

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ines Markulin

ANALIZA KORELACIJA U RELATIVISTIČKOM  
MODELU SREDNJEG POLJA

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI SMJER FIZIKE

**Ines Markulin**

Diplomski rad

**Analiza korelacija u relativističkom  
modelu srednjeg polja**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Tomislav Marketin

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2017.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Marketinu na pruženoj prilici i uloženom znanju, strpljenju i podršci u izradi ovoga rada.

Zahvaljujem izv. prof. dr. sc. Tamari Nikšić na ukazanoj pomoći oko izrade grafičkog prikaza rezultata.

Zahvaljujem se i svim profesorima i asistentima koji su sudjelovali u ovom djelu moje životne pustolovine prepune iznenađenja, preokreta i novih spoznaja.

Posebno se zahvaljujem svojim roditeljima na ukazanom razumijevanju, strpljenju, te moralnoj i financijskoj potpori tijekom čitavog mog školovanja.

## Sažetak

Teorijska predviđanja nepreciznosti rezultata dobivenih nekim modelom postaju značajna u procjeni njihove valjanosti u slučaju nedostatka eksperimentalnih podataka kojim bi se provjerila uspješnost modela. No, često su te procjene nepreciznosti velike i potrebno ih je smanjiti poboljšanjem modela korelacijskom analizom. Zato se u ovom radu fokusiramo na teoriju funkcionala gustoće i standardni postupak za određivanje parametra modela pomoću  $\chi^2$ -minimizacije. Ona se temelji na odabiru skupa precizno izmjerenih opservabli osnovnog stanja, te određivanju razlika između tih opservabli i vrijednosti za koje model predviđa minimizaciju. Dijagonalizacijom matrice drugih derivacija dobivamo korelacijske koeficijente koji nam pružaju mnoštvo informacija o korištenim parametrima i opservablama koje drugim pristupima nisu dostupne. Također, pronalaze opservable koje mogu pomoći u smanjivanju predviđenih nepreciznosti rezultata.

# Correlation analysis in a relativistic mean-field model

## Abstract

Theoretical uncertainties in the predictions of some models become necessary due to the lack of experimental data which are needed to verify the performance of the model. However, these theoretical errors are often large, so we have to reduce them using correlation analysis to improve the model. Therefore, in this paper we focus on the density functional theory and standard procedure for determining the parameters of the model using the  $\chi^2$ -minimization. It is based on the selection of a set of precisely measured observables in ground state, and determining the difference between these observables and the values for which the model predicts minimization. Diagonalization of the matrix of second derivatives gain correlation coefficients that are providing us with a wealth of information on the parameters and observables that other approaches don't have. Also, theoretical estimate uncertainties become significant in assessing the validity of the results obtained from the model.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorijski formalizam</b>	<b>3</b>
2.1	Relativistička teorija srednjeg polja . . . . .	3
2.2	Gustoća lagranžijana i jednađba polja . . . . .	4
2.3	Stacionarne jednađbe gibanja . . . . .	8
2.4	Parametrizacija snage mezon-nukleon vezanja . . . . .	9
2.5	Relativistički Hartree-Bogoljubov model . . . . .	10
2.6	Optimizacija i analiza kovarijance . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Rezultati</b>	<b>17</b>
3.1	Minimizacija funkcije $\chi^2$ . . . . .	17
3.2	Usporedba matrica drugih derivacija . . . . .	19
3.3	Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori . . . . .	21
3.4	Osjetljivost svojstvenih vrijednosti na zamijenu matričnih elemenata . . . . .	28
3.5	Korelacije među parametrima . . . . .	29
3.6	Korelacije među opservablama . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>35</b>
	<b>Literatura</b>	<b>38</b>

# 1 Uvod

Cilj nuklearne fizike niskih energija je razumijevanje atomske jezgre i njenih reakcija. Snažan razvoj eksperimentalnih pristupa i izgradnja naprednih postrojenja je rezultirala bogatstvom podataka iz egzotičnih područja karte nuklida. Dostupnost novih podataka predstavlja dvostruki izazov za teorijske modele: nužno je objasniti postojeća mjerenja, a istovremeno postoji potreba za kvantitativnim opisom jezgara na samoj granici vezanja koje su bitne u astrofizičkim scenarijima. Stoga se javlja velika potreba za novim mikroskopskim modelima izgrađenim na konzistentnom teorijskom okviru koji bi se mogli nositi sa spomenutima izazovima nuklearne fizike. Teorija funkcionala gustoće (DFT) je jedini mikroskopski pristup primjenjiv na čitavu nuklearnu kartu. Glavna komponenta DFT-a je energijski funkcional gustoće (EDF) koji u funkcional izgrađen iz nukleonskih gustoća i struja uključuje kompleksne korelacije više tijela. Trenutno postoje tri glavne verzije nuklearnog DFT; Skyrme interakcija, Gogny interakcija i relativistički modeli srednjeg polja. Spomenuti Skyrme je nerelativistička vrsta funkcionala, gdje nukleoni međudjeluju pomoću efektivnih potencijala ovisnih o gustoći. S druge strane, kod relativističkog modela srednjeg polja (RMF) nukleoni međudjeluju razmjenom različitih mezona. Prednost teorije DFT-a je njena mogućnost prijelaza sa komplicirane valne funkcije više tijela na mnogo jednostavniju gustoću jednog tijela. Pokazalo se da se gustoća jednog tijela može dobiti iz varijacijskog problema koji se ograničava na rješenja skupa jednadžbi srednjeg polja poznatih kao Kohn-Sham. [1] Oblik Kohn-Sham potencijala slični osnovnom NN potencijalu. Međutim, konstante koje parametriziraju spomenuti potencijal su prilagođene u skladu sa opservablama više tijela (kao što su masa i radijus naboja), što znači da nema prilagodbe na podatke za dva tijela. Na taj način se komplicirana dinamika iz efekata izmjena i korelacija zapisuje u empirijske konstante. [2]

U prošlosti se korelacijska analiza pogrešaka zanemarivala prilikom optimizacije nuklearnih DFT modela. Tada bi se parametri podešavali na neki skup opservabli bez potvrde da je takav skup opservabli optimalan za taj model. Našao bi se njihov minimum i izračunale vrijednosti traženih opservabli zajedno sa velikim procjenama nepreciznosti tih vrijednosti. Međutim, sada kada se od teorijskih modela zahtjeva da daju rezultate sa što manjim procjenama nepreciznosti, korelacijska analiza postaje važan korak za kvalitetno određivanje pogrešaka modela. Više nije dovoljno gledati

sam minimum, već okolinu oko minimuma u parametarskom prostoru kako bi se dobilo više informacija o modelu. Na taj način modeli će se moći primjenjivati na jezgre za koje nemamo podatke i dobit ćemo povratnu informaciju jesmo li odabrali dobar skup opservabli na koje podešavamo parametre.

U ovom radu provedena je korelacijska analiza u relativističkom modelu srednjeg polja koja započinje opisanom optimizacijom parametara modela postupkom minimizacije kaznene funkcije. Za minimizaciju uzeto je ponašanje funkcije  $\chi^2$  oko minimuma. Pomaci oko minimuma, kao u svakom problemu malih oscilacija, opisani su pomoću simetrične matrice drugih derivacija iz kojih su onda određeni korelacijski koeficijenti između opservabli. Matrice drugih derivacija izračunate su na dva načina, iz drugih derivacija kaznene funkcije  $\chi^2$  i prvih derivacija opservabli po parametrima kako bi se iz njihove relativne razlike vidio utjecaj aproksimacije korištene u određivanju druge matrice. Zatim se dijagonalizira matrica drugih derivacija i iz nje se dobiju svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Pomoću njih se određuju parametri sa najvećim i najmanjim nepreciznostima u modelu gledajući koje komponente svojstvenih vektora dominiraju za pojedinu svojstvenu vrijednost. Zatim se dijagonalizira bezdimenzionalna matrica derivacija  $\chi^2$  kako bi se dobila matrica kovarijanci parametara iz čijeg se grafičkog prikaza analiziraju korelacije parametara. Na kraju se računaju korelacijski koeficijenti za opservable nuklerane materije i odabrane jezgre, te promotre njihove međusobne povezanosti.

Rad je organiziran na sljedeći način: u prvom dijelu rada dani su teorijski temelji relativističke teorije srednjeg polja i raspisna je gustoća lagranžijana sa jednadžbom gibanja. Na raspisane stacionarne jednadžbe gibanja nastavlja se opis parametrizacije snage mezon-nukleon vezanja i relativistički Hartree-Bogoljubov model. Zatim slijedi objašnjenje postupka optimizacije i korelacijske analize. Drugi dio rada započinje minimizacijom kaznene funkcije nakon koje slijedi usporedba dviju matrica, njihovih svojstvenih vrijednosti i vektora, te ispitivanje osjetljivosti svojstvenih vrijednosti na promijenu matričnih elemenata. Na kraju imamo korelacijsku analiza za parametre i opservable, te zaključak.



## 2 Teorijski formalizam

### 2.1 Relativistička teorija srednjeg polja

Atomsku jezgru, koja je polazište svakog modela, definiramo kao kvantni sustav u kojem nukleone opisujemo kao Diracove čestice koje međudjeluju izmjenom virtualnih mezona i elektromagnetskih polja. Prilikom tih međudjelovanja zanemarujemo njihovu podstrukturu. Ovakav opis jezgre proizlazi iz relativističke teorije srednjeg polja (RMFT). Prvi stupanj slobode modela sadrži slobodne nukleone mase  $m$  u obliku Diracovih spinora  $\psi$ , uz koje je uključeno i elektromagnetsko polje koje omogućava kulonsko međudjelovanje pozitivno nabijenih čestica, tj. protona. Za drugi stupanj slobode, u model ulazi vektorsko polje fotona  $\gamma$  koje karakterizira  $m_\gamma = 0$  i  $J^\pi = 1^-$ . Mezoni imaju tri kvantna obilježja: spin ( $J$ ), izospin ( $T$ ) i paritet ( $\Pi$ ), te ih možemo kvalificirati kao skalarne ( $J = 0$ ) ili vektorske ( $J = 1$ ), odnosno izoskalarne ( $T = 0$ ) ili izovektorske ( $T = 1$ ) mezone. Klasifikacija se temelji na spoznaji da prilikom interakcija dominiraju mezoni s najnižim vrijednostima  $J$  i  $T$ . Budući da u prirodi nije opaženo narušavanje pariteta, zadržavaju se samo mezoni sa paritetom  $\Pi = (-1)^J$  jer su nam potrebna polja koja će sačuvati paritetnu simetriju. Opisanim modelom proučavamo parno-parne jezgare koje uvijek imaju pozitivno osnovno stanje iz čega slijedi da polje negativnog pariteta ne može doprinositi što opravdava isključivanje piona. Spomenuto polje negativnog pariteta zaslužno je za dio dugodosežne nuklearne interakcije ( $r > 2\text{fm}$ ) u mikroskopskoj slici. U tablici 2.1 zapisan je minimalni skup koji čini mezonska polja, te se radi o tzv. jednostavnom  $(\sigma, \omega, \rho, \gamma)$  modelu. [9]

mezon	$(J^\pi, T)$	polje	napomena
$\sigma$	$(0^+, 0)$	izoskalarno skalarno	srednjedosežno privlačenje
$\omega$	$(1^-, 0)$	izoskalarno vektorsko	kratkodosežno odbijanje
$\rho$	$(1^-, 1)$	izovektorsko vektorsko	izospinski dio nuklearne sile
$\delta$	$(0^+, 1)$	izovektorsko skalarno	ne poboljšava model
$\pi$	$(0^-, 1)$	izovektorsko skalarno	neodgovarajući paritet

Tablica 2.1: Potencijalni kandidati za mezonske stupnjeve slobode.

Metodu za rješavanje nuklearnog problema više tijela koja je ekvivalentna RMFT nalazimo u kovarijantnoj teoriji funkcionala gustoće (DFT) kod koje se zanemaruju potencijali korelacije lokalne izmjene. Za određivanje egzaktnog osnovnog stanja nuklearnog sustava koristi se Kohn-Shamov pristup minimizacije funkcionala ener-

gije. Funkcional energije opisuje dinamiku nuklearnog sustava, a izvodi se iz efektivnog lagranžijana. Teorija je fenomenološka što znači da se u sklopu lagranžijana pojavljuju efektivni parametri (mase mezona i konstante njihovih vezanja na nukleone) koji se prilagođavaju tako da reproduciraju globalna svojstva nuklearne materije te nekoliko konačnih jezgara u njihovom osnovnom stanju. Jednom kada se slobodni parametri pravilno prilagode, model se na kvantitativnoj razini može koristiti i za različite tipove pobuđenja. [9] Modeli temeljeni na RMFT postižu pouzdanost koja je usporediva s nerativističkim Hartree-Fock-Bogoljubovim okvirom koji se temelji na efektivnim interakcijama Skyrme i Gogny. Jezgra se opisuje pomoću polja slobodnih nukleona, mezona i fotona te interakcije u obliku vezanja mezona na nukleone, a fotona na protone.

## 2.2 Gustoća lagranžijana i jednadžba polja

U relativističkim modelima započinje se gustoćom lagranžijana umjesto ekvivalentnog funkcionala energije. Prednost lagranžijana je i primjena različitih aproksimacija, pa se tako aproksimacija srednjeg polja koristi za primjenu lagranžijana na nuklearnu materiju i konačne jezgre. Ovakvim pristupom vlastite energije nukleona u nuklearnoj materiji postaju jednostavne funkcije različitih gustoća nukleona.

