Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Tajron Jurić

Kapa-Minkowskijev prostor i fizika na Planckovoj skali

Doktorska disertacija
predložena Fizičkom odsjeku
Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu
radi stjecanja akademskog stupnja
doktora prirodnih znanosti fizike

Doctoral Thesis submitted to the Department of Physics
Faculty of Science, University of Zagreb
for the academic degree of
Doctor of Natural Sciences (Physics)

Zagreb, 2014.

Ova disertacija izrađena je pod vodstvom dr. sc. Stjepana Meljanca, u sklopu Sveučilišnog poslijediplomskog studija pri Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkoga fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

This thesis was made under the mentorship of dr. sc. Stjepan Meljanac, within University post-graduate studies at Physics Department of Faculty of Science of University of Zagreb.

Zahvale

Ovaj rad je izrađen na Zavodu za teorijsku fiziku Instituta "Ruđer Bošković" pod vodstvom dr. Stjepana Meljanca. Ovom prilikom zahvaljujem mentoru na iznimno brižnom i strpljivom vođenju kroz nastanak ovog rada, mnogim korisnim diskusijama i sugestijama.

Također zahvaljujem svim kolegama (a posebno "ekipi s tavana": BK, AS i SD) s kojima sam gotovo svakodnevno raspravljao o fizici.

Veliko hvala Beniju za njegova Predavanja, koja su bila jedna od ključnih u mom putu ka postajanju teorijski fizičar.

Za kraj, posebno hvala mojoj majci Nini i mojoj djevojci Tamari što su me podržavale sve ovo vrijeme te njima i posvećujem ovaj rad.

Sadržaj

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Fizički odsjek

Doktorska disertacija

Kapa-Minkowskijev prostor i fizika na Planckovoj skali

Tajron Jurić
Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Opis kvantne gravitacije zahtijeva ujedinjenje postulata opće teorije relativnosti i Heisenbergovog principa neodređenosti, što vodi na neodređenosti u samom mjerenju koordinata položaja. Slijedi da moramo olabaviti pretpostavku o prostor-vremenu kao glatkoj mnogostrukosti i početi shvaćati prostorvrijeme kao diskretiziranu mnogostrukost, prirodno opisanu kao nekomutativni prostor. Pri tome opisu koriste se novi matematički alati te se uvodi pojam poopćenih simetrija opisanih Hopfovim algebrama. Posebno je interestantan tzv. κ-Minkowskijev prostor, koji je Lie algebarska deformacija uobičajenog prostora Minkowskog. Cilj je proučavati dinamiku čestica na takvom prostoru koristeći generalizaciju "Feynmanovog pristupa". Pošto fizika crnih rupa igra važnu ulogu u istraživanju kvantnih aspekata gravitacije, zanimljivo je istražiti njene nekomutativne doprinose. Pokazuje se da nekomutativne inačice različitih crnih rupa (BTZ, Kerr) su u potunosti opisane κ-deformiranim algebrama, što upućuje na određenu univerzalnost κ-deformacija kao kandidata za opis kvantnih efekata gravitacije.

(122 stranice, 119 literaturnih navoda, jezik izvornika hrvatski)

Ključne riječi: nekomutativnost, κ-deformacije, jednadžbe gibanja, entropija

Mentor: dr. sc. Stjepan Meljanac, znanstveni savjetnik

Ocjenjivači: Ivica Smolić, Anđelo Samsarov i Mirko Planinić

Rad prihvaćen: 11. studenog 2014.

Basic documentation card

University of Zagreb
Faculty of Science
Department of Physics

Doctoral Thesis

Kappa-Minkowski space and Planck scale physics

Tajron Jurić
Faculty of Science, Zagreb

The quantum description of gravity demands unification of general relativity and Heisenberg uncertainty principle, which leads to the uncertainty of measurement of position itself. This means that we have to change our assumption that space-time is a smooth manifold and start to realize it as some discretized manifold, naturally described as non-commutative space. Within this description new mathematical methods are used and the notions of generalized symmetries, described with Hopf algebras are introduced. The most interesting type of non-commutative space is κ-Minkowski space, which is a Lie type deformation of usual Minkowski space. The main goal is to investigate the particle dynamics in such non-commutative space using the generalization of "Feynman approach". Since black hole physics plays an important role in investigation of quantum aspects of gravity, it is of significant interest to study its non-commutative generalizations. It was shown that non-commutative versions of different black holes (BTZ, Kerr) are completely described by κ-deformed algebras, which indicates a certain universality of κ-deformations as a candidate for describing quantum gravity effects.

(122 pages, 119 references, original in Croatian)

Keywords: noncommutativity, κ-deformations, equations of motion, entropy

Supervisor: Stjepan Meljanac, Senior Scientist

Reviewers: Ivica Smolić, Anđelo Samsarov and Mirko Planinić

Thesis accepted: November 11, 2014

Extended abstract

Introduction

The structure of spacetime at the Planck scale is unknown and represents an open problem which is under active research. Noncommutative (NC) spacetime emerged as a natural setting for capturing the essence of physical theories at very small distances. In [1] it was shown that the postulates of general relativity together with Heisenberg uncertainty principle lead to spacetime uncertainty at the Planck scale l_{Planck}, i.e. $\Delta x_\mu \Delta x_\nu > l_{\text{Planck}}^2$. The description of spacetime as a continuum of points (a smooth manifold) is an assumption no more justified at Planck scale. At this scale, it is then natural to relax the assumption of smooth spacetime and conceive spacetime as discretized manifold, most naturally described by noncommuative spacetime. This noncommutativity can be realized by promoting spacetime coordinates x_μ into noncommuting operators $\hat{x}_\mu$. The NC spacetime is also known to emerge as a low energy limit of certain quantum gravity models [1; 2]. String theory [3; 4] suggests that the spacetime at Planck length also leads to noncommutative spacetime.

In NC spacetimes the Lorentz symmetry is broken in the usual sense. Namely, the Lorentz algebra remains undeformed, its coalgebra changes, but in a way that we still have the Hopf algebra of the starting symmetry group. A particularly interesting example of a Hopf algebra is κ-Poincaré algebra. κ-Poincaré algebra describes the underlying symmetry of the effective NC quantum field theory that results from coupling quantum gravity to matter fields after topological degrees of freedom of gravity are integrated out [5]. It has been shown that the generic feature of field theories on NC spaces (both for Moyal [6; 7], and κ-Minkowski [8]) is that interactions are highly non-local and non-linear leading to the so called UV/IR mixing, which is characterized by an interdependence between the high and low energy behavior [9; 10].

Deformations of Minkowski space

We will deal with κ-Minkowski spacetime [11; 12; 13]. κ-Minkowski spacetime is a Lie algebraic deformation of Minkowski spacetime, where κ is the deformation parameter usually associated with quantum gravity scale. Investigations trying to obtain bound on deformation parameter, supporting this claim, were carried out in [14; 15; 16]. The symmetries of κ-Minkowski spacetime are encoded in the κ-Poincaré-Hopf algebra. Generalized Poincaré algebras related to κ-Minkowski spacetime were considered in [17]. Constructions of physical theories on κ-Minkowski spacetime lead to new interesting properties, such as, modification of particle statistics [25; 26; 28], deformed Maxwell's equations [30; 31], and quantum gravity effects [32; 33]. Deformation of quantum mechanics and especially effects on hydrogen atom were also considered [29]. The construction of QFT's on κ-Minkowski space is of immense importance and is still under investigation [34; 35; 36]. κ-Minkowski spacetime is also related to doubly-special (DSR) and deformed relativity theories [37].

DSR theories are a set of models that provide a kinematical framework for the description of particle dynamics where Planck length is incorporated as a new fundamental invariant, along with the speed of light. The relativity postulates are minimally reformulated in order to allow this new invariant. In this fashion one avoids the necessity for singling out a preferred inertial frame, so that the concept of observer independence is retained, with κ-Minkowski spacetime providing the coordinate background for putting DSR to test. In due course some authors pointed towards certain inconsistencies and seeming paradoxes which DSR theories inevitably carry with them [38]. The resolution of these problems was taken up in the recently proposed framework of relative locality [39; 40; 41]. It relies on the concept of invariant phase space and idea that the momentum space might be curved. κ-Minkowski spacetime (invariant under κ-Poincaré algebra) was shown to emerge from the application of this idea, and can thus be used as a background on which one might develop implications of relative locality [42].

It is known that the deformations of the symmetry group can be realized through the application of the Drinfeld twist on that symmetry group [43; 44; 45]. The main virtue of the twist formulation is that the deformed (twisted) symmetry algebra is the same as the original undeformed one and the only thing that changes is the coalgebra structure which then leads to the same free field structure as the corresponding commutative field theory [46]. The information about statistics is encoded in the R-matrix. In case of κ-Poincaré Hopf algebra, R-matrix can be expressed in terms of Poincaré generators only, which implies that the states of any number of identical particles can be defined in a κ-covariant way [18; 25].

One of the ideas presented by the group of Wess et al. [47; 59] is that the symmetries of general relativity, i.e. the diffeomophisms, are considered as the fundamental objects and are deformed using twist [48; 49]. Given a twist $\mathcal{F}$ one can construct noncommutative star product. In this way, the algebra of noncommutative functions, tensor fields, exterior forms and diffeomorphisms is obtained. They also developed the notion of infinitesimal diffeomorphism and the corresponding notion of deformed Lie algebra. The generalization of the diffeormorphism symmetry is formulated in the language of Hopf algebras, a setting suitable for studying quantization of Lie groups and algebras. Physical applications of this approach are investigated in [50], and especially for black holes in [51]. Our main motivation is to generalize the ideas of the group of Wess et al. to the notion of the Hopf algebroid [22; 23; 24; 19] and to construct both QFT and gravity in Hopf algebroid setting, which is more general and it seems more natural since it deals with the whole phase space [18].

There have been claims in the literature [52] stating that κ-Poincaré-Hopf algebra could not be obtained from twist that satisfies cocycle condition, since κ-Poincaré-Hopf algebra is a quantum deformation of Drinfeld-Jimbo type corresponding to inhomogeneous r-matrix and that the universal R-matrix for κ-Poincaré-Hopf algebra is not known [53]. The Abelian twists [13; 27; 26] and Jordanian twists [60] compatible with κ-Minkowski spacetime were constructed, but the problem with these twists is that they can not be expressed in terms of the Poincaré generators and the coalgebra runs out into $\mathcal{U}(\mathfrak{igl}(4)) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{igl}(4))$.

In a recent paper [19] we have demonstrated that the key point for resolving these problems is to analyze the whole quantum phase space $\mathcal{H}$ and its Hopf algebroid structure. We have used the Abelian twist, satisfying cocycle condition. This twist is not an element of κ-Poincaré-Hopf algebra, but an element of $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. By applying the twist to the Hopf algebroid structure of quantum phase space $\mathcal{H}$ we obtained the Hopf algebroid structure of κ-deformed phase space $\hat{\mathcal{H}}$. Moreover, this twist also provides the correct Hopf algebra structure of κ-Poincaré algebra when applied to the generators of rotation, boost and momenta. In [19] we have explicitly used the bicross-product basis (which corresponds to right ordering). In [18], authors have used deformations of the Heisenberg algebra (quantum phase space) and coalgebra by twist. They presented a type of tensor exchange identities and show that the introduced coalgebra is compatible with them. Also, they give coproducts for the Poincaré generators, proposing two new methods of calculation. Finally, the exact form of the universal R-matrix for the deformed Heisenberg algebra and especially κ-Poincaré Hopf algebra is presented.

In this thesis we present the construction of the twist for arbitrary realization and corresponding Hopf algebroid structure. A systematic, perturbative method for calculating twist in arbitrary realization of κ-deformed phase space is elaborated. Here we are presenting the expression for the twist in bicrossproduct basis. This twist satisfies the cocycle condition and we show that this twist leads to correct κ-Poincaré-Hopf algebra.

Furthermore, we show the relation between any two realizations via similarity transformation and give a method for calculating twist in a given realization, by using a twist in one particular realization and similarity transformation. Therefore, it is clear that if one knows the twist operator in one particular realization, using similarity transformation one can generate the twist operator in any realization. All such twists satisfy the cocycle and normalization conditions. Our general methods can be demonstrated on specific examples [20], such as, left covariant, left noncovariant and natural realization.

Equations of motion in noncommutative spaces

In this thesis, we derive the geodesic equation on the κ-spacetime, valid up to first order in the deformation parameter. We use a generalization of Feynman's approach [68; 71; 76], in deriving the geodesic equation in κ-spacetime. It was shown that the homogeneous Maxwell's equations can be derived by starting with the Newtons force equation and the (assumed) commutators between the coordinates and velocities [68], which has been generalized to relativistic case in [71]. In [71], it was shown that the consistent interactions possible for a relativistic particle are with scalar, vector and gravitational fields. Various aspects of Feynman's approach have been studied in [62; 63].

This method has been generalized to Moyal space time in [64] and to κ-spacetime in [30; 31].

In [31], we have generalized the approach of [76] to κ-spacetime, and derived the κ-deformed Maxwell's equations and Lorentz equation, valid up to first order in the deformation parameter-a and its classical limits were obtained. We found that the modified Newton's equation depends on velocities and this effect can be interpreted as due to a background electromagnetic field. In the case of deformed Lorentz equation, we have quadratic terms in velocities (apart from the linear ones). These can be interpreted as due to the curvature induced by the κ-deformation of the spacetime. Similar feature was shown in the case of Moyal spacetime in[100]. In [31], we have found that the electrodynamics depends on the mass of the particle (apart from its charge). We have also investigated the trajectory of the charged particle in a constant electric field in κ-spacetime, showing the effect of induced electromagnetic field and/or curvature. Thus it is natural to ask what happens if we consider the motion of particle in κ-spacetime with curvature. We take up this issue of constructing the geodesic equation in this thesis.

Noncommutativity and physics of black holes

Study of black hole physics plays an important role in exploring various quantum aspects of gravity. Even though black holes arose from the solutions of classical general relativity, many insights on the problem of semiclassical or quantum description of gravity were obtained from the study of field theories in black hole backgrounds. In particular, the aspect of black hole entropy and related thermodynamic properties [82; 83; 84; 85; 86] have been extensively studied in various frameworks including string theory [95; 87], loop quantum gravity[88], conformal field theory [89; 90; 91] and some related approaches [92; 93]. In the same spirit, there have been various attempts to construct noncommutative theories of gravity, noncommutative black hole solutions and noncommutative quantum cosmology [47; 94; 51; 96; 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103]. In particular, it has been shown that the noncommutative version of the BTZ black hole is described by a κ-deformed algebra [32; 104]. Similar κ-deformed algebras have been found in the noncommutative description of Kerr black holes [105] and certain noncommutative versions of cosmology [51]. It thus appears that there is a certain element of universality in the appearance of the κ-deformed algebras, as they occur in the noncommutative(NC) descriptions of various types of classical geometries. It is therefore interesting to study the properties of black holes in the framework of κ-deformed noncommutative systems.

The κ-deformed Minkowski spacetime is defined by the algebra

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i(a_\mu \hat{x}_\nu - a_\nu \hat{x}_\mu).$$

Here, a_μ have dimensions of length and we choose $a_0 = \frac{1}{\kappa} \equiv a$ and $a_i = 0$ in the later part of this paper. Note that the rhs of κ-algebra is not a constant and is more general than that of the Moyal algebra. The symmetry algebra of this spacetime is known as κ-Poincaré-Hopf algebra [11]. Various aspects of this Hopf algebra have been studied in [12; 54; 13]. Each realization of the κ-algebra leads to a star product which can be used to construct the twisted coproduct, which ensures the invariance under twisted diffeomorphisms. Klein-Gordon theory in the κ-deformed spacetime was constructed [13; 36] and it was shown that the underlying Hopf algebra structure leads to twisted statistics [26; 35]. The changes due to this twisted statistics of Klein-Gordon field near the vicinity of black hole was analyzed in [28]. The modification to Unruh effect due to κ-deformation of the spacetime was studied in [65; 66]. Implication of the κ deformation on electrodynamics were investigated in [30; 31], and deformed geodesic equation was obtained in [15]. In these papers, the approach adopted was to map the coordinates of the κ-deformed spacetime to that of commutative spacetime and using this map, functions of noncommutative coordinates were expressed in terms of commutative coordinates and their derivatives, as a perturbative expansion in powers of the deformation parameter. In these works, different realizations of mappings between noncommutative and commutative coordinates were used. This was done by embedding the κ-Minkowski spacetime algebra into Heisenberg algebra [19; 20]. In this thesis, we study the change in the entropy of the BTZ black hole due to the κ-deformation of the spacetime. This is done by analyzing the κ-deformed Klein-Gordon field theory in the BTZ black hole background.

In [82; 83], a parallel between properties of black holes and thermodynamic variables in $3+1$ dimensions were obtained. By analyzing quantum field theory in the black hole background, Hawking showed that black holes emit thermal radiation and further the area law of black holes was derived [84]. Using these results and applying well known notions of quantum mechanics, 't Hooft had shown that there is a divergence in the allowed energy levels of a quantum mechanical particle near the black hole horizon. But the gravitational effects close to the horizon of the black hole would modify the particle wave functions near the vicinity of the horizon and thus it is possible that these divergences would be removed. This had been modeled in [86] by introducing the so called brick wall cut-off in the number of allowed energy levels of the quantum field near the horizon of the black hole. This approach of introducing a brick wall cut-off has also been employed in dimensions other than $3+1$ [106; 107], in order to calculate the thermodynamic quantities of interest. It was shown that the cut-off depends only on the black hole horizon in $3+1$ dimensions while it depends on the mass of the black hole as well as the mass of the quantum field in other dimensions [106]. It was also shown that the divergence in the entropy per unit area of a Klein-Gordon field propagating in the black hole background can be absorbed by renormalizing the gravitational constant [108; 109].

