SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Butigan

OPTIMALNO UPRAVLJANJE U DISKRETNOM VREMENU

Diplomski rad

Voditelj rada:
Dr. sc. Marko Vrdoljak, izv. prof.

Zagreb, rujan 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Teorija upravljanja je područje matematike koja se bavi izučavanjem osnovnih principa analize i dizajna sustava. Glavni cilj navedenog područja je upravljanje sustavom, odnosno utjecaj na ponašanje sustava u željenom smjeru. Optimalno upravljanje se odnosi na upravljanje sustavom na način da je željeni optimalni kriteriji zadovoljen. Optimalna strategija će upravo ovisiti o načinu definiranja optimalnog kriterija.

Promatrani sustav, s vremenski promjenjivom dinamikom, može biti diskretan i kontinuiran. U kontinuiranim sustavima dinamika procesa je opisana diferencijalnim jednadžbama, dok se u diskretnim sustavima stanje sustava može opisati diferencijskom jednadžbom. U radu ćemo se prvenstveno bazirati na pronalaženju optimalnog upravljanja za diskretne sustave, no dat ćemo i uvid u način na koji možemo rješiti i problematiku vezanu za kontinuirani sustav.

Temelji teorije optimalnog upravljanja postavljeni su krajem pedesetih godina radovima Pontryagina i Bellmana. Razvoj se dogodio u jeku Hladnog rata gdje je problematika optimalnog upravljanja iznimno važna, ali i drugdje, u doslovce svim aspektima transporta i proizvodnje. Unatoč tome što je u početku teorija optimalnog upravljanja imala isključivu primjenu na problemima tehničkih sustava primjetan je zadnjih godina sve veći trend njene primjene u ekonomiji i menadžmentu. Kako bismo dobili predožbu o kakvim problemima je riječ pogledajmo par instruktivnih primjera.

Optimalna potrošnja

Promotrimo jedan od dobro poznatih problema u ekonomiji, problem maksimizacije korisnosti potrošača. Promatramo potrošača s količinom novca x_0 koji taj novac može iskoristiti na k različitih proizvoda. Njegov cilj je maksimizirati svoje potrošačko zadovoljstvo bez ulaska u dug.
Neka vektor $c = (c_1, ..., c_k)$ predstavlja vektor (nenegativnih) potrošenih količina proizvoda, $p = (p_1, ..., p_k)$ vektor cijena i $U_0 \colon \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ funkciju koja opisuje zadovoljstvo potrošača.

Dinamička formulacija problema je sljedeća. Potrošač može svoju potrošnju izvršiti tijekom određenog vremenskog perioda: ovo zapravo znači da vektor potrošnje postaje vremenski zavisan vektor, kao što može biti i vektor cijena. Za vremenski period se najčešće uzima podskup $\mathcal{T}$ pozitivnog dijela realne osi $\mathbb{R}_+ = [0, \infty\rangle$. Podskup $\mathcal{T}$ biramo na način da izaberemo početni trenutak t_0 i konačni trenutak T tako da vrijedi $0 \leq t_0 < T \leq \infty$. U ovom primjeru ograničiti ćemo se na slučaj kada je:

- $\mathcal{T} = [t_0, T] \cap \mathbb{N}$ tj. promatrat ćemo problem u diskretnom vremenu
- $T < \infty$ odnosno ograničit ćemo se na konačan vremenski period
- Cijene p_i su jednake

Vektor potrošnje c je sada funkcija $c\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}^k_+$. Najčešći oblik funkcije korisnosti za diskretni slučaj uz uobičajnu pretpostavku o separabilnosti dan je izrazom

$$U_1(c) := \sum_{t=t_0}^{T} \beta^t U_0(c(t))$$

gdje $\beta \in \langle 0, 1\rangle$ predstavlja diskontni faktor koji označava svojstvo da potrošač osjeća manje zadovoljstva od potrošnje u nekom kasnijem vremenskom trenutku. Iz uvjeta nenegativnosti funkcije $c(\cdot)$ slijedi uvjet

$$c_i \geqslant 0\,,\ i \in \mathcal{T}\,. \tag{1}$$

Budžetno ograničenje u dinamičkom okruženju zapravo nam kaže da u svakom trenutku ukupan potrošeni novac na proizvode ne smije biti veći od početnog iznosa x_0. Točnije, vrijede uvjeti:

$$\begin{aligned} \langle p, c(t_0)\rangle &\geqslant x_0, \\ \langle p, c(t_0+1)\rangle &\geqslant x_0 - \langle p, c(t_0)\rangle, \\ \langle p, c(t_0+2)\rangle &\geqslant x_0 - \langle p, c(t_0)\rangle - \langle p, c(t_0+1)\rangle, \end{aligned}$$

i tako dalje.
U kompaktnijoj formi možemo prethodne izraze zapisati kao:

$$\langle p, c(t_0)\rangle \geqslant x_0 - \sum_{s=t_0}^{t-1} \langle p, c(s)\rangle, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \tag{2}$$

Prethodni izraz predstavlja dinamički uvjet odnosno pokazuje vezu između varijabli odlučivanja u različitim vremenskim periodima. Budući da je s takvim izrazom kompliciranije računati cilj nam je transformirati izraz na oblik koji uključuje samo dva sukcesivna vremenska trenutka t i $t+1$. Iz tog razloga uvodimo varijablu stanja $x(t)$ koja predstavlja količinu novca potrošača u trenutku t točnije na početku perioda t. Naziv varijabla stanja slijedi iz toga da promatranjem dinamičkog sustava (u ovom slučaju govorimo o potrošačevom "džepu") uvodimo dinamičku varijablu $x(\cdot)$ takvu da $x(t)$ opisuje stanje sustava u trenutku t. Sustav možemo mijenjati koristeći varijablu odlučivanja odnosno varijablu upravljanja $c(\cdot)$ koja utječe na stanje $x(\cdot)$ sustava. Iz definicije varijable $x(t)$ slijedi da za novac kojeg potrošač ima u trenutku t vrijedi

$$x(t) = x_0 - \sum_{s=t_0}^{t-1} \langle p, c(s) \rangle, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \tag{3}$$

Slijedi, da uvjet (2) možemo zapisati:

$$\langle p, c(t) \rangle \leqslant x(t), \quad \forall t \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

Iz (3) lako vidimo da vrijedi:

$$x(t+1) = x(t) - \langle p, c(t) \rangle \quad \forall t \in \mathcal{T} \tag{5}$$

Slijedi da je uvjet (5) ekvivalentan uvjetu

$$x(t+1) \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathcal{T}. \tag{6}$$

Znači, uvodimo varijablu stanja

$$x(\cdot) \colon \mathcal{T} \to \mathbb{R} \tag{7}$$

kao jedinstveno rješenje diferencijske jednadžbe (jednadžba stanja)

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) - \langle p, c(t) \rangle, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Dodatno, zahtijevamo da vrijedi uvjet 6 . Sada napokon možemo zapisati problem na sljedeći način:

$$max \qquad U_1(c(\cdot)) := \sum_{k=1}^{T} \beta^k U_0(c(t)) \tag{8}$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} c(t) &\geqslant 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \\ x(t) &\geqslant 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x(t+1) = x(t) - \langle p, c(t) \rangle, & \forall t \in \mathcal{T}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Strujni krug

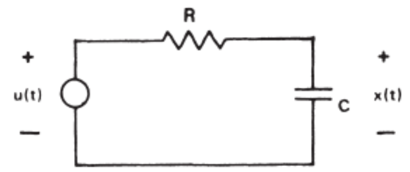
Jednadžbe stanje u kontinuiranom vremenu daju ponašanje napona kondezatora x:

$$\dot{x}(t) = \frac{-1}{\tau} x + \frac{1}{\tau} u,$$

gdje je vremenska konstanta τ zadana s

$$\tau = \frac{1}{RC},$$

dok je u naponu izvor struje koim želimo upravljati sustavom.



Slika 0.1: Dizajn električne struje

U zadnjem poglavlju ćemo precizno uvesti dva problema optimalnog upravljanja za ovaj sustav i dati način njihovog rješavanja.

Poglavlje 1

Problem optimalnog upravljanja u diskretnom vremenu

U ovom poglavlju ćemo prezentirati način rješavanja problema optimizacije funkcije cilja koja opisuje sustav s vremenski promjenjivom dinamikom u diskretnim trenutcima. U idućim potpoglavljima rješavanje problema ćemo započeti promatrajući jednadžbe stanja budući da je njima opisana dinamika sustava. Takve jednadžbe su zadane osobinama sustava dok funkcija cilja može biti proizvoljno odabrana u ovisnosti o tome kakvo ponašanje sustava želimo.

1.1 Formulacija problema

Neka je sustav opisan općenitom nelinearnom dinamičkom jednadžbom u diskretnom vremenu

$$x_{k+1} = f^k(x_k, u_k) \tag{1.1}$$

s inicijalnim uvjetom x_0. Superskript za funkciju f općenito predstavlja sustav, a time i model koji ga opisuje, s vremenski promjenjivom dinamikom. Pretpostavimo da je varijabla stanja x_k vektor duljine n te da je varijabla upravljanja u_k vektor duljine m. Jednadžba (1.1) predstavlja ograničenje za promatrani sustav, budući da definira stanje u trenutku $k + 1$ za danu varijablu upravljanja i stanje sustava u vremenu k. Funkcija cilja, izabrana od strane inženjera sustava, je dana u općenitom obliku

$$J_i = \phi(N, X_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(x_k, u_k) \tag{1.2}$$

gdje je $[i, N]$ vremenski okvir, na diskretnoj skali s fiksnim korakom, tijekom kojeg promatramo ponašanje sustava. $\phi(N, x_N)$ je funkcija završnog vremena N i stanja u završnom vremenu dok je $L^t(x_k, u_k)$ vremenski promjenjiva funkcija stanja i upravljanja u diskretnim trenutcima k u intervalu $[i, N]$.