Izraz za gustoće lagranžijana je

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi} \Gamma_\mu i D^\mu \psi + \overline{(i D^\mu \psi)} \Gamma_\mu \psi \right] - \bar{\psi} \Gamma M^* \psi + \mathcal{L}_m \quad (2.1)$$

sa nuklearnim polje  $\psi$ , kovarijantnom derivacijom

$$i D_\mu = i \partial_\mu - \Gamma_\omega \omega_\mu - \Gamma_\rho \vec{\tau} \cdot \rho_\mu - \Gamma_\gamma \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu \quad (2.2)$$

i operatorom mase

$$M^* = m - \Gamma_\sigma \sigma - \Gamma_\delta \vec{\tau} \cdot \vec{\delta} \quad (2.3)$$

Polja mezona su zapisana kao  $\sigma$ ,  $\omega_\mu$ ,  $\vec{\delta}$  i  $\vec{\rho}_\mu$ , a polje fotona kao  $A_\mu$ . Kod mezona uključene su sve četiri kombinacije skalar-vektor i izoskalar-izovektor. Snaga vezanja mezona i fotona s pojedinim nukleonima zapisuje se preko konstanti vezanja  $\Gamma_\sigma$ ,

$\Gamma_\omega$ ,  $\Gamma_\delta$ ,  $\Gamma_\rho$  i  $\Gamma_\gamma$ , a vektor  $\vec{\tau}$  koji se uz njih pojavljuje definira se matricom izospina. Doprinos slobodnih mezona gustoći lagranžijana odgovara izrazu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m = \frac{1}{2} & \left[ \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2 + \partial^\mu \vec{\delta} \cdot \partial_\mu \vec{\delta} - m_\delta^2 \vec{\delta} \cdot \delta - \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - \frac{1}{2} \vec{H}^{\mu\nu} \cdot \vec{H}_{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\mu \cdot \vec{\rho}_\mu \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

sa masama mezona  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$ ,  $m_\delta$  i  $m_\rho$  i tenzorskim poljem fotona

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.5)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad (2.6)$$

i

$$\vec{H}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu \quad (2.7)$$

U standarnim relativističkim modelima veličine  $\Gamma_\mu$  i  $\Gamma$  iz (2.1) su Diracova  $\gamma_\mu$  i jedinična matrica. U ovom pristupu one su dane kao

$$\Gamma_\mu = \gamma^\nu g_{\mu\nu} + \gamma^\nu Y_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} Z^\nu \quad (2.8)$$

$$\Gamma = 1 + \gamma_\mu u_\nu Y^{\mu\nu} - u_\mu Z^\mu \quad (2.9)$$

zajedno sa veličinama koje ovise o izoskalarnim poljima  $\sigma$  i  $\omega$  mezona

$$Y^{\mu\nu} = \frac{\Gamma_V}{m^4} m_\omega^2 \omega^\mu \omega^\nu \quad (2.10)$$

$$Z^\mu = \frac{\Gamma_S}{m^2} \omega^\mu \sigma \quad (2.11)$$

Lorentzova struktura zahtjeva posebnu ovisnost o polju mezona kako bi mogla generirati linearnu ovisnost energije o skalarnim i vektorskim vlastitim energijama. Za  $Y^{\mu\nu}$  i  $Z^\mu$  izabran je kvadratični oblik o mezonskim poljima kako bi ovisnost gustoće o ovisnosti energije bila slična za obje vlastite energije. Veličine  $\Gamma_V$  i  $\Gamma_S$  predstavljaju dva dodatna vezanja  $D^3C$  modela koja mogu ovisiti o nukleonskom polju kao što i veličine  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_\omega$ ,  $\Gamma_\delta$ ,  $\Gamma_\rho$  ovise o minimalnom vezanju nukleonskog polja sa mezonskim poljem. U jednadžbama (2.8) i (2.9) imamo metrični tenzor  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  i četverovektor brzine  $u_\mu = j_\mu / \rho_v$  ovisne o vektorskoj

gustoći struje  $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  sa vektorskom gustoćom  $\varrho_v = \sqrt{j_\mu j^\mu}$ . Kao što u standardnim relativističkim modelima postoji vezanje ovisno o gustoći, tako i ovdje pretpostavljamo da  $\Gamma_\sigma, \Gamma_\omega, \Gamma_\delta, \Gamma_\rho, \Gamma_V$  i  $\Gamma_S$  ovise o vektorskoj gustoći  $\varrho_v$ . Diracova jednažba, tj. Kohn-Sham jednažba, za nukleone u  $D^3C$  modelu

$$\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) \psi - (m - \Sigma) \psi = 0 \quad (2.12)$$

ima standardni oblik relativističkih modela sa vektorskom  $\Sigma_\mu$  i skalararnom  $\Sigma$  vlastitom energijom

$$\Sigma_\mu = \nu_\mu - Y_{\mu\nu} (iD^\nu - M^* u^\nu) + \Sigma_\mu^R \quad (2.13)$$

$$\Sigma = s - Z^\mu (iD_\mu - M * u_\mu) \quad (2.14)$$

gdje su

$$\nu_\mu = \Gamma_\omega \omega_\mu + \Gamma_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_\mu + \Gamma_\gamma \frac{1 + \tau_3}{2} A_\mu - \frac{i}{2} \partial^\lambda Y_{\mu\lambda} \quad (2.15)$$

$$s = \Gamma_\sigma \sigma + \Gamma_\delta \vec{\tau} \cdot \vec{\delta} - \frac{1}{2} \partial^\mu Z_\mu \quad (2.16)$$

Vlastita energija u  $D^3C$  modelu je diferencijalni operator koji djeluje na polje nukleona  $\psi$ . Ovisnost o impulsu ulazi preko doprinosa proporcionalnih sa  $iD_\mu - M^* u_\mu$ . Vremenska komponenta oponaša kinetičku energiju  $E - m$  kada se primjeni na ravni val u odsutnosti polja mezona. Doprinos preuređivanja također je sadržan u vektorskoj vlastitoj energiji kao

$$\begin{aligned} \Sigma_\lambda^R = u_\lambda \left[ \Gamma'_\omega \omega_\mu \cdot \vec{J}^\mu - \Gamma'_\sigma \sigma P_s - \Gamma'_\delta \vec{\delta} \cdot \vec{P}_s - (t_{\nu\mu}^D - u_\nu j_\mu^{M*}) \frac{\Gamma'_V}{\Gamma_V} Y^{\mu\nu} + (j_\mu^D - u_\mu \varrho_s^{M*}) \frac{\Gamma'_S}{\Gamma_S} Z^\mu \right] \\ + (j_\mu^{M*} Y^{\mu\nu} - \varrho_s^{M*} Z^\nu) \frac{g_{\nu\mu} - u_\nu u_\mu}{\varrho_v} \end{aligned} \quad (2.17)$$

sa derivacijama  $\Gamma'_i = d\Gamma_i/d\varrho_v$  ( $i = \sigma, \omega, \delta, \rho, V, S$ ) i gustoćama koje zamjenjuju uobičajene vektorske i skalarne gustoće.

$$\begin{aligned} J_\mu = \bar{\psi} \Gamma_\mu \psi \quad \vec{J}_\mu = \bar{\psi} \Gamma_\mu \vec{\tau} \psi \\ P_s = \bar{\psi} \Gamma \psi \quad \vec{P}_s = \bar{\psi} \Gamma \vec{\tau} \psi \end{aligned} \quad (2.18)$$

Dodatno, u doprinosu preuređenja (2.18) se pojavljuju sljedeće gustoće

$$t_{\mu\nu}^D = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi} \gamma_\mu i D_\nu \psi + \overline{(i D_\nu \psi)} \gamma_\mu \psi \right] \quad (2.19)$$

$$j_\mu^D = \frac{1}{2} \left[ \bar{\psi} i D_\mu \psi + \overline{(i D_\mu \psi)} \psi \right] \quad (2.20)$$

te

$$j_\mu^{M^*} = \bar{\psi} \gamma_\mu M^* \psi \quad (2.21)$$

$$\varrho_s^{M^*} = \bar{\psi} M^* \psi \quad (2.22)$$

što ovaj model čini nijansu kompliciranijim od standardnog modela ovisnosti gustoće ( $DD$ ) jer dovodi do pojavljivanja članova sa  $Y_{\mu\nu}$  i  $Z_\mu$ . Iz Diracove jednačbe (2.12) izvedene su jednačbe kontinuiteta za koje vrijedi

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \quad (2.23)$$

$$\partial^\mu \vec{J}_\mu = 0 \quad . \quad (2.24)$$

Sukladno tome, veličine  $J_0$  i  $\vec{J}_0$  su očuvane izoskalarne i izovektorske barionske gustoće kao zamjena za veličine  $j_0 = \varrho_v$  i  $\vec{j}_0 = \bar{\psi} \gamma_0 \vec{\tau} \psi$  koje se pojavljuju u standardnim RMF modelima. Jednačbe polja mezona u  $D^3C$  modelu odgovaraju izrazima

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \tilde{C}_\mu \omega^\mu = \Gamma_\sigma P_s \quad (2.25)$$

$$\partial^\nu G_{\nu\mu} + m_\omega^2 \omega^\nu C_{\mu\nu} - \tilde{C}_\mu \sigma = \Gamma_\omega J_\mu \quad . \quad (2.26)$$

i

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\delta} + m_\delta^2 \vec{\delta} = \Gamma_\delta \vec{P}_s \quad (2.27)$$

$$\partial^\mu H_{\nu\mu} + m_\rho^2 \vec{\varrho}_\mu = \Gamma_\mu \vec{J}_\mu \quad . \quad (2.28)$$

sa

$$C_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{\Gamma_V}{m^4} (t_{\mu\nu}^D + t_{\nu\mu}^D - u_\nu j_\mu^{M^*} - u_\mu j_\nu^{M^*}) \quad (2.29)$$

$$\tilde{C}_\mu = \frac{\Gamma_S}{m^2} (j_\mu^D - u_\mu \varrho_S^{M^*}) . \quad (2.30)$$

Članovi iz kojih proizlaze mezonska polja u Klein-Gordonovoj jednađbi, rezultat su jednostavnog množenja funkcija vezanja ovisnih o gustoći  $\Gamma_\sigma$ ,  $\Gamma_\omega$ ,  $\Gamma_\delta$ ,  $\Gamma_\rho$  sa gustoćama iz jednađbi (2.18). U slučaju  $\Gamma_S \neq 0$  postoji vezanje jednađbi za polja  $\sigma$  i  $\omega$ . Samo u jednađbama za polje  $\omega$  pojavljuje se član  $\Gamma_V$  kao posljedica postojanja člana  $C_{\mu\nu}$ .  
Jednađba polja fotona

$$\partial^\nu F_{\nu\mu} = \Gamma_\gamma J_{\gamma\mu} \quad (2.31)$$

ima uobičajeni oblik sa očuvanom gustoćom struje naboja  $J_{\gamma\mu} = \left[ J_\mu + \left( \vec{J}_\mu \right)_3 \right] / 2$ .

### 2.3 Stacionarne jednađbe gibanja

Nuklearni sistemi sa određenim simetrijama, npr. stacionarni sistem u kojem su polja mezona neovisna o vremenu, imaju značajno pojednostavljene jednađbe gibanja za polja nukleona, mezona i fotona. Kod nuklearne materije i konačnih jezgri dovoljno je gledati samo vremensku komponentu za sva četiri vektora i treću komponentu vektora izospina. Očuvana gustoća bariona

$$\varrho = J_0 = j_0(1 + Y_{00}) - \varrho_s Z_0 \quad (2.32)$$

ovisi samo o uobičajenoj vektorskoj gustoći  $j_0 = \varrho_v$  i standardnoj skalarnoj gustoći  $\varrho_s$ . Generalizirana skalarna gustoća je kombinacija

$$P_s = \varrho_s(1 - Z_0) + j_0 Y_{00} \quad (2.33)$$

sa veličinama

$$Y_{00} = \frac{\Gamma_V}{m^4} m_\omega^2 \omega_0^2 \quad (2.34)$$

$$Z_0 = \frac{\Gamma_S}{m^2} \omega_0 \sigma. \quad (2.35)$$

Kod odgovarajućih jednađbi za izovektorsku gustoću vrijedi  $\vec{\varrho} = \vec{J}_0$  i  $\vec{P}_s$ . Preko Diracovih jednađbi izvede se izraz za vlastite energije

$$\Sigma_0 = V_0 - Y_{00} i \partial^0 \quad (2.36)$$

$$\Sigma = S - Z_0 i \partial^0 \quad (2.37)$$

sa

$$V_0 = \nu_0 + Y_{00} (\nu_0 + m - s) + \Sigma_0^R \quad (2.38)$$

$$S = s + Z_0 (\nu_0 + m - s) \quad (2.39)$$

gdje imamo

$$\nu_0 = \Gamma_\omega \omega_0 + \Gamma_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}_0 + \Gamma_\gamma \frac{1 + \tau_3}{2} A_0 \quad (2.40)$$

$$s = \Gamma_\sigma \sigma + \Gamma_\delta \vec{\tau} \cdot \vec{\delta} \quad (2.41)$$

sa doprinosom preuređenja kao

$$\Sigma_0^R = \left[ \Gamma'_\omega \omega_0 J^0 + \Gamma'_\rho \cdot \vec{J}^0 - \Gamma'_\sigma \sigma P_s - \Gamma'_\delta \vec{\delta} \cdot \vec{P}_s - (t_{00}^D - j_0^{M*}) \frac{\Gamma'_V}{\Gamma_V} Y_{00} + (j_0^D - \varrho_s^{M*}) \frac{\Gamma'_S}{\Gamma_S} \right] \quad (2.42)$$

Parcijalna derivacija u izrazima (2.36) i (2.37) djeluje na jednočestična stanja nuklearne materije ili konačne jezgre i daje jednočestičnu energiju  $E$ , što znači da imamo linearnu ovisnost o energiji. Potencijali  $\nu_0$ ,  $s$ ,  $V_0$  i  $S$ , te vlastite energije  $\Sigma_0$  i  $\Sigma$  se razlikuju za protone i neutrone.

## 2.4 Parametrizacija snage mezon-nukleon vezanja

Ovisnost funkcije vezanja o gustoći dana je izrazom

$$\Gamma_i(\varrho_\nu) = \Gamma_i(\varrho_{ref}) f_i(x) \quad (2.43)$$

sa konstantom vezanja  $\Gamma_i(\varrho_{ref})$  za referentnu gustoću  $\varrho_{ref}$  i odgovarajuću funkciju  $f_i$  koja ovisi o omjeru

$$x = \frac{\varrho_\nu}{\varrho_{ref}} \quad (2.44)$$

sa vektorskom gustoćom  $\varrho_\nu$  koja u  $D^3C$  modelu nije identična barionskoj gustoći  $\varrho$ . U  $DD$  modelu referentna gustoća je samo gustoća saturacije simetrične nuklearne materije  $\varrho_{sat}$ , dok u  $D^3C$  se ona razlikuje od saturacijske gustoće  $\varrho_{sat}$  ali odgovara vektorskoj gustoći  $\varrho_\nu$  dobivenoj iz saturacije simetrične nuklearne materije. Ovisnost

gustoće o  $\sigma$  i  $\omega$  mezonima dana je izrazom

$$f_i(x) = a_i \frac{1 + b_i(x + d_i)^2}{1 + c_i(x + d_i)^2} \quad (2.45)$$

sa konstantama  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  i  $d_i$ . Kako bi se smanjio broj slobodnih parametara zahtjevamo da funkcije  $f_\sigma$  i  $f_\omega$  poštuju nekoliko uvjeta,  $f_\sigma(1) = f_\omega(1) = 1$ ,  $f'_\sigma(0) = f'_\omega(0) = 0$ , i  $f''_\sigma(1) = f''_\omega(1)$ . Za zapis funkcije za  $\rho$  mezone iskoristimo izraz sa

$$f_\rho(x) = \exp[-a_\rho(x - 1)] \quad (2.46)$$

uz pretpostavku da je  $a_\rho$  slobodan parametar. U  $D^3C$  modelu veličine  $Y_{00}$  i  $Z_0$  su odgovorne za energetska ovisnost vlastite energije. Pretpostavimo da konstante vezanja  $\Gamma_V$  i  $\Gamma_S$ , za obje veličine  $Y_{00}$  i  $Z_0$ , pokazuju aproksimativnu ovisnost o  $\varrho^2$  za male gustoće  $\varrho$ . To nas upućuje na uvođenje zakona snage

$$f_i(x) = x^{-a_i} \quad (2.47)$$

u funkcijalnom obliku koji može proizvoljno prilagoditi ovisnost gustoće o energijskoj ovisnosti. [11]