In this thesis, we probe the geometry of a BTZ black hole by using a κ-deformed noncommutative scalar field as a simple probe. Using the realization of the map used in [31; 15], we obtain the thermodynamic properties of the BTZ black hole in κ-deformed spacetime, by analyzing the κ-deformed Klein-Gordon field in the background of the BTZ black hole. Following [110; 86], we calculate the entropy of the BTZ black hole in the κ-deformed spacetime by analyzing the κ-deformed Klein-Gordon field theory near the vicinity of the black hole horizon. Using the ideas developed in [13; 31; 15], we first obtain the Klein-Gordon theory in the $2+1$ dimensional κ-deformed spacetime. Starting with the action of this model in the κ-deformed BTZ background, we calculate the free energy and entropy, semi-classically using the brick wall cut-off. We restrict our attention here only to the case of non-rotating BTZ black hole. We start with the Klein-Gordon theory in the κ-deformed BTZ background, keeping terms up to leading order in the deformation parameter. The corresponding action is shown to have higher derivative terms. Using the methods of higher derivative theories, we obtain the equations of motion for the scalar theory, which is valid up to the first order in the deformation parameter. Using the WKB method, we then calculate the energy eigenvalues of the scalar field quanta. Using this, we calculate the free energy and entropy of the system where we use the brick wall cut-off. We obtain the modification to the entropy due to the κ-deformation, valid up to first order in the deformation parameter a. This modification can be interpreted as renormalization of Newton's constant G. We also calculated the corrections to the quasinormal modes independent of the WKB approximation.

Uvod

Struktura prostor-vremena na Planckovoj skali je još uvijek nedovoljno poznata i predstavlja otvoreni problem koji je dio aktivnih istraživanja u teorijskoj i matematičkoj fizici. Nekomutativni prostori su se pokazali kao prirodni matematički okvir za opisivanje fizikalnih teorija na vrlo malim skalama duljine. Naime, pokazano je [1] da postulati opće teorije relativnosti, zajedno s Heisenbergovim principom neodređenosti vode na neodređenosti u samom mjerenju koordinata položaja. Dakle, opis prostor-vremena kontinuumom točaka (glatka mnogostrukost) više nije opravdan na vrlo malim skalama duljine. Na tim skalama smo prisiljeni olabaviti pretpostavku o glatkom i kontinuiranom prostor-vremenu i moramo početi shvaćati prostor-vrijeme kao diskretiziranu mnogostrukost, prirodno opisanu kao nekomutativni prostor. Ova nekomutativnost se može realizirati na način da uobičajene komutirajuće koordinate položaja promoviramo u nekomutativne operatore položaja. Naime, ova situacija je vrlo slična uobičajenoj kvantnoj mehanici gdje smo zbog Heisenbergovih relacija neodređenosti morali zamjeniti klasični fazni prostor s Heisenbergovom algebrom. U prilog nekomutativnim prostorima ide i činjenica da je nekomutativni prostor nisko-energetski limes određenih modela kvantne gravitacije [1; 2] te se također pojavljuju i u teoriji struna [3; 4].

U nekomutativnim prostorima, Lorentzova simetrija je slomljena. Naime, Lorentzova algebra se nužno ne mijenja, no koalgebarska struktura biva deformirana. Međutim, deformacija je još uvijek opisana Hopfovom algebrom relavantne grupe simetrija. Posebno zanimljiv primjer Hopfove algebre je tzv. κ-Poincaréova algebra. κ-Poincaréova algebra opisuje simetrije efektivnih nekomutativnih kvantnih teorija polja, čije je nastajanje rezultiralo vezanjem kvantne gravitacije i materije nakon što se prointegriraju gravitacijski topološki stupnjevi slobode [5].

Posebno je interesantan tzv. κ-Minkowskijev prostor [11; 12; 13]. κ-Minkowskijev prostor je deformacija Liejevog tipa uobičajenog prostora Minkowskog, gdje je κ deformacijski parametar. Parametar κ odražava skalu kvante gravitacije [14; 15]. Simetrije κ-Minkowskijevog prostora opisane su s κ-Poincaré-Hopfovom algebrom. Generalizacije Poincaréovih algebri koje vode na κ-Minkowskijev prostor promatrane su u [17].

U nekomutativnim prostorima više nemamo na raspolaganju standardne matematičke alate kao što smo imali za glatke mnogostrukosti. Jedan od načina da se opiše nekomutativni κ-Minkowskijev prostor jest da se on uloži u kvantni fazni prostor, tj. Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}$. To ulaganje zovemo *realizacija* [13] i ona se zasniva na činjenici da je moguće izraziti nekomutativne operatore položaja $\hat{x}$ preko standardnih veličina x i p koji generiraju Heisenbergovu algebru. Iako su poopćene simetrija opisane formalizmom Hopfovih algebri, zanimljivo je da Heisenbergova algebra ima strukturu Hopfovog algebroida [18; 19; 20; 21]. Zanimljivo je da se u matematičkoj literaturi Hopfov algebroid pojavljuje tek u zadnjih 15-tak godina [22; 23; 24]. Koristeći realizaciju i svojstva kvantnog faznog prostora moguće je formulirati i poopćeni operator zakretanja, $\star$-produkt te reproducirati κ-Poincaré-Hopfovu algebru.

Konstrukcija fizikalnih teorija na κ-Minkowskijevom prostoru vodi na zanimljiva nova svojstva. Na primjer, modifikacija čestične statistike [25; 26; 28], nekomutativnu kvantnu mehaniku [29], deformirane Maxwellove jednadžbe [30; 31] i efekte kvantne gravitacije [32; 33]. Formuliranje kvantne teorije polja na kappa-Minkowski prostoru je područje od izrazitog interesa i još uvijek je predmet istraživanja [34; 35; 36]. κ-Minkowskijev prostor se može dovesti u vezu i s *doubly-special* relativnosti (DSR) te teorijama relativne lokalnosti [37].

Proučavanje fizike crnih rupa igra važnu ulogu u istraživanju kvantnih aspekata gravitacije. Iako su crne rupe klasična rješenja opće teorije relativnosti, mnogi uvidi u probleme poluklasičnog ili kvantnog opisa gravitacije su dobiveni upravo promatranjem teorije polja u pozadinskoj geometriji crnih rupa. Aspekti entropije crnih rupa i termodinamički efekti [82; 83; 84; 85; 86] su također proučavani unutar teorije struna [95; 87], „loop“ kvantne gravitacije [88], konformalne teorije polja [89; 90; 91] i sličnih pristupa [92; 93]. Polazeći od sličnih principa, pokušaji konstruiranja nekomutativne teorije gravitacije i nekomutativnih crnih rupa su istraživani u[47; 94; 51; 96; 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103].

Pokazuje se da je nekomutativna inačica BTZ crne rupe u potpunosti opisana s κ-deformiranom algebrom [32; 104]. Slično, κ-deformirane algebre su se našle i u opisu Kerrovih crnih rupa [105] te u nekim varijantama kozmologije [51]. Čini se da postoji određena univerzalnost u κ-deformiranim algebrama, budući se one javljaju kao nekomutativne verzije različitih klasičnih geometrija. Stoga je iznimno interesantno dalje proučavati svojstva crnih rupa u okviru κ-Minkowskijevog prostora.

Ovaj rad se može podjeliti u tri glavna dijela:

1. Pripremiti matematičke alate i metode nekomutativnih prostora za perturbativni opis fizikalnih teorija na Plankovoj skali (posebice elektrodinamike i gravitacije).

2. Poopćiti „Feynmanov pristup“ za κ-Minkowskijev prostor do prvog reda u deformacijskom parametru. Proučavati dinamiku čestica na κ-Minkowskijevom prostoru te naći najniže nekomutativne korekcije Lorentzovoj sili, Maxwellovim jednadžbama i geodetskoj jednadžbi.

3. Formulirati teoriju nekomutativnog skalarnog polja u pozadini BTZ crne rupe te izračunati nekomutativne doprinose entropiji.

Ovdje se prva točka temelji na rezultatima iz

- **T. Jurić**, S. Meljanac and R. Štrajn, "*κ-Poincare-Hopf algebra and Hopf algebroid structure of phase space from twist*", Physics Letters A 377 (2013), pp. 2472-2476, arXiv:1303.0994 [hep-th]

- **T. Jurić**, S. Meljanac, R. Štrajn, "*Twists, realizations and Hopf algebroid structure of κ-deformed phase space*", Int. J. Mod. Phys. A Vol. 29 (2014) 1450022.

- **T.Jurić**, D. Kovačević and S. Meljanac, "κ-deformed phase space, Hopf algebroid and twisting," SIGMA 10 (2014), 106, 18, arXiv:1402.0397 [math-ph]

druga na rezultatima iz

- E. Harikumar, **T. Jurić** and S. Meljanac, "*Electrodynamics on κ-Minkowski space-time*", Phys. Rev. D 84, 085020 (2011), arXiv:1107.3936 [hep-th]

- E. Harikumar, **T. Jurić** and S. Meljanac, "*Geodesic equation in κ-Minkowski spacetime,*" , Phys. Rev. D 86,045002 (2012), arXiv:1203.1564 [hep-th]

a treća na rezultatima iz

- K. S. Gupta, E. Harikumar, **T. Jurić**, S. Meljanac and A. Samsarov, "*Effects of Noncommutativity on the Black Hole Entropy*," Adv. High Energy Phys. Vol. 2014 (2014), Article ID 139172, arXiv:1312.5100 [hep-th]

Poglavlje 1

Deformacije Minkowskijevog prostora

§ 1.1 κ-deformirani fazni prostor

κ-Minkowskijev prostor je generiran nekomutativnim koordinatama $\{\hat{x}_\mu\}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ koje zadovoljavaju

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \equiv \hat{x}_\mu \hat{x}_\nu - \hat{x}_\nu \hat{x}_\mu = i(a_\mu \hat{x}_\nu - a_\nu \hat{x}_\mu), \tag{1.1}$$

gdje je a_μ deformacijski vektor, a mi ćemo često razmatrati poseban slučaj kada vrijedi $a_\mu = (a_0, \vec{0})$. Definirati ćemo realizaciju nekomutativnih koordinata $\hat{x}_\mu$ preko komutativnih koordinata x_μ i impulsa p_μ kao

$$\hat{x}_\mu = x_\alpha \varphi^\alpha{}_\mu(p). \tag{1.2}$$

Komutativne koordinate x_μ i impuls p_μ generiraju Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}$, tj. kvantni fazni prostor te zadovoljavaju

$$\begin{aligned}
&[x_\mu, x_\nu] \equiv x_\mu x_\nu - x_\nu x_\mu = 0, \\
&[p_\mu, p_\nu] \equiv p_\mu p_\nu - p_\nu p_\mu = 0, \\
&[p_\mu, x_\nu] \equiv p_\mu x_\nu - x_\nu p_\mu = i\eta_{\mu\nu}\ 1,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

gdje je $\eta_{\mu\nu} = \text{dijag}(+, -, -, -)$. Kvantni fazni prostor $\mathcal{H}$ je definiran kao slobodna unitalna algebra generirana s x_μ i p_μ, podjeljena s idealom koji je generiran relacijama (1.3). Za bazne elemente u $\mathcal{H}$ biramo normalno uređene monome, tj. koordinate položaja x_μ su uvijek lijevo u odnosu na impuls p_μ, pa možemo simbolički pisati $\mathcal{H} = \mathcal{A}\ \mathcal{T}$, gdje je $\mathcal{A}$ unitalna komutativna algebra generirana s x_μ, a $\mathcal{T}$ je unitalna komutativna algebra generirana s p_μ. $\mathcal{H}$ nema strukuturu Hopfove algebre (vidi Dodatak A), već strukturu Hopfovog algebroida iznad bazne algebre $\mathcal{A}$ (vidi Dodatak B). Funkcije ${\varphi^\alpha}_\mu(p)$ definirane u jednadžbi (1.2) moraju zadovoljavati

$$\frac{\partial {\varphi^\alpha}_\mu}{\partial p^\beta}{\varphi^\beta}_\nu - \frac{\partial {\varphi^\alpha}_\nu}{\partial p^\beta}{\varphi^\beta}_\mu = a_\nu {\varphi^\alpha}_\mu - a_\mu {\varphi^\alpha}_\nu. \tag{1.4}$$

U limesu $a_\mu \to 0$ imamo ${\varphi^\alpha}_\mu \to {\delta^\alpha}_\mu$. Jednadžba (1.4) ima beskonačno mnogo rješenja. Za jedno dano rješenje ${\varphi^\alpha}_\mu$ moguće je izgenerirati sva ostala pomoću transformacija sličnosti (to ćemo ilustrirati malo kasnije).

Postoji izomorfizam između nekomutativne algebre $\hat{\mathcal{A}}$, generirane s $\{\hat{x}_\mu\}$ i algebre $\mathcal{A}_\star$, generirane s $\{x_\mu\}$, ali sa *star* množenjem $\star$ kao množenjem u algebri. *Star* produkt između dva elementa iz $\mathcal{A}_\star$, tj. $f(x)$ i $g(x)$ je definiran kao

$$f(x) \star g(x) = \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \triangleright 1, \tag{1.5}$$

gdje su $\hat{f}(\hat{x})$ i $\hat{g}(\hat{x})$ elementi $\hat{\mathcal{A}}$ koji zadovoljavaju

$$\hat{f}(\hat{x}) \triangleright 1 = f(x), \quad \hat{g}(\hat{x}) \triangleright 1 = g(x), \tag{1.6}$$

a akcija $\triangleright$ je definirana na sljedeći način

$$x_\mu \triangleright f(x) = x_\mu f(x), \quad p_\mu \triangleright f(x) = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \tag{1.7}$$

Ovako definiran *star* produkt (1.5) je asocijativan za bilo koji izbor realizacije ${\varphi^\alpha}_\mu(p)$. Zbog postojanja izomorfizma između $\hat{\mathcal{A}}$ i $\mathcal{A}_\star$ slijedi da je ${\varphi^\alpha}_\mu(p)$ invertibilna (i obratno), tj. imamo ${\varphi^\alpha}_\mu {(\varphi^{-1})^\mu}_\beta = {\delta^\alpha}_\beta$.

κ-deformirani fazni prostor je generiran s $\hat{x}_\mu$ i p_μ te ga ponekad zovemo i deformirana Heisenbergova algebra i označavamo ga s $\hat{\mathcal{H}}$. Korisno je definirati akciju* $\blacktriangleright : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{A}}$, gdje je, simbolički, $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{A}}\,\mathcal{T}$, a $\hat{\mathcal{A}}$ je podalgebra od $\hat{\mathcal{H}}$ generirana s $\hat{x}_\mu$, dok je $\mathcal{T}$ također podalgebra od $\hat{\mathcal{H}}$ generirana s p_μ:

$$\begin{gathered} \hat{x}_\mu \blacktriangleright \hat{g}(\hat{x}) = \hat{x}_\mu \hat{g}(\hat{x}), \quad p_\mu \blacktriangleright 1 = 0, \\ p_\mu \blacktriangleright \hat{x}_\nu = -i\eta_{\mu\nu}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Iz Lebnizovog pravila

$$\hat{x}_\mu \blacktriangleright \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) = \hat{x}_\mu \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \tag{1.9}$$

*Vidi [55].

možemo iščitati da je koprodukt $\Delta\hat{x}_\mu$ dan sa

$$\Delta\hat{x}_\mu = \hat{x}_\mu \otimes 1. \tag{1.10}$$

Važno je napomenuti da $\hat{\mathcal{H}}$ ima strukturu Hopfovog algebroida iznad bazne algebre $\hat{\mathcal{A}}$ (vidi Dodatak B i [19]).