Problem optimalnog upravljanja je pronaći upravljanje u_k^* na intervalu $[i, N]$ koje zadovoljava ograničenja sustava 1.1 tako da je vrijednost funkcije cilja optimalna. Budući da je izbor funkcije cilja naš odabir, pripadni problem optimizacije može biti promatran kao problem maksimizacije ili minimizacije. Budući se često susrećemo s problemima minimizacije troškova upravljanja, u ovom radu ćemo promatrati problem minimizacije funkcije cilja.
Napomena:
Bitno je napomenuti da je dinamika sustava dana njegovim ponašanjem dok funkciju cilja biramo sami u ovisnosti što želimo postići od danog sustava.

1.2 Rješenje problema

U ovom potpoglavlju dajemo način rješavanja problema optimalnog upravljanja za općeniti nelinearni sustav (1.1) s pripadnom funkcijom cilja (1.2).
Za rješavanje ovog problema koristimo princip Lagrange-ovih multiplikatora. Budući da proučavamo sustav s promjenjivom dinamikom tijekom diskretnog vremena na intervalu $[i, N]$ uvodimo Lagrangeov multiplikator u svakom vremenskom trenutku k, odnosno za svaku jednadžbu stanja uvodimo pripadni Lagrangeov multiplikator λ_k.
Neka je $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$. Uvrstimo ograničenje (1.1) u izraz funkcije cilja:

$$J^{'} = \phi(N, x_n) + \sum_{k=i}^{N-1} [L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T (f^k(x_k, u_k) - x_{k+1})]. \tag{1.3}$$

Primjetimo da smo jednadžbi stanja u trenutku k dodijelili multiplikator λ_{k+1}, a ne λ_k. To je napravljeno iz čisto tehničkih razloga.
Definirajući Hamiltonovu funkciju u svakom trenutku k izrazom

$$H^k(x_k, u_k) = L^k(x_k, u_k) + \lambda_{k+1}^T (f^k(x_k, u_k) - x_{k+1}), \tag{1.4}$$

možemo pisati

$$J^{'} = \phi(N, x_k) - {\lambda_N}^T x_N + H^i(x_i, u_i) + \sum_{k=i+1}^{N-1} [H^k(x_k, u_k) - {\lambda_k}^T x_k]. \tag{1.5}$$

Primjetimo da smo sad dobili izraz za funkciju cilja koju trebamo minimizirati bez jednadžbi ograničenja. Sad možemo primjeniti teoriju Lagrangeovih multiplikatora tako da

parcijalne derivacije funkcije cilja izjednačimo s 0.
Slijedi:

$$\begin{aligned} dJ^{'} =& (\phi_{x_N} - \lambda_N)^T dx_N + (H^i_{x_i})^T dx_i + (H^i_{u_i})^T du_i \\ &+ \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H^k_{x_k} - \lambda_k)^T dx_k + (H^k_{u_k})^T du_k] - \sum_{k=i+1}^{N-1} [(H^{k-1}_{\lambda_k} - x_k)^T d\lambda_k, \end{aligned} \tag{1.6}$$

gdje je

$$H^k_{x_k} \triangleq \frac{\partial H^k}{\partial x_k}. \tag{1.7}$$

Nužni uvjeti za minimum su dani s

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}}, \qquad k = i, ..., N-1, \tag{1.8}$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k}, \qquad k = i, ..., N-1, \tag{1.9}$$

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k}, \qquad k = i, ..., N-1. \tag{1.10}$$

Ti uvjeti slijede iz izraza unutar sumacije (1.6), koeficijenta uz du_i i izraza

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_N\right)^T dx_N = 0, \tag{1.11}$$

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial x_i}\right)^T dx_i = 0. \tag{1.12}$$

Formulacija problema i zapis prethodnih uvjeta pomoću izraza (1.4) dani su u tablici *Tablica 1.1*. Ovi uvjeti nisu intuitivno jasni, pa ćemo ih posebno razmotriti kako bi ih razumjeli. Jednadžba (1.15) opisuje stanje promatranog sustava u diskretnim trenutcima. Primjetimo da je time zadana rekurzija unaprijed za stanje x_k, dok je izrazom (1.16) opisana rekurzija unazad za λ_k. Iz toga možemo zaključiti da su Lagrangeovi multiplikatori, koje zovemo adjungiranim stanjima, varijable koje su određene vlastitiom dinamičkom jednadžbom. Te dvije jednažbe opisuju rubni problem, budući da su rubni uvjeti potrebni za rješavanje problema početno stanje x_i i konačno adjungirano stanje λ_N. Ovakvi problemi su općenito teško rješivi. Neke od primjera tih problema ćemo razmatrati kasnije.
Stacionarni uvjet (1.17) omogućava da se optimalno upravljanje u_k^* izrazi u terminima adjungiranog stanja. Ovime je zapravo prikazana zanimljiva situacija: iako nas zapravo ne zanimaju vrijednosti λ_k, prikazana metoda rješavanja problema zapravo traži da izračunamo te vrijednosti budući da su one potrebne za izračun optimalnog upravljanja.

Ostaje nam još raspraviti o rubnim uvjetima. Prva jednadžba rubnog uvjeta vrijedi u završnom trenutku $k = N$ za razliku od druge koja vrijedi u inicijalnom stanju $k = i$. Obje jednadžbe nisu dinamičke kao što je bio slučaj s jednadžbama (1.17) i (1.16), no potrebne su za njihovo rješavanje. Postoje dvije mogućnosti za obje jednadžbe.

Ako *fiksiramo početno stanje* x_i, tada je $dx_i = 0$ pa je time uvjet u (1.12) ispunjen bez obzira na vrijednost $H^i_{x_i}$. U slučaju da imamo *proizvoljno početno stanje*, dx_i nije jednak 0, pa slijedi da mora vrijediti

$$\frac{\partial H^i}{\partial x_i} = 0. \tag{1.13}$$

U primjenama koje ćemo razmatrati sustav će krenuti iz fiksiranog početnog stanja x_i. Time je uvjet u (1.12) ispunjen i nema ograničenja na vrijednost $H^i_{x_i}$.
Međutim, postoje dvije mogućnosti i za završno stanje x_N. U slučaju da je završno stanje *fiksno*, koristimo vrijednost x_N za završni uvjet. Tada vrijednost x_N ne možemo mijenjati u određivanju optimalnog upravljanja te je $dx_N = 0$ čime je izraz (1.11) ispunjen. S druge strane, ako nas ne zanima da naš promatrani sustav završi u određenom stanju x_N, onda vrijednost x_N možemo *proizvoljno* mijenjati s ciljem određivanja optimalnog upravljanja. U ovom slučaju dx_n nije jednak nuli. Iz (1.11) onda slijedi

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N}. \tag{1.14}$$

Iz ovoga zaklljučujemo da je završni uvjet vrijednost adjunguranog stanja λ_N.

Ponovimo: inicijalni uvjet rubnog problema je poznata vrijednost x_i. Završni uvjet može biti ili fiksna vrijednost x_N ili vrijednost λ_N.

Tablica 1.1 Formulacija problema:

Jednadžba sustava:

$$x_{k+1} = f^t(x_k, u_k), \quad k > i,$$

Funkcija cilja:

$$J_i = \phi(N, x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L^k(x_k, u_k)$$

Hamiltonijan:

$$H^k = L^k + \lambda_{k+1}^T f^k$$

Uvjeti:
Jednadžba stanja:

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = f^k(x_k, u_k) \tag{1.15}$$

Adjungirana jednadžba:

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f^k}{\partial x_k}\right)^T \lambda_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial x_k} \tag{1.16}$$

Uvjet stacionarnosti:

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = \left(\frac{\partial f^k}{\partial u_k}\right)^T \lambda_{k+1} + \frac{\partial L^k}{\partial u_k} \tag{1.17}$$

Rubni uvjeti:

$$\left(\frac{\partial L^i}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_i}\right)^T \lambda_{i+1}\right)^T dx_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} - \lambda_N\right)^T dx_N = 0$$

Kako bi razvili osjećaj za prethodnu teoriju o načinu rješavanja problema optimalnog upravljanja u diskretnom vremenu pogledat ćemo primjer. Vidjet ćemo da se rješenje problema ne dobva izravno upravo zbog prirode rubnog problema.

Primjer 1.2.1. ***Optimalno upravljanje za skalarni linearni sustav***
Promotrimo jednostavan skalarni linearni dinamički sustav

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k, \tag{1}$$

gdje malo slovo a i b označuje da radimo sa skalarima. Neka je početno stanje x_0*. Pretpostavimo da promatramo ponašanje sustava na intervalu* $[0, N]$ *te da želimo minimizirati energiju sustava tako da*

$$J_0 = \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \to min \tag{2}$$

za neku skalarnu težinu r.
Razmotrit ćemo dva slučaja koja se razlikuju po tome kako želimo da se sustav ponaša.