## 2.5 Relativistički Hartree-Bogoljubov model

Hartree-Fock-Bogoljubova (HFB) teorija daje jedinstven opis ph- i pp-korelacija u jezgri i, formulacijom samosuglasne HFB jednadžbe u koordinatnom prostoru, omogućava utjecaj efekata kontinuuma na jezgru u prisustvu vezanja. U okviru HFB-a uzimaju se u obzir dva prosječna potencijala: samopostojuće Hartree-Fock polje  $\Gamma$  koje obuhvaća sve ph korelacije i polje vezanja  $\hat{\Delta}$  koje sumira efekte pp-interakcija. Osnovno stanje jezgre opisuje generalizirana Slaterova determinanta  $|\Phi\rangle$  koja prema jednadžbi  $\hat{\alpha}_k |\Phi\rangle = 0$  predstavlja vakuum s obzirom na neovisne kvazičestice. Kvazičestični operatori se izražavaju jedinstvenom Bogoljubovom transformacijom jednočestičnih operatora stvaranja i poništenja:

$$\alpha_k^\dagger = \sum_l U_{lk} c_l^\dagger + V_{lk} c_l, \quad (2.48)$$



gdje su  $U_{lk}$  i  $V_{lk}$  jedno-kvazičestične valne funkcije koje zadovoljavaju HFB jednadžbe. Indeks  $l$  odnosi se na proizvoljnu bazu, npr. za stanja harmoničkog oscilatora. U koordinatnom prostoru imamo reprezentaciju  $l = (r, \sigma, \tau)$ , sa indeksom spina  $\sigma$  i izospina  $\tau$ . HFB valna funkcija određuje hermitsku jednočestičnu matricu gustoće kao

$$\hat{\rho}_{ll'} = \langle \Phi | c_l^\dagger c_{l'} | \Phi \rangle = (V^* V^T)_{ll'} \quad (2.49)$$

i asimetrični tenzor vezanja

$$\hat{\rho}_{ll'} = \langle \Phi | c_{l'} c_l | \Phi \rangle = (V^* U^T)_{ll'} \quad (2.50)$$

U DFT pristupu vezanje funkcionala energije ne ovisi samo o matrici gustoće i mezonskim poljima, već i o dodatnom tenzoru vezanja koji odgovara izrazu

$$E_{RHB} [\hat{\rho}, \hat{k}, \phi] = E_{RMF} [\hat{\rho}, \phi] + E_{par} [\hat{k}] \quad (2.51)$$

$$E_{RHB} [\hat{\rho}, \hat{k}, \phi] = E_{RHB} [R, \phi] \quad (2.52)$$

gdje je  $\mathcal{R}$  generalizirana matrica gustoće. Veličina  $E_{RMF} [\hat{\rho}, \phi]$  definirana je kao u Kohn-Sham teoriji, samo što je gustoća  $\hat{\rho}$  zamjenjena s  $\mathcal{R}$ , a energija sparivanja je dana s

$$E_{par} [\hat{k}] = \frac{1}{4} Tr [\hat{k}^* V^{pp} \hat{k}] \quad (2.53)$$

Efektivna sila sparivanja  $V^{pp}$  je fenomenološka pp-interakcija u kanalu sparivanja. Najjedostavniji pristup sili sparivanja je monopolna sila što vodi na BCS teoriju koja zahtijeva dodatni parametar. U blizini doline beta stabilnosti ovakav pristup donosi dobre rezultate, ali udaljavanjem od stabilnih jezgara Fermijeva ploha se približava kontinuumu stanja i opis raspršenih parova iz vezanih stanja u kontinuumu pomoću BCS teorije više nije ispravan. Iz tog razloga se u ovom radu koristi dio Gogny interakcije koji opisuje sparivanja

$$V^{pp}(1, 2) = \sum_{i=1,2} e^{-\frac{r_1 - r_2}{\mu_i}} (W_i + B_i P^\sigma - H_i P^\tau - M_i P^\sigma P^\tau). \quad (2.54)$$

Slobodni parametri  $\mu_i$ ,  $W_i$ ,  $B_i$ ,  $H_i$  i  $M_i$  su pažljivo podešeni na karakteristike sparivanja konačnih jezgara preko cijelog periodnog sustava. Koristi se D1S parametrizacija, a vrijednosti parametara se nalaze u tablici 2.2.

$i$	$\mu_i[fm]$	$W_i$	$B_i$	$H_i$	$M_i[MeV]$
1	0.7	-1720.3	1300.0	-1813.53	1397.60
2	1.2	103.69	-163.483	162.812	-223.934

Tablica 2.2: Vrijednosti parametara D1S Gogny interakcije sparivanja.

Preko varijacijskog principa raspisuju se vremenski ovisne HB jednadžbe gibanja:

$$i\partial_t \mathcal{R} = [\mathcal{H}(\mathcal{R}) \mathcal{R}] \quad (2.55)$$

Generalizirani hamiltonijan  $\mathcal{H}$  se dobije kao derivacija funkcionala energije s obzirom na generaliziranu gustoću  $\mathcal{R}$  što se u bazi operatora  $c_l c_l^\dagger$  piše kao:

$$\mathcal{H} = \frac{\delta E_{RHB}}{\delta \mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{h}_D + m + \lambda \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Zatim se postupak varijacije ponavlja, samo s obzirom na usrednjene potencijale. Osnovno stanje  $|\Phi\rangle$  se određuje HB jednadžbama koje su statički limes vremenski ovisne jednadžbe (2.52) čime se problem svodi na dijagonalizaciju hamiltonijana:

$$\begin{pmatrix} \hat{h}_D - m - \lambda & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^+ & -\hat{h}_D + m + \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} U_k(r) \\ V_k(r) \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

Svojtvene vrijednosti  $E_k$  su kvazičestične energije, dok su svojstveni vektori  $U_k$  i  $V_k$  kvazičestične valne funkcije. Dimenzija RHB matrične jednadžbe je dvostruko veća od odgovarajuće Diracove, pa za svako svojstveno stanje pozitivne energije postoji stanje negativne energije istog iznosa. Uslijed fermionske prirode kvazičestičnih operatora – istovremeno se može popuniti samo jedno stanje, a bira se ono s  $E_k > 0$ .

## 2.6 Optimizacija i analiza kovarijance

Optimizacija započinje definiranjem kaznene funkcije, koju minimiziramo s obzirom na parametre  $p$  koji predstavljaju točke u parametarskom prostoru i zatim konstru-

iramo matricu kovarijance parametara. Parametri modela definiraju se kao  $p = (p_1, \dots, p_F)$  gdje  $F$  predstavlja ukupan broj parametara modela. Korišteni model se prilagođava na dobro definiran skup svojstava za opis osnovnog stanja konačne jezgre (kao što su mase i polumjeri raspodjele naboja) koja su nadopunjena sa nekoliko glavnih svojstava nuklearne materije (npr. energija vezanja, kompresibilnost i gustoća saturacije nuklearne materije). Jednom kada se izabere parametrizacija modela i grupa opservabli, optimalni skup parametara određuje se postupkom minimizacije kaznene funkcije  $\chi^2$ . Najčešće korištena kaznena funkcija  $\chi^2$  je objektivna funkcija koja je definirana za parametre prilagodbe kao

$$\chi^2(p) = \sum_{n=1}^N \frac{\left(O_n^{(th)}(p) - O_n^{(exp)}\right)^2}{\Delta O_n^2} \quad (2.58)$$

gdje  $O_n^{(th)}(p)$  označava teorijska predviđanja,  $O_n^{(exp)}$  eksperimentalne vrijednosti  $n$ -te opservable (od ukupno  $N$ ). Svaka opservabla je otežana sa faktorom  $(\Delta O_n)^{-1}$  povezanim sa preciznošću samog mjerenja. Međutim, često izabrani eksperimentalni podaci nisu dovoljni kako bi se parametri modela mogli značajnije ograničiti, kao što je to u slučaju kod slabo ograničenog izovektorskog dijela efektivne interakcije. Problem bi se mogao riješiti uključivanjem nuklearnih kolektivnih pobuđenja, kao što su izoskalarno-monopolne i izovektorsko-dipolne rezonancije, u proces optimizacije. U praksi, takav postupak postavlja zahtjeve izračune, te se zato zaobilazi uključivanjem pažljivo odabranog skupa “pseudopodataka” koji se odnose na beskonačnu nuklearnu materiju, te su jako ograničeni sa nuklearnim kolektivnim modovima (kompresibilnost i nagib energije simetrije). Znajući da takav skup opservabli svojstava nuklearne materije nije jednak eksperimentalnim opservablama, ključno je priključiti pseudopodacima odgovarajuće teorijske pogreške. Neke optimizacije uključuju dodatni skup svojstava osnovnog stanja za normalne i egzotične jezgre. U slučaju stabilnih jezgara ta svojstva su izmjerena sa velikom preciznošću, dok kod egzotičnih jezgara takva svojstva su izvedena iz sistematike energije vezanja i nabojnog radijusa. Takve opservable imaju velike teorijske pogreške, ali to nam nije značajno za nastavak numeričkog postupka. [2] Optimalni skup parametara  $p_0 = (p_1, \dots, p_F)$

zadovoljava uvjet:

$$\left. \frac{\partial \chi^2(p)}{\partial p_i} \right|_{p=p_0} \equiv \partial_i \chi^2(p_0) = 0 \quad (za \ i = 1, \dots, F). \quad (2.59)$$

S ciljem pojednostavljenja samog pristupa i računa primijenjujemo gaussijansku aproksimaciju, odnosno analitički pristup u kojem se u istraživanju parametarskog prostora zadržavamo u neposrednoj okolini minimuma  $\chi^2$ . Gaussijanska aproksimacija sastoji se od istraživanja malih, kvadratičnih oscilacija oko  $\chi^2$  minimuma:

$$\chi^2(p) \approx \chi^2(p_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^F (p-p_0)_i (p-p_0)_j \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial p_i \partial p_j} \right)_0. \quad (2.60)$$

Odstupanja od minimuma dobro je izraziti preko bezdimenzionalnih, skaliranih varijabli:

$$x_i \equiv \frac{(p-p_0)_i}{(p_0)_i}. \quad (2.61)$$

Gaussijanska aproksimacija (2.60) sada poprima kompaktniji oblik:

$$\chi^2(p) = \chi_0^2 + x^T \hat{\mathcal{M}} x \quad (2.62)$$

gdje je  $x$  vektor stupac dimenzije  $F$ ,  $x^T$  transponirani vektor (redak), a  $\hat{\mathcal{M}}$  Hessijan, tj. simetrična matrica drugih derivacija dimenzije  $F \times F$ . Pomoću matrice zakrivljenosti  $\hat{\mathcal{M}}_0$  određuje se ponašanje funkcije  $\chi^2$  oko minimuma, a sami matricni elementi se određuju iz druge derivacije u točki minimuma.

$$(\mathcal{M}_0)_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \quad (2.63)$$

Minimizacija objektivne funkcije je definirana preko fizikalnih opservabli kao što je prikazano u izrazu (2.57), što omogućava zapis matrice zakrivljenosti, značajne i za optimizaciju i za samu matricu zakrivljenosti, kao:

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta \mathcal{O}_n^2} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{O}_n^{(th)}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{O}_n^{(th)}}{\partial x_j} \right) + (\mathcal{O}_n^{(th)} - \mathcal{O}_n^{(exp)}) \left( \frac{\partial^2 \mathcal{O}_n^{(th)}}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] \quad (2.64)$$

Razlika između eksperimentalne vrijednosti i teorijskog predviđanja dane opservable zapisana je kao  $(\mathcal{O}_n^{(th)} - \mathcal{O}_n^{(exp)})$  i ona bi trebala biti mala uz pretpostavku da je model dovoljno bogat da može opisati niz opservabli uključenih u prilagodbi. Osim što bi razlika trebala biti mala, ima i različite predznake zbog čega će se doprinosi iz drugog člana u izrazu (2.64) međusobno poništiti te bi se matrica zakrivljenosti trebala izračunati bez računanja drugih derivacija od  $\mathcal{O}_n^{(th)}$ . U skladu sa prethodno navedenim, izraz za matricu zakrivljenosti je [12]

$$\mathcal{M}_{ij} \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{\Delta \mathcal{O}_n^2} \left( \frac{\partial \mathcal{O}_n^{(th)}}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \mathcal{O}_n^{(th)}}{\partial x_j} \right). \quad (2.65)$$

U analizi korelacija od temeljne važnosti je koncept kovarijanca između dvije opservable A i B koja se označava kao  $cov(A, B)$ . Započnimo pretpostavkom da imamo  $M$  točaka (ili modela)  $(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$  u okolici optimalnog modela  $x^{(0)} = 0$ , kovarijanca između A i B je definirana kao: [13]

$$cov(A, B) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [(A^m - \langle A \rangle) (B^m - \langle B \rangle)] = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (2.66)$$

gdje je  $A^{(m)} \equiv A(x^{(m)})$ , a “ $\langle \rangle$ ” označava statistički prosjek

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} AP(A) dA \quad (2.67)$$

Korištenjem prethodno spomenute definicije kovarijanca definiramo koeficijent korelacije (poznat i kao Pearsonov produkt-moment koeficijent korelacije):

$$\rho(A, B) = \frac{cov(A, B)}{\sigma_A \sigma_B}. \quad (2.68)$$

Dvije opservable su u potpunosti korelirane ako je  $\rho(A, B) = 1$ , u potpunosti anti-korelirane ako je  $\rho(A, B) = -1$  i nema korelacije ako je  $\rho(A, B) = 0$ . Upotrebom gaussijanske aproksimacije kovarijancu možemo izraziti na sljedeći način:

$$cov(A, B) = \sum_{i,j=1}^F \frac{\partial A}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{m=1}^M x_i^{(m)} x_j^{(m)} \right] \frac{\partial B}{\partial x_j} \equiv \sum_{i,j=1}^F \frac{\partial A}{\partial x_i} C_{ij} \frac{\partial B}{\partial x_j} \quad (2.69)$$

gdje je  $C_{ij} = \hat{\mathcal{M}}_0^{-1}$  matrica kovarijanci koja je jednaka inverzu matrice zaključivosti u minimumu. [2] Ostaje još slučaj kada je  $A = B$  tada imamo varijancu  $A$ , tj.  $cov(A, A) = var(A) = \sigma_A^2$ . Varijanca opservable  $A$  glasi [15]:

$$\sigma_A^2 = A^T \hat{\mathcal{M}}^{-1} A = \sum_{i,j=1}^F \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \right)_0 \hat{\mathcal{M}}_{ij}^{-1} \left( \frac{\partial A}{\partial x_j} \right)_0. \quad (2.70)$$

Iz varijanca neke opservable može se saznati koliko je ta opservabla raspršena oko svoje prosječne vrijednosti. Za analizu uzroka tog raspršenja potrebno je znati matricu drugih derivacija  $\hat{\mathcal{M}}$ . Budući da je spomenuta matrica simetrična, može je se prevesti u dijagonalnu formu korištenjem ortogonalne transformacije:  $\hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{D}} \hat{\mathcal{O}}^T$ . Oznaka  $\hat{\mathcal{O}}$  predstavlja ortogonalnu matricu čije stupce čine normalizirani svojstveni vektor, a  $\hat{\mathcal{D}}$  dijagonalnu matricu svojstvenih vrijednosti oblika  $\hat{\mathcal{D}} = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_F)$ . Kaznena funkcija ima minimum u  $x = 0$ , što rezultira pozitivnim svojstvenim vrijednostima koje onda zapisujemo kao:

$$\sigma_A^2 = A^T \left( \hat{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{D}}^{-1} \hat{\mathcal{O}}^T \right) A = \left( \hat{\mathcal{O}}^T A \right)^T \hat{\mathcal{D}}^{-1} \left( \hat{\mathcal{O}}^T A \right) = \sum_{i=1}^F \lambda_i^{-1} \left( \frac{\partial A}{\partial \xi} \right)_0 \quad (2.71)$$

gdje  $F$ -dimenzionalni vektor  $\xi = \hat{\mathcal{O}}^T x$  predstavlja točku u parametarskom prostoru, te se napiše u novoj, rotiranoj bazi, odnosno kao linearna kombinacija originalnih parametara modela.

