma_j \Sigma_k) = \int_E f_j(x)\mu(dx) \int_E f_k(x)\mu(dx) + \int f_j(x) f_k(x) \mu(dx).$$

Sada je

$$\mathrm{cov}(\Sigma_j, \Sigma_k) = \mathbb{E}(\Sigma_j \Sigma_k) - \mathbb{E}(\Sigma_j)\mathbb{E}(\Sigma_k) = \int f_j(x) f_k(x) \mu(dx).$$

□

Primjer 4.1.4. *Campbellov teorem možemo koristiti zajedno sa Monte Carlo (MC) simulacijama u procjenama integrala funkcija više varijabli. Neka je $W \subseteq \mathbb{R}^d$ te $f : W \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Zanima nas*

$$I = \int_W f(x) dx.$$

Neka je Π Poissonov proces sa itenzitezom

$$\lambda(x) = \begin{cases} c, \text{ ako } x \in W \\ 0, \text{ ako } x \notin W \end{cases}. \tag{4.13}$$

Označimo sa

$$\hat{I} = \frac{1}{c} \sum_{x \in \Pi} f(x).$$

Po Campbellovom teoremu je tada

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{I}] &= \frac{1}{c}\mathbb{E}[\sum_{x\in\Pi} f(x)] \\
&= \frac{1}{c}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\lambda(x)dx \\
&= \frac{1}{c}\int_W f(x)\cdot c dx \\
&= \int_W f(x)dx \\
&= I.
\end{aligned}$$

Dakle procjenu stvarne vrijednosti integrala možemo dobiti kao prosjek vrijednosti dobivenih iz velikog broja simulacija.

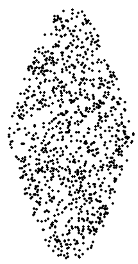
Ilustrirajmo to konkretnim primjerom. Definirajmo

$$f(x, y) = 16xy + 200,$$

te izračunajmo integral te funkcije na području W omeđenom sa krivuljama

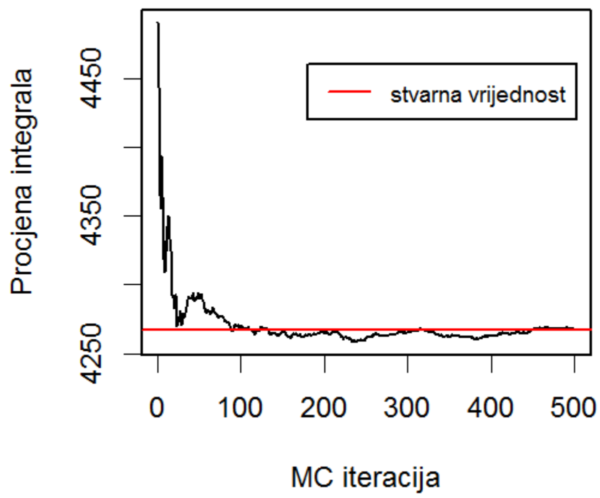
$$y = x^2 \text{ i } y = 8 - x^2.$$

Točkovne procese simuliramo 500 *puta sa funkcijom itenziteta* λ *kao u* (4.13) *za* $c = 50$. *Što je c veći, broj točaka u simulaciji je veći pa je procjena pouzdanija, ali i sporija. Kako je intenzitet izvan zadanog područja* 0*, simulirani točkovni procesi imaju oblik kao na slici.*



Slika 4.1: Primjer simuliranog procesa.

Računom se dobije da je egzaktna vrijednost integrala $12800/3 \approx 4266.667$. *Na slici možemo vidjeti kako se procjena dobivena MC simulacijama u R-u približava stvarnoj vrijednosti integrala.*



Slika 4.2: Konvergencija procjena integrala prema stvarnoj vrijednosti.

Sjetimo se da smo u dokazu Campbellovog teorema u slučaju $f \geq 0$ pokazali da tvrdnja teorema vrijedi za svaki $\theta = -u$ gdje je u pozitivan realan broj. Uzmemo li posebno $\theta = -1$ dobivamo

$$\mathbb{E}[e^{-\Sigma_f}] = exp\left\{-\int_E (1 - e^{-f(x)})\mu(dx)\right\}, \tag{4.14}$$

pri čemu je

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} f(X).$$

Sjetimo li se definicije Laplaceovog funkcionala od prije, vidimo da je $\Sigma_f = N(f)$, tj. (4.14) je upravo izraz za Laplaceov funkcional, pri čemu je N reprezentacija od Π u smislu drugog pristupa, odnosno mjera generirana s točkama od Π.