(a) Fiksirano završno stanje
Prvo, pretpostavimo da želimo da sustav završi u trenutku $k = N$ *u točno određenom stanju* r_N*:*

$$x_N = r_N.$$

Kako bi našli optimalno upravljanje $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ *koje pokreću sustav iz stanja* x_0 *u željeno stanje* $x_N = r_N$ *pritom minimizirajući izraz* (2)*, koristit ćemo Tablicu 1.1. Tijekom postupka nalaženja rješenja uvodit ćemo pomoćne varijable kako bi naše konačno rješenje bilo preglednije. Prvi korak u rješavanju problema je izračun Hamilitonijana:*

$$H^k = L^k + \lambda_{k+1}^T f^k = \frac{r}{2}u_k^2 + \lambda_{k+1}(ax_k + bu_k). \tag{3}$$

Iz toga izrazimo dobivamo uvjete:

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = ax_k + bu_k, \tag{4}$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = a\lambda_{k+1}, \tag{5}$$

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = ru_k + b\lambda_{k+1}. \tag{6}$$

Rješavajući stacionarni uvjet za u_k *u terminima adjungiranog stanja dobivamo:*

$$u_k = -\frac{b}{r}\lambda_{k+1}. \tag{7}$$

Iz ovoga zaključujemo da ako pronađemo opitmalni λ_k*, možemo iskoristiti* (7) *za izračun optimalnog upravljanja. Kako bi našli optimalni* λ_k*, eliminirat ćemo* u_k *iz*

(4) *pomoću* (7). *Tada dobivamo*

$$x_k = ax_k - \frac{b}{r}\lambda_{k+1} = ax_k - \gamma\lambda_{k+1}, \tag{8}$$

gdje je

$$\gamma \triangleq \frac{b^2}{r}, \tag{9}$$

omjer 'efekta upravljanja' koji kontolira težinu varijable upravljanja.
Jednadžba (5) *je jednostavna homogena diferencijska jednadžba čije je rješenje dano s*

$$\lambda_k = a^{N-k}\lambda_N. \tag{10}$$

Međutim, primjetimo da i dalje ne znamo vrijednost λ_N. Kako bi pronašli tu vrijednost iskoristit ćemo (10) *u uvjetu* (8) *čime dobivamo*

$$x_{k+1} = ax_k - \gamma a^{N-k-1}\lambda_N. \tag{11}$$

Prethodni izraz možemo promotriti kao nehomogenu diferencijsku jednadžbu s funkcijom $\gamma a^{N-k-1}\lambda_N$, tako da je rješenje dano s

$$\begin{aligned} x_k &= a^k x_0 - \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}(\gamma a^{N-i-1}\lambda_N) \\ &= a^k x_0 - \gamma a^{N+k-2}\lambda_N \sum_{i=0}^{k-1} a^{-2i}. \end{aligned} \tag{12}$$

Koristeći formulu za sumu geometrijskog niza dobivamo

$$\begin{aligned} x_k &= a^k x_0 - \gamma a^{N+k-2}\lambda_N \frac{1-a^{-2k}}{1-a^{-2}} \\ &= a^k x_0 - \gamma a^{N-k}\lambda_N \frac{1-a^{2k}}{1-a^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Iz ovoga slijedi da je stanje u vremenu k linearna kombinacija početnog stanja x_0 i nepoznatog konačnog adjungiranog stanja. Kako bi pronašli tu nepoznatu vrijednost iskoristit ćemo rubne uvjete.
Budući da je x_0 fiksirano, $dx_0 = 0$ pa je uvjet (1.12) *zadovoljen. Budući da zahtjevamo da je i konačno stanje fiksno, tada je $dx_N = 0$ tako da je i uvjet* (1.11) *ispunjen. Iz ovoga zaključujemo da u određivanju optimalnog upravljanja ne možemo varirati ni vrijednosti x_0 ni x_N. Iz* (13) *vidimo da konačno stanje x_N možemo prikazati u terminima λ_N kao*

$$x_N = a^N x_0 - \frac{\gamma(1-a^{2N})}{1-a^2}\lambda_N = a^N x_0 - \Lambda\lambda_N, \tag{14}$$

gdje je

$$\Lambda \triangleq \frac{\gamma(1-a^{2N})}{1-a^2} = \frac{b^2(1-a^{2N})}{r(1-a^2)}. \tag{15}$$

Izraz u (15) *nam omogućava da* λ_N *izrazimo u terminima poznatih vrijednosti:*

$$\lambda_N = -\frac{1}{\Lambda}(r_N - a^N x_0). \tag{16}$$

Primjetimo da je $-a^N x_0$ *završno stanje sustava kad je upravljanje jednako nuli. Konačno adjungirano stanje* λ_N *je proporcija razlike željenog konačnog stanja* r_N *i konačnog stanja* $-a^N x_0$*, koje se ostvaruje kad je upravljanje* $u_k = 0$*. Takav rezultat ne treba čuditi jer ima smisla da upravljanje koje će odvesti sustav iz stanja* x_0 *u stanje* r_N *ovisi upravo o takvoj razlici.*
Sada smo u prilici izračunati izraz za vrijednosti adjungiranog stanja u svakom promatranom trenutku k koristeći (10)*:*

$$\lambda_k = -\frac{1}{\Lambda}(r_N - a^N x_0)a^{N-k}, \tag{17}$$

kao i izraz za optimalno upravljanje u_k^*

$$u_k^* = \frac{b}{r\Lambda}(r_N - a^N x_0)a^{N-k-1}. \tag{18}$$

Ovime smo dobili rješenje našeg problema tj. upravo dobiveni u_k^* *za* $k = 0, 1, ..., N-1$ *je optimalno upravljanje koje će sustav iz stanja* x_0 *dovest u željeno stanje* r_N *pritom minimizirajući energiju* (2)*. Izraz* (18) *možemo zapisati i na sljedeći način:*

$$u_k^* = \frac{1-a^2}{b(1-a^{2N})}(r_N - a^N x_0)a^{N-k-1}. \tag{19}$$

Ovakav alternativni zapis optimalnog upravljanja nam zapravo omogućuje da vidimo da ona ne ovisi o težinskom faktoru r. Naglasimo da ovakav sustav u kojem optimalno upravljanje u_k^* *ovisi o inicijalnim i konačnim stanjima, je problem optimalnog upravljanja u klasičnom smislu. Nešto više o tome ćemo govoriti u sljedećem poglavlju. Radi potpunosti odredimo i optimalni niz stanja* x_k^* *i funkciju cilja po utjecajem* u_k^**. Uvrštavajući* (19) *u* (1) *dobivamo*

$$x_{k+1}^* = ax_k^* + \frac{1-a^2}{1-a^{2N}}(r_N - a^N x_0)a^{N-k-1}. \tag{20}$$

Prvo što možemo primjetiti u prethodnom izrazu je da optimalno stanje x_k^* *ne ovisi o r i b. Jednadžba* (20) *je nehomogena diferencijska jednadžba s funkcijom*

$\frac{1-a^2}{1-a^{2N}}(r_N - a^N x_0)a^{N-k-1}$ *pa je rješenje takve jednadžbe dano s*

$$x_k^* = ax_0^* + \frac{1-a^2}{1-a^{2N}}(r_N - a^N x_0)\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}a^{N-i-1}. \tag{21}$$

Ako iskoristimo formulu za sumu geometrijskog niza dobivamo izraz

$$x_k^* = ax_0^* + \frac{1-a^2}{1-a^{2N}}(r_N - a^N x_0)a^{N-k}. \tag{22}$$

Kao što vidimo, x_k^* *je vremenski varirajuća linearna kombinacija vrijednosti* x_0 *i* r_N*. Optimalna funkcija cilja je*

$$J_0^* = \frac{r}{2}\frac{(1-a^2)^2}{b^2(1-a^{2N})^2}(r_N - a^N x_0)^2 \sum_{k=0}^{N-1} a^{2(N-k-1)}. \tag{23}$$

Konačno, korištenjem formule za sumu geometrijskog niza dobivamo rješenje

$$J_0^* = \frac{1}{2\Lambda}(r_N - a^N x_0)^2. \tag{24}$$

Dakle, vidimo da je energija sustava veća što je konačno stanje,u slučaju da je upravljanje jednako 0 ($a^N x_0$*), dalje od željenog konačnog stanja (*r_N*).*

(b) *Proizvoljno završno stanje*
Pretpostavimo da i dalje želimo da nam sustav završi u stanju r_N*, no odlučimo se za drugačiju metodu postizanja tog cilja. Nama zapravo nije bitno da sustav završi u stanju* r_N*, ali ipak želimo da je vrijednost konačnog stanja* x_N *dovoljno blizu te vrijednosti. Zapravo mi želimo njihovu razliku učinit proizvoljno malom. Uvrštavanjem tog zahtjeva u funkciju cilja slijedi:*

$$J_0 = \frac{1}{2}(x_N - r_N)^2 + \frac{r}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u_k^2 \to min \tag{25}$$

Vidimo da će optimalno upravljanje nastojati razliku smanjiti kako bi minimizirali funkciju cilja. U ovom slučaju imamo da je

$$\phi = \frac{1}{2}(x_N - r_N)^2, \tag{26}$$

Izrazi za f_k *i* L_k *ostaju nepromijenjeni. Hamiltonijan je i dalje dan izrazom* (3) *kao i izrazi* (4)-(6)*. To zapravo znači da cijeli postupak izvođenja sve do izraza* (14)

ostaje nepromijenjen ako funkciji cilja dodamo član ϕ*. Jedina promjena se događa u izračunu rubnih uvjeta.*
Budući da sad ne zahtjevamo da konačno stanje x_N *mora poprimiti određenu vrijednost, možemo ga varirati u određivanju optimalnog upravljanja. Iz toga slijedi da je* $dx_N \neq 0$ *pa iz* (1.11) *mora vrijediti*