Za bilo koji izbor realizacije ${\varphi^\alpha}_\mu(p)$ možemo konstruirati pripadajući koprodukt za x_μ i p_μ koristeći Leibnizova pravila za $p\triangleright(f\star g)$ i $x\triangleright(f\star g)$ koja se dobiju korištenjem svojstva $h_1h_2\triangleright f(x) = h_1\triangleright(h_2\triangleright f(x))$, gdje $h_1,\ h_2 \in \mathcal{H}$ (vidi [18]). Ova konstrukcija vodi do strukture Hopfovog algebroida [22; 23; 24]. Koprodukt Δx_μ se može dobiti i na sljedeći način

$$\begin{aligned}\Delta x_\mu &= \Delta(\hat{x}_\alpha{(\varphi^{-1})^\alpha}_\mu) = \Delta(\hat{x}_\alpha)\Delta{(\varphi^{-1})^\alpha}_\mu \\ &= (\hat{x}_\alpha \otimes 1)\Delta{(\varphi^{-1})^\alpha}_\mu = (x_\nu{\varphi^\nu}_\alpha \otimes 1)\Delta{(\varphi^{-1})^\alpha}_\mu.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Koprodukt za p_μ se može naći koristeći[†]

$$e^{ip\hat{x}} \triangleright e^{iqx} = e^{iP_\mu(p,q)x^\mu} \tag{1.12}$$

i računajući *star* produkt između dva ravna vala

$$e^{ipx} \star e^{iqx} = e^{i\mathcal{D}_\mu(p,q)x^\mu}, \tag{1.13}$$

gdje je $\mathcal{D}_\mu(p,q) = P_\mu(K^{-1}(p),q)$ i $K(p) = P(p,0)$. Funkcija P_μ je jedinstveno zadana izborom realizacije ${\varphi^\alpha}_\mu$ preko

$$\frac{\mathrm{d}P_\mu(\lambda p,q)}{\mathrm{d}\lambda} = p^\alpha\varphi_{\mu\alpha}(P), \tag{1.14}$$

gdje je λ realni parametar. Funkcija $\mathcal{D}_\mu(p,q)$ određuje pravilo zbrajanja u impulsnom prostoru, $\mathcal{D}(p,q) = p \oplus q$, iz kojeg slijedi i koprodukt za impuls, $\mathcal{D}_\mu(p\otimes 1, 1\otimes p) = \Delta p_\mu$. Koprodukt je jedinstveni matematički objekt za fiksnu deformaciju a_μ. Koprodukti u različitim realizacijama su povezani pomoću transformacija sličnosti. Kada $a_\mu \to 0$ koprodukt Δ se svodi na Δ_0:

$$\Delta_0 x_\mu = x_\mu \otimes 1, \quad \Delta_0 p_\mu = p_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p_\mu, \tag{1.15}$$

gdje smo generirali klasu ekvivalencije u $\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}$ pomoću ideala

$$\mathcal{I}_0 = \mathcal{U}_+(\mathcal{R}_0)(\mathcal{A}\otimes 1)\Delta_0\mathcal{T}, \tag{1.16}$$

[†]Vidi [36], [56] [57; 58].

gdje su $\mathcal{U}_+(\mathcal{R}_0)$ univerzalna omotačka algebra generirana s $(\mathcal{R}_0)_\mu$, ali bez jediničnog elementa i $\Delta_0\mathcal{T} = \mathcal{C}[[\Delta_0 p]] \subset \mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$ je slika od $\mathcal{T}$ u $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}$. Elementi $\mathcal{R}_0$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned}[x_\mu \otimes 1, \mathcal{R}_0] = 0, \quad [\Delta_0 p_\mu, \mathcal{R}_0] = 0,\\ [(\mathcal{R}_0)_\mu, (\mathcal{R}_0)_\nu] = 0.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Pošto se Heisenbergova algebra $\mathcal{H}$ može shvatiti kao $\mathcal{H} = \mathcal{A}\ \mathcal{T}$ slijedi da je $\Delta_0\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{R}_0)(\mathcal{A}\otimes 1)\Delta_0\mathcal{T}/\mathcal{I}_0 = [(\mathcal{A}\otimes 1)\Delta_0\mathcal{T} + \mathcal{I}_0]/\mathcal{I}_0$ algebra koja je izomorfna s $\mathcal{H}$ i da je $\Delta_0\mathcal{A} = (\mathcal{A}\otimes 1 + \mathcal{I}_0)/\mathcal{I}_0 = (\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} + \mathcal{I}_0)/\mathcal{I}_0$ algebra izomorfna s $\mathcal{A}$.

Možemo definirati kojedinicu ϵ_0 na sljedeći način, $\epsilon_0(h) = h \triangleright 1$ za svaki $h \in \mathcal{H}$. Koprodukt Δ_0 i kojedinica ϵ_0 definiraju strukturu bialgebroida kvantnog faznog prostora. Uvođenjem i antipoda S_0, Heisenbergova algebra $\mathcal{H}$ ima strukturu Hopfovog algebroida (vidi Dodatak B).

1.1.1 Operator zakretanja

Postoji veza između deformiranog koprodukta Δ i nedeformiranog Δ_0 preko bidiferencijalnog operatora zakretanja (*eng.* twist) $\mathcal{F}$

$$\Delta h = \mathcal{F}\Delta_0 h \mathcal{F}^{-1}, \tag{1.18}$$

za svaki $h \in \mathcal{H}$. Dakle,

$$\Delta x_\mu = \mathcal{F}\Delta_0 x_\mu \mathcal{F}^{-1}, \quad \Delta p_\mu = \mathcal{F}\Delta_0 p_\mu \mathcal{F}^{-1}. \tag{1.19}$$

Star produkt je sada dan sa

$$f(x) \star g(x) = m_\star(f(x)\otimes g(x)) = m\left(\mathcal{F}^{-1} \triangleright (f\otimes g)\right), \tag{1.20}$$

gdje je m preslikavanje množenja definirano s $m(h_1\otimes h_2) = h_1 h_2$, a $m_\star$ je preslikavanje *star* množenja definirano s $m_\star(h_1\otimes h_2) = h_1 \star h_2$, $\forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$. Primjetimo da se $\star$-produkt ne mijenja ako napravimo zamjenu $\mathcal{F}^{-1} \to \mathcal{F}^{-1} + \mathcal{J}_0$, gdje je

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{U}_+(\mathcal{R}_0)\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} \tag{1.21}$$

desni ideal sa svojstvom $m(\mathcal{J}_0 \triangleright (f\otimes g)) = 0$. Također je važno za uočiti da $f(x)g(x) = m(f\otimes g) = m_\star(\mathcal{F}\triangleright(f\otimes g))$ se ne mijenja ako zamjenimo $\mathcal{F} \to \mathcal{F} + \mathcal{J}$, gdje je $\mathcal{J}$ također desni ideal definiran s

$$\mathcal{J} = \mathcal{U}_+(\mathcal{R})\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} = \mathcal{F}\mathcal{J}_0, \tag{1.22}$$

gdje je $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{F}(\mathcal{R}_0)\mathcal{F}^{-1}$. Glavno svojstvo desnog ideala $\mathcal{J}$ je $m_\star(\mathcal{J}\triangleright(f\otimes g)) = 0$. Za desne ideale $\mathcal{J}_0$ i $\mathcal{J}$ vrijede sljedeća svojstva

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) = \mathcal{J}_0, \quad \mathcal{J}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}) = \mathcal{J}, \\ \mathcal{J} = \mathcal{F}\mathcal{J}_0\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathcal{J}_0, \\ \mathcal{J}\mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}_0\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_0. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Operator zakretanja mora zadovoljavati tri uvjeta:

1. uvjet kocikličnosti:

$$(\mathcal{F}\otimes 1)(\Delta_0\otimes 1)\mathcal{F} = (1\otimes\mathcal{F})(1\otimes\Delta_0)\mathcal{F}, \tag{1.24}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\otimes 1)(\Delta\otimes 1)\mathcal{F}^{-1} = (1\otimes\mathcal{F}^{-1})(1\otimes\Delta)\mathcal{F}^{-1}, \tag{1.25}$$

2. uvjet normalizacije:

$$m(\epsilon_0\otimes 1)\mathcal{F} = 1 = m(1\otimes\epsilon_0)\mathcal{F}, \tag{1.26}$$

3. u limesu $a_\mu \to 0$ mora slijediti $\mathcal{F}\to 1\otimes 1$,

Može se pokazati da je $\Delta\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathcal{R})(\mathcal{A}\otimes 1)_\mathcal{F}\Delta\mathcal{T}/\mathcal{I}$ algebra izomorfna s $\mathcal{H}$ gdje su $(\mathcal{A}\otimes 1)_\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{A}\otimes 1)\mathcal{F}^{-1}$ i $\mathcal{I} = \mathcal{F}\,(\mathcal{I}_0)\,\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{U}_+(\mathcal{R})(\mathcal{A}\otimes 1)_\mathcal{F}\Delta\mathcal{T}$. Također vrijedi da je $\Delta\mathcal{A} = \mathcal{F}\,(\Delta_0\mathcal{A})\,\mathcal{F}^{-1} = ((\mathcal{A}\otimes 1)_\mathcal{F}+\mathcal{I})/\mathcal{I}$ algebra izomorfna s $\mathcal{A}$. Elementi $\mathcal{R}_\mu$ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} [\Delta x_\mu, \mathcal{R}] = 0, \quad [\Delta p_\mu, \mathcal{R}] = 0, \\ [\mathcal{R}_\mu, \mathcal{R}_\nu] = 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Za ideale $\mathcal{I}_0$ i $\mathcal{I}$ imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0\Delta_0\mathcal{H} = \Delta_0\mathcal{H}\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0, \quad \mathcal{I}\Delta\mathcal{H} = \Delta\mathcal{H}\mathcal{I} = \mathcal{I}, \\ \mathcal{I}\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{J}, \quad \mathcal{I}_0\mathcal{I} \subset \mathcal{J}_0. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Operator zakretanja $\mathcal{F}$ definiran u (1.18) je preslikavanje $\mathcal{F} : \Delta_0\mathcal{H} \mapsto \Delta\mathcal{H}$ i $\mathcal{F} \in (\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})/\mathcal{J}$, dok je inverz $\mathcal{F}^{-1}$ preslikavanje $\mathcal{F}^{-1} : \Delta\mathcal{H} \mapsto \Delta_0\mathcal{H}$ i $\mathcal{F}^{-1} \in (\mathcal{H}\otimes\mathcal{H})/\mathcal{J}_0$. Stoga imamo $\Delta_0 h : \Delta_0\mathcal{H} \mapsto \Delta_0\mathcal{H}$ i $\Delta h : \Delta\mathcal{H} \mapsto \Delta\mathcal{H}$. Zakrenuta struktura kvantnog faznog prostora $\mathcal{H}$ je također Hopfov algebroid, ali iznad bazne algebre $\hat{\mathcal{A}}$, gdje su elementi iz $\hat{\mathcal{A}}$ izvrijednjeni u nekoj realizaciji (vidi Dodatak B).

Za danu realizaciju $\varphi^{\alpha}{}_{\mu}(p)$, jednadžbu (1.2) i pripadajuće koprodukte Δx i Δp, možemo konstruirati operator zakretanja $\mathcal{F}$ koristeći perturbativne metode. Izrazimo Δx i Δp kao formalni red u deformacijskom parametru $a_0 \equiv a$

$$\Delta x = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k x, \quad \Delta p = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k p, \tag{1.29}$$

gdje su $\Delta_0 x$ i $\Delta_0 p$ dani u (1.15), a $\Delta_k x, \Delta_k p \propto a^k$. Za operator zakretanja imamo

$$\mathcal{F} = \mathrm{e}^f, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k, \tag{1.30}$$

gdje možemo simbolički pisati $f_k \propto a^k x p^{k+1}$. Koristeći (1.19) i uspoređujući (1.29) i (1.30) red po red, dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta_1 x &= [f_1, \Delta_0 x] \\
\Delta_2 x &= [f_2, \Delta_0 x] + \frac{1}{2}[f_1, [f_1, \Delta_0 x]] \\
\Delta_3 x &= [f_3, \Delta_0 x] + \frac{1}{2}\left([f_1, [f_2, \Delta_0 x]] + [f_2, [f_1, \Delta_0 x]]\right) + \frac{1}{3!}[f_1, [f_1, [f_1, \Delta_0 x]]] \\
&... \\
\Delta_k x &= [f_k, \Delta_0 x] + ... + \frac{1}{k!}[f_1, [f_1, ...[f_1, \Delta_0 x]]] \\
&...
\end{aligned} \tag{1.31}$$

i analogno za Δp_μ. Uočite da za $\Delta_1 x$ i $\Delta_1 p$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\Delta_1 x_\mu &= a_0 x_\alpha \left[1 \otimes \frac{\partial [\varphi^{-1}]^{\alpha}{}_{\mu}}{\partial a_0} + \frac{\partial \varphi^{\alpha}{}_{\mu}}{\partial a_0} \otimes 1\right]_{a_0=0}, \\
\Delta_1 p_\mu &= a_0 p_\alpha \otimes \left[\frac{\partial \varphi_{\mu}{}^{\alpha}}{\partial a_0}\right]_{a_0=0}.
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Važno je uočiti da asocijativni $\star$-produkt implicira uvjet kocikličnosti za operator zakretanja $\mathcal{F}$ do na ideal $\mathcal{J}$. Ovo je obrat tvrdnje iz [59], gdje je pokazano da operator zakretanja koji zadovoljava kociklični uvjet vodi na asocijativni $\star$-produkt.

U radovima [13] dana je eksplicitna formula za operator $\mathcal{F}^{-1}$ preko Δp_μ, koja daje asocijativni $\star$-produkt

$$\mathcal{F}^{-1} =: \exp\left(i x_\alpha (\Delta - \Delta_0) p^\alpha\right) : \quad \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{J}_0, \tag{1.33}$$

gdje : : označava normalno uređenje, tj. svi x -evi su nalijevo od p -ova. Koristeći relaciju $(\mathcal{R}_0)_\mu = x_\mu \otimes 1 - 1 \otimes x_\mu \equiv 0$ može se pokazati da $\mathcal{F}^{-1}$ zadovoljava sva tri uvjeta za operator zakretanja. Ovo je i pokazano u [26] za beskonačnu klasu Abelovih operatora zakretanja. Lako je za vidjeti da korištenjem (1.32) i (1.33) možemo izračunati $\mathcal{F}^{-1}$ u prvom redu po a_0, za proizvoljnu realizaciju

$$\mathcal{F}^{-1} = 1 \otimes 1 + i a_0 x^\alpha p_\beta \otimes \left[\frac{\partial {\varphi_\alpha}^\beta}{\partial a_0} \right]_{a_0=0} + O(a_0^2). \tag{1.34}$$

Za različite koprodukte Δx unutar dane klase ekvivalencije generirane s $\mathcal{R}$ možemo konstruirati familije različitih operatora zakretanja, no oni su svi ekvivalentni nakon korištenja tenzorskih relacija $\mathcal{R}$. Ove tenzorske relacije se trebaju koristiti u razvoju operatora zakretanja red po red. Dakle, ovime zaključujemo da imamo dobro definiranu proceduru za računanje $\mathcal{F}$ za danu realizaciju ${\varphi^\alpha}_\beta$.

§ 1.2 Teorija realizacija i transformacije sličnosti

1.2.1 Kvantni fazni prostor

Različite realizacije odgovaraju različitim bazama Heisenbergove algebre. Nedeformirana Heisenbergova algebra je matematički okvir za opisivanje kvantnog faznog prostora. Različite baze Heisenbergove algebre su povezane kvantnim kanonskim transformacijama. Mi ćemo promatrati poseban podskup tih transformacija, koje zovemo transformacije sličnosti, a one povezuju Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}^{(1)}$ generiranu s $\left\{x^{(1)}, p^{(1)}\right\}$ i Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}^{(2)}$ generiranu s $\left\{x^{(2)}, p^{(2)}\right\}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_\mu^{(2)} &= \mathcal{S}^{(1,2)} x_\mu^{(1)} \left[\mathcal{S}^{(1,2)}\right]^{-1} \equiv x_\alpha^{(1)} {\left[\psi^{(1,2)}\right]^\alpha}_\mu \\ p_\mu^{(2)} &= \mathcal{S}^{(1,2)} p_\mu^{(1)} \left[\mathcal{S}^{(1,2)}\right]^{-1} \equiv \Lambda_\mu^{(1,2)} \end{aligned} \tag{1.35}$$

i obratno

$$\begin{aligned} x_\mu^{(1)} &= \mathcal{S}^{(2,1)} x_\mu^{(2)} \left[\mathcal{S}^{(2,1)}\right]^{-1} \equiv x_\alpha^{(2)} {\left[\psi^{(2,1)}\right]^\alpha}_\mu \\ p_\mu^{(1)} &= \mathcal{S}^{(2,1)} p_\mu^{(2)} \left[\mathcal{S}^{(2,1)}\right]^{-1} \equiv \Lambda_\mu^{(2,1)} \end{aligned} \tag{1.36}$$

gdje su $\psi^{(1,2)}$ i $\Lambda_\mu^{(1,2)}$ samo funkcije od $p^{(1)}$, dok su $\psi^{(2,1)}$ i $\Lambda_\mu^{(2,1)}$ samo funkcije od $p^{(2)}$. $\mathcal{S}^{(1,2)}$ je funkcija od $x_\mu^{(1)}$ i $p_\mu^{(1)}$, a $\mathcal{S}^{(2,1)}$ je funkcija od $x_\mu^{(2)}$ i $p_\mu^{(2)}$. Jednadžbe (1.35) i (1.36) impliciraju

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2,1)}(p^{(2)}) &= \left[\mathcal{S}^{(1,2)}(p^{(1)})\right]^{-1} \\ \psi^{(2,1)}(p^{(2)}) &= \left[\psi^{(1,2)}(p^{(1)})\right]^{-1} \\ \Lambda^{(2,1)}(p^{(2)}) &= \Lambda^{(2,1)}\left(\Lambda^{(1,2)}(p^{(1)})\right) \end{aligned} \tag{1.37}$$

Pošto obje algebre $\left\{x^{(1)}, p^{(1)}\right\}$ i $\left\{x^{(2)}, p^{(2)}\right\}$ generiraju nedeformiranu Heisenbergovu algebru, tj. jednadžba (1.3) za svaku od njih vrijedi, uz (1.35, 1.36) slijedi

$$\left[\psi^{(1,2)}\right]^{-1}_{\mu\nu} = \frac{\partial\Lambda_\mu^{(1,2)}}{\partial(p^{(1)})^\nu}\ , \quad \left[\psi^{(2,1)}\right]^{-1}_{\mu\nu} = \frac{\partial\Lambda_\mu^{(2,1)}}{\partial(p^{(2)})^\nu} \tag{1.38}$$

Jednadžbe (1.35, 1.36, 1.37, 1.38) možemo unificirati na sljedeći način:

$$x_\mu^{(j)} = \mathcal{S}^{(i,j)} x_\mu^{(i)} \left[\mathcal{S}^{(i,j)}\right]^{-1} \equiv x_\alpha^{(i)} \left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\mu \tag{1.39a}$$

$$p_\mu^{(j)} = \mathcal{S}^{(i,j)} p_\mu^{(i)} \left[\mathcal{S}^{(i,j)}\right]^{-1} \equiv \Lambda_\mu^{(i,j)} \tag{1.39b}$$

$$\left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\beta \equiv \left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\beta(p^i), \qquad \Lambda_\mu^{(i,j)} \equiv \Lambda_\mu^{(i,j)}(p^{(i)}), \tag{1.39c}$$

$$\mathcal{S}^{(i,j)} \equiv \mathcal{S}^{(i,j)}(x^{(i)}, p^{(i)}) = \left[\mathcal{S}^{(j,i)}\right]^{-1}(x^{(j)}, p^{(j)}) \tag{1.39d}$$

$$\left[\psi^{(i,j)}\right]^{-1}_{\mu\nu} = \frac{\partial\Lambda_\mu^{(i,j)}}{\partial(p^{(i)})^\nu} \tag{1.39e}$$

gdje su $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$. Za ove transformacije sličnosti $\mathcal{S}^{(i,j)}$ vrijedi $\mathcal{S}^{(i,j)} = \exp(x_\alpha^{(i)}\Sigma^\alpha)$, gdje je Σ^α samo funkcija od $p^{(i)}$. Nadalje imamo

$$p_\mu^{(j)} = p_\mu^{(i)} + \frac{\mathrm{e}^O - 1}{O}\Sigma_\mu, \quad i, j = 1, 2 \text{ and } i \neq j \tag{1.40}$$

gdje je $O = \Sigma^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha^{(i)}}$.