U dokazu teorema 2.3.4 vidjeli smo da je, da bi neki točkovni proces Π bio Poissonov, dovoljno da vrijedi (4.14) za f koje poprimaju konačno mnogo vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Taj uvijet automatski povlači da su $N(A)$, $A \in \mathcal{E}$ Poissonove slučajne varijable te da su te slučajne varijable nezavisne ukoliko su odgovarajući skupovi disjunktni.

4.2 Rényijev teorem

Još jedan zanimljiv način da okarakteriziramo Poissonove procese daje nam Rényijev teorem. Snaga Rényijevog teorema je u tome što pokazuje kako je informacija o distribuciji procesa sadržana u tzv. *funkciji izbjegavanja* (engl. *avoidance function*) α definiranoj sa

$$\alpha(A) = \mathbb{P}\{N(A) = 0\} = \mathbb{P}\{\Pi \cap A = \emptyset\}, \quad A \in \mathcal{E}.$$

Pokazuje se naime da je, da bi $N(A)$ bile Poissonove slučajne varijable za svaki $A \in \mathcal{E}$, dovoljno pretpostaviti da imaju dobre vjerojatnosti u 0 u odnosu na neku mjeru μ, tj.

$$\alpha(A) = e^{-\mu(A)}, \quad \forall A \in \mathcal{E}.$$

Tu također nema nikakvih eksplicitnih uvjeta na nezavisnost, nego će ona automatski proizaći iz uvjeta na funkciju izbjegavanja. U nastavku ćemo dokazati jednu od inačica tog teorema.

Teorem 4.2.1 (Rényi)**.** *Neka je μ mjera na $\mathbb{R}^d$ koja nema atome te koja je konačna na omeđenim skupovima. Neka je Π slučajan prebrojiv podskup od $\mathbb{R}^d$ takav da za sve $A \subseteq \mathbb{R}^d$ koji su konačne unije pravokutnika vrijedi*

$$\mathbb{P}\{\Pi \cap A = \emptyset\} = e^{-\mu(A)}.$$

Tada je Π Poissonov proces sa srednjom mjerom μ.

Dokaz. Nazovimo *k-kockom* svaki pravokutnik $\langle a, b]$ u $\mathbb{R}^d$ za koji vrijedi

$$a_i = v_i 2^{-k}, \quad b_i = (v_i + 1)2^{-k}, \quad i = 1, \dots, d,$$

za neke cijele brojeve v_i, $i = 1, \dots, d$. Drugim riječima, sve k-kocke za neki fiksan k generiraju mrežu u R^d sa širinom 2^{-k}. Za k-kocku C, definiramo $E(C) = \{\Pi \cap C = \emptyset\}$.

Pokažimo prvo da su za fiksan k, događaji $E(C_1), \dots, E(C_n)$ nezavisni ako su $C_1, \dots, C_n$ različite (a time i disjunktne) k-kocke.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} E(C_j)\right) &= \mathbb{P}\{\Pi \cap C_j = \emptyset, j = 1, \dots, n\} \\
&= \mathbb{P}\{\Pi \cap (\cup_{j=1}^{n} C_j) = \emptyset\} \\
&= \exp\{\mu(\cup_{j=1}^{n} C_j)\} \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{-\mu(C_j)}
\end{aligned}$$

Zaista, događaji su nezavisni te vrijedi

$$\mathbb{P}\{E(C)\} = e^{-\mu(C)}.$$

Uzmimo sada $G \subseteq \mathbb{R}^d$, otvoren i omeđen. Kako je G otvoren, za dovoljno veliki k svaka točka iz G nalazi se u nekoj k-kocki koja je sadržana u G. Štoviše, za svake dvije različite točke iz G možemo naći dovoljno velik k tako da su one u različitim k-kockama. Stoga je