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N} = x_N - r_N. \tag{27}$$

Vrijednost završnog adjungiranog stanja sad ovisi o konačnom stanju x_N *i željenom konačnom stanju* r_N*. Ovime dobivamo novi rubni uvjet za* (5) *i* (8)*. Inicijalni uvjet je i dalje zadan s vrijednosti* x_i*. Uvrštavanjem* (27) *u* (14) *dobivamo da je završno stanje*

$$x_N = a^N x_0 - \Lambda(x_N - r_N), \tag{28}$$

odnosno

$$x_N = \frac{\Lambda r_N + a^N x_0}{1 + \Lambda}. \tag{29}$$

Korištenjem prethodno izračunatih uvjeta dobivamo da je konačno adjungirano stanje dano s

$$\lambda_N = \frac{-(r_N - a^N x_0)}{1 + \Lambda}. \tag{30}$$

Iz (10) *onda slijedi*

$$\lambda_N = \frac{-(r_N - a^N x_0)}{1 + \Lambda} a^{N--k}. \tag{31}$$

Optimalno upravljanje je pritom dano s

$$u_k^* = \frac{b}{r(1 + \Lambda)}(r_N - a^N x_0) a^{N-k-1}. \tag{32}$$

Ovo je optimalno upravljanje koje rješava problem proizvoljno konačnog stanja x_N*. Za razliku od slučaja kad smo imali fiksno konačno stanje, vidimo da sada upravljanje ovisi o* r*.*
Puštanjem da $r \to 0$ *zapravo želimo reći da nas sve manje i manje zanima energija upravljanja. U tom slučaju optimalno upravljanje teži prema vrijednosti optimalnog upravljanja kad imamo fiksirano konačno stanje. Zapravo to znači da što nas manje zanima energija upravljanja prilikom minimizacije funkcije cilja, konačno stanje* x_N *se sve više približava željenom stanju* r_N*.*
Ako pak pustimo da vrijednost r *ide u beskonačnost, optimalno upravljanje teži u nulu. Korištenjem izračunatih izraza dobivamo*

$$x_k^* = \frac{[(1 - a^2)/\gamma + (1 - a^{2(N-k)})] a^k x_0 + (1 - a^{2k}) a^{N-k} r_N}{(1 - a^2)/\gamma + (1 - a^{2N})}. \tag{33}$$

Iz ovoga možemo zaključiti da je $x_0^* = x_0$*, ali i*

$$x_k^* = \frac{[(1-a^2)/\gamma]a^N x_0 + (1-a^{2N})r_N}{(1-a^2)/\gamma + (1-a^{2N})}. \tag{34}$$

Kako $r \to 0$ *tako i* $\gamma \to \infty$ *pa se i* x_N^* *približava vrijednosti* r_N*. Konačno, vrijednost optimalne funkcije cilja je*

$$J_0^* = \frac{\Lambda}{2(+\Lambda)^2}(r_N - a^N x_0)^2. \tag{35}$$

Poglavlje 2

Problem optimalnog upravljanja s kvadratičnom funkcijom cilja

Tablica 1.1 nam daje uvid u postupak rješavanja problema upravljanja za nelinerne sustave za veoma općenite funkcije cilja. Primjeri problema optimalnog upravljanja koje je moguće eksplicitno riješiti su rijetkost. U ovom poglavlju razmatramo poseban slučaj linearnih sustava s kvadratičnom funkcijom cilja. Pokazat ćemo da se rješenja problema mogu pronaći u dva slučaju:

- Fiksirano konačno stanje sustava
- Proizvoljno konačno stanje sustava što vodi problemu optimalnog upravljanja s povratnom vezom

2.1 Jednadžbe stanja i adjungiranog stanja

Pretpostavimo da je stanje sustava opisano sljedećom linearnom jednadžbom

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}^n, u_k \in \mathbb{R}^m. \tag{2.1}$$

Funkcija cilja danog sustava je kvadratična funkcija

$$J_i = \frac{1}{2} x_N^\intercal S_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (x_k^\intercal Q_k x_k + u_k^\intercal R_k u_k), \tag{2.2}$$

definirana na intervalu $[i, N]$. Primjetimo da su i matrice sustava i težina u pravilu vremenski varirajuće. Inicijalno stanje sustava je dano s x_i. Možemo pretpostaviti da su matrice Q_k, R_k i S_N simetrične i pozitivne semidefinitne i da je $|R_k| \neq 0$ za svaki k.

Cilj nam je pronaći niz $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$ koji minimizira zadanu funkciju cilja J_i. Kako bi riješili ovaj linearno kvadratični problem, počinjemo s računanjem Hamilitonijana

$$H_k = \frac{1}{2}(x_k^\intercal Q_k x_k + u_k^\intercal R_k u_k) + \lambda_{k+1}^\intercal (A_k x_k + B_k u_k). \tag{2.3}$$

Iz *Tablice 1.1* slijede sljedeće jednadžbe stanja i adjungirana jednadžba:

$$x_{k+1} = \frac{\partial H^k}{\partial \lambda_{k+1}} = A_k x_k + B_k u_k, \tag{2.4}$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H^k}{\partial x_k} = Q_k x_k + A_k^\intercal \lambda_{k+1}, \tag{2.5}$$

i stacionarni uvjet

$$0 = \frac{\partial H^k}{\partial u_k} = R_k u_k + B_k^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.6}$$

Iz prethodnog izraza dobivamo

$$u_k = -R_k^{-1} B_k^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.7}$$

Vidimo da je optimalno upravljanje određeno ako možemo naći niz optimalnih adjungiranih stanja. Koristeći (2.7) da eliminiramo u_k u (2.4) daje

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.8}$$

Od ovog trenutka ćemo ispustiti indekse u matricama težina i matricama stanja kako bi pojednostavili notaciju.
Adjungirane jednadžbe i jednadžbe stanja možemo zajednički zapisati matrično na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\intercal \\ Q & A^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Definicija 2.1.1. *Za* $2nx2n$ *matricu* H *kažemo da je Hamiltonskog tipa ako zadovoljava*

$$JHJ = H^\intercal$$

gdje je $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Može se jednostavno provjeriti da je matrica koeficijenata u (2.9) upravo takvog tipa te ćemo taj sustav zvati *diskretni Hamiltonski sustav*. Takav sustav je teško rješiv jer se razvija

unaprijed i unazad u vremenu.
Ako je $|A| \neq 0$ (što je slučaj kad god diskretiziziramo neprekidni sustav), tada (2.8) možemo zapisati pomoću rekurzije unatrag

$$x_k = A^{-1}x_{k+1} + A^{-1}BR^{-1}B^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.10}$$

Uvrštavajući prethodni izraz u (2.5), sustav (2.9) možemo zapisati u formi

$$\begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}BR^{-1}B^\intercal \\ QA^{-1} & A^\intercal + QA^{-1}BR^{-1}B^\intercal \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Ovaj sustav prikazuje rekurzije koje se razvijaju unazad u vremenu, pa vrijedi da ako možemo odrediti x_N i λ_N, tada onda možemo i naći x_k i λ_k te time i optimalno upravljanje. Nažalost mi poznamo vrijednost x_0, a ne λ_N. Kako bismo riješili problem moramo iskoristiti rubne uvjete. U sljedećim poglavljima ćemo razmotriti dva specijalna slučaja završnog stanja x_N.

2.2 Fiksirano završno stanje i i zadaća optimalnog upravljanja

Cilj ovog odjeljka je pronaći optimalno upravljanje koje će dovesti sustav iz početnog stanja u stanje r_N. Pretpostavimo da je početno stanje dano u trenutku $i = 0$ s x_0. Kao što smo već napomenuli konačni uvjet na stanje sustava je

$$x_N = r_N.$$

Budući da je konačno stanje sustava fiksirano, $dx_N = 0$ pa je uvjet (1.11) zadovoljen. Također, vrijedi da je doprinos završnog stanja funkciji cilja J_0 konstantan i iznosi $\frac{1}{2}r_N^\intercal S_N r_N$. Upravo zbog toga nema potrebe uključivati taj konstantni član u funkciju cilja jer on neće utjecati na postupak minimizacije. Zbog toga pretpostavimo da je $S_N = 0$. Radi jednostavnosti uzmimo da su i matrice Q_k jednake nuli. Tada je funkcija cilja dana s

$$J_0 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} u_k^\intercal R_k u_k, \tag{2.12}$$

i tražimo upravljanje koje će zadovoljiti rubni uvjet te pritom minimizirati energiju sustava. Jednadžbe stanja sustava i adjungiranog stanja su

$$x_{k+1} = Ax_k - BR^{-1}B^\intercal \lambda_{k+1}, \tag{2.13}$$

$$\lambda_k = A^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.14}$$

Budući da koristimo pretpostavku $Q_k = 0$ znatno nam je olakšano traženje rješenje problema budući da sad adjungirana jednadžba ne ovisi o stanju sustava. Rješavajući jednadžbu (2.14) u terminima nepoznate konačne vrijednosti λ_N dobivamo

$$\lambda_k = (A^\intercal)^{N-k}\lambda_N. \tag{2.15}$$

Ako uvrstimo taj izraz u jednadžbu (2.13) dobivamo

$$x_{k+1} = Ax_k - BR^{-1}B^\intercal(A^\intercal)^{N-k-1}\lambda_N. \tag{2.16}$$

Ovim je prikazana nehomogena deferencijska jednadžba prvog reda s funkcijom danom drugim pribrojnikom. Rješavajući tu jednadžbu slijedi

$$x_k = A^k x_0 - \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}BR^{-1}B^\intercal(A^\intercal)^{N-i-1}\lambda_N. \tag{2.17}$$