Nedeformirane Heisenbergove algebre $\mathcal{H}^{(1)}$ i $\mathcal{H}^{(2)}$ su izomorfne $\mathcal{H}^{(1)} \cong \mathcal{H}^{(2)}$. Možemo definirati akcije[‡] $\triangleright_{(1)}$ i $\triangleright_{(2)}$ kao preslikavanja $\triangleright_{(1)} : \mathcal{H}^{(1)} \mapsto \mathcal{A}^{(1)}$ i $\triangleright_{(2)} : \mathcal{H}^{(2)} \mapsto \mathcal{A}^{(2)}$ definirana sa

$$\begin{aligned} x_\mu^{(1)} \triangleright_{(1)} 1 = x_\mu^{(1)}, &\quad x_\mu^{(2)} \triangleright_{(2)} 1 = x_\mu^{(2)}, \\ p_\mu^{(1)} \triangleright_{(1)} 1 = 0, &\quad p_\mu^{(2)} \triangleright_{(2)} 1 = 0, \\ f^{(2)} \triangleright_{(1)} 1 = f^{(1)}, &\quad f^{(1)} \triangleright_{(2)} 1 = f^{(2)}, \end{aligned} \tag{1.41}$$

‡Algebra $\mathcal{A}^{(1)}$ je generirana s $x_\mu^{(1)}$, algebra $\mathcal{A}^{(2)}$ s $x_\mu^{(2)}$.

gdje su $f^{(1)} \equiv f^{(1)}(x^{(1)})$ i $f^{(2)} \equiv f^{(2)}(x^{(2)})$ redom elementi $\mathcal{A}^{(1)}$ i $\mathcal{A}^{(2)}$. Možemo definirati *star* produkte $*_{(1)}$ i $*_{(2)}$ na sljedeći način

$$f^{(2)}g^{(2)} \triangleright_{(1)} 1 = f^{(1)} *_{(1)} g^{(1)} \tag{1.42a}$$

$$f^{(1)}g^{(1)} \triangleright_{(2)} 1 = f^{(2)} *_{(2)} g^{(2)} \tag{1.42b}$$

koji su komutativni i asocijativni. Ako $\Lambda^{(i,j)}_\mu(p^{(i)}) \neq p^{(i)}_\mu$ (tj. $\Lambda^{(i,j)}$ ima više potencije od $p^{(i)}$) tada su *star* produkti $*_{(1)}$ i $*_{(2)}$ nelokalni.

Za algebru $\mathcal{H}^{(1)}$ možemo konstruirati koprodukt $\Delta^{(1)}_0$, a za algebru $\mathcal{H}^{(2)}$ koprodukt $\Delta^{(2)}_0$, tj.

$$\Delta^{(i)}_0 x^{(i)}_\mu = x^{(i)}_\mu \otimes 1, \quad \Delta^{(i)}_0 p^{(i)}_\mu = p^{(i)}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p^{(i)}_\mu \tag{1.43}$$

gdje smo generirali klasu ekvivalencije u $\mathcal{H}^{(i)} \otimes \mathcal{H}^{(i)}$ pomoću idela

$$\mathcal{I}^{(i)}_0 = \mathcal{U}_+(\mathcal{R}^{(i)}_0)(\mathcal{A}^{(i)} \otimes 1)\Delta^{(i)}_0 \mathcal{T}^{(i)}, \tag{1.44}$$

gdje je $\mathcal{R}^{(i)}_0 \equiv x^{(i)}_\mu \otimes 1 - 1 \otimes x^{(i)}_\mu$. Može se pokazati da je

$$\Delta^{(i)}_0 \left(\mathcal{A}^{(i)}\right) = \left(\mathcal{A}^{(i)} \otimes 1 + \mathcal{I}^{(i)}_0\right) / \mathcal{I}^{(i)}_0 = \left(\mathcal{A}^{(i)} \otimes \mathcal{A}^{(i)} + \mathcal{I}^{(i)}_0\right) / \mathcal{I}^{(i)}_0 \tag{1.45}$$

algebra izomorfna s algebrom $\mathcal{A}^{(i)}$. Koristeći (1.39) i homomorfizam koprodukta $\Delta^{(i)}_0(h_1 h_2) = \Delta^{(i)}_0(h_1)\Delta^{(i)}_0(h_2)$ za svaki $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^{(i)}$ slijedi

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}_0 x^{(i)}_\mu &= \left(\mathcal{S}^{(j,i)} \otimes \mathcal{S}^{(j,i)}\right) \Delta^{(j)}_0 x^{(j)}_\mu \left(\mathcal{S}^{(i,j)} \otimes \mathcal{S}^{(i,j)}\right) \\ \Delta^{(i)}_0 p^{(i)}_\mu &= \left(\mathcal{S}^{(j,i)} \otimes \mathcal{S}^{(j,i)}\right) \Delta^{(j)}_0 p^{(j)}_\mu \left(\mathcal{S}^{(i,j)} \otimes \mathcal{S}^{(i,j)}\right) \end{aligned} \tag{1.46}$$

Također valja uočiti i sljedeće

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}_0 x^{(j)}_\mu &= \Delta^{(i)}_0 \left(x^{(i)}_\alpha \left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\mu\right) = \Delta^{(i)}_0 \left(x^{(i)}_\alpha\right) \Delta^{(i)}_0 \left(\left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\mu\right) \neq x^{(j)}_\mu \otimes 1 \\ \Delta^{(i)}_0 p^{(j)}_\mu &= \Delta^{(i)}_0 \left(\mathcal{S}^{(i,j)}\right) \Delta^{(i)}_0 \left(p^{(i)}_\mu\right) \Delta^{(i)}_0 \left(\left[\mathcal{S}^{(i,j)}\right]^{-1}\right) \\ &= \Delta^{(i)}_0 \left(\mathcal{S}^{(i,j)}\right) p^{(i)}_\mu \otimes \Delta^{(i)}_0 \left(\left[\mathcal{S}^{(i,j)}\right]^{-1}\right) + \Delta^{(i)}_0 \left(\mathcal{S}^{(i,j)}\right) \otimes p^{(i)}_\mu \Delta^{(i)}_0 \left(\left[\mathcal{S}^{(i,j)}\right]^{-1}\right) \\ &\neq p^{(j)}_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p^{(j)}_\mu \end{aligned} \tag{1.47}$$

gdje su $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$. Napomenimo da je koprodukt Δ_0 jedinstveni matematički objekt i da je $\Delta^{(i)}_0$ samo njegova realizacija u algebri $\mathcal{H}^{(i)}$. Pošto su *star*-produkti (1.42) komutativni i asocijativni, slijedi da su $\Delta_0^{(1)}$ i $\Delta_0^{(2)}$ kokomutativni (1.48a) i koasocijativni (1.48b)

$$\tilde{\Delta}_0^{(i)} h = \tau_0 \, \Delta_0^{(i)} h \, \tau_0 = \Delta_0^{(i)} h, \tag{1.48a}$$

$$\left(\Delta_0^{(i)} \otimes 1\right) \Delta_0^{(i)} = \left(1 \otimes \Delta_0^{(i)}\right) \Delta_0^{(i)}, \tag{1.48b}$$

za bilo koji $h \in \mathcal{H}^{(i)}$, gdje je τ_0 flip operator definiram s $\tau_0 : \; h_1 \otimes h_2 \mapsto h_2 \otimes h_1, \forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}^{(i)}$. Kokomutativnost koprodukta vodi na trivijalnu R-matricu, tj. $R = 1 \otimes 1$ (do na desni ideal $\mathcal{J}_0$).

Veza između koprodukata $\Delta_0^{(1)}$ i $\Delta_0^{(2)}$ definira bidiferencijalne operatore zakretanja $\mathcal{F}^{(1,2)}$ $\mathcal{F}^{(2,1)}$ na sljedeći način

$$\Delta_0^{(2)} h = \mathcal{F}^{(1,2)} \left(\Delta_0^{(1)} h\right) \left[\mathcal{F}^{(1,2)}\right]^{-1}, \tag{1.49a}$$

$$\Delta_0^{(1)} h = \mathcal{F}^{(2,1)} \left(\Delta_0^{(2)} h\right) \left[\mathcal{F}^{(2,1)}\right]^{-1}, \tag{1.49b}$$

gdje su $h \in \mathcal{H}^{(i)}$ i $\mathcal{F}^{(i,j)} \equiv \mathcal{F}^{(i,j)}(x^{(i)}, p^{(i)})$. Iz (1.49) dobivamo

$$\mathcal{F}^{(1,2)}(x^{(1)}, p^{(1)}) = \left[\mathcal{F}^{(2,1)}\right]^{-1} (x^{(2)}, p^{(2)}) \tag{1.50}$$

ili zapisano na unificirani način

$$\begin{gathered} \Delta_0^{(j)} h = \mathcal{F}^{(i,j)} \left(\Delta_0^{(i)} h\right) \left[\mathcal{F}^{(i,j)}\right]^{-1} \\ \mathcal{F}^{(i,j)}(x^{(i)}, p^{(i)}) = \left[\mathcal{F}^{(j,i)}\right]^{-1} (x^{(j)}, p^{(j)}) \end{gathered} \tag{1.51}$$

gdje su $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$. Operatori $\mathcal{F}^{(1,2)}$ i $\mathcal{F}^{(2,1)}$ zadovoljavaju uvjete operatora zakretanja, tj. zadovoljavaju uvjet kocikličnosti (1.24) i normalizacijski uvjet (1.26). *Star*-produkt u (1.42) se može definirati i preko operatora zakretanja

$$f^{(j)} *_{(i)} g^{(j)} = m \left(\mathcal{F}^{(j,i)} \triangleright_{(i)} f^{(i)} \otimes g^{(i)}\right) \tag{1.52}$$

Uočimo da vrijedi

$$x_\mu^{(j)} = m \left(\mathcal{F}^{(j,i)} \triangleright_{(i)} \left(x_\mu^{(i)} \otimes 1\right)\right) = x_\alpha^{(i)} \left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\mu \tag{1.53}$$

Za relacije $\mathcal{R}_0^{(1)}$ i $\mathcal{R}_0^{(2)}$ slijedi

$$\mathcal{R}_0^{(j)} = \mathcal{F}^{(i,j)} \mathcal{R}_0^{(i)} \mathcal{F}^{(j,i)} \tag{1.54}$$

Koprodukt i operator zakretanja možemo shvatiti i kao preslikavanja

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(i)} h &: \Delta_0^{(i)} \mathcal{H}^{(i)} \mapsto \Delta_0^{(i)} \mathcal{H}^{(i)} \\ \mathcal{F}^{(i,j)} &: \Delta_0^{(i)} \mathcal{H}^{(i)} \mapsto \Delta_0^{(j)} \mathcal{H}^{(j)} \end{aligned} \tag{1.55}$$

gdje je $\Delta_0^{(i)}\mathcal{H}^{(i)} = \Big((\mathcal{A}^{(i)} \otimes 1)\Delta_0^{(i)}\mathcal{T}^{(i)} + \mathcal{I}_0^{(i)} \Big) / \mathcal{I}_0^{(i)}$. Koristeći (1.39, 1.43, 1.46, 1.49) možemo povezati operator zakretanja $\mathcal{F}^{(i,j)}$ s transformacijama sličnosti $\mathcal{S}^{(i,j)}$

$$\begin{aligned} \Delta_0^{(j)} p_\mu^{(i)} &= \mathcal{F}^{(i,j)} \Delta_0^{(i)} p_\mu^{(i)} \mathcal{F}^{(j,i)} \\ &= \mathcal{F}^{(i,j)} \left(\mathcal{S}^{(j,i)} \otimes \mathcal{S}^{(j,i)} \right) \Delta_0^{(j)} p_\mu^{(j)} \left(\mathcal{S}^{(i,j)} \otimes \mathcal{S}^{(i,j)} \right) \mathcal{F}^{(j,i)} \\ \text{(lijeva strana)} &= \left(\Delta_0^{(j)} \mathcal{S}^{(j,i)} \right) \Delta_0^{(j)} p_\mu^{(j)} \left(\Delta_0^{(j)} \mathcal{S}^{(i,j)} \right) \end{aligned} \tag{1.56}$$

te usporedbom zadnje dvije linije slijedi

$$\mathcal{F}^{(i,j)} = \Delta_0^{(j)} \mathcal{S}^{(j,i)} \left(\mathcal{S}^{(i,j)} \otimes \mathcal{S}^{(i,j)} \right). \tag{1.57}$$

Ovime smo u potpunosti definirali sve veze između Heisenbergovih algebri $\mathcal{H}^{(1)}$ i $\mathcal{H}^{(2)}$ te smo ilustrirali sve matematičke alate (koprodukt, operator zakretanja, *star*-produkt) koji se obično samo susreću u nekomutativnom slučaju.

1.2.2 κ-deformirani fazni prostor i realizacije

Sada ćemo analizirati realizacije nekomutativnog prostora (1.1) te ilustrirati proceduru kako naći vezu između operatora zakretanja (1.19) u raznim realizacijama. Vidjeli smo da se nekomutatvine koordinate $\hat{x}$ mogu realizirati pomoću algebre $\mathcal{H}^{(1)}$, ali i pomoću algebre $\mathcal{H}^{(2)}$. Za dvije različite realizacije nekomutativnih koordinata možemo pisati

$$\hat{x}_\mu = x_\alpha^{(1)} \left[\varphi^{(1)} \right]^\alpha{}_\mu = x_\alpha^{(2)} \left[\varphi^{(2)} \right]^\alpha{}_\mu , \tag{1.58}$$

gdje su $\left[\varphi^{(i)}\right]^\alpha{}_\mu \equiv \left[\varphi^{(i)}\right]^\alpha{}_\mu (p^{(i)})$ samo funkcije od $p^{(i)}$. Pošto algebre $\left\{x^{(1)}, p^{(1)}\right\}$ i $\left\{x^{(2)}, p^{(2)}\right\}$ generiraju nedeformiranu Heisenbergovu algebru, možemo ih povezati transformacijama sličnosti (1.35), pa dobivamo

$$\left[\varphi^{(i)}\right]^\alpha{}_\beta = \left[\psi^{(i,j)}\right]^\alpha{}_\sigma \left[\varphi^{(j)}\right]^\sigma{}_\beta \tag{1.59}$$

gdje su $i, j = 1, 2$ i $i \neq j$. Sada možemo uvesti novi operator zakretanja $\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}$, na isti način kao i u (1.19). Operator zakretanja sada ovisi o realizaciji $\varphi^{(i)}(p^{(i)})$. $\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}$ možemo izračunati za danu realizaciju $\varphi^{(i)}(p^{(i)})$ na način koji je opisan u (1.29-1.31). Dakle, za svaki $h \in \mathcal{H}^{(i)}$ imamo

$$\begin{aligned} \Delta h &= \mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})} \Delta_0^{(i)} h \left[\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}\right]^{-1} \\ \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \triangleright_{(i)} 1 &= f^{(i)} \star_{\varphi^{(i)}} g^{(i)} = m\left(\left[\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}\right]^{-1} \triangleright_{(i)} (f^{(i)} \otimes g^{(i)})\right) \end{aligned} \tag{1.60}$$

gdje treba naglasiti da koprodukt Δ i *star*-produkt $\star_{\varphi^{(i)}}$ ovise o realizaciji $\varphi^{(i)}$. Sada možemo naći vezu između dva operatora zakretanja $\mathcal{F}^{(1,\varphi^{(1)})}$ i $\mathcal{F}^{(2,\varphi^{(2)})}$. Koristeći (1.35, 1.49, 1.60) slijedi

$$\begin{aligned} \Delta h &= \mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})} \left(\Delta_0^{(i)} h\right) \left[\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}\right]^{-1} \\ &= \mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})} \left(\mathcal{F}^{(j,i)} \left(\Delta_0^{(j)} h\right) \mathcal{F}^{(i,j)}\right) \left[\mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})}\right]^{-1} \\ \text{(lijeva strana)} &\equiv \mathcal{F}^{(j,\varphi^{(j)})} \left(\Delta_0^{(j)} h\right) \left[\mathcal{F}^{(j,\varphi^{(j)})}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{1.61}$$

pa usporedbom drugog i trećeg retka slijedi

$$\mathcal{F}^{(j,\varphi^{(j)})} = \mathcal{F}^{(i,\varphi^{(i)})} \mathcal{F}^{(j,i)} \tag{1.62}$$

Napomenimo da je kompozicija dvaju operatora zakretanja u (1.62) također operator zakretanja. Pošto je moguće $\mathcal{F}^{(i,j)}$ izraziti u potpunosti preko transformacija sličnosti (1.56, 1.62), slijedi da ako imamo operator zakretanja u jednoj realizaciji te znamo vezu između dvije realizacije, onda je moguće direktno naći i operator zakretanja u novoj realizaciji. Ova procedura ilustrira činjenicu da ako postoji operator zakretanja u jednoj realizaciji i znamo vezu s nekom drugom realizacijom pomoću transformacija sličnosti, tada postoji operator zakretanja i u toj realizaciji te je dan s (1.62).