### 3 Rezultati

Numerička optimizacija funkcionala u ovom radu provedena je pomoću programskog paketa MINUIT. Radi se o alatu koji pronalazi minimalnu vrijednost višeparametarske funkcije (zване FCN), te analizira oblik funkcije oko minimuma. Statističku analizu funkcije  $\chi^2$  ili logaritma funkcije vjerodostojnosti praktično je provesti korištenjem spomentuog paketa kojim ćemo izračunati vrijednosti parametara i njihove nepouzdanosti, kao i njihove korelacije. Za spomenuti izračun koriste se vrijednosti parametara koje su dobivene minimizacijom funkcije FCN, jer one predstavljaju najbolju prilagodbu tih parametara. Iako se radi o najboljim vrijednostim parametara, uz njih se javljaju određene nepouzdanosti koje su opisane širinom minimuma funkcije, odnosno informacije o nepouzdanosti najboljih vrijednosti parametara možemo iščitati iz oblika funkcije koji ona poprima u okolini minimuma. Najbolja prilagodba parametara pronađena je pomoću već postojećih minimizacijskih algoritama koji su ugrađeni u programski paket MIGRAD, najbolji minimizator za većinu funkcija. Postupak minimizacije MIGRAD-a se temelji na Davidon-Fletcher-Powell (DFP) metodi varijabilne metrike i provjeri pozitivne definitnosti. Kod DFP metode, koja je iterativni proces, se pretpostavlja da se može eksplicitno izračunati gradijent funkcije koju minimiziramo FCN obzirom na parametre prilagodbe. Stoga, ukoliko nemamo točno izračunate prve derivacije opisani postupak minimizacije propada. Nakon završene minimizacije možemo vidjeti i matricu pogrešaka koja odgovara inverzu matrice drugih derivacija funkcije FCN. Ukoliko je potrebno, spomenuta matrica se može transformirati i u vanjski koordinatni prostor. Primjenom MINUIT-a dobivamo i pogreške parametara koje su zapisani kao kvadratni korijeni na dijagonali matrice pogrešaka. [14]

#### 3.1 Minimizacija funkcije $\chi^2$

Računanje svojstava nuklearne materije i atomske jezgre zahtjeva poznavanje parametara koji ulaze u lagranžijan. Za mase nukleona,  $\omega$  i  $\rho$  mezona koristimo eksperimentalne vrijednosti  $m = 939$  MeV,  $m_\omega = 783$  MeV, i  $m_\rho = 763$  MeV. Masa  $\sigma$  mezona je uzeta kao slobodan parametar, dok je  $\delta$  mezon izostavljen u ovom radu. Svi parametri u funkcijama vezanja  $\Gamma_i$ , osim elektromagnetske konstante vezanja, zajedno sa masom  $\sigma$  mezona  $m_\sigma$  su uzeti iz prilagodbe svojstvima 11 jezgri  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{52}\text{Ca}$ ,  $^{64}\text{Ni}$ ,  $^{88}\text{Se}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{118}\text{Pd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$ ,  $^{150}\text{Ce}$  i  $^{208}\text{Pb}$  među kojima su neke magične i dvostruko

magične jezgre, blizu i daleko od doline stabilnosti. Sam proces prilagodbe nema jedinstvenu i generalno prihvaćenu strategiju. Za  $\chi^2$  prilagodbu parametara korištene su opservable zapisane u tablicama 3.1 i 3.2.

opservabla	$p_i$	$\sigma_i$
$E/A$ (MeV)	-16.06	-0.016
$\rho$ (fm <sup>-3</sup> )	0.153	0.003
$K$ (MeV)	225	11.25
$m_D/m$	0.57	0.029
$m^*/m$	0.76	0.001
$V_{cen}$	50	0.5
$a_4$ (MeV)	32	0.64

Tablica 3.1: Vrijednosti opservabli za nuklearnu materiju.

jezgra	$E_{tot}$ (MeV)	$r_c$ (fm)	$r_n - r_p$ (fm)	cijepanje n	cijepanje p
<sup>16</sup> O	-127.62	2.73	0	6.10	6.30
<sup>40</sup> Ca	-342.05	3.49	0	6.0	6.0
<sup>52</sup> Ca	-438.33	0	0	0	0
<sup>64</sup> Ni	-561.76	3.87	0	0	0
<sup>88</sup> Se	-747.56	0	0	0	0
<sup>90</sup> Zr	-783.89	4.27	0.07	0	0
<sup>118</sup> Pd	-991.82	0	0	0	0
<sup>124</sup> Sn	-1049.96	4.67	0.19	0	0
<sup>132</sup> Sn	-1102.92	0	0	1.65	1.75
<sup>150</sup> Ce	-1230.17	0	0	0	0
<sup>208</sup> Pb	-1636.45	5.51	0.19	0.9	1.33

Tablica 3.2: Vrijednosti opservabli za svaku jezgru u osnovnom stanju.

Istraživanjem korelacija između parametara modela moguće je saznati hoće li davanje dodatnih opservabli ukloniti korelacije. Standardni postupak je određivanje parametara modela uz pomoć  $\chi^2$ -minimizacije. Tradicionalno, ova procedura se svodi na odabir niza precizno izmjerenih opservabli osnovnog stanja za različite jezgre i zahtjeva da razlika među tim opservablama i predviđanjima modela bude minimizirana. Jednom kada se to napravi, uspješnost modela može biti procjenjena računanjem opservabli koje nisu uključene u prilagodbu. Međutim, često je teško odrediti nepouzdanosti predviđanja modela. Tome se može doskočiti proučavanjem malih oscilacija oko minimuma umjesto samog minimuma. Takvo proučavanje daje pristup mnoštvu informacija iz kojih možemo definirati značajne teorijske stupce pogrešaka, te istražiti korelacije između parametara modela i izračunatih opservabli.



Kao u svakom problemu malih oscilacija, derivacije od izračuna  $\chi^2$  oko vrijednosti minimuma su opisani sa simetričnom  $F \times F$  matricom, gdje  $F$  predstavlja ukupan broj parametara modela. Ortogonalnom transformacijom simetrična matrica prelazi u dijagonalnu formu. Dijagonalizacijom se dobije skup od  $F$  svojstvenih vrijednosti i  $F$  svojstvenih vektora. Proširivanjem točke u parametarskom prostoru pomoću svojstvenih vektora, vrijednosti izračuna derivacija  $\chi^2$  oko minimuma postaju sistem od  $F$  nevezanih harmoničkih oscilatora gdje svojstvene vrijednosti igraju ulogu  $F$  konstanti opruga. Konstanta opruge može biti “kruta” ili “mekana” ovisno o tome dali je zakrljivljenost oko minimuma strma ili plitka. Iz promatranja parametarskog prostora duž krutog smjera i onoga uz određenu linearnu kombinaciju parametara modela proizlazi naglo pogoršanje mjerenja  $\chi^2$  što ukazuje da je postupak prilagodbe dovoljno jasan za ograničavanje linerane kombinacije. Upravo ta određena linearna kombinacija koja definira prametre modela u mekom smjeru često daje dovoljno informacija za određivanje opservabli koje nedostaju. Također, uz ovakvu vrstu analize moguće je uspostaviti korelacije između opservabli koje su posebno osjetljive na takav mekani smjer. Ovo je važno jer se određene opservable lakše mjere od drugih. Tipičan primjer je razlika polumjera raspodjela neutrona i protona za  $^{208}\text{Pb}$  i električna dipolna polarizabilnost. [2]

### 3.2 Usporedba matrica drugih derivacija

Izračunu matrice drugih derivacija pristupili smo na dva načina, izračunom drugih derivacija kaznene funkcije  $\chi^2$  pomoću izraza (2.63) i prvih derivacija opservabli po parametrima iz (2.65). Matricu dobivenu iz  $\chi^2$  zovemo egzaktnom, dok onu dobivenu derivacijom opservabli po parametrima matricom aproksimacije. Model ima 10 parametara, od kojih 3 za konstante vezanja mezona sa nukleonima ( $\sigma, \omega, \rho$ ), 3 za opis ovisnosti konstante vezanja ( $\sigma$  i  $\omega$  mezona sa nukleonima) o gustoći,  $\Gamma_s, \Gamma_v, a_{tv}$  i masa  $\sigma$  mezona. Minimizacijom kaznene funkcije  $\chi^2$  dobivamo vrijednosti parametara za koje  $\chi^2$  ima najmanju vrijednost. Jednom kada znamo te vrijednosti, računamo druge derivacije opservabli po ukupno 10 parametara. Minimalizacijom dobijemo da je  $\chi^2 = 114.90324$ , a odgovarajuće vrijednosti parametara su prikazane u tablici 3.3.

Deriviramo 35 opservabli za 11 jezgri ( $^{16}\text{O}, ^{40}\text{Ca}, ^{52}\text{Ca}, ^{64}\text{Ni}, ^{88}\text{Se}, ^{90}\text{Zr}, ^{118}\text{Pd}, ^{124}\text{Sn}$ ,

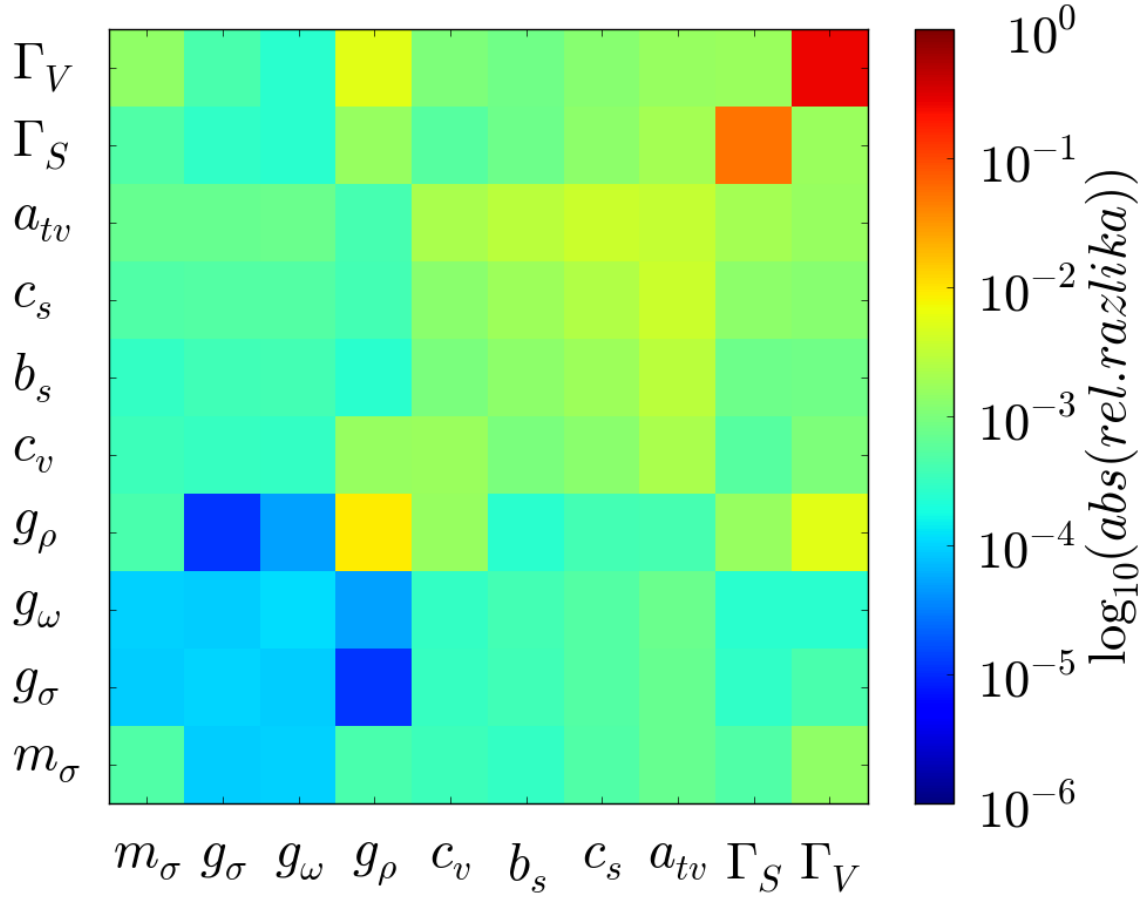
$p_i$	vrijednosti
$m_\sigma$	572.6167
$g_\sigma$	10.5465
$g_\omega$	12.8194
$g_\rho$	4.0890
$c_\nu$	1.4799
$b_s$	0.6662
$c_s$	1.2726
$a_{tv}$	0.2256
$\Gamma_s$	-99.8631
$\Gamma_\nu$	205.0776

Tablica 3.3: Vrijednosti parametara iz modela nakon minimizacije.

$^{132}\text{Sn}$ ,  $^{150}\text{Ce}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ) . Korištene opservable su energija vezanja po nukleonu  $E/A$ , gustoća saturacije nuklearne materije  $\rho$ , kompresibilnost  $K$ , Diracova  $m_D$  i efektivna masa nukleona  $m^*$ , snaga optičkog potencijala  $V_{cen}$ , energija asimetrije  $a_4$  za nuklearnu materiju, te energija vezanja  $\varepsilon_0$ , polumjer naboja jezgre  $r_c$ , spin-orbit cijepanje za neutrone i protone čije se vrijednosti razlikuju za svaku jezgru. Razlike među matricama posljedica su zanemarivanja drugog člana u izrazu za računanje matrice iz derivacija opservabli po parametrima (2.64). Pretpostavka da je model dovoljno bogat za jasan opis niza opservabli uključenih u prilagodbu, govori nam da je taj član (razlika eksperimentalnih i teorijskih vrijednosti opservabli) dovoljno malen da se izostavi (2.65). Grafički prikaz relativnih razlika jasno prikazuje povećanje razlika među matričnim elementima i područja najvećih razlika. Relativne dviju matrica izračunate su po formuli:

$$rel.razlika(x, x_{ref}) = \frac{x - x_{ref}}{x_{ref}} \quad (3.1)$$

gdje  $x$  predstavlja vrijednost koja odgovara matričnim elementima matrice aproksimacije, a  $x_{ref}$  referentnu vrijednost koja odgovara elementima egzaktne matrice. Rezultati relativne razlike dviju matrica prikazane su na slici.