Uvrštavajući $k = N$ u prethodno jednadžbu možemo dobiti izraz za λ_N

$$\lambda_N = -G_{0,N}^{-1}(r_N - A^N x_0), \tag{2.18}$$

gdje je

$$G_{0,N} = \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1}BR^{-1}B^\intercal(A^\intercal)^{N-i-1}. \tag{2.19}$$

Sad kada imamo izraz za λ_N iz (2.15) slijedi

$$\lambda_k = -(A^\intercal)^{N-k} - G_{0,N}^{-1}(r_N - A^N x_0). \tag{2.20}$$

Iz (2.7) vidimo da je optimalno upravljanje onda dano s

$$u_k^* = R^{-1}B^\intercal(A^\intercal)^{N-k-1}G_{0,N}^{-1}(r_N - A^N x_0). \tag{2.21}$$

Ovime smo pronašli upravljanje koja rješava problem fiksnog završnog stanja x_N. Kako bi se u to uvjerili izračunajmo prvo rješenje jednadžbu stanja (2.3). Uvrštavajući optimalno upravljanje u rješenje te jednadžbe

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu_i, \tag{2.22}$$

dobivamo

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{i=0}^{N-1} A^{N-i-1}BR^{-1}B^\intercal(A^\intercal)^{N-k-1}G_{0,N}^{-1}(r_N - A^N x_0). \tag{2.23}$$

Sređivajući izraz dobivamo

$$x_k = A^N x_0 + G_{0,N}G_{0,N}^{-1}(r_N - A^N x_0) = r_N, \tag{2.24}$$

što smo htjeli i pokazati. U sljedećoj tablici dan je pregled problema i njegovo rješenje.

Tablica 2.1: Kvadratična funkcija cilja u diskretnom vremenu (fiksirano završno stanje)

Stanje sustava:
$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad k > i,$
Funkcija cilja:
$J_i = \frac{1}{2} x_N^\intercal S_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} (x_k^\intercal Q_k x_k + u_k^\intercal R_k u_k),,$
Pretpostavke:
$S_N \geq 0, \quad Q_k \geq 0, \quad R_k > 0,$ i sve su matrice simetrične
Optimalno upravljanje:
$S_k = A_k^\intercal [S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^\intercal S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^\intercal S_{k+1}] A_k + Q_k.$
$K_k = (B_k^\intercal S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^\intercal S_{k+1} A_k \quad k < N$
$u_k = -K_k x_k, \quad k < N$
$J_i^* = \frac{1}{2} x_i^\intercal S_i x_i$

Proučimo sad malo bolje $G_{0,N}$. Izraz za $G_{0,N}$ možemo zapisati u terminima matrice upravljivosti sustava $U_k = [B \ AB \ \cdots \ A^{k-1}B]$ na sljedeći način:

$$G_{0,N} = U_N \begin{bmatrix} R^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R^{-1} \end{bmatrix} U_N^\intercal.$$

Iz prethodnih računa vidimo da optimalno upravljanje postoji u slučaju da možemo naći inverz matrice $G_{0,N}$ odnosno ako je $|G_{0,N}| \neq 0$. Budući da smo pretpostavili $|R| \neq 0$, uvjet $|G_{0,N}| \neq 0$ je ekvivalentan uvjetu da je matrica U_N punog ranga n gdje je n dimenzija stanja. Pokazuje se da je ovaj uvjet ekvivalentan uvjetu upravljivosti sustava:
za svaki r_N postoji upravljanje koje dovodi sustav iz stanja x_0 u početnom trenutku u $x_N = r_N$ ako su matrice U_{n+j} punog ranga za svaki $j \geq 0$.

2.3 Proizvoljno završno stanje i zadaća optimalnog upravljanja s povratnom vezom

U prethodom poglavlju smo našli rješenje za optimalno upravljanje koje minimizira energiju sustava u slučaju kada x_N poprima zadanu vrijednost. U nastavku ćemo pokušati riješiti problem u slučaju kad ne stavljamo nikakve restrikcije na vrijednosti konačnog stanja x_N. Radi se problemu proizvoljnog završnog stanja i rezultat će biti znatno različit od prethodnog slučaja.
Ponovo uvodimo indekse koje označavaju vremenski promjenjive matrice koefcijenata koje

smo prije zanemarili te ponovo razmatramo slučaj kad je $Q_k = 0$. Jednadžbe stanja sustava i adjungiranog stanja su

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^\intercal \lambda_{k+1}, \tag{2.25}$$

$$\lambda_k = A_k^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.26}$$

Upravljanje je dano s

$$u_k = -R_k^{-1} B_k^\intercal \lambda_{k+1}. \tag{2.27}$$

Inicijalni uvjet je dan s x_i, a završno stanje x_N je proizvoljno. Ovo znači da zapravo vrijednost završnog stanja možemo varirati u određivanju optimalnog upravljanja. Zbog toga je $dx_N \neq 0$. Iz uvjeta (1.11) tada slijedi da je

$$\lambda_N = \frac{\partial \phi}{\partial x_N}. \tag{2.28}$$

Iz (2.2) vidimo da je težinska funkciija završnog stanja dana s $\phi = \frac{1}{2} x_N^\intercal S_N x_N$ pa je

$$\lambda_N = S_N x_N. \tag{2.29}$$

Dobivena relacija između završnog adjungiranog stanja i stanja sustava predstavlja novi rubni uvjet. Optimalno upravljanje ćemo dobit rješavajući rubni problem. Problem ćemo riješiti iterativnom metodom. Pretpostavit ćemo da linearna relacija kao u (2.29) vrijedi za svaki diskretni trenutak $k \leq n$:

$$\lambda_k = S_k x_k, \tag{2.30}$$

za $n \times n$ matrice S_k. Ako pronađamo formulu za S_k za koju će vrijediti prethodni uvjeti onda će naša pretpostavka biti ispravna.
Uvrštavajući izraz (2.35) u (2.25) slijedi

$$x_{k+1} = A_k x_k - B_k R_k^{-1} B_k^\intercal S_{k+1} x_{k+1} \tag{2.31}$$

$$= (I + B_k R_k^{-1} B_k^\intercal S_{k+1})^{-1} A_k x_k, \tag{2.32}$$

čime smo dobili rekurziju unaprijed za stanje sustava x_k. Ako pak uvrstimo izraz (2.35) u (2.26) dobivamo

$$S_k x_k = A_k^\intercal x_k - B_k R_k^{-1} B_k^\intercal S_{k+1} x_{k+1} \tag{2.33}$$

$$= (I + B_k R_k^{-1} B_k^\intercal S_{k+1})^{-1} A_k x_k. \tag{2.34}$$

Budući da su općenito vrijednosti $x_k \neq 0$, prethodna jednažba vrijedi za bilo koji niz stanja sustava počevši od x_i pa dobivamo da je

$$S_k = A_k^\intercal S_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^\intercal)^{-1} A_k + Q_k. \tag{2.35}$$

Lema 2.3.1. *Vrijedi*

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

Dokaz. Formulu direktno provjeravamo množeći $(A - BDC)$ s pripadnim invezom te provjerom da njihov umnožak daje jediničnu matricu I:

$$\begin{aligned}
&(A + UCV)\left[A^{-1} + A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}\right] \\
&\quad = I + UCVA^{-1} - (U + UCVA^{-1}U)(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \\
&\quad = I + UCVA^{-1} - UC(C^{-1} + VA^{-1}U)(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \\
&\quad = I + UCVA^{-1} - UCVA^{-1} = I.
\end{aligned}$$

□

Koristeći prethodnu lemu izraz (2.35)možemo dodatno srediti:

$$S_k = A_k^\top [S_{k+1} - S_{k+1}B_k(B_k^\top S_{k+1}B_k + R_k)^{-1}B_k^\top\ S_{k+1}]A_k + Q_k. \tag{2.36}$$

Ova jednadžba prikazuje rekurziju unatrag za S_k određenu s S_{k+} i težinskim matricama sustava. Rubni uvjet je poznat, to je konačna težinska matrica S_N. Iz toga je vidljivo da možemo dobiti niz S_k kako bi relacija (2.35) vrijedila. Matrična kvadratna jednaždba (2.37) se naziva *Riccatijeva jednadžba*. Ako je $|S_k| \neq 0$ za svaki k, onda možemo koristiti (2.3.1) i napisati Riccatijevu jednadžbu u obliku

$$S_k = A_k^\top (S_{k+1}^{-1} + B_k R_k^{-1} B_k^\top)^{-1} A_k + Q_k. \tag{2.37}$$

Primjetimo da se niz S_k se može izračunati poznavajući samo sustav i parametre funkcije cilja. Jednom kad izračunamo niz S_k, poznavajući inicijalno stanje x_i možemo dobiti iz (2.33) optimalnu putanju stanja sustava. Kako bi izračunali optimalno upravljanje imamo

$$u_k = -R_k^{-1}B_k^\top \lambda_{k+1} = -R_k^{-1}B_k^\top S_{k+1}x_{k+1}. \tag{2.38}$$

Međutim, ovakav zapis nije zgodan pa koristeći jednadžbu stanja $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$ dobivamo zapis

$$\begin{aligned}
u_k &= -R_k^{-1}B_k^\top S_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k) && (2.39) \\
&= -(B_k^\top S_{k+1}B_k + R_k)^{-1}B_k^\top S_{k+1}A_k x_k. && (2.40)
\end{aligned}$$

Ako definiramo niz $K_k, k = 0, 1, ..., N - 1$ kao

$$K_k = (B_k^\top S_{k+1}B_k + R_k)^{-1}B_k^\top S_{k+1}A_k, \tag{2.41}$$

slijedi

$$u_k = K_k x_k. \tag{2.42}$$

U prošlim izrazima smo mogli pisati u_k^* budući da se radi o izrazu za optimalno upravljanje. Vidimo da optimalno upravljanje ovisi o stanju u svakom vremenskom trenutku pa se radi o zadatku optimalnog upravljanja s povratnom vezom. Ovakav problem je robusniji od uobičajenog problema optimalnog upravljanja upravo zbog toga što su sve devijacije od optimalnog stanja x_k^* već uračunate.
U problemu s fiksiranim završnim stanjem, vidjeli smo da je upravljivost sustava bila nužna kako bi pronašli optimalno upravljanje koje će sustav u bilo kojem inicijalnom stanju odvesti u željeno stanje. Međutim, u problemu proizvoljnog završnog stanja upravljivost sustava nije igrala ulogu. Ako sustav nije upravljiv optimalno upravljanje će svejedno pokušati na najbolji način minimizirati funkciju cilja.