§ 1.3 κ-Poincaré-Hopfova algebra, fazni prostor i operator zakretanja

Do sada su postojali pokušaji da se dobije κ-Poincaré-Hopfova algebra pomoću Drinfeldovog operatora zakretanja, međutim niti jedan od njih nije uspio u potpunosti. Postoje konstrukcije Abelovih operatora zakretanja [13; 26; 27] i Jordanovih operatora zakretanja [60] koji su kompatibilni s κ-Minkowskijevim prostorom, međutim problem je što ovi operatori zakretanja nisu izraženi samo preko Poincaréovih generatora te se generirana koalgebra zatvara unutar $\mathcal{U}(\mathfrak{igl}(4)) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{igl}(4))$.

Ovdje ćemo pokazati da je ključni korak koji treba napraviti kako bi se ovi problemi riješili jest taj da treba analizirati cijeli kvantni fazni prostor $\mathcal{H}$ i njegovu Hopf algebroid strukturu. Korisiti ćemo Abelov operator zakretanja koji zadovoljava uvjet kocikličnosti. Ovaj operator zakretanja nije element κ-Poincaré-Hopfove algebre, već je element iz $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Primjenom ovog operatora zakretanja na Hopf algebroid strukturu kvantnog faznog prostora $\mathcal{H}$ dobiti ćemo zakrenutu Hopf algebroid strukturu κ-deformirane Heisenbergove algebre $\hat{\mathcal{H}}$. Nadalje, ovaj operator zakretanja će dati i ispravnu Hopf algebarsku strukturu κ-Poincaréove algebre, kada ga primjenimo na generatore rotacija, potisaka i impulsa, koje sada shvaćamo kao elemente iz $\mathcal{H}$.

1.3.1 κ-Poincaré-Hopfova algebra u *bicrossproduct* bazi

Za κ-Poincaré-Hopfovu algebru $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa)$ koja je generirana Lorentzovim generatorima $M_{\mu\nu}$ i generatorima translacija p_μ imamo koprodukt Δ u tzv. *bicrossproduct* bazi [12][§]

$$\begin{aligned} \Delta p_0 = p_0 \otimes 1 + 1 \otimes p_0, \quad \Delta p_i = p_i \otimes 1 + e^{a_0 p_0} \otimes p_i, \\ \Delta M_{i0} = M_{i0} \otimes 1 + e^{a_0 p_0} \otimes M_{i0} - a_0 p_j \otimes M_{ij}, \quad \Delta M_{ij} = M_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes M_{ij} \end{aligned} \tag{1.63}$$

gdje je $a_0 \propto \frac{1}{\kappa}$ deformacijski parametar, a κ se može interpretirati kao Planckova masa ili skala kvantne gravitacije. Jednadžbe (1.63) opisuju koalgebarsku strukturu κ-Poincaré-Hopfove algebre te zajedno s antipodom $S : \mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa) \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa)$ i kojedinicom $\epsilon : \mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa) \mapsto \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} &\epsilon(p_\mu) = \epsilon(M_{\mu\nu}) = 0, \\ &S(p_0) = -p_0 \quad S(p_i) = -p_i e^{-a_0 p_0}, \\ &S(M_{ij}) = -M_{ij} \quad S(M_{i0}) = -e^{-a_0 p_0} \left(M_{i0} + a_0 M_{ij} p_j \right), \end{aligned} \tag{1.64}$$

[§]Ovdje upućujemo čitatelja da prvo prođe kroz tekst u Dodatku A.

čine potpunu strukturu κ-Poincaré-Hopfove algebre. κ-Poincaré-Hopfova algebra $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa)$ je generirana Lorentzovim generatorima $M_{\mu\nu}$ i generatorima translacija p_μ, gdje $M_{\mu\nu}$ generiraju nedeformiranu Lorentzovu algebru,

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = -i\left(\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}\right), \tag{1.65}$$

a p_μ zadovoljavaju

$$[p_\mu, p_\nu] = 0. \tag{1.66}$$

Nadalje, komutacijske relacije $[M_{\mu\nu}, p_\lambda]$ su deformirane na sljedeći način

$$\begin{aligned} &[M_{ij}, p_k] = i\left(\delta_{ik}p_j - \delta_{jk}p_i\right), \quad [M_{ij}, p_0] = 0, \\ &[M_{i0}, p_k] = \delta_{ik}\left(\frac{1 - e^{2a_0p_0}}{2ia_0} - \frac{ia_0}{2}p_l^2\right) + ia_0p_ip_k, \\ &[M_{i0}, p_0] = ip_i + ia_0p_ip_0. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Uočimo da u limesu $a_0 \to 0$ slijedi $\Delta \to \Delta_0$, $S \to S_0$ i κ-deformirana Poincaréova algebra (1.65-1.67) se reducira na nedeformiranu Poincaré-Hopfovu algebru $\mathcal{U}(\mathcal{P})$.

Sjetimo se da je κ-Minkowskijev prostor generiran deformiranim koordinatama $\{\hat{x}_\mu\}$ koje zadovoljavaju

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i(a_\mu\hat{x}_\nu - a_\nu\hat{x}_\mu), \tag{1.68}$$

tj. uz $a_\mu = (a_0, \vec{0})$ imamo

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{x}_0, \hat{x}_i] = ia_0\hat{x}_i. \tag{1.69}$$

Nekomutativne koordinate $\hat{x}$ i impulsi p generiraju κ-deformiranu Heisenbergovu algebru $\hat{\mathcal{H}}$.

U prošlom smo poglavlju uveli akciju $\blacktriangleright$: $\hat{\mathcal{H}}(\hat{x}, p) \mapsto \hat{\mathcal{A}}(\hat{x})$, gdje sad eksplicitno za elemente iz $\hat{\mathcal{H}}$ imamo

$$\begin{aligned} &\hat{x}_\mu \blacktriangleright \hat{g}(\hat{x}) = \hat{x}_\mu\hat{g}(\hat{x}), \quad p_\mu \blacktriangleright 1 = 0, \quad M_{\mu\nu} \blacktriangleright 1 = 0 \\ &p_\mu \blacktriangleright \hat{x}_\nu = i\eta_{\mu\nu}, \quad M_{\mu\nu} \blacktriangleright \hat{x}_\lambda = -i\left(\eta_{\nu\lambda}\hat{x}_\mu - \eta_{\mu\lambda}\hat{x}_\nu\right). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Nadalje, korištenjem koprodukta (1.63), akcije (1.70) i identiteta

$$G\hat{x}_\mu = m(\Delta G(\blacktriangleright \otimes 1)(\hat{x}_\mu \otimes 1)), \tag{1.71}$$

$\forall G \in \mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa)$, možemo rekonstruirati komutacijske relacije $[M_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda]$ i $[p_\mu, \hat{x}_\nu]$:

$$[p_0, \hat{x}_\mu] = i\eta_{0\mu}, \quad [p_k, \hat{x}_\mu] = i\eta_{k\mu} - ia_\mu p_k, \tag{1.72}$$

$$[M_{\mu\nu}, \hat{x}_\lambda] = -i\left(\eta_{\nu\lambda}\hat{x}_\mu - \eta_{\mu\lambda}\hat{x}_\nu + a_\mu M_{\nu\lambda} - a_\nu M_{\mu\lambda}\right). \tag{1.73}$$

Možemo naći i realizaciju za $M_{\mu\nu}$ i $\hat{x}_\mu$ preko x_μ i p_μ, tj. smatramo ih kao elemente u $\mathcal{H}$, koji odgovaraju *bicrossproduct* bazi:

$$\begin{aligned} &\hat{x}_i = x_i, \quad \hat{x}_0 = x_0 - a_0 x_k p_k, \\ M_{i0} = x_i &\left(\frac{Z^2-1}{2a_0} - \frac{a_0}{2}p_k^2\right) - \big(x_0 - a_0 x_k p_k\big)p_i, \quad M_{ij} = x_i p_j - x_j p_i, \end{aligned} \tag{1.74}$$

gdje su[¶] $Z = e^A$ i $A = a_0 p_0$. Na ovaj način smo zapravo uložili κ-Poincaréovu algebru (1.65-1.67) i κ-Minkowskijev prostor (1.69) u kvantni fazni prostor $\mathcal{H}$.

1.3.2 Kvantni fazni prostor i struktura Hopfovog algebroida

Kvantni fazni prostor, tj. Heisenbergovu algebru $\mathcal{H}$ smo definirali s

$$\begin{aligned} [x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0 \\ [p_\mu, x_\nu] = i\eta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.75}$$

gdje imamo akciju $\triangleright : \mathcal{H}(x,p) \mapsto \mathcal{A}(x)$, tako da za svaki element $f(x) \in \mathcal{A}(x)$ slijedi

$$x_\mu \triangleright f(x) = x_\mu f(x), \quad p_\mu \triangleright f(x) = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \tag{1.76}$$

Poznato je da Heisenbergova algebra $\mathcal{H}$ nema strukturu Hopfove algebre. Međutim, moguće je definirati strukturu Hopfovog algebroida pomoću nedeformiranog koprodukta Δ_0' , kojedinice ϵ_0' i antipode S_0' na sljedeći način

$$\begin{aligned} \Delta_0' p_\mu = &p_\mu \otimes 1 + 1 \otimes p_\mu, \quad \Delta_0' x_\mu = x_\mu \otimes 1, \\ &\epsilon_0'(h) = h \triangleright 1, \quad \forall h \in \mathcal{H}, \\ &S_0'(p_\mu) = -p_\mu, \quad S_0'(x_\mu) = x_\mu \end{aligned} \tag{1.77}$$

gdje smo generirali klasu ekvivalencije pomoću relacije $(\mathcal{R}_0)_\mu \equiv x_\mu \otimes 1 - 1 \otimes x_\mu$ (za više detalja vidi [18] i [21]). Antipoda S_0' je antimultiplikativno preslikavanje, $S_0' : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ te je generalizacija S_0 u Hopfovoj algebri (vidi [22] i [24]). Kojedinica $\epsilon_0' : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{A}$ je generalizacija ϵ_0 u Hopfovoj algebri. Ako primjenimo koprodukt Δ_0', kojedinicu ϵ_0' i antipodu S_0' na generatore Poincaréove algebre, dobijemo iste izraze kao u slučaju Hopfove algebre, tj. dobivamo Δ_0, ϵ_0 i S_0 koji zadovoljavaju aksiome Hopfove algebre.

[¶] Za više detalja vidi [13] i [61]

1.3.3 κ-deformirani fazni prostor i operator zakretanja

Definirajmo operator zakretanja[‖] $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} = \exp\left(-iA \otimes x_k p_k\right) \tag{1.78}$$

gdje je $A = a_0 p_0$. Ovaj operator zakretanja je Abelov i zadovoljava uvjet kocikličnosti [26]. Primjenimo ga na Hopf algebroid strukturu kvantnog faznog prostora $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} &\Delta' h = \mathcal{F}\Delta'_0 h \mathcal{F}^{-1} \\ &\epsilon'(h) = m\left\{\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\epsilon'_0(h) \otimes 1)\right\} = h \blacktriangleright 1 \\ &S'(h) = \chi\ S'_0(h)\ \chi^{-1} \quad \forall h \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{1.79}$$

gdje imamo $\chi^{-1} = m\left[(S'_0 \otimes 1)\,\mathcal{F}^{-1}\right] = e^{-iAx_kp_k}$ i $\chi = e^{iAx_kp_k}$ (primjetite da u Hopfovom algebroidu vrijedi $\chi \neq m\left[(1 \otimes S'_0)\,\mathcal{F}\right]$). Za generatore x_μ i p_μ slijedi

$$\begin{aligned} \Delta' p_0 = p_0 \otimes 1 + 1 \otimes p_0 \equiv \Delta p_0 \quad & \Delta' p_i = p_i \otimes 1 + e^A \otimes p_i \equiv \Delta p_i \\ \Delta' x_0 = x_0 \otimes 1 + 1 \otimes a_0 x_k p_k \quad & \Delta' x_i = x_i \otimes 1 \\ \epsilon'(x_\mu) = \hat{x}_\mu \quad & \epsilon'(p_\mu) = 0 \\ S'(p_0) = -p_0 \equiv S(p_0) \quad & S'(p_i) = -p_i e^{-A} \equiv S(p_i) \\ S'(x_0) = x_0 - a_0 x_k p_k \quad & S'(x_i) = x_i e^A \end{aligned} \tag{1.80}$$

gdje smo generirali klasu ekvivalencije pomoću relacija $\mathcal{R}_\mu = \mathcal{F}(\mathcal{R}_0)_\mu \mathcal{F}^{-1}$. Važno je napomenuti da primjenom koprodukta Δ' i antipode S' na generetore κ-Poincaréove algebre se svodi na uobičajene Δ i S koji zadovoljavaju aksiome Hopfove algebre. Dakle, koprodukt Δ', antipoda S' i kojedinica ϵ', dani u (1.80), definiraju strukturu Hopfovog algebroida.

Nekomutativne koordinate $\hat{x}$ možemo dobiti i pomoću operatora zakretanja

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= m\left(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(x_i \otimes 1)\right) = x_i \\ \hat{x}_0 &= m\left(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(x_0 \otimes 1)\right) = x_0 - a_0 x_k p_k \end{aligned} \tag{1.81}$$

te je lako vidjeti da zadovoljavaju κ-Minkowskijevu algebru (1.69). Primjetimo da iz (1.80) slijedi

$$\begin{aligned} \Delta' \hat{x}_\mu = \hat{x}_\mu \otimes 1 \quad & \hat{\epsilon}'(\hat{x}_\mu) = \hat{x}_\mu \blacktriangleright 1 = \hat{x}_\mu \\ S'(\hat{x}_i) = \hat{x}_i e^A \quad & S'(\hat{x}_0) = \hat{x}_0 + a_0 p_k \hat{x}_k \end{aligned} \tag{1.82}$$

‖vidi [13]

što definira Hopf algebroid strukturu κ-deformirane Heisenbergove algebre $\hat{\mathcal{H}}$.

1.3.4 κ-Poincaré-Hopf algebra pomoću operatora zakretanja

Realizacija Lorentzovih generatora $M_{\mu\nu}$ pomoću $\mathcal{H}$ je dana u (1.74). Korištenjem (1.77) i homomorfizma koprodukta Δ_0' možemo izračunati

$$\Delta_0' M_{i0} = \Delta_0' x_i \Delta_0' \left(\frac{Z^2 - 1}{2a_0} - \frac{a_0}{2} p_k^2 \right) - \Delta_0' \hat{x}_0 \Delta_0' p_i \tag{1.83}$$

i

$$\Delta_0' M_{ij} = \Delta_0' x_i \Delta_0' p_j - \Delta_0' x_j \Delta_0' p_i = M_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes M_{ij} \equiv \Delta_0 M_{ij}. \tag{1.84}$$

Primjetimo da imamo $\Delta_0' M_{i0} \neq M_{i0} \otimes 1 + 1 \otimes M_{i0}$. Nadalje, primjenom operatora zakretanja $\mathcal{F}$ dolazimo do deformiranog koprodukta

$$\begin{aligned}
\Delta' M_{ij} &= \mathcal{F} \Delta_0' M_{ij} \mathcal{F}^{-1} = M_{ij} \otimes 1 + 1 \otimes M_{ij} \equiv \Delta M_{ij} \\
\Delta' M_{i0} &= \mathcal{F} \Delta_0' M_{i0} \mathcal{F}^{-1} = \Delta' x_i \Delta' \left(\frac{Z^2 - 1}{2a_0} - \frac{a_0}{2} p_k^2 \right) - \Delta' \hat{x}_0 \Delta' p_i \\
&= (x_i \otimes 1) \left(\frac{Z^2 \otimes Z^2 - 1 \otimes 1}{2a_0} - \frac{a_0}{2} \Delta'(p_k^2) \right) - (\hat{x}_0 \otimes 1) \Delta' p_i \\
&= M_{i0} \otimes 1 + e^{a_0 p_0} \otimes M_{i0} - a_0 p_j \otimes M_{ij} \equiv \Delta M_{i0}
\end{aligned} \tag{1.85}$$

gdje smo u zadnjem retku iskoristili tenzorski identitet $x_i \otimes 1 = Z^{-1} \otimes x_i$ koji slijedi iz relacije $\mathcal{R}_i$, [18]. Slično, koristeći (1.80) i antihomomorfizam antipode S_0', slijedi

$$\begin{aligned}
S'(M_{ij}) &= \chi\ S_0'(M_{ij})\ \chi^{-1} = S'(p_j) S'(x_i) - S'(p_i) S'(x_j) = -M_{ij} \equiv S(M_{ij}) \\
S'(M_{i0}) &= \chi\ S_0'(M_{i0})\ \chi^{-1} = S' \left(\frac{Z^2 - 1}{2a_0} - \frac{a_0}{2} p_k^2 \right) S'(x_i) - S'(p_i) S'(\hat{x}_0) \\
&= -e^{-a_0 p_0} \left(M_{i0} + a_0 M_{ij} p_j \right) \equiv S(M_{i0})
\end{aligned} \tag{1.86}$$

Dakle, primjena operatora zakretanja $\mathcal{F}$, definiranog u (1.78), na generatore κ-Poincaréove algebre, koje smo uložili u fazni prostor, vodi na ispravnu Hopf algebarsku strukturu κ-Poincaréove algebre definirane u (1.63-1.67).