Slika 3.1: Relativna razlika dviju matrica.

Sa slike 3.1 jasno vidimo da je najveća relativna razlika za matrice elemente koji su dobiveni drugom derivacijom po konstantama vezanja  $\Gamma_\nu$  i  $\Gamma_s$  koje uvode ovisnost vlastitih energija o nukleonskim jednočestičnim energijama, dok su najmanje razlike kod drugih derivacija koje uključuju kombinaciju parametara  $g_\rho$   $g_\sigma$  za određivanje dubine potencijala.

### 3.3 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori

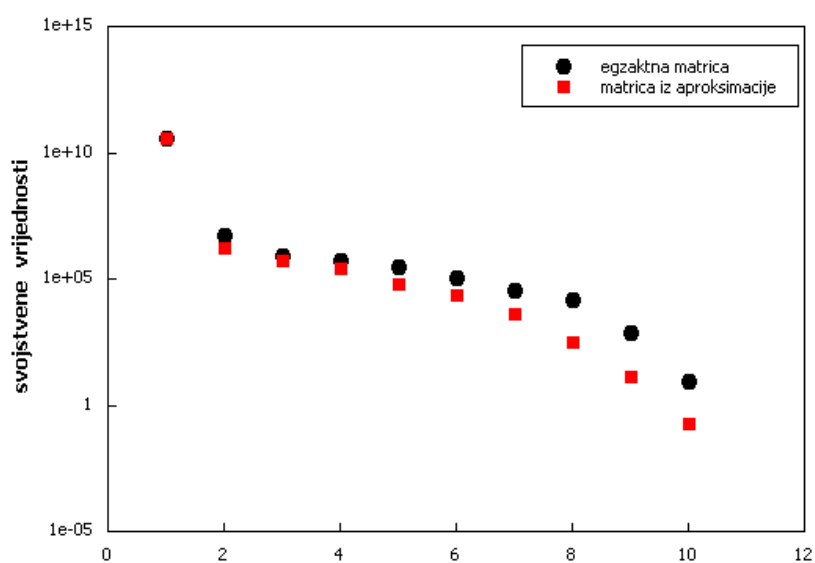
Dijagonaliziranje simetrične matrice drugih derivacija  $\hat{\mathcal{M}}$  omogućava nam promatranje ponašanja izmjerenih vrijednosti oko minimuma. Kao rezultat dobivamo dijagonalnu matricu svojstvenih vrijednosti i ortogonalnu matricu svojstvenih vektora. Svojstvene vrijednosti koje imaju velike iznose obilježavaju tvrde smjerove u parametarskom prostoru za koje je karakterističan i brz rast funkcije  $\chi^2$  duž tih smjerova. Iz toga zaključujemo da linearne kombinacije parametara koje odgovaraju tvrdim svojstvenim vektorima su čvrsto ograničene opservablama iz tablice 3.3. S druge

egzaktna matrica	aproksimativna matrica
39614000000	39608000000
5248100	1716400
795750	591240
580290	261890
308060	68335
107590	22452
34215	4216.7
15545	323.63
776.23	14.156
8.8714	0.19643

Tablica 3.4: Svojtvene vrijednosti dobivene za egzaktnu i aproksimativnu matricu.

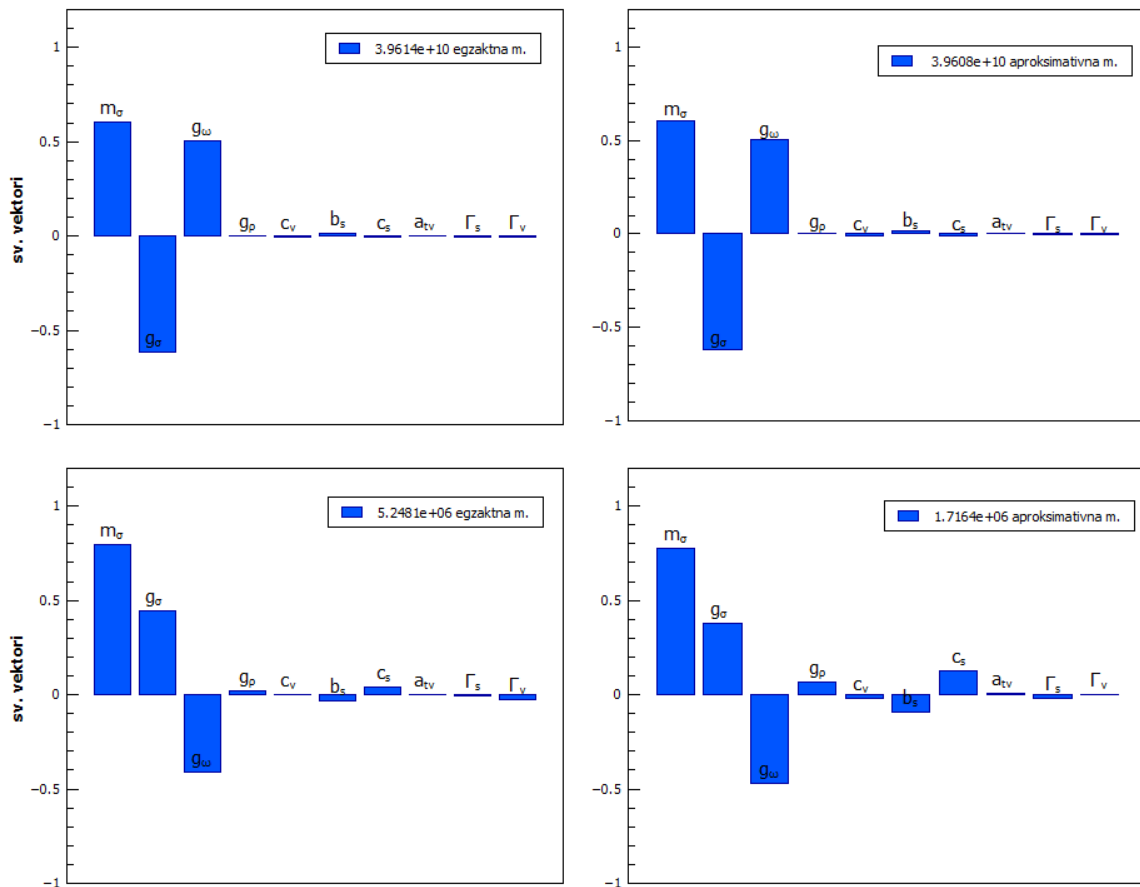
strane, mekani smjerovi u parametarskom prostoru odgovaraju malim svojstvenim vrijednostima, duž kojih mjera kvalitete  $\chi^2$  pokazuje maleno propadanje. Odgovarajuće linearne kombinacije parametara koje definiraju energijski funkcional gustoće su slabo ograničene. U tablici 3.4 zapisane su izračunate svojstvene vrijednosti za egzaktnu i aproksimativnu matricu.

Iz tablice 3.4 možemo primjetiti kako za manje svojstvene vrijednosti postoje manje razlike u njihovim vrijednostima koje su čak i istog reda veličine. Porast svojstvenih vrijednosti dovodi do porasta razlike njihovih vrijednosti za dvije matrice. Također, izračunate vrijednosti egzaktne matrice su veće od aproksimativnih čija se vrijednost brže smanjuje, što potvrđuje i slika 3.2.



Slika 3.2: Razlike svojstvenih vrijednosti između dvije matrice.

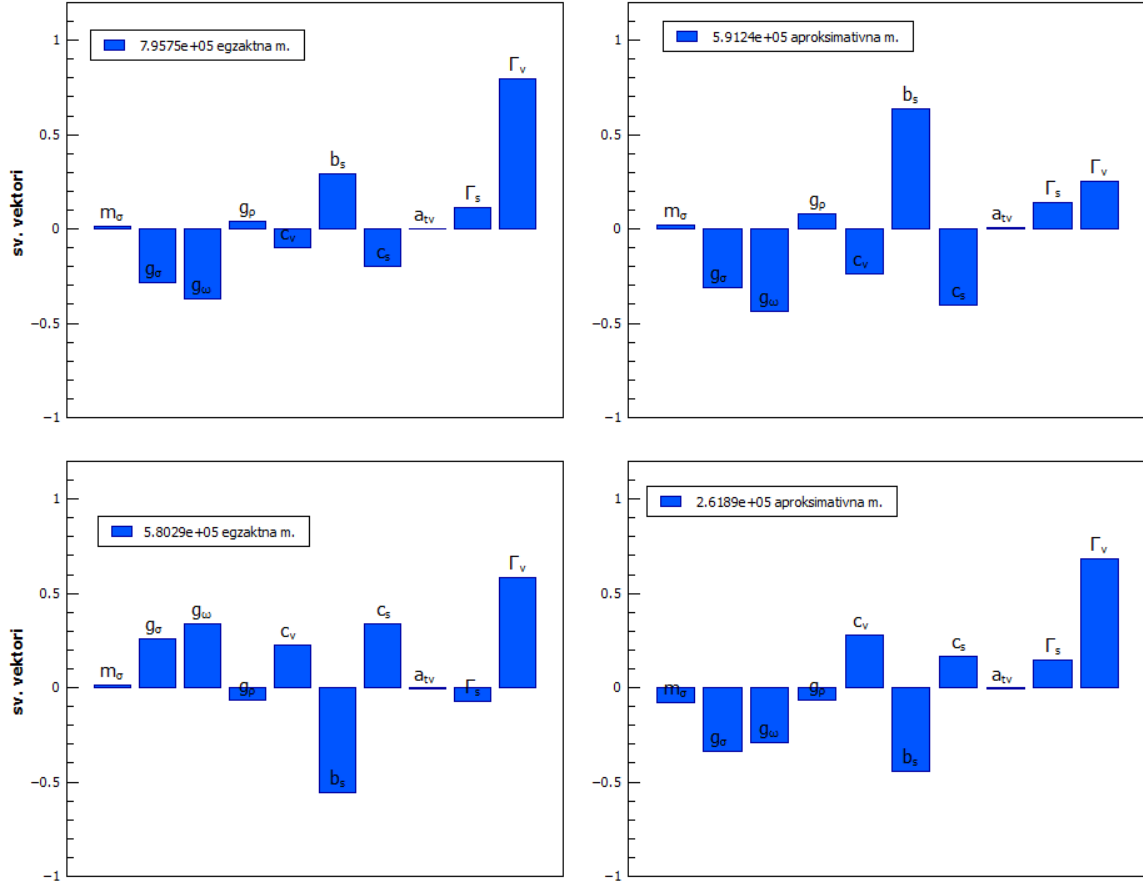
Crvenom bojom su označene svojstvene vrijednosti aproksimativne matrice, a crnom svojstvene vrijednosti egzaktne matrice. Vidimo jako dobro poklapanje za prvu, treću i četvrtu svojstvenu vrijednost dvije matrice, dok se kod ostalih pojavljuje odstupanje koje raste sa smanjenjem vrijednosti. Za svaku svojstvenu vrijednost matrica izračunali smo i odgovarajuće svojstvene vektore. Svakoj svojstvenoj vrijednosti pripada jedan svojstveni vektor koji se sastoji od 10 komponenti gdje je svaka od tih komponenti povezana sa jednim parametrom, kao što se može vidjeti iz sljedećih grafova.



Slika 3.3: Usporedba svojstvenih vektora dviju matrica, tj. dva različita pristupa.

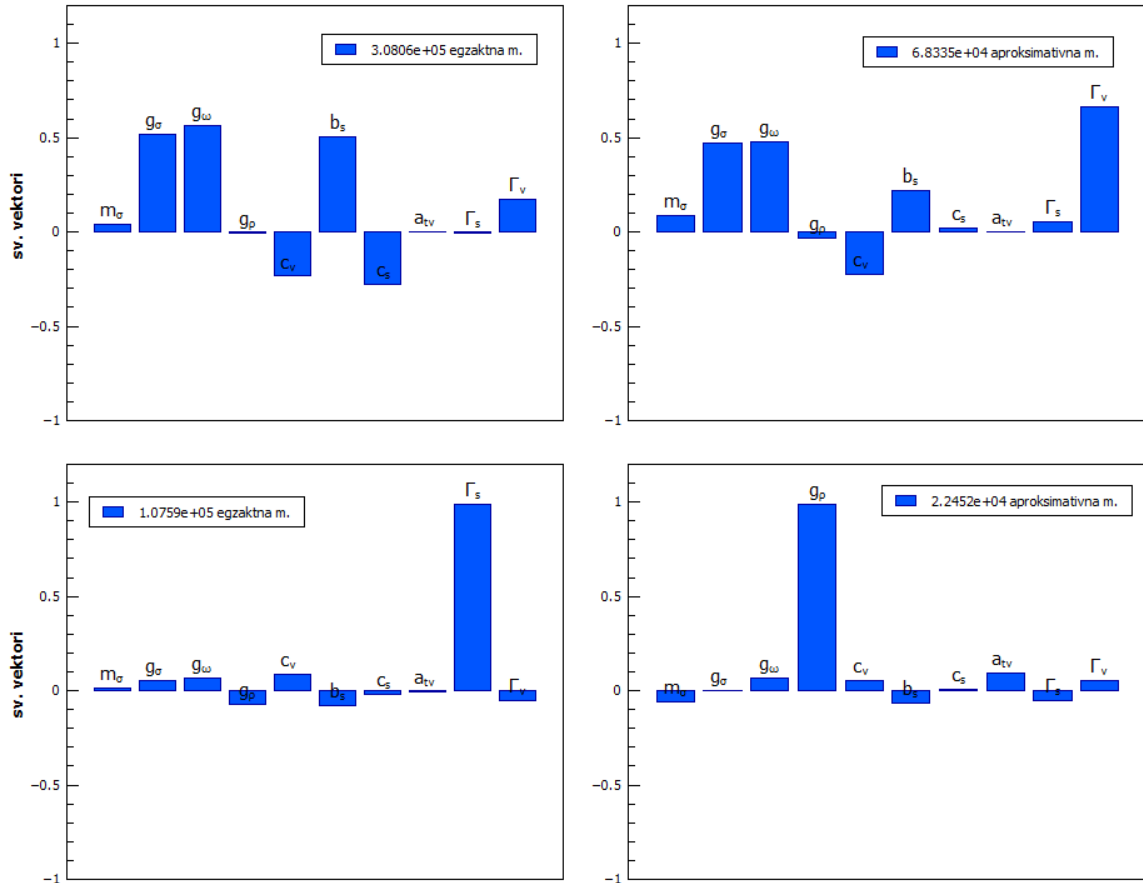
Prvim, najtvrdim modom, za koji je karakteristična najveća svojstvena vrijednost, kod egzaktne matrice dominira mješavina tri parametra, masa  $\sigma$  mezona  $m_\sigma$ , konstanta vezanja  $\sigma$  mezona sa nukleonima  $g_\sigma$  i konstanta vezanja  $\omega$  mezona sa nukleonima  $g_\omega$ , gdje su  $m_\sigma$  i  $g_\omega$  u fazi, a  $g_\sigma$  u protufazi. Usporedimo li iznesena zapažanja sa vektorima za aproksimativnu matricu, dolazimo do istog zaključka. Dominacija određenih parametara u najtvrdem modu ukazuje na to da bi se ti parametri mogli precizno izračunati. Drugi mod egzakte matrice je sličan prvom, te dominiraju isti

parametri s iznimkom da su sada parametri  $m_\sigma$  i  $g_\sigma$  u fazi, a  $g_\omega$  je u protufazi s njima. Potpuno isti slučaj imamo i kod aproksimativne matrice. Dakle, možemo primjetiti da za prve dvije najveće svojstvene vrijednosti imamo poklapanje između dvije matrice.