2.4 Analitičko rješenje Riccatijeve jednadžbe

U prethodnom dijelu smo pretpostavili da je

$$\lambda_k = S_k x_k, \quad \forall k \geq N$$

uz rubni uvjet S_N. Jedan način rješavanja ovog problema je putem iteracije te smo pritom dobili da je

$$S_k = A_k^\top [S_{k+1} - S_{k+1} B_k (B_k^\top S_{k+1} B_k + R_k)^{-1} B_k^\top S_{k+1}] A_k + Q_k.$$

U ovom dijelu ćemo razmotriti nerekurzivno rješenje za S_k koje se odnosi na slučaj kada pretpostavimo vremensku invarijatnost stanja sustava i težinskih matrica koeficijenata. Također pretpostavimo da matrica A nije singularna. Pokazali smo da sustav za stanje i adjungirano stanje možemo zapisati pomoću rekurzije unatrag na način

$$\begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{2.43}$$

gdje je H dano s

$$H = \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1} B R^{-1} B^\top \\ Q A^{-1} & A^\top + Q A^{-1} B R^{-1} B^\top \end{bmatrix}.$$

Sljedeće što ćemo napraviti je pokazati da se rješenje Riccatijeve jednadžbe može zapisati u terminima svojstvenih vrijednosti i vektora matrice H. Definiramo

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Lako se pokaže da vrijedi sljedeća jednakost

$$H^{\mathsf{T}} J H = J. \tag{2.45}$$

Matrica H koja zadovoljava takvo svojstvo se naziva simplektička matrica. Budući da je matrica H simplektička, njen inverz je lako naći jer

$$\begin{aligned} H^{\mathsf{T}} J &= J H^{-1}, \\ J^{-1} H^{\mathsf{T}} J &= H^{-1}, \end{aligned}$$

pa zbog svojstva da je $J^{-1} = -J$ vrijedi

$$H^{-1} = -J H^{\mathsf{T}} J. \tag{2.46}$$

Nakon matričnog množenje dobivamo

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} A + BR^{-1}B^{\mathsf{T}}A^{-T}Q & BR^{-1}B^{\mathsf{T}}A^{-T} \\ -A^{-T}Q & A^{-T} \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

(A^{-T} predstavlja $(A^{-1})^T$).

Propozicija 2.4.1. *Neka je H simplektička matrica. Ako je λ svojstvena vrijednost matrice H tada je i $1/\lambda$ također svojstvena vrijednost.*

Dokaz. Vrijedi $H^T J H = J$ iz čega dobivamo $H = -J(H^T)^{-1}J$. Tada slijedi

$$\begin{aligned} k_H(\lambda) = det(H - \lambda I) &= det(-J(H^T)^{-1}J - \lambda I) && (2.48) \\ &= det((H^T)^{-1}J + \lambda J) && (2.49) \\ &= det(-J((H^T)^{-1} - \lambda I)) && (2.50) \\ &= det(-J) \cdot det((H^T)^{-1} - \lambda I) && (2.51) \\ &= det((H^T)^{-1} - \lambda I), && (2.52) \end{aligned}$$

gdje smo u drugom retku iskoristili svojstvo $J^2 = -I$. Iz zadnjeg retka zaključujemo da je λ svojstvena vrijednost matrice $(H^T)^{-1}$ odnosno da je $1/\lambda$ svojstvena vrijednost matrice H^T. Budući da znamo da je $\sigma(H) = \sigma(H^T)$ slijedi da je $1/\lambda$ svojstvena vrijednost matrice H što smo željeli i pokazati. □

Iz prethodne propozicije slijedi da dijagonalnu matricu D matrice H možemo prikazati na način

$$D = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.53}$$

gdje matrica M sadrži n svojstvenih vrijednosti izvan jediničnog kruga (stoga je M^{-1} stabilna matrica) Postoji nesingularna matrica W čiji su stupci svojstveni vektori matrice H tako da vrijedi

$$W^{-1}HW = D$$

Definiramo transformaciju stanja sustava tako da za svaki k vrijedi,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} w_k \\ zk \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

$$= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k \\ zk \end{bmatrix}. \tag{2.55}$$

gdje su W_{ij} particije matrice W. Tada se sustav (2.43) može prikazati na sljedeći način

$$\begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} w_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Koristeći rubne uvjete rješenje za (2.56) dano je s

$$\begin{bmatrix} w_k \\ z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{N-k} & 0 \\ 0 & M^{-(N-k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_N \\ z_N \end{bmatrix}. \tag{2.57}$$

Razmotrit ćemo relacije između x_k i λ_k te između w_k i z_k. Koristeći (2.29) te (2.54) u završnom trenutku N dobivamo

$$\lambda_N = W_{21}W_N + W_{22}z_N = S_N x_N = S_N(W_{11}w_N + W_{12}z_N)$$

Sređivajući izraz za z_N u terminima w_N imamo

$$z_N = Tw_N$$

gdje je

$$T = -(W_{22} - S_N W_{12})^{-1}(W_{22} - S_N W_{11})$$

Iz (2.57) slijedi

$$z_k = M^{-(N-k)}z_N = M^{-(N-k)}Tw_N = M^{-(N-k)}TM^{-(N-k)}w_k$$

tako da za svaku vrijednost k vrijedi

$$z_k = T_k w_k \tag{2.58}$$

gdje je

$$T_k = M^{-(N-k)}TM^{-(N-k)}$$

Još nam ostaje izvesti relaciju za S_k. Kako bi to napravili, iskoristimo (2.54) kako bi zapisali

$$\lambda_k = W_{21}w_k + W_{22}z_k = S_k x_k = S_k(W_{11}w_k + w_{12}z_k),$$

pa iskorištavajući (2.58) dobivamo

$$(W_{21} + W_{22}T_k)w_k = S_k(W_{11} + W_{12}T_k)w_k.$$

Budući da posljednji izraz mora vrijediti za svako inicijalno stanje x_0, a time i za sve trajektorije w_k, konačno dobivamo da je

$$S_k = (W_{21} + W_{22}T_k)(W_{11} + W_{12}T_k)^{-1}$$

Ovim postupkom je dano nerekurzivno analitičko rješenje Riccatijeve jednadžbe za svaki $k \geq N$ i to u terminima S_N i svojstvenih vektora i svojstvenih vrijednosti matrice H.

Poglavlje 3

Digitalno upravljanje kontinuiranog sustava

Ubrzano razvijanje digitalne tehnologije neprestano mijenja granice i mogućnosti modeliranja sustava za upravljanje. Danas je čak već rutinski moguće implementirati komplicirane digitalne sustave te izvoditi opsežne izračune potrebne za njihovo modeliranje. Ovakvi pomaci u razvoju tehnologije su ostvarivi uz male troškove zbog velike dostupnosti moćnih, ali jeftinih digitalni računala i potrebnih uređaja.

U digitalnim sustavima ulazni podaci mijenjaju svoje vrijednosti u diskretnm trenutcima, pri čemu se između tih koraka vrijednost varijable upravljanja drži konstantnom. Takva problematika se zasniva na diskretizaciji kontinuiranog sustava.

Postoje dva fundamentalna pristupa u modeliranju upravljanja sustava u diskretnim trenutcima u slučaju kontinuirano promjenjivih vremenskih sustava. Prvi, tradicionalniji pristup počiva na izračunu optimalnog upravljanja za kontinuiran slučaj te potom diskretiziramo dobiveno rješenje. Međutim, takva diskretna varijanta kontinuiranog rješenja se ponaša lošije čak i za jako male vremenske periode. Drugi pristup se zasniva na diskretizaciji jednadžbe sustava i tek tada računanjem optimalnog upravljanja. Ovaj slučaj u nastavku razmatramo. Za početak dajemo pregled eksponencijalne funkcije matrice e^{At}. Eksponencijalna funkcija matrice je definirana s

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^kt^k}{k!}.$$

Budući da prethodni red potencija konvergira za svaki t, možemo izraz diferencirati član po član. Tada slijedi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}e^{At} &= A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^kt^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots \\
&= A\left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots\right] = Ae^{At} \\
&= \left[I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \ldots + \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots\right]A = e^{At}A.
\end{aligned}$$

Eksponencijalna funkcija matrice također zadovoljava svojstvo

$$e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}.$$

Iz toga slijedi da je inverz od e^{At} dan s e^{-At}. Sad možemo krenuti s problematikom diskretizacije kontinuiranog sustava.