Poglavlje 2

Jednadžbe gibanja u nekomutativnim prostorima

§ 2.1 Feynmanov pristup

R. P. Feynman je 1948. pokazao kolegi F. J. Dysonu [67] svoj izvod Maxwellovih jednadžbi. Feynman je polazeći od komutacijskih relacija između koordinata položaja i brzine nerelativističke čestice došao do Lorentzove sile i homogenih Maxwellovih jednadžbi. Taj rad nikad nije objavio. Dyson je nakon njegove smrti objavio Feynmanov dokaz [68] i tako je zahvaljujući njemu taj zanimljiv Feynmanov rad postao dostupan i nama. Otada je u literaturi otvorena rasprava o Feynmanovom pristupu baždarnim teorijama i gravitaciji. Feynman je tražio najopćenitiji mogući oblik za silu, namećući samo Heisenbergove komutacijske relacije na koordinate položaja i brzine nerelativističke čestice koja se giba u skladu s Newtonovim zakonom i došao do rezultata da mora postojati električno i magnetsko polje koja zadovoljavaju homogene Maxwellove jednadžbe te silu u formi dobro poznate nam Lorentzove sile. Feynmanov izvod je matematički rigorozan, ali relativistička kovarijantnost nije u njemu manifestna. To je ponukalo S. Tanimuru [71] da napravi poopćenje Feynmanove procedure na specijalnu i opću teoriju relativnosti. Vidjet ćemo da ta procedura na kraju vodi na zaključak da je najopćenitija sila koja može djelovati na česticu elektromagnetska i gravitacijska sila. Ono što je fascinantno je da u Feynmanovom pristupu nema lagranžijana, hamiltonijana niti varijacionog principa, a ipak kao rezultat daje Lorentzovu silu kao najopćenitiju formu sile u kojoj se pojavljuju polja koja moraju zadovoljavati homogene Maxwellove jednadžbe. Moguće je formulirati Feynmanov pristup u slučaju ne-Abelove teorije, što vodi na tzv. Wongove jednadžbe, koje predstavljaju poopćenje Lorentzove sile zbog djelovanja ne-Abelovog baždarnog polja. Tako je, na neki način, objedinjene sve sile unutar jednog pristupa. Nakon što smo razmotrili sve posljedice Feynmanova pristupa i zaključili da kao rezultat dobivamo "staru" fiziku, pokušat ćemo ilustrirati kako bi se s ovom novom metodom mogla otkrivati "nova" fizika. Naravno, generalizirati ćemo Feynamanov pristup za opis nekomutativnih efekata u elektrodinamici i gravitaciji.

2.1.1 Relativističko poopćenje Feynmanovog izvoda

Primjena na specijalnu relativnost

Sada ćemo poopćiti Feynmanov pristup u smislu specijalne teorije relativnosti. Ideja je krenuti od Lorentz invarijantnih pretpostavki i primjeniti analognu analizu kao i u [71].
Polazimo od sljedećih pretpostavki:

- Čestica se giba u d-dimenzionalnom prostoru Minkowskog, s koordinatom položaja $x_\mu(\tau)$ ($\mu = 0, 1, 2, ...d-1$), gdje je τ parametar.

- Brzina čestice $\dot{x}_\mu(\tau)$ i koordinate položaja $x_\nu(\tau)$ zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije:
$$[x_\mu(\tau), x_\nu(\tau)] = 0, \tag{2.1}$$
$$[x_\mu(\tau), \dot{x}_\nu(\tau)] = -\frac{i\hbar}{m}\eta_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$
gdje točkica označava derivaciju po parametru τ, a $\eta_{\mu\nu}$ je metrika Minkowskog, dana s $\eta_{\mu\nu} = \text{dijag}(+1, -1, ... - 1)$

- Čestica zadovoljava jednadžbu gibanja:
$$F_\mu(x, \dot{x}, \tau) = m\ddot{x}_\mu(\tau). \tag{2.3}$$

Dizanje i spuštanje tenzorskih indeksa je kompatibilno s operatorskim produktom i provodi se pomoću tenzora $\eta_{\mu\nu}$ i $\eta^{\mu\nu}$. Na primjer, veličine s indeksima gore $\dot{x}^\mu$ i $T^{\mu\nu}$ su definirane kao

$$\dot{x}^\mu = \eta^{\mu\alpha}\dot{x}_\alpha, \tag{2.4}$$

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}T_{\alpha\beta}, \tag{2.5}$$

pa se tako (2.2) svodi na

$$[x^\mu(\tau), \dot{x}_\nu(\tau)] = -\frac{i\hbar}{m}\delta^\mu{}_\nu. \tag{2.6}$$

Deriviramo li (2.2) po τ i iskoristimo (2.3) dobivamo

$$[x_\mu(\tau), F_\nu(\tau)] = m[\dot{x}_\nu(\tau), \dot{x}_\mu(\tau)]. \tag{2.7}$$

Desna strana je po strukturi antisimetrična u indeksima μ i ν pa možemo definirati općeniti antisimetričan tenzor $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, tako da vrijedi

$$m[\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu] = -[x_\mu, F_\nu] \equiv -\frac{i\hbar}{m}F_{\mu\nu}. \tag{2.8}$$

Antisimetrični tenzor $F_{\mu\nu}(x, \dot{x}, \tau)$ je općenito funkcija od x, $\dot{x}$ i τ. Promotrimo Jacobijev identitet za x_λ, $\dot{x}_\mu$ i $\dot{x}_\nu$

$$[x_\lambda, [\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu]] + [\dot{x}_\mu, [\dot{x}_\nu, x_\lambda]] + [\dot{x}_\nu, [x_\lambda, \dot{x}_\mu]] = 0. \tag{2.9}$$

U (2.9) uvrstimo (2.7) i iskoristimo (2.2), pa dobivamo

$$[x_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0. \tag{2.10}$$

Zbog (2.1) i (2.2) za opću funkciju $f(x, \dot{x}, \tau)$ vrijede

$$[x_\mu, f(x, \dot{x}, \tau)] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\mu}, \tag{2.11}$$

$$[\dot{x}_\mu, f(x, \tau)] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}, \tag{2.12}$$

pa slijedi da $F_{\mu\nu}$ ne ovisi o brzini $\dot{x}$, tj.

$$F_{\mu\nu}(x, \tau) = -\frac{m^2}{i\hbar}[\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu]. \tag{2.13}$$

Iz Jacobijevog identiteta za $\dot{x}_\mu$, $\dot{x}_\nu$ i $\dot{x}_\rho$

$$[\dot{x}_\mu, [\dot{x}_\nu, \dot{x}_\rho]] + [\dot{x}_\nu, [\dot{x}_\rho, \dot{x}_\mu]] + [\dot{x}_\rho, [\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu]] = 0 \tag{2.14}$$

i relacije (2.13), slijedi

$$-\frac{i\hbar}{m^2}\left([\dot{x}_\mu, F_{\nu\rho}] + [\dot{x}_\nu, F_{\rho\mu}] + [\dot{x}_\rho, F_{\mu\nu}]\right) = 0, \tag{2.15}$$

što zbog

$$[\dot{x}_\mu, F_{\nu\rho}] = \frac{i\hbar}{m}\partial_\mu F_{\nu\rho} \tag{2.16}$$

vodi na jednadžbu za tenzor $F_{\alpha\beta}$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{2.17}$$

Relacija (2.17) je homogena Maxwellova jednadžba u kovarijantnom obliku te kao takva u sebi sadrži dvije uobičajene homogene Maxwellove jednadžbe, jer definiramo

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k, \tag{2.18}$$

$$F^{0i} = -E^i, \tag{2.19}$$

gdje su i, j, i k prostorni indeksi. Zbog (2.16) $F_{\mu\nu}$ se može jednoznačno napisati pomoću 4-potencijala $A_\mu(x)$ u obliku

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.20}$$

i opet imamo slobodu odabira baždarenja. Vratimo li se sad na relaciju (2.8) i primjenimo (2.11) nalazimo

$$[x_\mu, F_\nu] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{i\hbar}{m} F_{\mu\nu}. \tag{2.21}$$

Integracijom (2.21) preko $\dot{x}^\mu$ dobivamo

$$F_\nu(x, \dot{x}, \tau) = -\left\langle F_{\mu\nu}(x,\tau)\dot{x}^\mu \right\rangle + G_\nu(x,\tau), \tag{2.22}$$

gdje smo iskoristili Weylovo uređenje i uveli $G_\nu(x,\tau)$ kao proizvoljnu funkciju od x i τ. Preimenovanjem indeksa dobivamo konačan izraz za silu:

$$F_\mu(x, \dot{x}, \tau) = G_\mu(x,\tau) + \left\langle F_{\mu\nu}(x,\tau)\dot{x}^\nu \right\rangle. \tag{2.23}$$

Kao što vidimo, sila je (do na vektor G_μ) Lorentzova. Pokažimo sada da funkcija $G_\mu(x,\tau)$ nije sasvim proizvoljna. Uzmemo li (2.22) kao definiciju od $G_\mu(x,\tau)$, tj.

$$G_\mu(x,\tau) = F_\mu(x, \dot{x}, \tau) - \left\langle F_{\mu\nu}(x,\tau)\dot{x}^\nu \right\rangle, \tag{2.24}$$

i izračunamo komutator brzine $\dot{x}_\mu$ i $G_\nu(x,\tau)$, slijedi

$$[\dot{x}_\mu, G_\nu] = [\dot{x}_\mu, F_\nu] - \left\langle [\dot{x}_\mu, F_{\nu\rho}\dot{x}^\rho] \right\rangle. \tag{2.25}$$

Dalje, korištenjem (2.3) nalazimo

$$[\dot{x}_\mu, G_\nu] = m[\dot{x}_\mu, \ddot{x}_\nu] - \left\langle [\dot{x}_\mu, F_{\nu\rho}]\dot{x}^\rho \right\rangle - \left\langle F_{\nu\rho}[\dot{x}_\mu, \dot{x}^\rho] \right\rangle, \tag{2.26}$$

pa uvrštavanjem (2.12) i (2.6) slijedi

$$[\dot{x}_\mu, G_\nu] = m[\dot{x}_\mu, \ddot{x}_\nu] - \frac{i\hbar}{m}\left\langle \partial_\mu F_{\nu\rho}\dot{x}^\rho \right\rangle + \frac{i\hbar}{m^2} F_{\nu\rho} F_\mu{}^\rho. \tag{2.27}$$

Promotrimo sada izraz $[\dot{x}_\mu, G_\nu] - [\dot{x}_\nu, G_\mu]$. Na osnovu (2.27), slijedi

$$\begin{aligned}
&[\dot{x}_\mu, G_\nu] - [\dot{x}_\nu, G_\mu] = \\
&= m[\dot{x}_\mu, \ddot{x}_\nu] - m[\dot{x}_\nu, \ddot{x}_\mu] - \frac{i\hbar}{m}\left\langle \partial_\mu F_{\nu\rho}\dot{x}^\rho - \partial_\nu F_{\mu\rho}\dot{x}^\rho \right\rangle + \frac{i\hbar}{m^2}\left(F_{\nu\rho}F_\mu{}^\rho - F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho\right) \\
&= m\frac{d}{d\tau}[\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu] - \frac{i\hbar}{m}\left\langle \left(\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\nu F_{\mu\rho}\right)\dot{x}^\rho \right\rangle \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\frac{d}{d\tau}F_{\mu\nu} - \frac{i\hbar}{m}\left\langle \left(\partial_\mu F_{\nu\rho} - \partial_\nu F_{\mu\rho}\right)\dot{x}^\rho \right\rangle \\
&= -\frac{i\hbar}{m}\left\langle \left(\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu}\right)\dot{x}^\rho \right\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

gdje smo u drugom redu prva dva člana skupili pod totalnu derivaciju po τ, a zadnja dva pokratili. Zatim smo iskoristili (2.13) te naposljetku i (2.16). Korištenjem (2.12) i (2.27) dobivamo

$$\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu = 0, \tag{2.29}$$

odavde slijedi da se $G_\mu(x, \tau)$ općenito može napisati pomoću skalarne funkcije kao

$$G_\mu(x, \tau) = \partial_\mu \varphi(x, \tau). \tag{2.30}$$

Na kraju, sumirajmo dobivene rezultate. Za generalni oblik sile imamo

$$F_\mu(x, \dot{x}, \tau) = G_\mu(x, \tau) + \left\langle F_{\mu\nu}(x, \tau)\dot{x}^\nu \right\rangle, \tag{2.31}$$

gdje polje $F_{\mu\nu}$ zadovoljava homogenu Maxwellovu jednadžbu

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0, \tag{2.32}$$

pa automatski vrijedi

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2.33}$$

Što se vektorske funkcije tiče, postoji ograničenje

$$\partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu = 0, \tag{2.34}$$

odavde slijedi da se ovo može zapisati kao

$$G_\mu(x, \tau) = \partial_\mu \varphi(x, \tau). \tag{2.35}$$

Dobiveni rezultati su nam relativistički invarijantni i dani su u sustavu $c = 1$. Tenzor $F_{\mu\nu}$ identificiramo s elektromagnetskim tenzorom u koji je već apsorbiran naboj čestice q te zadovoljava homogenu Maxwellovu jednadžbu, a nehomogena se uzima kao definicija struje. Zbog antisimetričnosti tenzora $F_{\mu\nu}$ struja je sačuvana. Kako G_μ ima ograničenje da mora biti 4-gradijent skalarnog potencijala φ, možemo ga interpretirati kao općeniti izraz za vanjsku silu kada je naboj čestice nula te vidimo da u nerelativističkom limesu prelazi u gradijent skalarnog polja, a to je općeniti oblik drugog Newtonovog zakona za vanjsku silu $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(x)$. Dakle, za silu smo dobili Lorentzovu silu plus vanjska sila oblika 4-gradijent skalarnog potencijala. Zaključak je da na relativističku česticu može djelovati samo skalarno i elektromagnetsko polje.

Primjena na opću relativnost

U prošlom odjeljku pokazali smo da na relativističku česticu može djelovati samo skalarno i elektromagnetno polje. Što je s gravitacijom? Kako nju uključiti? Ideja se sastoji u sljedećem. Poslužit ćemo se postulatom općeg kovarijantnog prijepisa, to jest rezultat iz prošlog odjeljka ćemo shvatiti kao rezultat u odsustvu gravitacije, u lokalnom, ravnom, Lorentzovom sustavu i jer je u kovarijantnom zapisu, po postulatu općeg kovarijantnog prijepisa sve što treba napraviti jest zamjeniti ravnu metriku Minkowskog $\eta_{\mu\nu}$ s općenitom metrikom $g_{\mu\nu}(x)$. Dakle, samo ćemo pretpostavku $[x_\mu, \dot{x}_\nu] = -\frac{i\hbar}{m}\eta_{\mu\nu}$ zamjeniti s $[x_\mu, \dot{x}_\nu] = -\frac{i\hbar}{m}g_{\mu\nu}(x)$ i primjeniti Feynmanov pristup. Pokazuje se da ovaj postupak vodi na očekivani rezultat. Dakle, krećemo s analognim pretpostavkama:

- Čestica se giba u d-dimenzionalnom prostor-vremenu s koordinatom položaja $x_\mu(\tau)$ $(\mu = 0, 1, 2, ...d-1)$, gdje je τ parametar.

- Brzina čestice $\dot{x}_\mu(\tau)$ i koordinate položaja $x_\nu(\tau)$ zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije
$$[x_\mu(\tau), x_\nu(\tau)] = 0, \tag{2.36}$$
$$[x_\mu(\tau), \dot{x}_\nu(\tau)] = -\frac{i\hbar}{m}g_{\mu\nu}(x), \tag{2.37}$$
gdje točkica označava derivaciju po parametru τ, a $g_{\mu\nu}(x)$ je metrika prostor vremena i kao takva je regularna i simetrična u indeksima μ i ν.