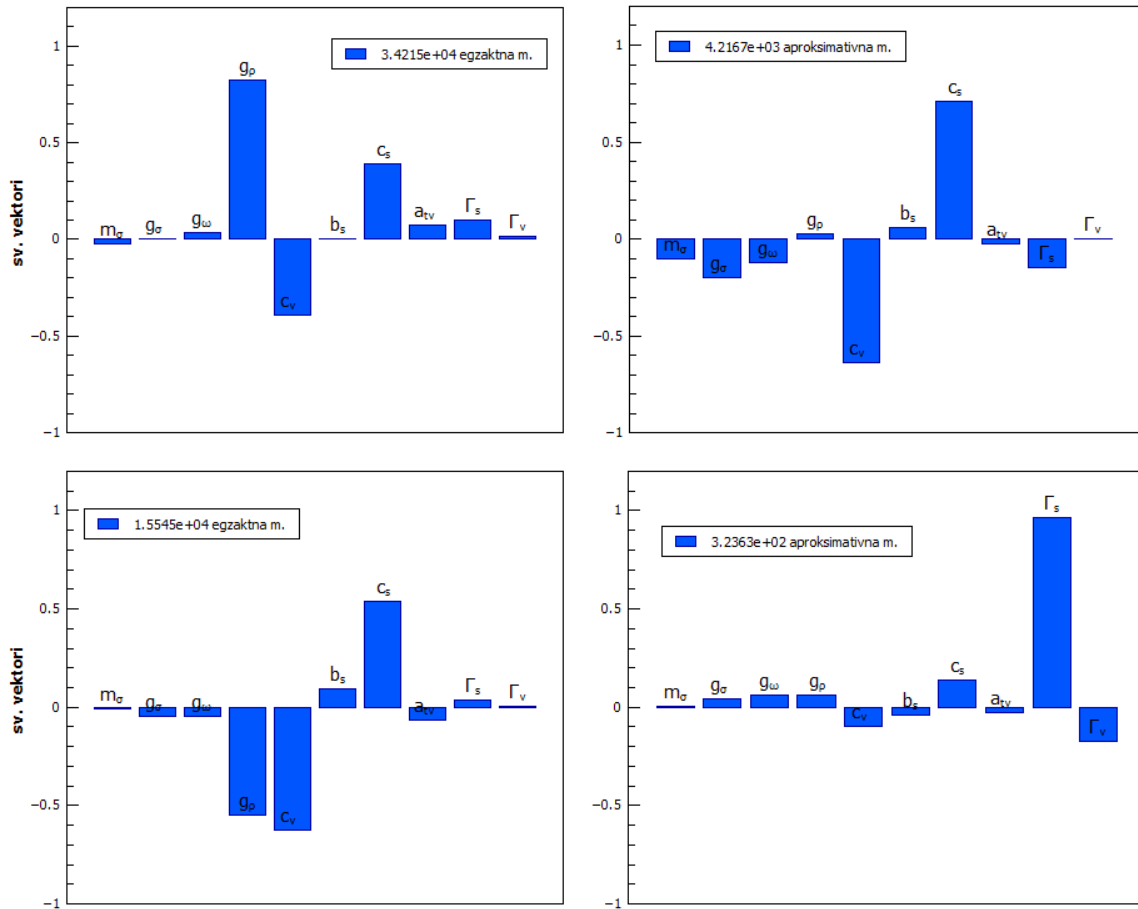
Slika 3.4: Usporedba svojstvenih vektora dviju matrica, tj. dva različita pristupa.

Kao što sa slike 3.4 možemo vidjeti, trećim modom egzaktne matrice dominira parametar  $\Gamma_v$ , što za drugu matricu nije slučaj. Kod nje je vidljiva dominacija parametra  $b_s$ , ali unatoč tome postoji poklapanje svojstvenih vektora dviju matrica. Za prva četiri parametra dobivene vrijednosti vektora su jako slične, kasnije njihove razlike postaju vidljivije pogotovo za zadnji parametar. Kod četvrtog moda se nastavlja njihova sličnost sa parametrima  $g_s$ ,  $c_v$ ,  $b_s$ ,  $c_s$ ,  $a_{tv}$  i  $\Gamma_v$ . Kod egzaktne matrice četvrti mod obilježen je parametrima  $b_s$  i  $\Gamma_v$  u protufazi.



Slika 3.5: Usporedba svojstvenih vektora dviju matrica, tj. dva različita pristupa.

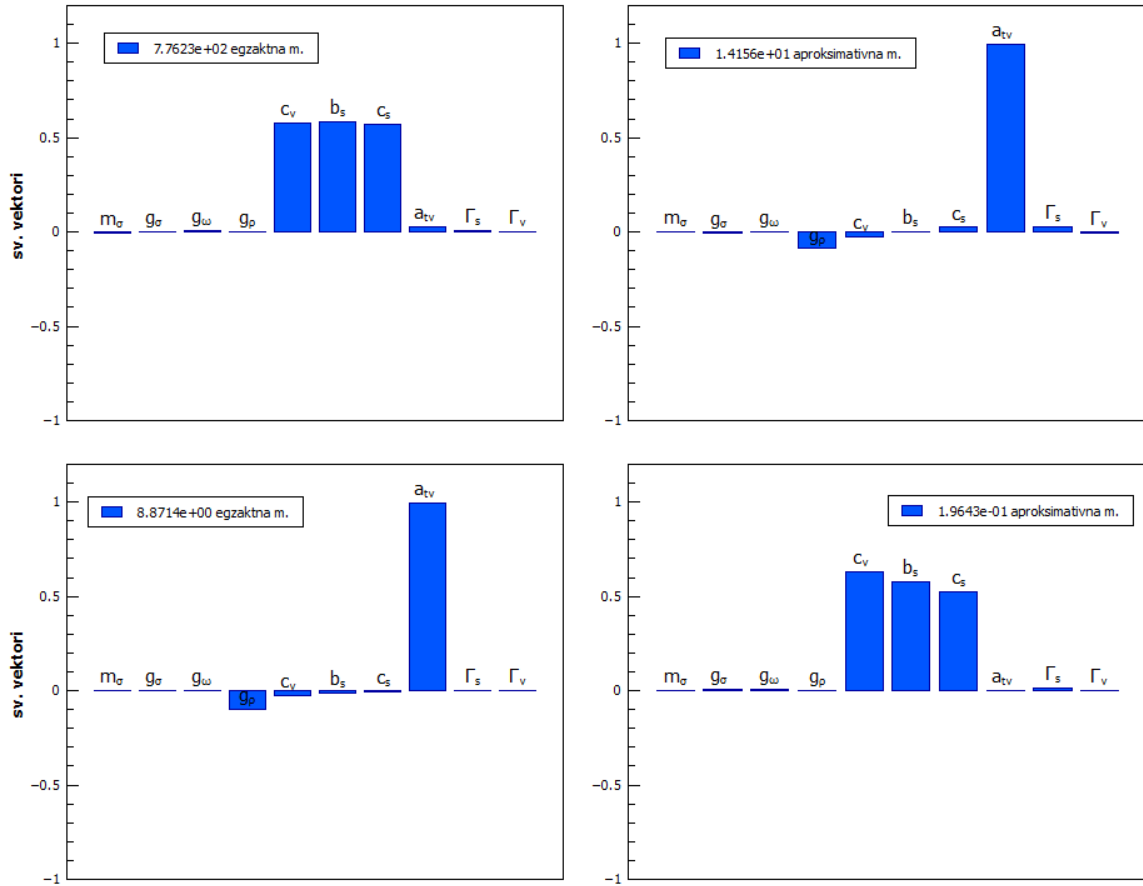
Kod egzaktne matrice peti mod je određen s parametrima  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  i  $b_s$  koji su u fazi. Aproksimativna matrica također ima tri parametra koji su u fazi,  $g_\sigma$ ,  $g_\omega$  i  $\Gamma_v$  među kojima je zadnji ipak malo dominantniji. Zatim dolazimo do šestog moda gdje, kod egzaktne matrice, izrazito dominira parametar  $\Gamma_s$ , dok kod aproksimativne imamo dominaciju parametra  $g_\rho$ . Sad se već mogu primjetiti veća odstupanja svojstvenih vektora između dvije matrice, iako se broj komponenti vektora sa najvećim vrijednostima za određeni mod još uvijek poklapa.



Slika 3.6: Usporedba svojstvenih vektora dviju matrica, tj. dva različita pristupa.

U sedmom modu egzaktne matrice imamo tri izražena parametra  $g_\rho$  i  $c_s$  koji su u protufazi s  $c_v$ , među kojima je  $g_\rho$  dominantniji. Kod aproksimativne matrice za sedmi mod pojavljuju se dva parametra u protufazi  $c_v$  i  $c_s$ . Kod osmog moda egzaktne matrice dominiraju isti parametri kao u prethodnom, ali sada su parametri  $g_\rho$  i  $c_v$  u fazi, a  $c_s$  u protufazi s njima. Potpuna suprotnost je dominacija samo jednog parametra  $\Gamma_s$  u osmom modu aproksimativne matrice koji po strukturi odgovara šestom modu egzaktne matrice. Dakle, možemo zaključiti da kod sedmog i osmog moda primjećujemo potpunu nepodudarnost svojstvenih vektora dviju matrica.





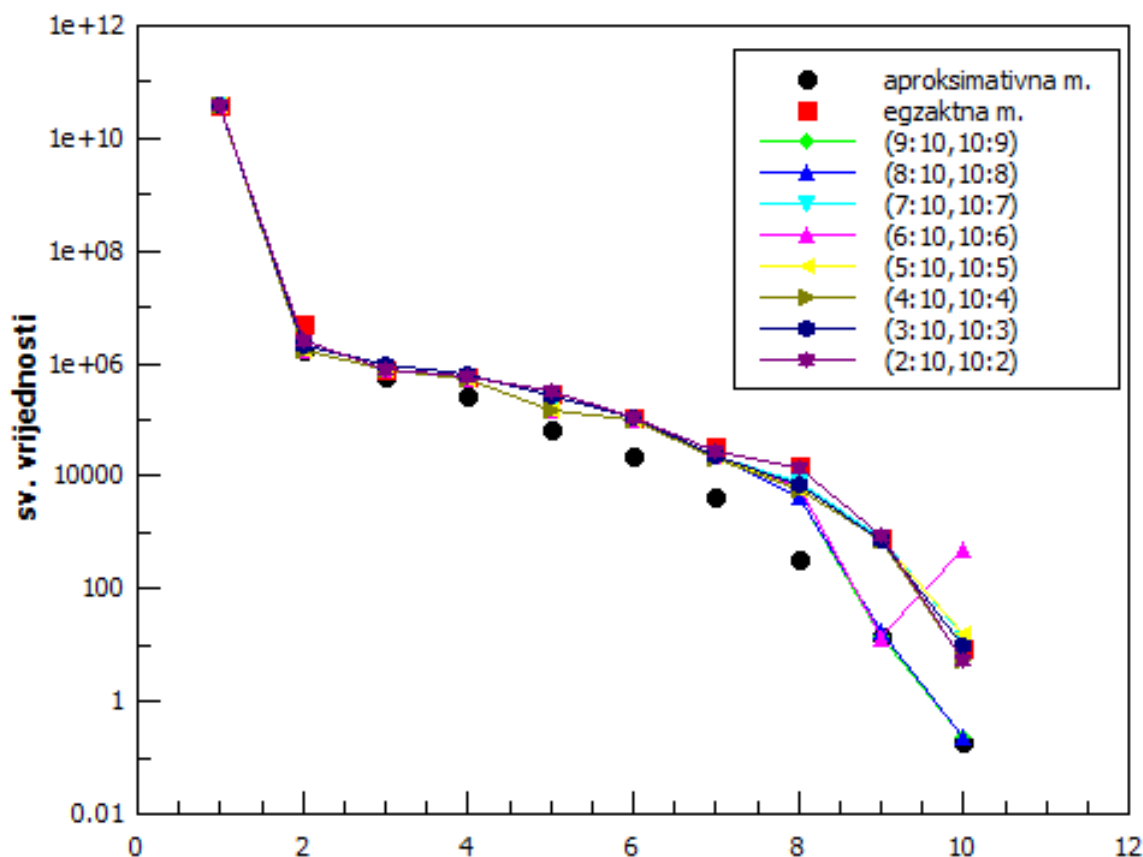
Slika 3.7: Usporedba svojstvenih vektora dviju matrica, tj. dva različita pristupa.

Posljednja dva moda pokazuju zanimljiv zaokret. Naime, deveti mod egzaktne matrice pokazuje dobro slaganje sa desetim modom aproksimativne matrice i deseti mod egzaktne matrice sa devetim modom aproksimativne. Dominacija parametara u zadnja dva moda označava parametre koje je najteže precizno odrediti. Devetim modom egzaktne (i desetim modom aproksimativne matrice) dominiraju parametri  $c_v$ ,  $b_s$  i  $c_s$  čije kombinacije određuju ovisnost o gustoći izoskalaranog dijela interakcije. Spomenuti parametri samo u ovom vektoru imaju isti predznak (svi su u fazi) iako sudjeluju i u nekim drugim dobro određenim smjerovima. Zadnjim modom egzaktne (i devetim aproksimativne) prevladava samo jedan parametar  $a_{tv}$  koji određuje ovisnost o gustoći konstante vezanja  $\rho$  mezona, izovektorskog dijela interakcije koji je teško odrediti. Također, možemo primjetiti da parametri  $c_v$ ,  $b_s$  i  $c_s$  u devetom modu egzaktne matrice imaju slične vrijednosti, dok u desetom modu aproksimativne matrice te vrijednosti se ipak malo razlikuju. Kao što je to bio slučaj sa svojstveni vrijednostima, tako i ovdje imamo poklapanje za najtvrdje modove jer ono postoji i kod svojstvenih vrijednosti, a za najmekše potpuni obrat.