$$N(G) = \lim_{k\to\infty} N_k(G),$$

pri čemu smo sa $N_k(G)$ označili broj k-kocki $C \subseteq G$ za koje je $\Pi \cap C \neq \emptyset$. Kako su $E(C)$ nezavisni događaji vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z^{N_k(G)}] &= \mathbb{E}[z^{\sum_{C\subseteq G} \mathbf{1}_{E(C)^c}}] \\
&= \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} \mathbb{E}[z^{\mathbf{1}_{E(C)^c}}] \\
&= \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} [z\mathbb{P}(E(C)^c) + \mathbb{P}(E(C))] \\
&= \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} [(1 - e^{-\mu(C)})z + e^{-\mu(C)}] \\
&= \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} [z + (1 - z)e^{-\mu(C)}],
\end{aligned}$$

za $|z| < 1$. Kako je niz $(N_k(G))_k$ monotono rastuć, po teoremu o monotonoj konvergenciji vrijedi

$$\mathbb{E}[z^{N(G)}] = \lim_k \mathbb{E}[z^{N_k(G)}] = \lim_k \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} [z + (1 - z)e^{-\mu(C)}].$$

za $0 \leq z < 1$, uz konvenciju $z^\infty = 0$.

Kako za $0 \leq z < 1$ i $\mu \geq 0$ vrijedi

$$z + (1 - z)e^{-\mu} \geq e^{-(1-z)\mu},$$

slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[z^{N(G)}] &\geq \lim_k \prod_{\substack{C\subseteq G,\\ C\; k-kocka}} e^{-(1-z)\mu(C)} \\
&= \lim_k e^{-(1-z)\sum \mu(C)} \\
&\geq e^{-(1-z)\mu(G)}.
\end{aligned}$$

Sada zbog

$$e^{-(1-z)\mu(G)} \leq \mathbb{E}[z^{N(G)}] = \mathbb{E}[z^{N(G)}\mathbf{1}_{\{N(G)<\infty\}}] \leq \mathbb{P}\{N(G) < \infty\} \leq 1,$$

puštanjem $z \to 1$ slijedi da je $N(G)$ konačna gotovo sigurno.

Već smo dobili da je $\mathbb{E}[z^{N(G)}] \geq e^{-(1-z)\mu(G)}$, ali želimo pokazati da vrijedi štoviše i jednakost. U tu svrhu pokazujemo malu podtvrdnju.

Pokažimo da za k-kocke na omeđenom području, $\mu(C)$ konvergira uniformno prema 0 kada $k \to \infty$. Uzmimo da je to područje 0-kocka C_0, iz toga onda slijedi tvrdnja i za općenito omeđeno područje. Pretpostavimo suprotno - $\mu(C)$ ne konvergira uniformno prema 0 na C_0. Tada postoji $\delta > 0$ i k-kocke $C \subseteq C_0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ takve da $\mu(C) > \delta$. Za k-kocku ćemo reći da je *loša* ako za svaki $l > k$ sadrži l-kocku C' takvu da je $\mu(C') > \delta$. Prema tome, C_0 je loša. No tada je barem jedna 1-kocka od njih 2^d sadržanih u C_0 također loša. Naime, kako ih je konačno mnogo, u barem jednu od njih (označimo ju sa C_1) je moralo upasti beskonačno mnogo od ovih k-kocki mjere veće od δ koje C_0 sadrži. Jasno je da je onda C_1 loša te da induktivno dobivamo niz $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots$ pri čemu je C_k loša k-kocka. Također, zbog monotonosti mjere je $\mu(C_k) > \delta$ za svaki k, a onda je i mjera presjeka veća od δ. S druge strane, kako se stranice $k - kocki$ smanjuju i teže prema 0, presjek može biti ili prazan ili jedna točka. No to je u kontradikciji s pretpostavkom da μ nema atome.

Stoga, za otvoren i omeđen G, možemo pretpostaviti da za $\delta > 0$ postoji dovoljno veliki k takav da je $\mu(C) \leq \delta$ za sve k-kocke u G.

Ako je $\mu \leq \delta$ i $0 \leq z < 1$ vrijedi

$$e^{-(1-z)\mu(G)} \leq \mathbb{E}[z^{N(G)}] \leq e^{-(1-z)\Psi(\delta)\mu(G)},$$

pri čemu $\Psi(\delta) \to 1$ kada $\delta \to 0$.

Pustimo li $\delta \to 0$, u našem slučaju dobivamo upravo

$$\mathbb{E}[z^{N(G)}] = e^{-(1-z)\mu(G)}.$$

Dakle, $N(G)$ imaju Poissonovu distribuciju sa parametrom $\mu(G)$.