- Čestica zadovoljava jednadžbu gibanja:
$$F_\mu(x, \dot{x}, \tau) = m\ddot{x}_\mu(\tau). \tag{2.38}$$

Prije nego što krenemo u sam izvod treba razriješiti pitanje dizanja i spuštanja tenzorskih indeksa općenitih operatora pomoću metričkog tenzora $g_{\mu\nu}(x)$, koji više nije komutativan operator. Definiramo spuštanje indeksa od $\dot{x}^\mu$ pomoću Weylovog uređenja [72] na sljedeći način

$$\dot{x}_\mu = \langle g_{\mu\nu}\dot{x}^\nu \rangle \,, \tag{2.39}$$

dok za općeniti tenzor $T^{\mu\nu}(x)$ imamo uobičajenu vezu

$$T_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\mu\nu}(x). \tag{2.40}$$

Koristeći (2.36) i (2.37) nalazimo korisne formule

$$[\dot{x}_\nu, f(x)] = \frac{i\hbar}{m}\partial_\nu f(x) = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial x^\nu} \tag{2.41}$$

$$[\dot{x}^\nu, f(x)] = \frac{i\hbar}{m}\partial^\nu f(x) = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial x_\nu} \tag{2.42}$$

$$[x_\nu, f(x, \dot{x})] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^\nu}. \tag{2.43}$$

Sada započinjemo izvod na analogan način kao i u prošlom odjeljku. Deriviramo (2.37) po τ i koristimo (2.38)

$$m[\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu] + [x_\mu, F_\nu] = -i\hbar\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = -i\hbar \langle \partial_\rho g_{\mu\nu}\dot{x}^\rho \rangle \,. \tag{2.44}$$

Definiramo antisimetrični tenzor $W_{\mu\nu}$ relacijom

$$W_{\mu\nu} = -\frac{m^2}{i\hbar}[\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu]. \tag{2.45}$$

Polazeći od Jacobijevog identiteta za x_λ, $\dot{x}_\mu$ i $\dot{x}_\nu$

$$[x_\lambda, [\dot{x}_\mu, \dot{x}_\nu]] + [\dot{x}_\mu, [\dot{x}_\nu, x_\lambda]] + [\dot{x}_\nu, [x_\lambda, \dot{x}_\mu]] = 0. \tag{2.46}$$

Upotrebom relacija (2.45), (2.37) i (2.41) dobivamo

$$\begin{aligned} [x_\lambda, W_{\mu\nu}] &= m\left([g_{\lambda\mu}, \dot{x}_\nu] + [\dot{x}_\mu, g_{\lambda\nu}]\right) \\ &= -i\hbar\left(\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\right), \end{aligned} \tag{2.47}$$

Dakle, vidimo da nam $W_{\mu\nu}$ nije samo funkcija od x već je $W_{\mu\nu}(x, \dot{x})$. U tu svrhu zgodno je definirati tenzor $F_{\mu\nu}$ kao

$$F_{\mu\nu} = W_{\mu\nu} - m\left\langle \left(\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu}\right)\dot{x}^\lambda \right\rangle, \tag{2.48}$$

jer sada vrijedi

$$[x_\lambda, F_{\mu\nu}] = 0, \tag{2.49}$$

a zbog (2.43) $F_{\mu\nu}$ je samo funkcija od x, tj. $F_{\mu\nu}(x)$. Uvrštavanjem (2.48) u (2.44) dobivamo

$$[x_\mu, F_\nu] = \frac{i\hbar}{m} F_{\mu\nu} + i\hbar \left\langle \left(\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \dot{x}^\lambda \right\rangle . \tag{2.50}$$

U drugom članu na desnoj strani prepoznajemo Christoffelov simbol $\Gamma_{\nu\lambda\mu}$ koji je definiran kao

$$\Gamma_{\nu\lambda\mu} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}\right) . \tag{2.51}$$

Konačno, dobivamo

$$[x_\mu, F_\nu] = \frac{i\hbar}{m} F_{\mu\nu} + 2i\hbar \left\langle \Gamma_{\nu\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \right\rangle . \tag{2.52}$$

Zbog činjenice da su $F_{\mu\nu}$ i $\Gamma_{\nu\lambda\mu}$ samo funkcije od x i zbog (2.43), možemo relaciju (2.52) integrirati po $\dot{x}^\mu$ i dobiti izraz za silu

$$F_\nu = \langle F_{\nu\mu} \dot{x}^\mu \rangle - m \left\langle \Gamma_{\nu\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu \right\rangle + G_\nu(x). \tag{2.53}$$

Prvi član je Lorentzovog tipa, a zadnji je za sada proizvoljna vektorska funkcija od x. Nešto kasnije ćemo pokazati da oni zadržavaju istu interpretaciju kao i u slučaju prostora Minkowskog. Kako interpretirati drugi član? Sjetimo se kako izgleda jednadžba gibanja za česticu u općoj teoriji relativnosti [75]. Tamo je sila gravitacije svedena na zakrivljenost prostor-vremena, pa je gibanje čestice u gravitacijskom polju zapravo gibanje slobodne čestice po geodeziku. To gibanje je opisano geodetskom jednadžbom

$$\ddot{x}_\nu = -\Gamma_{\nu\lambda\mu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu \tag{2.54}$$

što je upravo drugi član u (2.53). Dakle, drugi član je doprinos sili od zakrivljenosti prostor-vremena, odnosno gravitacija!

Sada ćemo pokazati da $F_{\mu\nu}$ i G_μ zadovoljavaju iste jednadžbe kao i u specijalnom slučaju. U tu svrhu promotrimo identitet

$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{i\hbar}[\dot{x}^\alpha, \dot{x}^\beta] &= -\frac{m^2}{i\hbar}[\langle g^{\alpha\mu} \dot{x}_\mu \rangle, \langle g^{\beta\nu} \dot{x}_\nu \rangle] \\ &= \left\langle g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} W_{\mu\nu} \right\rangle - m \left\langle \partial^\alpha g^{\beta\nu} \dot{x}_\nu - \partial^\beta g^{\alpha\mu} \dot{x}_\mu \right\rangle , \end{aligned} \tag{2.55}$$

pomoću kojeg uz (2.48) možemo napisati

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{m^2}{i\hbar}[\dot{x}^\alpha, \dot{x}^\beta]. \end{aligned} \tag{2.56}$$

Upotrebom Jacobijeve relacije za $\dot{x}^\mu$, $\dot{x}^\nu$ i $\dot{x}^\rho$ te relacija (2.56) i (2.42) dobivamo

$$\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} + \partial^\rho F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.57}$$

što je homogena Maxwellova jednadžba, pa sad s pravom možemo reći da je $F_{\mu\nu}$ tenzor elektromagnetskog polja.

Ako sada uzmemo (2.53) kao definiciju od G_μ, korištenjem identiteta

$$\langle g^{\nu\alpha} F_\alpha \rangle = m \langle \ddot{x}^\nu \rangle + m \left\langle g^{\nu\alpha} \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma \right\rangle, \tag{2.58}$$

dobivamo

$$G^\nu = m \langle \ddot{x}^\nu \rangle + \frac{1}{2} m \left\langle \partial^\nu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right\rangle - \left\langle F^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right\rangle. \tag{2.59}$$

Dalje, na osnovu (2.59), (2.43) i (2.56) možemo pisati

$$\begin{aligned} &[\dot{x}^\mu, G^\nu] = \\ &= m[\dot{x}^\mu, \ddot{x}^\nu] + \frac{i\hbar}{2} \left\langle \partial^\mu \partial^\nu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right\rangle - \frac{i\hbar}{2m} \left\langle \partial^\nu g_{\alpha\beta} \left(F^{\mu\alpha} \dot{x}^\beta + \dot{x}^\alpha F^{\mu\beta} \right) \right\rangle \\ &- \frac{i\hbar}{m} \left\langle \partial^\mu \left(F^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} \right) \dot{x}^\beta \right\rangle + \frac{i\hbar}{m^2} F^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\mu\beta} \\ &= m[\dot{x}^\mu, \ddot{x}^\nu] + \frac{i\hbar}{2} \left\langle \partial^\mu \partial^\nu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right\rangle - \frac{i\hbar}{m} \left\langle \partial^\nu g_{\alpha\beta} \cdot F^{\mu\alpha} \dot{x}^\beta \right\rangle \\ &- \frac{i\hbar}{m} \left\langle \partial^\mu g_{\alpha\beta} \cdot F^{\nu\alpha} \dot{x}^\beta \right\rangle - \frac{i\hbar}{m} \left\langle \partial^\mu F^{\nu\alpha} \cdot g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right\rangle + \frac{i\hbar}{m^2} F^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} F^{\mu\beta}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Sada, promotrimo izraz

$$\begin{aligned} &[\dot{x}^\mu, G^\nu] - [\dot{x}^\nu, G^\mu] = \\ &= m \left([\dot{x}^\mu, \ddot{x}^\nu] - [\dot{x}^\nu, \ddot{x}^\mu] \right) - \frac{i\hbar}{m} \left\langle \left(\partial^\mu F^{\nu\alpha} - \partial^\nu F^{\mu\alpha} \right) g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta \right\rangle \\ &= m \frac{d}{d\tau} [\dot{x}^\mu, \dot{x}^\nu] - \langle \left(\partial^\mu F^{\nu\alpha} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} \right) \dot{x}_\alpha \rangle \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \frac{d}{d\tau} F^{\mu\nu} - \frac{i\hbar}{m} \langle \left(\partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \right) \dot{x}_\rho \rangle \\ &= -\frac{i\hbar}{m} \langle \left(\partial^\rho F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\rho} + \partial^\nu F^{\rho\mu} \right) \dot{x}_\rho \rangle. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Pomoću (2.57), (2.43) i (2.61) dobivamo

$$\partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu = 0, \tag{2.62}$$

odavde slijedi da G^μ možemo napisati kao 4-divergenciju skalara

$$G^\mu = \partial^\mu \varphi(x). \tag{2.63}$$

Na ovaj način smo pokazali da G_μ i $F_{\mu\nu}$ imaju istu interpretaciju kao i u specijalnom slučaju.

Zaključujemo da su jedina polja koja na konzistentan način mogu djelovati na kvantno mehaničku česticu: skalarno, elektromagnetsko i gravitacijsko.

§ 2.2 Minimalno vezanje i Feynmanov pristup elektrodinamici

Polazimo od istih pretpostavki kao i u Feynmanovom pristupu [68; 71; 76]. Koordinate relativističke čestice u $4-d$ Minkowskijevom prostoru označavamo s x_μ, gdje je τ parametar, te zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije

$$[x_\mu(\tau), x_\nu(\tau)] = 0, \qquad [x_\mu(\tau), \dot{x}_\nu(\tau)] = -\frac{i}{m}\eta_{\mu\nu}, \tag{2.64}$$

gdje smo koristili $\dot{x}_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$. Pretpostavljamo i Newtonovu jednadžbu

$$F_\mu(x, \dot{x}) = m\ddot{x}_\mu. \tag{2.65}$$

Uvodimo kinetički impuls $\pi_\mu = m\dot{x}_\mu$ tako da zadovoljava

$$[x_\mu, \pi_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}. \tag{2.66}$$

Za kinetički impuls π_μ možemo pisati

$$\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu(x), \tag{2.67}$$

gdje je $eA_\mu(x)$, za sada, proizvoljna funkcija od x, a $p_\mu(\tau)$ je kanonski impuls za koji vrijedi

$$[p_\mu, p_\nu] = 0, \qquad [x_\mu, p_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}. \tag{2.68}$$

Ovo je tzv. princip minimalnog vezanja [76].

Lako je vidjeti da vrijedi $F_\mu = \frac{d\pi_\mu}{d\tau}$. Ako deriviramo (2.66) s obzirom na τ, dobivamo sljedeću relaciju

$$[x_\mu, F_\nu] = -\frac{1}{m}[\pi_\mu, \pi_\nu], \qquad [\pi_\mu, \pi_\nu] = -ieF_{\mu\nu}(x), \tag{2.69}$$

gdje smo uveli $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Iz (2.68) slijede korisni identiteti za proizvoljnu funkciju $f(x,p)$ (kada kažemo funkcija, u biti mislimo na formalne redove u x i p)

$$[x_\mu, f(x,p)] = -i\frac{\partial f}{\partial p^\mu}, \qquad [p_\mu, f(x,p)] = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \tag{2.70}$$

Od sada nadalje ćemo korisiti tzv. desno uređenje, pri čemu je x uvijek skroz lijevo, a p skroz desno u monomijalnim izrazima. Operator sile $F_\mu(x,\dot{x})$ možemo općenito shvatiti kao funkciju koja ovisi o x i p, tj. $F_\mu(x,p)$. Međutim, zbog (2.69) slijedi da je $F_{\mu\nu}$ samo funkcija koordinata, a to je važno, jer znamo integrirati samo preko komutativnih varijabli. Dakle, korištenjem (2.70) možemo integrirati (2.69) preko p^μ i dobivamo

$$F_\nu = \frac{e}{m}F_{\nu\mu}p^\mu + \widetilde{G}_\nu(x), \tag{2.71}$$

gdje je $\widetilde{G}_\nu(x)$ općenita funkcija ovisna samo o x i gdje smo koristili preskripciju da p uvijek dolazi skroz s desna (za konstruiranje a priori hermitskog operatora mogli smo i koristiti simetričnu preskripciju $xp \to \frac{1}{2}(xp+px)$). Sada, koristeći definiciju kinetičkog impulsa $\pi_\mu = m\dot{x}_\mu$, jednadžbu (2.67) te definiranjem $G_\mu(x) = \widetilde{G}_\mu(x) + \frac{e^2}{m}F_{\mu\nu}A^\nu$ slijedi izraz za Lorentzovu silu

$$F_\mu = G_\mu(x) + eF_{\mu\nu}\dot{x}^\mu. \tag{2.72}$$

U ovom pristupu vrijede Jacobijevi identiteti, tj. imamo

$$\begin{aligned}
&[x_\mu,[x_\nu,x_\rho]] + [x_\nu,[x_\rho,x_\mu]] + [x_\rho,[x_\mu,x_\nu]] = 0,\\
&[x_\mu,[x_\nu,\pi_\rho]] + [x_\nu,[\pi_\rho,x_\mu]] + [\pi_\rho,[x_\mu,x_\nu]] = 0,\\
&[x_\mu,[\pi_\nu,\pi_\rho]] + [\pi_\nu,[\pi_\rho,x_\mu]] + [\pi_\rho,[x_\mu,\pi_\nu]] = 0,\\
&[\pi_\mu,[\pi_\nu,\pi_\rho]] + [\pi_\nu,[\pi_\rho,\pi_\mu]] + [\pi_\rho,[\pi_\mu,\pi_\nu]] = 0.
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Prve dvije jednadžbe u (2.73) su trivijalno zadovoljene, treća je ekvivalentna sa činjenicom da je u Feynmanovom pristupu $F_{\mu\nu}$ samo funkcija koordinata x, dok četvrta jednadžba vodi na homogene Maxwellove jednadžbe

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \tag{2.74}$$

Ako shvatimo (2.72) kao definiciju od $G_\mu(x)$, vidimo da vrijedi

$$[\pi_\mu, G_\nu] - [\pi_\nu, G_\mu] = 0, \qquad \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu = 0, \tag{2.75}$$

što znači da možemo pisati $G_\mu = \partial_\mu \phi(x)$. Dakle, Feynmanov pristup i princip minimalnog vezanja su u potpunosti ekvivalentni. Nadalje, iz definicije komutatora slijedi

$$[\pi_\nu, [\pi_\mu, [\pi^\mu, \pi^\nu]]] = 0, \tag{2.76}$$

te definiranjem

$$[\pi_\mu, [\pi^\mu, \pi^\nu]] = ej^\nu, \tag{2.77}$$

dobivamo

$$[\pi_\nu, j^\nu] = 0, \qquad \partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2.78}$$

Dakle, vidimo da je $j_\mu(x)$ očuvana struja, a korištenjem relacije (2.77) dobivamo i nehomogene Maxwellove jednadžbe

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \tag{2.79}$$

Sada imamo potpun skup Maxwellovih jednadžbi, koje su kovarijantne te prepoznajemo $A_\mu(x)$ kao baždarno polje, a e kao električni naboj čestice.