### 3.4 Osjetljivost svojstvenih vrijednosti na zamijenu matičnih elemenata

Nakon usporedbe dviju matrica i njihovih svojstvenih vektora i vrijednosti, tj. dva različita pristupa računu, postavlja se pitanje koji to matični elementi najviše utječu na razliku tih vrijednosti. Kako bi ispitali osjetljivost svojstvenih vrijednosti na matične elemente, potrebna nam je bezdimenzionalna matrica prvih derivacija opservabilni po parametrima (aproksimativna matrica) i bezdimenzionalna egzaktna matrica (dobivena derivacijom  $\chi^2$  po parametrima modela). Ispitivanje osjetljivosti svojstvenih vrijednosti na pojedine elemente matrice temelji se na ideji zamjene matičnih elemenata aproksimativne matrice sa odgovarajućim elementima egzaktne matrice s ciljem smanjenja razlike svojstvenih vrijednosti dviju matrica. Budući da su najveće relativne razlike između matrica za elemente u zadnjim redcima i stupcima, upravo te elemente prve mijenjamo. Zamjenom matičnih elemenata aproksimativne matrice na pozicijama deveti redak i deseti stupac (9,10), (10,9), (10,10) i (9,9) sa odgovarajućim elementima egzaktne matrice rezultira promjenom svojstvenih vrijednosti aproksimativne matrice a time i promjenom razlike među njima. Zamjena elemenata tvori kvadrat, koji se samo širi za redak i stupac sa povećanjem promijenjenih elemenata. Na slici 3.8 jasno se vidi ponašanje svojstvenih vrijednosti nakon zamjene.

Sa slike možemo vidjeti kako zamjene određenog skupa matičnih elemenata (blokova) utječu na svojstvene vrijednosti. Crnom bojom prikazane su svojstvene vrijednosti aproksimativne matrice, a crvenom one od egzaktne matrice. Osim očitog da su vrijednosti aproksimativne matrice manje od egzaktnih, prikazano je i koliko je zamjena potrebno za pojedinu svojstvenu vrijednost da postigne onu egzaktne matrice. Kod pete i osme svojstvene vrijednosti vidimo postepeno približavanje željenoj vrijednosti, odnosno za te vrijednosti potrebno je napraviti više zamjena od ostalih. Deveta i deseta vrijednost već nakon treće zamjene (blok 7,10 i 10,7) postižu poklapanje sa ciljanim vrijednostima, iako su to vrijednosti sa najvećom razlikom. Razlike prvih pet svojstvenih vrijednosti se skoro pa i ne mijenjaju sve dok kvadrat zamjene ne proširimo do 3 retka i 10 stupca, te 10 retka i 3 stupca.



Slika 3.8: Promjene svojstvenih vrijednosti sa zamjenom matrice elemenata..

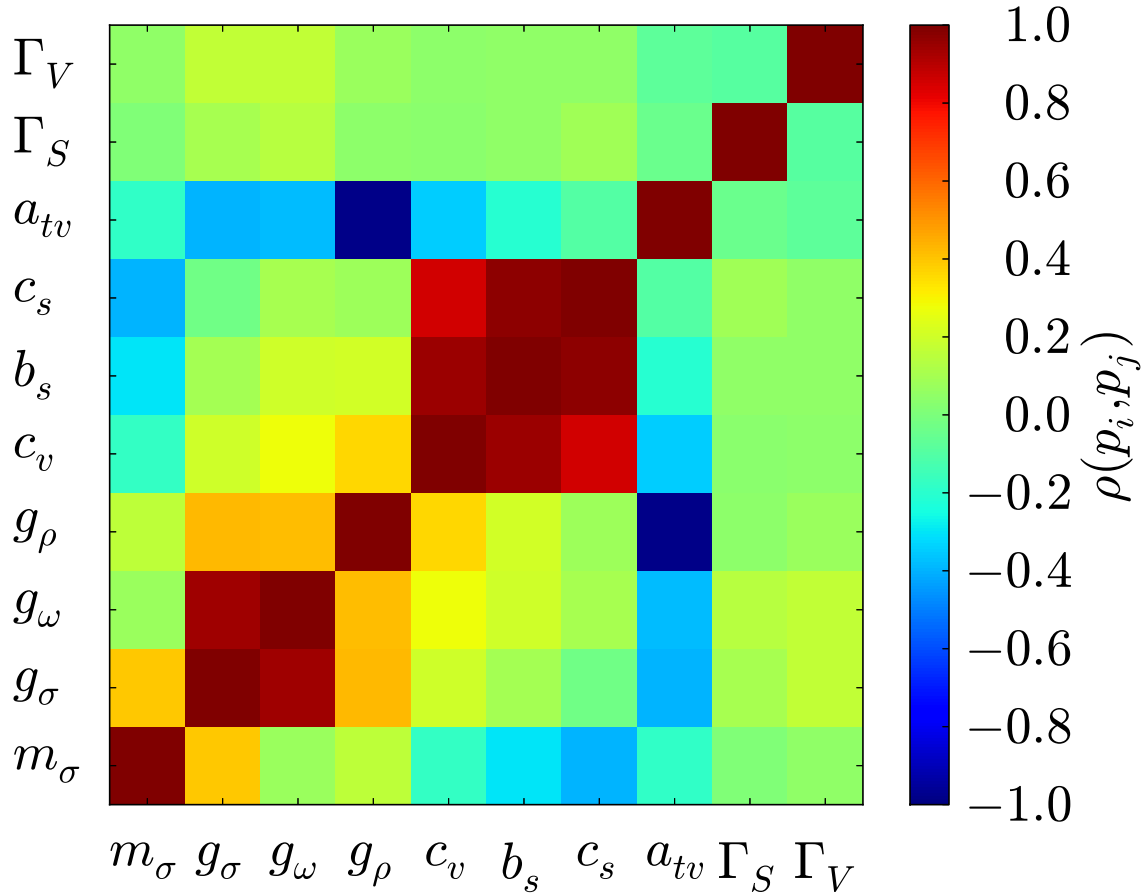
Možemo zaključiti da svojstvene vrijednosti sa najnižim rezultatima, imaju najveće razlike istih, ali i najbrže reagiraju na promijenu matrice elemenata, dok razlike ostalih vrijednosti se značajnije počinju smanjivati nakon zamjene bloka matrice elmenata (10:3, 3:10).

### 3.5 Korelacije među parametrima

U dobivenoj matrici kovarijanci parametara, dijagonalni elementi predstavljaju korelacijske koeficijente za iste parametre što odgovara prikazu jake korelacije. Nediagonalni elementi matrice prikazuju korelacijske koeficijente za različite parametre te se računaju kao

$$\rho(p_i, p_j) = \frac{\hat{\mathcal{M}}_{ij}^{-1}}{\sqrt{\hat{\mathcal{M}}_{ii}^{-1} \hat{\mathcal{M}}_{jj}^{-1}}}. \quad (3.2)$$

Upravo su ti elementi posebno zanimljivi. Na slici 3.9 prikazane su vrijednosti koeficijenta korelacije parametara modela.



Slika 3.9: Korelacije među parametrima.

Uz očekivanu korelaciju 1 na dijagonali, može se primjetiti podjela na područja sličnih vrijednosti korelacija. Uz samu dijagonalu smještene su jake korelacije između konstanti vezanja  $\omega$  i  $\sigma$  mezona sa nukleonima ( $g_\omega$ ,  $g_\sigma$ ), te značajne korelacije između parametara  $b_s$  i  $c_v$ ,  $c_v$  i  $c_s$ ,  $c_s$  i  $b_s$  tj. između parametara koji opisuju ovisnosti konstanti vezanja o gustoći. Visoka korelacija između  $\sigma$  i  $\omega$  mezona je nužna, u čije postojanje smo se uvijerili iz grafa, jer upravo oni određuju jednočestični potencijal RMF modela u kojem se gibaju nukleoni. Umjerena korelacija je prisutna između konstanti vezanja  $\rho$  i  $\sigma$  mezona ( $g_\rho$  i  $g_\sigma$ ) i konstanti vezanja  $\rho$  i  $\omega$  mezona s nukleonima ( $g_\rho$  i  $g_\omega$ ). Masa  $\sigma$  mezona i njegove konstante vezana sa nukleonima, te  $g_\rho$  i  $c_v$  također pokazuju dobre korelacije. Jaku antikorelaciju nalazimo kod parametara  $a_{tv}$  i  $g_\rho$ . Primjetimo da jedino parametri  $a_{tv}$  i  $m_\sigma$  imaju tri do četiri vrijednosti korelacijskih koeficijenta blizu  $-1$ , tj. najviše umjerenih antikorelacija s drugi parametrima, posebice sa  $g_\sigma, g_\omega$  i  $c_v$  te  $b_s$  i  $c_s$ .

### 3.6 Korelacije među opservablama

Model smo analizirali i na opservablama konačnih jezgara u osnovnom stanju. Analizu smo proveli na 11 jezgri,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{52}\text{Ca}$ ,  $^{64}\text{Ni}$ ,  $^{88}\text{Se}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{118}\text{Pd}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$ ,  $^{150}\text{Ce}$  i  $^{208}\text{Pb}$  na odabranom skupu 35 opservabli. U tablici 3.5 nalaze se opservable vezane za nuklearnu materiju korištene u analizi.

opservabla	$p_i$	$\sigma_i$
$E/A$ (MeV)	-16.06	-0.016
$\rho$ (fm $^{-3}$ )	0.153	0.003
$K$ (MeV)	225	11.25
$m_D/m$	0.57	0.029
$m^*/m$	0.76	0.001
$V_{cen}$	50	0.5
$a_4$ (MeV)	32	0.64

Tablica 3.5: Vrijednosti opservabli za nuklearnu materiju.

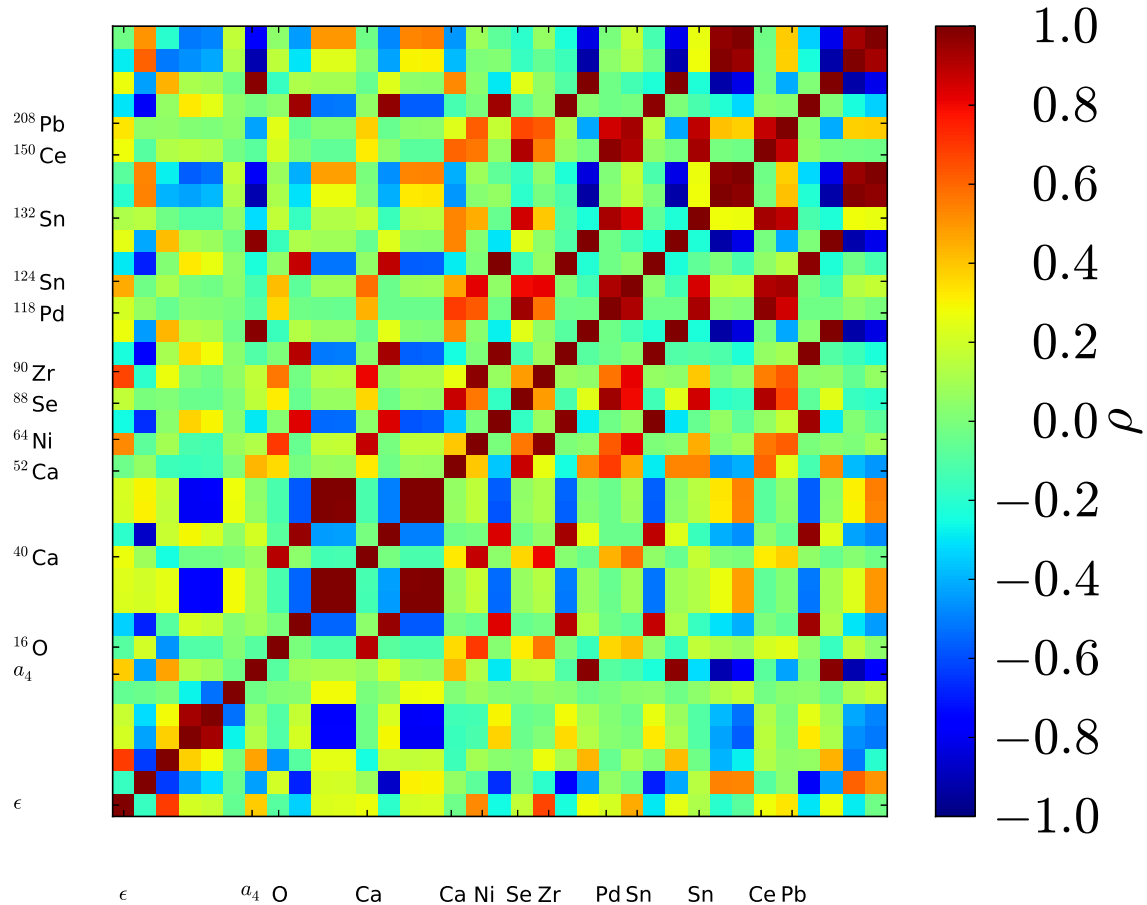
Tablica 3.6 sadrži opservable vezane za pojedine jezgre u osnovnom stanju. Njihov redosljed odgovara onome na osima grafa na slici 3.10.

jezgra	$E_{tot}$ (MeV)	$r_c$ (fm)	$r_n - r_p$ (fm)	cijepanje n	cijepanje p
$^{16}\text{O}$	-127.62	2.73	0	6.10	6.30
$^{40}\text{Ca}$	-342.05	3.49	0	6.0	6.0
$^{52}\text{Ca}$	-438.33	0	0	0	0
$^{64}\text{Ni}$	-561.76	3.87	0	0	0
$^{88}\text{Se}$	-747.56	0	0	0	0
$^{90}\text{Zr}$	-783.89	4.27	0.07	0	0
$^{118}\text{Pd}$	-991.82	0	0	0	0
$^{124}\text{Sn}$	-1049.96	4.67	0.19	0	0
$^{132}\text{Sn}$	-1102.92	0	0	1.65	1.75
$^{150}\text{Ce}$	-1230.17	0	0	0	0
$^{208}\text{Pb}$	-1636.45	5.51	0.19	0.9	1.33

Tablica 3.6: Vrijednosti opservabli za svaku jezgru u osnovnom stanju.

Iz tablice 3.6 vidimo da broj opservabli za jezgre nije jednak, od tuda i razlika u razmacima oznaka jezgri na osima. Također, samo dvostruko magična jezgra  $^{208}\text{Pb}$  ima izračunate vrijednosti svih pet promatranih opservabli, dok jednu manje imaju jezgre  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ . Preostale jezgre imaju jednu do tri izračunate opservable. Također, spin-orbit cijepanje neutrona i protona postoji za četiri promatrane jezgre koje su ujedno i dvostruko magične jezgre. Dakle, za neutrone i protone  $^{16}\text{O}$  radi se o raz-

maku između  $1p_{1/2}$  i  $1p_{3/2}$  orbitala, kod  $^{40}\text{Ca}$  to je  $1d$  stanje ( $1d_{3/2} - 1d_{5/2}$  orbitale), za  $^{132}\text{Sn}$  je  $2d$  ( $2d_{3/2} - 2d_{5/2}$  orbitale) i na kraju jezgra  $^{208}\text{Pb}$  za neutrone ima  $3p$  stanje ( $3p_{1/2} - 3p_{3/2}$  orbitale) dok je kod protona to  $2d$  stanje ( $2d_{1/2} - 2d_{3/2}$  orbitale). Jedino jezgra  $^{208}\text{Pb}$  ima stanja spin-orbit cijepanja neutrona i protona. Na slici 3.10 prikazane su vrijednosti korelacijskih koeficijenata za opservable prethodno navedenih jezgri, iz tablica 3.5 i tablice 3.6.