Ako pak uzmemo $G_1, \ldots, G_m$ disjunktne otvorene omeđene skupove, jasno je da niti jedna k-kocka ne može istovremeno biti unutar dva ili više G_j, stoga su za fiksni k

$$N_k(G_1), \ldots, N_k(G_m)$$

nezavisne, a onda su i njihovi limesi

$$N(G_1), \ldots, N(G_m)$$

nezavisni.

Na kraju još preostaje proširiti dokazane tvrdnje za otvorene omeđene skupove na sve izmjerive podskupove od $\mathbb{R}^d$. Kako se svaki pravokutnik $\langle a, b]$ može prikazati kao presjek otvorenih skupova

$$\langle a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \langle a, b + (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})\rangle,$$

slijedi da tvrdnja vrijedi i za pravokutnike.

No sada se prisjetimo (4.14). Ako stavimo $f = \mathbf{1}_R$ pri čemu je R pravokutnik, imamo

$$\Sigma_f = \sum_{X \in \Pi} \mathbf{1}_R(X) = N(R),$$

te jer je $N(R) \sim Poiss(\mu(R))$

$$\mathbb{E}[e^{-\Sigma_f}] = \mathbb{E}[e^{-N(R)}] = e^{(e^{-1}-1)\mu(R)} = \exp\{\int_E (e^{-f(x)} - 1)\mu(dx)\}.$$

Kako je svaka nenegativna funkcija limes rastućeg niza karakterističnih funkcija pravokutnika, iz teorema o dominiranoj konvergenciji slijedi da tvrdnja vrijedi i za sve nenegativne funkcije pa je zaista Π Poissonov proces sa srednjom mjerom μ. $\square$

Bibliografija

[1] A. Baddeley et al., *Analysing spatial point patterns in R*, Citeseer, 2008.

[2] J. F. C. Kingman, *Poisson processes*, sv. 3, Clarendon Press, 1992.

[3] S. I. Resnick, *Adventures in stochastic processes*, Springer Science & Business Media, 2013.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.

[5] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, 2009., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/kompleksna.pdf`.

Sažetak

U ovom radu, cilj nam je bio definirati i dati osnovne rezultate o Poissonovim točkovnim procesima. Prije svega, prikazana je definicija općenitih točkovnih procesa za koju se tradicionalno koriste dva slična, ali ipak različita pristupa - prvi se koncentrira direktno na točke kao podskupove od $\mathbb{R}^d$, a drugi uvodi pojam slučajnih mjera te na njima gradi definiciju. Iako se uglavnom oslanjamo na prvu definicju, naglašavamo neke zanimljive razlike i veze sa drugom definicijom. Nakon formalne definicije točkovnih procesa, a onda i konkretno Poissonovih točkovnih procesa, pokazujemo osnovne rezultate vezane uz transformacije Poissonovih procesa poput unije prebrojivo procesa (teorem superpozicije), preslikavanja, stanjivanja i označavanja procesa. U zadnjem poglavlju dokazana su još dva bitna rezultata, a to su Campbellov teorem koji opisuje distribuciju slučajne varijable

$$\sum_{X\in\Pi} f(X),$$

te Rényijev teorem koji daje vrlo zanimljivu karakterizaciju Poissonovi procesa kroz funkciju izbjegavanja.

Summary

In this thesis, our goal was to define Poisson point processes and introduce some of their basic properties. Firstly, we reviewed the definition of general point processes. Typically, two similar, but different approaches are used for the definition - the first one concentrates directly on the points as subsets of $\mathbb{R}^d$, while the second approach relies on the concept of random measures. Although we concentrate mainly on the first definition, we point out interesting differences and similarities between those two approaches. After the formal definition of point processes and Poisson point processes, we show some fundamental results from the transformation theory of Poisson processes concerning countable unions of processes (superposition theorem), mapping, thinning and marking. In the last chapter we prove two more substantial results: the Campbell theorem which describes the distribution of the random variable

$$\sum_{X \in \Pi} f(X),$$

and Rényi's theorem which reveals an interesting characterisation of Poisson point processes using the avoidance function.

Životopis

Rođena sam 7.6.1992. u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Ante Kovačića, upisala sam matematički razred u zagrebačkoj V.gimnaziji. Godine 2011. upisujem preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu, gdje 2014. godine upisujem diplomski studij Matematička statistika.