3.1 Model problema digitalnog upravljanja

Pretpostavimo da je jednadžba stanja sustava opisana sljedećim izrazom

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{3.1}$$

Primjetimo da smo pretpostavili da su matrice sustava konstante tijekom vremena. Ako izraz (3.4) napišemo u obliku

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t),$$

i pomnožimo obje strane izrazom e^{-At} dobivamo

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = \frac{d}{dt}[e^{At}x(t)] = e^{-At}Bu(t).$$

Integriranjem prethodnog izraza u granicama od 0 do perioda t slijedi

$$e^{-At}x(t) = e^0x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

odnosno

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Ovime je dano analitičko rješenje kontinuiranog modela.
Sada želimo diskretizirati prethodni izraz. Pretpostavimo da je upravljanje $u(t)$ konstanta između svaka dva uzastopna diskretna koraka tj.

$$u(t) = u(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T.$$

Također, neka je

$$
\begin{aligned}
x(k) &= x(kT) \\
&= e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \\
x(k+1) &= e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= e^{AT}\left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Izraz u zagradi u prethodnoj jednadžbi predstavlja $x(k)$, a drugi pribrojnik pojednostavljujemo zamjenom $v = (k+1)T - \tau$. Konačno dobivamo

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \left(\int_0^{T} e^{Av}dv\right)Bu(k) && (3.2) \\
&= e^{AT}x(k) + A^{-1}\left(e^{AT} - I\right)Bu(k). && (3.3)
\end{aligned}
$$

Upravo je izrazom (3.2) dano rješenje diskretiziranog problema koje možemo zapisati na način

$$x_{k+1} = A^s x_k + B^s u_k,$$

gdje su matrice sustava dane s

$$
\begin{aligned}
A^s &= e^{AT}, \\
B^s &= \int_0^{T} e^{Av}Bdv.
\end{aligned}
$$

Ponovimo još jednom: proces diskretizacije kontinuiranog sustava pretpostavlja da se upravljanje $u(t)$ za kontinuirani sustav mijenja tek u trenutcima kT, a između tih trenutaka je konstanta. Ovo svojstvo možemo ostvariti budući da mi određujemo vrijednosti varijable upravljanja. Ako na taj način izvedemo u_k iz u(t), dobivamo da je kontinuirano stanje sustava povezano s diskretnim sustavom izrazom $x(kT) = x_k$. Kako bi ostvarili takvo željeno ponašanje sustava, potrebno je samo izračunati optimalno upravljanje u_k^* izvedenog diskretnog sustava. Tada se upravljanje za kontinuirani slučaj izvodi iz optimalnog upravljanja u_k^* diskretiziranog sustava. Izrazom (3.2) nije određeno ponašenje sustava između vremeskih trenutaka kT, no može se vrlo lako odrediti pomoću same dinamike sustava uz konstantno upravljanje:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_k, \quad kT \leq t < (k+1)T. \tag{3.4}$$

Rješenje prethodne diferencijalne jednadžbe dano je s

$$x(k+1) = e^{AT}x(k) + \left(\int_0^T e^{Av} dv \right) Bu(k).$$

3.2 Simulacije digitalnog upravljanja

Jednom kad izračunamo optimalno upravljanje u_k^* za diskretan slučaj, voljeli bi simulirati primjenu takvog rješenja za sustav (3.4) kako bi provjerili da pokazuje zadovoljavajuće ponašanje. Također, kako bi simulacija bila potpuna promatrat ćemo i stanja između vremenskih trenutaka kao i stanja u diskretnim vremenima. Promotrimo primjer strujnog kruga iz uvoda:
Pretpostavimo da je $\tau = 5$ te uzmimo da je period kada stanje sustava mijenja svoje vrijednosti $T = 0.5$ sec. Diskretizirani sustav problema (3.4) dan je s

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{-\frac{T}{\tau}} x_k + u_k \int_0^T e^{-\frac{\lambda}{\tau}} \frac{1}{\tau} d\lambda && (3.5) \\ &= e^{-\frac{T}{\tau}} x_k + (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) u_k. && (3.6) \end{aligned}$$

Prethodni izraz možemo zapisati kao

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k.$$

Uvrštavajući vrijednosti za T i τ dobijemo da je $a = 0.9048$ i $b = 0.0952$. Za vremenski period promatranog problema uzmimo $5sec$ odnosno $N = 10$. Funkcija cilja je dana s

$$J = \frac{1}{2} s_N x_N^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (ax_k^2 + ru_k^2).$$

U prethodnim poglavljima smo pokazali da je optimalno upravljanje dano Riccatijevom jednadžbom te da vrijedi

$$\begin{aligned} K_k &= \frac{abs_{k+1}}{b^2 s_{k+1} + r}, && (3.7) \\ s_k &= \frac{a^2 r s_{k+1}}{b^2 s_{k+1} + r} + q, && (3.8) \\ u_k &= K_k s_k. && (3.9) \end{aligned}$$

Simulacija u slučaju proizvoljnog završnog stanja

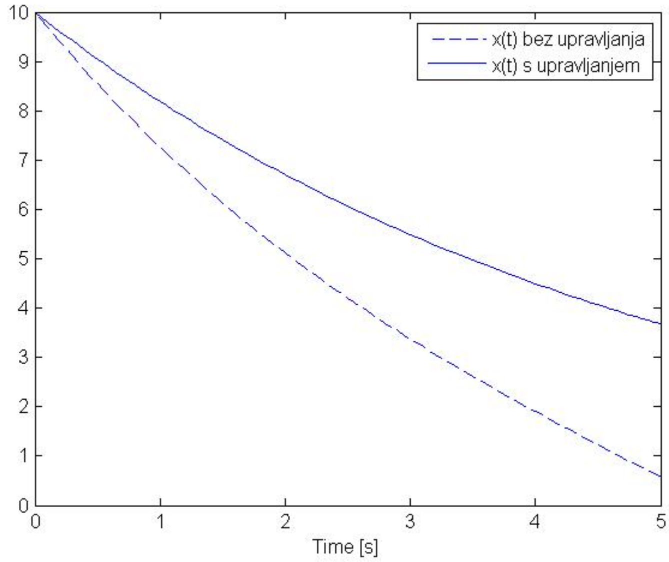
Zadnje tri jednadžbe izračunat ćemo preko funkcije *scaopt.m*. Nakon toga slijedi implementacija digitalnog upravljanja uz parametre $a_c = -0.2, b_c = 0.2, a_d = 0.9048, b_d = 0.0952, r = q = 1, s = 100, N = 10, x_0 = 10$. Kod kao i rezultate simulacije prikazujemo u nastavku.

Kod u Matlabu:

```
function [x, u, K, S]=scaopt (a, b, q, r, s, x0, N)
% Program za izračun i simulaciju optimalnog upravljanja
% (Iteracija unazad)
S(N+1) =s;
for k=N:{1:1
K(k)=(a*b*s)/(r+s*b^2);
s=q+(r*s*a^2)/(r+s*b^2);
S(k)=s;
end
% Primjeni optimalno upravljanje da dobijemo vrijednosti stanja
x(1)=x0;
for k=1:N
% Izračun optimlanog upravljanja
u(k)={K(k)*x(k);
%Stanje sustava
x(k+1)=a*x(k)+b*u(k);
end


function free(a_c, b_c, a_d, b_d, q, r, s, x0, N)
% Izračun opitmalnog uravljanja
[x, u, K, S] =scaopt(a_d, b_d, q, r, s, x0, N);
% Definiramo vremenski interval T
T=0:0.05:5;
%Izračun upravljanja na cijelom intervalu T
U=kron(u, ones(1, 10));
U=[U u(length(u))];
% Simulacija dinamike sustava
system=ss(a_c,b_c,1,0);
figure(1)
[Y,T,X]=lsim(system, U, T, x0); plot(T,Y); hold;
```

```
%Simulacija dinamike sustava kad je upravljanje=0
[Y,T,X]=lsim(system, [0 kron(u, zeros(1, 10))], T, x0); plot(T,Y);
legend('x(t) bez upravljanja','x(t) s upravljanjem');
xlabel('Vrijeme');
% Crtanje u(t)
figure(2)
T=0:0.05:5;
plot(T, U); legend('Upravljanje'); xlabel('Vrijeme');
end
```

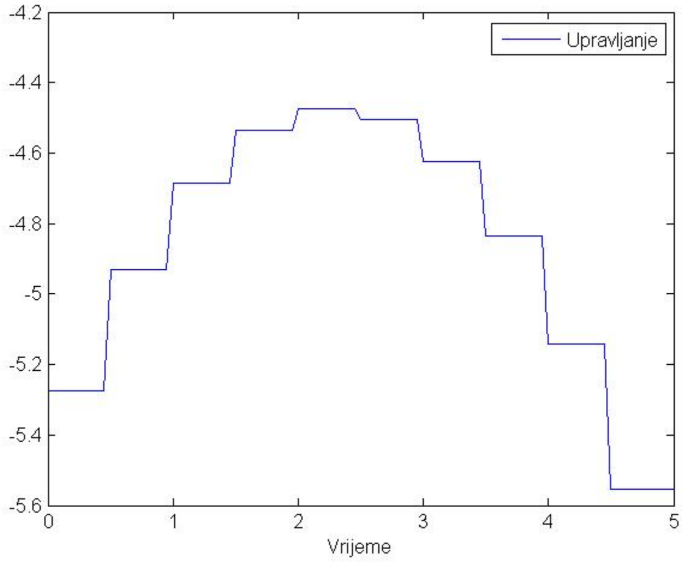


Slika 3.1: Simulacija dinamike kontinuiranog sustava uspoređujući stanje sustava s i bez upravljanja u slučaju proizvoljnog završnog stanja