Slika 3.10: Korelacije među opservablama za odabrane jezgre u osnovnom stanju.

Promotrimo li graf sa korelacijskim koeficijentima za opservable nuklearne materije i navedenih jezgri, dolazimo do sljedećih opažanja. Očite su jake korelacije između efektivne mase nukleona  $m^*$  i Diracove mase  $m_D$  za nuklearnu materiju, energije vezanja jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ , spin-orbit cijepanja neutrona i protona za jezgre  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  i  $^{132}\text{Sn}$ , te spin-orbit cijepanje protona između jezgri  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ . Kod energije vezanja najjače korelacije se javljaju između jezgri bliskih vrijednosti atomskog broja  $Z$  te sa porastom razlike broja protona između jezgri ta korelacija slabi. To možemo vidjeti na primjeru jezgre  $^{16}\text{O}$  čija energija vezanja  $E_{tot}$  pokazuje jaku korelaciju sa energijom  $E_{tot}$  jezgre  $^{40}\text{Ca}$  dok već sa jezgrom  $^{52}\text{Ca}$  ta korelacija je sla-

bija, a sa ostali jezgrama se nastavlja smanjivati. Jezgra  $^{208}\text{Pb}$  sa svojom  $E_{tot}$  samo još dodatno potvrđuje naša zapažanja, te pokazuje jako koreliranje sa energijom jezgri bliskih atomskih brojeva, tj. sa  $^{118}\text{Pb}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{150}\text{Ce}$ , a najslabije sa  $^{16}\text{O}$ . Znamo da energija vezanja raste se porastom atomskog broja  $Z$  do Fe oko  $Z=56$ , te da se nakon toga njena vrijednost počinje smanjivati kao rezultat većeg doprinosa Coulombovog odbijanja među protonima, što dovodi do podjele jezgri na one koje se nalaze u području porasta i one koje se nalaze u području pada vrijednosti  $E_{tot}$ . Dakle, jezgre koje se nalaze u istom području imaju sličan odnos nuklearne (kratkodosežne) i Coulombove (dugodosežne) interakcije koji na kraju i utječe na jakost energije vezanja. Radijus naboja jezgre  $r_c$  promatran je kod 6 odabranih jezgri ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{64}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ), te pokazuje približno iste jakosti korelacije za svaku jezgru što znači da je dovoljno odrediti radijus naboja samo jedne jezgre i možemo dobiti dosta dobru informaciju o radijusu  $r_c$  preostalih jezgri. Opservabla koja opisuje razliku distribucije neutrona i protona ( $r_n - r_p$ ) prisutna je kod samo 3 promatrane jezgre ( $^{90}\text{Zn}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ) i za sve 3 jezgre pokazuje jaku korelaciju samo sa energijom asimetrije i sa opservablama  $r_n - r_p$  druge dvije jezgre. Energija asimetrije, koju koristimo u računu energije vezanja kao predzadnji član preko kojeg se u račun uključuju i kvantni efekti poput izospinske ovisnosti nuklearne sile, pokazuje korelacije samo sa prethodno spomenutim opservablama tj. sa  $r_n - r_p$  navedenih jezgri. Spin-orbit cijepanje promatramo kod 4 jezgri ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ), te vidimo jaku koreliranost spin-orbit cijepanja protona i neutrona kod  $^{16}\text{O}$ , što se ponavlja i kod preostale 3 jezgre. Zatim, ponovo se javlja podjela jezgri u parove, pa tako imamo jaku korelaciju spin-orbit cijepanja neutrona/protona između jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ , te  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ , dok je ona slabija kod drugih kombinacija ovih jezgri. Također je zanimljivo za primjetiti da se spin-orbit cijepanje javlja za sve četiri dvostruko magične jezgre koje promatramo. Uz njih, primjetna je značajna korelacija između energije vezanja po nukleonu  $E/A$  i kompresibilnosti  $K$ . Njihova povezanost posljedica je činjenice da druga derivacija  $E/A$  ovisi o krutosti nuklearne materije u odnosu na promjene u gustoći koja se mjeri modulom kompresije  $K$  kao  $K = k_F^2 \frac{d^2}{dk_F^2} (E/A)$ . Jaka antikorelacija je vidljiva između kompresibilnosti  $K$  i gustoće saturacije nuklearne materije  $\rho$ , Diracove mase nukleona  $m_D$  i cijepanja neutrona jezgre  $^{16}\text{O}$ , te između efektivne mase nukleona  $m^*$  i cijepanja protona jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ . Umjerena antikorelacija se javlja za opservable radijusa naboja jezgre  $r_c$  za  $^{64}\text{Ni}$  i cijepanja neutrona  $^{16}\text{O}$ , te kod

istih opservabli samo za drugu kombinaciju jezgri ( $^{16}\text{O}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{16}\text{O}$ , te  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{16}\text{O}$ ).



## 4 Zaključak

Analiza kovarijance koja je ovdje provedena trebala bi dati jasniji uvid u svojstva opservabli odabranih za ovaj model, ali i pomoći u pronalasku opservabli koje bi mogle smanjiti velike procjene nepreciznosti. Kako bi se to ostvarilo nije nam potreban sam minimum funkcije  $\chi^2$ , već njezino ponašanje oko minimuma. Pomaci oko minimuma, kao u svakom problemu malih oscilacija, su opisani pomoću simetrične matrice drugih derivacija iz koje se onda mogu izračunati korelacijski koeficijenti između opservabli.

Matrice drugih derivacija izračunate su na dva načina, iz drugih derivacija kaznene funkcije  $\chi^2$  i prvih derivacija opservabli po parametrima. Usporedba tih dviju matrica preko njihovih relativnih razlika pokazuje da su razlike najveće za elemente dobivene derivacijom po konstantama vezanja koje uvode ovisnost vlastitih energija o nukleonskim jednočestičnim energijama ( $\Gamma_\nu$  i  $\Gamma_s$ ), a najmanje za derivaciju koja uključuje kombinaciju parametara za određivanje dubine potencijala ( $g_\rho$   $g_\sigma$ ).

Za pristup informacijama važnim za korelacijsku analizu potrebno je dijagonalizirati matricu drugih derivacija jer se iz nje dobivaju svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Kretanje duž smjera koji je određen pripadnim svojstvenim vektorom vodi na propadanje kvalitete same prilagodbe na koju utječu svojstvene vrijednosti. "Mekani" smjer obilježen je malenom ili iščezavajućom svojstvenom vrijednošću što rezultira malenim propadanjem u kvaliteti. Linearna kombinacija parametara modela koja definira takav smjer je slabo ograničena izborom opservabli uključenih u definiciju  $\chi^2$  funkcije. Ukoliko je opservabla koju promatramo osjetljiva na takav smjer, znači da je iznos derivacija te opservable velik, pa je sama varijanca velika. Unaprijeđenje samog modela postiže se identifikacijom mekanih smjerova, tj. određivanjem vrste opservabli koje se trebaju dodati u  $\chi^2$ , čime bi se bolje ograničio teorijski model. Usporedba dobivenih svojstvenih vrijednosti dviju matrica pokazuje kako se njihova razlika smanjuje porastom svojstvenih vrijednost, tj. postoji veće poklapanje za veće svojstvene vrijednosti. Iz prikaza svojstvenih vektora po komponentama za svaku svojstvenu vrijednost može se odrediti koji parametar dominira za koju vrijednost. Pa tako najtvrdim modom dominiraju tri parametra,  $m_\sigma$ ,  $g_\sigma$  i  $g_\omega$ , što znači da se ti parametri mogu precizno izračunati u odnosu na druge. Dominacija komponenti vektora vezanih za pojedine parametare se mijenja sa promijenjom svojstvene vri-

jednosti, ali i matrice na koju se odnose. Najmekši modovi dviju matrica pokazuju potpuno nepoklapanje, pa najmekšim modom egzaktne dominira jedan parametar  $a_{tv}$  dok kod aproksimativne to su tri parametra  $c_v$ ,  $b_s$  i  $c_s$ .

Matrica kovarijanci parametara na dijagonalnim elementima ima korelacijske koeficijente za iste parametre, dok nedijagonalni elementi matrice prikazuju one za različite parametre. Visoka korelacija se javlja između  $\sigma$  i  $\omega$  mezona, što se moglo i očekivati jer upravo oni određuju jednočestični potencijal RMF modela u kojem se gibaju nukleoni. Umjerena korelacija je prisutna između  $g_\rho$  i  $g_\sigma$ , te između  $g_\rho$  i  $g_\omega$ . Jaku antikorelaciju nalazimo kod parametara  $a_{tv}$  i  $g_\rho$ .

Kod opservabli jake korelacije se pojavljuju između  $m^*$  i  $m_D$  za nuklearnu materiju, energije vezanja jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ , spin-orbit cijepanja neutrona i protona za jezgre  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  i  $^{132}\text{Sn}$ , te spin-orbit cijepanje protona između jezgri  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ . Korelacije energije vezanja najjače su za jezgre sličnog atomskog broja  $Z$  te sa porastom razlike broja protona između jezgri ta korelacija slabi. Na primjer, kod jezgre  $^{16}\text{O}$  energija vezanja  $E_{tot}$  pokazuje jaku korelaciju sa energijom  $E_{tot}$  jezgre  $^{40}\text{Ca}$  dok sa jezgrom  $^{52}\text{Ca}$  ta korelacija je slabija, a sa ostali jezgrama se nastavlja smanjivati. Jezgra  $^{208}\text{Pb}$  sa svojom  $E_{tot}$  samo još dodatno potvrđuje zapažanja, te pokazuje jako koreliranje sa energijama jezgri bliskih atomskih brojeva, tj. sa  $^{118}\text{Pb}$ ,  $^{124}\text{Sn}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{150}\text{Ce}$ , a najslabije sa  $^{16}\text{O}$ . Radijus naboja jezgre  $r_c$  za jezgre ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{64}\text{Ni}$ ,  $^{90}\text{Zr}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ) pokazuje približno iste jakosti korelacije za svaku jezgru što znači da je dovoljno odrediti radijus naboja samo jedne jezgre i možemo dobiti dosta dobru informaciju o radijusu  $r_c$  preostalih jezgri. Opservabla  $(r_n - r_p)$  za jezgre ( $^{90}\text{Zn}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ) pokazuje jaku korelaciju samo sa energijom asimetrije i sa opservablama  $r_n - r_p$  druge dvije jezgre. Energija asimetrije pokazuje korelacije samo sa prethodno spomenutim opservablama tj. sa  $r_n - r_p$  navedenih jezgri. Spin-orbit cijepanje za 4 jezgre ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{Pb}$ ) ima jaku koreliranost sa spin-orbit cijepanjem protona i neutrona kod  $^{16}\text{O}$ , što se ponavlja i kod preostale 3 jezgre. Zatim, ponovo se javlja podjela jezgri u parove, pa imamo jaku korelaciju spin-orbit cijepanja neutrona/protona između jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ , te  $^{132}\text{Sn}$  i  $^{208}\text{P}$ . Uz njih, primjetna je značajna korelacija između  $E/A$  i kompresibilnosti  $K$ . Jaka antikorelacija je vidljiva između  $K$  i  $\rho$ , Diracove mase nukleona  $m_D$  i cijepanja neutrona jezgre  $^{16}\text{O}$ , te između  $m^*$  i cijepanja protona jezgri  $^{16}\text{O}$  i  $^{40}\text{Ca}$ . Umjerena antikorelacija se javlja za opservable radijusa naboja jezgre  $r_c$  za  $^{64}\text{Ni}$  i cijepanja neutrona  $^{16}\text{O}$ , te kod istih opservabli

samo za drugu kombinaciju jezgri ( $^{16}\text{O}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{90}\text{Zr}$  i  $^{16}\text{O}$ ,  $^{124}\text{Sn}$  i  $^{16}\text{O}$ , te  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{16}\text{O}$ ). Rezultati koji su dobiveni pokazali su da matrica derivacija  $\chi^2$  nije baš tako lako zamjenjiva aproksimativnom matricom, jer ipak postoje značajne razlike u svojstvenim vrijednostima i vektorima što utječe na predviđanje preciznosti određivanja modela neke veličine. Korelacijski koeficijenti parametara su potvrdili neke povezanost, dok su druge ostale bez objašnjenja. Slično je i sa korelacijskim koeficijentima opservabli.

## Literatura

- [1] W. Kohn, L. J. Sham, Phys. Rev. 140, A1133 (1965).
- [2] F.J.Fattoyev, J.Piekarewicz, Accurate calibration of relativistic mean-field models: Correlating observables and providing meaningful theoretical uncertainties, Phy. Rev. C84, 064302 (2011).
- [3] P.-G. Fattoyev, J.Piekarewicz, Phy. Rev. C81, 051303 (2010).
- [4] P.-G. Fattoyev, J.Piekarewicz, Phy. Rev. C86, 015802 (2012).
- [5] P.-G. Reinhard, W. Nazarewicz, Phy. Rev. C87, 014324 (2013).
- [6] P.-G. Reinhard, J.Piekarewicz, W. Nazarewicz, B. K. Agrawal, N. Paar, X. Roca-Maza, Phy. Rev. C88, 034325 (2013).
- [7] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, P.-G. Reinhard, J. Phy. G41, 074001 (2014).
- [8] J.Piekarewicz, W.-C.Chen, F.J.Fattoyev, arXiv:1407.0911.
- [9] J. Petković, Određivanje spektra antineutrina iz nuklearnih reaktora (Diplomski rad), Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Zagreb (2015).
- [10] F.J.Fattoyev, J.Piekarewicz, Accurate calibration of relativistic mean-field models: Correlating observables and providing meaningful theoretical uncertainties, Phy. Rev. C84, 064302 (2011).
- [11] S. Typel, Relativistic model for nuclear matter and atomic nuclei with momentum-dependent self-energies, Phys. Rev. C 71, 064301 (2005).
- [12] W. Chen, J.Piekarewicz, Building relativistic mean field models for finite nuclei and neutron stars, Phy. Rev. C90, 044305 (2014).
- [13] S. Brandt, Data Analysis: Statistical and Computational Methods for Scientists and Engineers, 3rd ed. (Springer, New York, 1999).
- [14] F. James, MINUIT reference manual, Cern Program Library Long Writeup D506, Version 92.1 (1992).

- [15] I. Novak, Nova generacija relativističkih nuklearnih energijskih funkcionala gustoće (Diplomski rad), Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Zagreb (2016).