Simulacija u slučaju fiksnog završnog stanja

Pretpostavimo da želimo da sustav u trenutku $t = 5$ završi u stanju 20 odnosno da je $r_N = 20$. Implementacija za ovaj slučaj je gotovo jednaka kao i u prethodnom primjeru osim što ne koristimo funkciju *scaopt.m* za izračun optimalnog upravljanja. Uzimajući za funkciju cilja

$$J_0 = \frac{r}{2} \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$



Slika 3.2: Varijabla upravljanja u_k

te koristeći jednadžbu (2.21) za izračun optimalnog upravljanja dobivamo da je

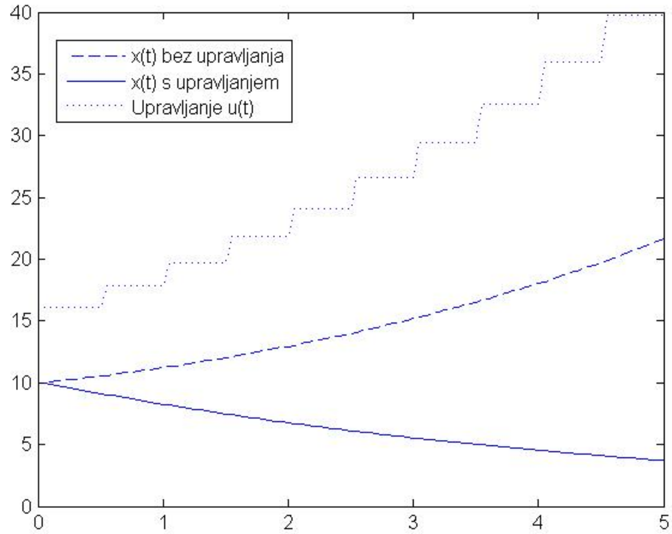
$$u_k^* = \frac{(1-a)^2}{b(1-a^{2N})}(r_N - a^N x_0)a^{N-k-1}.$$

Postupak izračuna optimalnog upravljanja i stanja sustava za ovaj slučaj se jednostavno može implementirati.

Kod u Matlabu:

```
function ex2_3_1d (a_c, b_c, a_d, b_d, q, r, s, rN, x0, N)
% Izračun optimalnog upravljanja
for k=1:N
u(k)=((1{a_d^2)/(b_d*(1{a_d^(2*N))))*(rN{x0*a_d^N)*a_d^(N{k-1);
end
% Definiramo vremenski interval T
T=0.05:0.05:5;
% Proširujemo vrijednosti varijable upravljanja na interval T
U=kron(u,ones(1,10));
% Simulacija stanja sustava
lsim(a_c, b_c, 1, 0, U, T, x0); hold
```

```
%Simulacija stanja sustava ako je u=0
lsim (a_c, b_c, 1, 0, kron (u, zeros (1, 10)), T, x0);
% Crtamo - u(t)
plot (T, U);
legend('x(t) bez upravljanja','x(t) s upravljanjem','Upravljanje u')
end
```



Slika 3.3: Simulacija dinamike kontinuiranog sustava uspoređujući stanje sustava s

Iako je optimalna kontrola u slučaju fiksnog završnog stanja lakša za implementaciju, ona nije toliko robusna kao što je optimalna kontrola s povratnom vezom.

Bibliografija

[1] Lewis, F.L. and Vrabie, D. and Syrmos, V.L. *Optimal Control* 2012: Wiley

[2] Bertsekas, D.P. *Dynamic Programming and Optimal Control5* 2012: Athena Scientific

[3] Ogata, K. *Discrete-time Control Systems* 1995:Prentice Hall

[4] Wälde, K. *Applied Intertemporal Optimization: Textbook and Solutions Manual* 2012:Know Thyself, Acad. Publ.

[5] Paulo Brito *Introduction to Dynamic Programming Applied to Economics* 2008: Universidade Técnica de Lisbo.

[6] Maurice de Gosson *Introduction to symplectic mechanics: Lectures i-ii-iii* 2006: University of São Paulo

Sažetak

Optimalno upravljanje se odnosi na upravljanje sustavom na način da je željeni optimalni kriteriji zadovoljen. Dinamika sustava je opisana jednadžbama stanja. Takve jednadžbe su zadane prirodom samog sustava. Problem upravljanja također uključuje i funkciju cilja koja ovisi o stanju sustava i varijabli upravljanja. Funkcija cilja može biti proizvoljno odabrana u ovisnosti o tome kakvo ponašanje sustava želimo. Budući da je izbor funkcije cilja naš odabir, pripadni problem optimizacije može biti promatran kao problem maksimizacije ili minimizacije. U ovom radu ćemo prezentirati način rješavanja problema optimizacije funkcije cilja koja opisuje sustav s vremenski promjenjivom dinamikom u diskretnim trenutcima.

U prvom poglavlju dajemo način rješavanja problema optimalnog upravljanja za općeniti nelinearni sustav. Za rješavanje ovog problema koristimo princip Lagrange-ovih multiplikatora. Uvjeti koje dobijemo pomoću takvog pristupa definiraju rubni problem, budući da su rubni uvjeti za pronalazak rješenja početno stanje sustava i završno adjungirano stanje. Ovakvi problem su općenito teško rješivi. Kako bi razvili osjećaj za teoriju koju smo razvili u ovom poglavlju razmotrili smo par primjera.

Eksplicitan izraz za optimalno upravljanje je jako teško naći te zbog toga u drugom poglavlju razmatramo poseban slučaj linearnih sustava s kvadratičnom funkcijom cilja. Analizirajući problem, zaključili smo da se profinjena rješenja mogu naći u dva slučaja: fiksirano konačno stanje i proizvoljno konačno stanje sustava što vodi problemu optimalnog upravljanja s povratnom vezom. U slučaju kad imamo fiksirano konačno stanje sustava, optimalno upravljanje možemo dobiti znajući samo početno i željeno završeno stanje sustava. Optimalno upravljanje je u tom slučaju nezavisno od varijable stanja u međukoracima unutar promatranog intervala. U problemu optimalnog upravljanja s povratnom vezom ne stavljamo nikakve restrikcije na vrijednosti konačnog stanja pa je i rješenje pronalaska optimalnog upravljanja znatno drugačije od prethodnog slučaja. Optimalno upravljanje u određenom trenutku je izraženo preko vrijednosti stanja sustava u tom trenutku.

Ubrzano razvijanje digitalne tehnologije neprestano mijenja granice i mogućnosti mo-

deliranja sustava za upravljanje. Upravljanje takvih sustava se zasniva na diskretizaciji kontinuiranog sustava.Problematika digitalnog upravljanja kontinuiranim sustavom i simulacije nad njima je obrađena u posljednjem poglavlju.

U praksi je uobičajeno modelirati sustav s početnim funkcijom cilja te za izračunato optimalno upravljanje pokrenuti simulacije na danom sustavu. Ako se sustav ne ponaša u željenom smjeru proces ponavljamo mijenjajući funkciju cilja. Kad nađemo prihvatljivo rješenje, tu konačnu verziju optimalnog upravljanja primijenimo na sustav.

Summary

Optimal control deals with the problem of finding a control law for a given system such that a certain optimality criterion is achieved. Dynamics of the system is represented by state equations. These constraint relations are fixed by the physics of the problem. A control problem also includes a performance index that is a function of state and control variables. The performance index is what we choose to achieve the desired system response. To achieve different control objectives, different types of performance indices are selected so the optimization problem can be either a minimization or a maximization problem. In this paper we are focused on optimization of a performance index associated with a system developing dynamically through time more precisely we are interested in finding optimal control for discrete time systems.

In the first chapter we solve the optimal control problem for the general nonlinear system. To determine the optimal control sequence minimizing/maximizing J, we use powerful Lagrange-multiplier approach. Conditions derived from applying Lagrange-multiplies define two-point boundary-value problem, since the boundary conditions required for solution are the initial state and the final costate. These problems are, in general, extremely difficult to solve. To develop some feel for the theory derived in the chapter, we considered some examples.

Explicit expressions for the optimal control are difficult to deduce so in the second chapter we consider the extremely important special case of linear systems with quadratic performance indices. Analysing the problem, we find that very refined solutions can be given in two instances: the fixed-final-state situation, which leads to an open-loop control strategy, and the free-final-state situation, which leads to a closed-loop strategy. Open-loop control can be precomputed knowing only the given initial state and the desired final state, and it is independent of intermediate values of the state within the desired interval. In free-final-state problem we make no restriction on the value of the final state and it results in a radically different sort of control. The optimal control is a time-varying state feedback which means the current required control is expressed in terms of the current state.

With the increasing sophistication of microprocessors, more and more control schemes are being implemented digitally. Such controls must be designed using a discretized version of the continuous plant. The design of digital control of continuous systems and simulations are presented in the last chapter.

In practice, it is usually necessary to do a control design with a trial performance index, compute the optimal control, and then run a computer simulation to see how the system responds to this optimal control. If the response is not acceptable, the entire process is repeated using another performance index with different state and control weightings. After several repetitions have been done to find an acceptable optimal control, this final version is applied to the actual system.

Životopis

Moje ime je Paula Butigan i rođena sam 23.studenog 1992. godine u Dubrovniku. Nakon završetka osnovne škole, upisala sam jezičnu gimnaziju u Metkoviću. U srednjoj školi sam bila odličan učenik te sam redovito pohađala županijska natjecanja iz povijesti, biologije i kemije. Međutim unatoč iskazanom zanimanju za biologiju ipak se odlučujem za upis Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, preddiplomski sveučilišni studij Matematike. Diplomski studij Financijske i poslovne matematike u Zagrebu upisujem 2014./2015. godine te ga završavam kao odličan student. Od početka zadnjeg semestra na fakultetu radim u Odjelu za upravljanje rizicima u banci u kojem ću ostati i nakon završetka fakulteta kao pripravnik.