§ 2.3 κ-deformirana elektrodinamika

2.3.1 Neutralan slučaj

Okvir u kojem smo prikazali princip minimalnog vezanja u poglavlju 2.2. je idealan za proučavanje nekomutativnih prostora. Naime, sve što trebamo napraviti jest da zamjenimo komutirajuće koordinate nekomutirajućim $x_\mu \to \hat{x}_\mu$, tj. $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \neq 0$. Razmatrati ćemo jednu široku klasu nekomutativnih prostora pod zajedničkim imenom κ-Minkowskijev prostor, koji je definiran na sljedeći način

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i(a_\mu \hat{x}_\nu - a_\nu \hat{x}_\mu), \tag{2.80}$$

gdje je a_μ deformacijski vektor, a $\hat{x}_\mu$ je oznaka za nekomutativni operator koordinata. Naravno, u limesu iščezavajuće deformacije $a_\mu \to 0$, imamo $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] \to 0$, tj. $\hat{x}_\mu \to x_\mu$, tako da ćemo perturbativno pristupiti problemu, na način da ćemo naći realizaciju za $\hat{x}_\mu$ u terminima nedeformiranih operatora

x_μ i p_μ i to do prvog reda u deformacijskom parametru a_μ. Stoga, možemo pisati*

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \delta\hat{x}_\mu(a), \tag{2.81}$$

gdje za $\delta\hat{x}_\mu(a)$ najopćenitije (u najnižem redu u a_μ) možemo pisati

$$\delta\hat{x}_\mu(a) = \alpha x_\mu (a\cdot p) + \beta(x\cdot a)p_\mu + \gamma(x\cdot p)a_\mu, \qquad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R} \tag{2.82}$$

Uzimajući u obzir (2.80) dobivamo uvjete na realne parametre α, β i γ

$$\gamma - \alpha = 1, \qquad \beta\in\mathbb{R}. \tag{2.83}$$

Sada trebamo konstruirati nekomutativni analogon operatora impulsa $\hat{p}$, međutim nemamo na raspolaganju $[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu] =?$ Sve što znamo jest da u nultom redu u a_μ jednadžba (2.68) mora vrijediti. Promotrimo slučaj neutralne čestice, jer tada ne razlikujemo kinetički i kanonski impuls i nema baždarnog polja. Dakle, za $e=0$, slijedi $\dot{\hat{x}}_\mu(e=0) \equiv \frac{1}{m}\hat{p}_\mu$, pa deriviranjem jednadžbe (2.80) s obzirom na τ dobivamo

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu] + [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i(a_\mu\hat{p}_\nu - a_\nu\hat{p}_\mu). \tag{2.84}$$

Jednadžba (2.84) nam fiksira samo antisimetrični dio komutatora $[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu]$. Međutim, pošto radimo u linearnoj aproksimaciji, možemo pisati

$$\hat{p}_\mu = p_\mu + \delta\hat{p}_\mu(a) \tag{2.85}$$

i zahtjevati da (2.84) i Jacobijevi identiteti između $\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu$ i $\hat{x}_\rho$ moraju biti zadovoljeni do prvog reda u a_μ. Tako možemo naći eksplicitni izraz za $\delta\hat{p}_\mu(a)$. Ova konstrukcija je u potpunosti ekvivalentna sa slijedećom preskripcijom: jednostavno uzmemo formu $\delta\hat{x}_\mu(a)$ eksplicitno danu u (2.82) te zamjenimo x s p (tj. kao da smo derivirali $\hat{x}_\mu$ po τ uz $\dot{p}_\mu = 0$) te dobivamo

$$\hat{p}_\mu = p_\mu + (\alpha+\beta)(a\cdot p)p_\mu + \gamma a_\mu p^2. \tag{2.86}$$

Sada imamo

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0, \tag{2.87}$$

te koristeći (2.86) slijedi

$$[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}(1+s(a\cdot p)) + i(s+2)a_\mu p_\nu + i(s+1)a_\nu p_\mu, \qquad s = 2\alpha+\beta. \tag{2.88}$$

*Oznaku δ ćemo korisiti za najniži doprinos nekomutativnom djelu u formalnom redu operatora. Tako npr. za generički nekomutativni operator $\hat{A}$ imamo njegov razvoj $\hat{A} = A + \delta\hat{A}(a)$, gdje $\delta\hat{A}(a)$ ovisi o x_μ i p_ν te je linearan u a_μ.

Razmatramo $e = 0$ slučaj, tako da nema razlike između kanonskog i kinetičkog impulsa. Slično kao i u komutativnom slučaju postuliramo jednadžbu nalik na Newtonovu

$$\hat{F}_\mu(e=0) \equiv \hat{G}_\mu = \frac{d\hat{p}_\mu}{d\tau}. \tag{2.89}$$

Deriviranjem izraza (2.88) s obzirom na τ dobivamo

$$[\hat{G}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}s(a\cdot G) + i(s+2)a_\mu G_\nu + i(s+1)a_\nu G_\mu, \tag{2.90}$$

pritom koristeći (2.87) i činjenicu da sve jednadžbe iz prijašnjeg poglavlja vrijede u nultom redu u a_μ. Cilj nam je naći izraz za $\hat{G}_\mu$, međutim ne možemo samo integrirati (2.90). Zato ćemo silu $\hat{G}_\mu$ napisati na slijedeći način

$$\hat{G}_\mu = G_\mu(x) + \delta\hat{G}_\mu(a). \tag{2.91}$$

Sada, kombiniranjem (2.90) i (2.91) možemo naći jednadžbu za $\delta\hat{G}_\mu(a)$

$$\begin{aligned}[\delta\hat{G}_\mu(a), \hat{x}_\nu] &= i\frac{\partial\delta\hat{G}_\mu(a)}{\partial p^\nu} \\ &= -[G_\mu, \hat{x}_\nu] + i\eta_{\mu\nu}s(a\cdot G) + i(s+2)a_\mu G_\nu + i(s+1)a_\nu G_\mu,\end{aligned} \tag{2.92}$$

koja se sada dade integrirati preko p^ν. Prije nego eksplicitno napišemo $\hat{G}_\mu$, zgodno je uvesti operator koji komutira s $\hat{x}_\mu$. Označiti ćemo taj operator s $\hat{y}_\mu$ za koji vrijedi

$$[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0, \qquad \hat{y}_\mu = x_\mu + \gamma x_\mu(a\cdot p) + (\gamma-1)(x\cdot p)a_\mu + \beta(x\cdot a)p_\mu. \tag{2.93}$$

Definirati ćemo i općenitu funkciju $f(\hat{y})$

$$f(\hat{y}) = f(x) + \gamma(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x})(a\cdot p) + (\gamma-1)(a\cdot\frac{\partial f}{\partial x})(x\cdot p) + \beta(a\cdot x)(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot p), \tag{2.94}$$

tako da vrijedi

$$[f(\hat{y}), \hat{x}_\mu] = 0. \tag{2.95}$$

Konačno, možemo napisati operator sile u nekomutativnom prostoru za neutralnu česticu kao

$$\hat{F}_\mu(e=0) = G_\mu(\hat{y}) + s(a\cdot G)p_\mu + (s+2)a_\mu(G\cdot p) + (s+1)G_\mu(a\cdot p), \tag{2.96}$$

odnosno

$$\hat{F}_\mu(e=0) = G_\mu(\hat{y}) + ms(a\cdot G)\dot{x}_\mu + m(s+2)a_\mu(G\cdot\dot{x}) + m(s+1)G_\mu(a\cdot\dot{x}). \tag{2.97}$$

Iz gornje analize slijedi fizikalna interpretacija najnižih nekomutativnih doprinosa gibanju neutralne čestice. Dakle, gibanje neutralne čestice u κ-deformiranom Minkowskijevom prostoru se može interpretirati kao gibanje kroz pozadinsko polje koje je proporcionalno deformaciji a_μ i veže se na česticu linearno u brzini, što podsjeća na vezanje eletromagnetskog polja i izraz za Lorentzovu silu. Možemo reći da gibanje čestice inducira nekomutativnost koja se manifestira kao pozadinsko elektromagnetno polje i djeluje povratno na česticu. Jakost ovog efekta ovisi o a_μ i brzini čestice.

2.3.2 Slučaj nabijene čestice i popravke Lorentzove sile

U prijašnjem poglavlju smo pokazali kako princip minimalnog vezanja prirodno vodi na dobro nam poznati izraz za Lorentzovu silu. Stoga, želimo generalizirati princip minimalnog vezanja na konzistentan način i primjeniti ga u nekomutativnom slučaju. Ako postuliramo $\hat{\pi}_\mu = m\dot{\hat{x}}_\mu$ i naivno uvedemo vezu između kanonskog i kinetičkog impulsa uvodeći baždarno polje na način $\hat{\pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{x} \text{ ili } \hat{y})$, tada zbog Jacobijevih identiteta i

$$[\hat{\pi}_\mu, \hat{x}_\nu] + [\hat{x}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = i(a_\mu \hat{\pi}_\nu - a_\nu \hat{\pi}_\mu), \tag{2.98}$$

dobivamo prerestriktivne uvjete na baždarno polje A_μ. Međutim, bolje je gledati princip minimalnog vezanja na sljedeći način: to je veza između kanonskog i kinetičkog impulsa preko baždarnog polja, ali tako da su komutacijske relacije $[\hat{\pi}_\mu, \hat{x}_\nu]$ i $[\hat{p}_\mu, \hat{x}_\nu]$ identične po formi (što je naravno u skladu s komutativnim slučajem). Dakle, po analogiji s komutativnim slučajem, pišemo

$$[\hat{\pi}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\eta_{\mu\nu}(1 + s(a \cdot \pi)) + i(s+2)a_\mu \pi_\nu + i(s+1)a_\nu \pi_\mu. \tag{2.99}$$

Naravno za kinetički impuls vrijedi $\hat{\pi}_\mu = \pi_\mu + \delta\hat{\pi}_\mu(a)$, pa uvrštavanjem u (2.99) dobivamo $\hat{\pi}_\mu$ u najnižem redu

$$\hat{\pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu(\hat{y}) - e[(s+2)(A \cdot p)a_\mu + s(A \cdot a)p_\mu + (s+1)A_\mu(a \cdot p)]. \tag{2.100}$$

Deriviranjem gornjeg izraza po τ te koristeći $\hat{F}_\mu = \frac{d\hat{\pi}_\mu}{d\tau}$ dobivamo

$$[\hat{F}_\mu, \hat{x}_\nu] + \frac{1}{m}[\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = i\eta_{\mu\nu} s(a \cdot F) + i(s+2)a_\mu F_\nu + i(s+1)a_\nu F_\mu. \tag{2.101}$$

Silu ćemo opet rastaviti na nulti i prvi doprinos u a_μ, odnosno $\hat{F}_\mu = F_\mu + \delta\hat{F}_\mu(a)$, pa dobivamo jednadžbu koju $\delta\hat{F}_\mu(a)$ mora zadovoljavati

$$[\delta\hat{F}_\mu(a), x_\nu] = [\hat{x}_\nu, F_\mu] - \frac{1}{m}[\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] + i\eta_{\mu\nu} s(a \cdot F) + i(s+2)a_\mu F_\nu + i(s+1)a_\nu F_\mu, \tag{2.102}$$

gdje je F_μ sila u nultom redu (tj. zadovoljava komutativne uvjete). Direktnim računom dobivamo i komutator kinetičkih impulsa

$$
\begin{aligned}
[\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] = -ie[F_{\mu\nu} + 2(s+1)F_{\mu\nu} a \cdot p + i(\alpha+\beta) a \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x} + \gamma(x \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x})(a \cdot p) \\
+ (\gamma - 1)(a \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x})(x \cdot p) + \beta(a \cdot x)(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x} \cdot p) + s a^\alpha (F_{\alpha\nu} p_\mu - F_{\alpha\mu} p_\nu) \\
+ (s+2)(a_\mu F_{\alpha\nu} - a_\nu F_{\alpha\mu}) p^\alpha + i\gamma(a_\mu \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} - a_\nu \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha})] \\
+ ie^2[(s+2)A^\alpha(a_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - a_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}) + s(a \cdot A) F_{\mu\nu} \\
+ (s+1)a^\alpha(A_\mu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} - A_\nu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}) - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\beta}(x^\alpha a^\beta - a^\alpha x^\beta)].
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

Uočimo da desnu stranu jednadžbe (2.102) možemo eksplicite izraziti preko komutativnih x i p dok za lijevu stranu vrijedi

$$
[\delta \hat{F}_\mu(a), x_\nu] = i \frac{\partial(\delta \hat{F}_\mu(a))}{\partial p^\nu}. \tag{2.104}
$$

Dakle, možemo integrirati jednadžbu (2.102) preko komutativnih impulsa p. Izravnim računom dobivamo izraz za silu, koji naposljetku zapisujemo uz pomoć nekomutativnog analogona operatora brzine $\dot{\hat{x}}_\mu$

$$
\hat{F}_\mu = \hat{G}_\mu + eF_{\mu\nu}(\hat{y})\dot{\hat{x}}^\nu + e\tilde{F}_{\mu\nu}\dot{\hat{x}}^\nu - m\Gamma_{\mu\nu\lambda}\dot{\hat{x}}^\nu \dot{\hat{x}}^\lambda + O(a \cdot e^2) + O(a^2), \tag{2.105}
$$

gdje je $\hat{G}_\mu = \hat{F}_\mu(e=0)$ definiran u (2.96), $F_{\mu\nu}(\hat{y})$ je definiran slično kao u (2.94)

$$
F_{\mu\nu}(\hat{y}) = F_{\mu\nu}(x) + \gamma(x \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x})(a \cdot p) + (\gamma - 1)(a \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x})(x \cdot p) + \beta(a \cdot x)(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x} \cdot p), \tag{2.106}
$$

a za preostala dva člana imamo

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{\mu\nu} &= i[(\alpha+\beta) a \cdot \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x} - \gamma(a_\mu \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha} - a_\nu \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x^\alpha})], \\
\Gamma_{\mu\nu\lambda} &= e[(\alpha+\beta)F_{\mu\nu} a_\lambda + (\gamma+\beta) F_{\mu\rho} a^\rho \eta_{\lambda\nu} - sF_{\rho\nu} a^\rho \eta_{\mu\lambda} - (3\gamma - 2\beta - 1) F_{\mu\nu} a_\lambda].
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

Izraz (2.105) predstavlja nekomutativnu inačicu Lorentzove sile. Novi članovi koji se pojavljuju, tj. nekomutativne korekcije proporcionalne $\dot{x}$ možemo interpretirati kao efektivni doprinos induciranog pozadinskog elektromagnetskog polja, dok nekomutativne korekcije proporcionalne s $\dot{x}^2$ interpretiramo kao kvazi-gravitacijski efekt uzrokovan pozadinskom zakrivljenošću koja je inducirana nekomutativnošću samog prostora. Dakle, u najnižem redu, gibanje nabijene čestice u nekomutativnom prostoru možemo shvatiti kao gibanje kroz dodatno pozadinsko elektromagnetsko i gravitacijsko polje inducirano nekomutativnošću prostor vremena. Treba napomenuti da su oba ova doprinosa proporcionalna s ea_μ.

2.3.3 κ-deformirane Maxwellove jednadžbe

U našem pristupu svi Jacobijevi identiteti između $\hat{\pi}$, $\hat{p}$ i $\hat{x}$ su zadovoljeni po konstrukciji. Najzanimljiviji je sljedeći identitet

$$[\hat{\pi}_\mu, [\hat{\pi}_\nu, \hat{\pi}_\rho]] + [\hat{\pi}_\nu, [\hat{\pi}_\rho, \hat{\pi}_\mu]] + [\hat{\pi}_\rho, [\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu]] = 0, \tag{2.108}$$

koji vodi na (do prvog reda u a_μ)

$$\partial_\mu \hat{F}_{\nu\rho} + \partial_\nu \hat{F}_{\rho\mu} + \partial_\rho \hat{F}_{\mu\nu} = i([\delta\hat{\pi}_\mu(a), F_{\nu\rho}] - e[A_\mu, \delta\hat{F}_{\nu\rho}(a)] + \text{ciklično}(\mu,\nu,\rho)), \tag{2.109}$$

gdje smo koristili

$$[\hat{\pi}_\mu, \hat{\pi}_\nu] \equiv -ie\hat{F}_{\mu\nu} = -ieF_{\mu\nu}(x) - ie\delta\hat{F}_{\mu\nu}(a), \tag{2.110}$$

koji je eksplicitno dan u (2.103). Vidimo da $\hat{F}_{\mu\nu}$ možemo u potpunosti izraziti pomoću operatora x i p. Jednadžba (2.109) predstavlja κ-deformirani analogon homogenih Maxwellovih jednadžbi. Desnu stranu jednadžbe (2.109) možemo u potpunosti izraziti pomoću komutativnih varijabli i polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$, koja zadovoljavaju uobičajene Maxwellove jednadžbe u nultom redu.

Promotrimo algebarski identitet

$$[\hat{\pi}_\nu, [\hat{\pi}_\mu, [\hat{\pi}^\mu, \hat{\pi}^\nu]]] = 0. \tag{2.111}$$

Definiranjem $\hat{j}_\mu$ na sljedeći način

$$[\hat{\pi}_\mu, [\hat{\pi}^\mu, \hat{\pi}^\nu]] = e\hat{j}^\nu, \tag{2.112}$$

slijedi

$$[\hat{\pi}_\mu, \hat{j}^\mu] = 0. \tag{2.113}$$

Dakle, veličina $\hat{j}_\mu$ je očuvana struja i imamo

$$\partial_\mu \hat{F}^{\mu\nu} = \hat{j}^\nu + i[\delta\hat{\pi}_\mu(a), F^{\mu\nu}] - ie[A_\mu, \delta\hat{F}^{\mu\nu}(a)] + O(a^2). \tag{2.114}$$

Jednadžba (2.114) predstavlja κ-deformirani analogon nehomogenih Maxwellovih jednadžbi.

Vidimo da su κ-Maxwellove jednadžbe (2.109) i (2.114) poprilično netransparentne te smo primorani proučiti neke posebne slučajeve. U tu svrhu promotriti ćemo slučaj† kada $a_\mu = (a_0, \vec{0})$, tj. $a_0 \equiv a = \kappa^{-1}$ i $a_i = 0$. Definiramo nekomutativno električno i magnetno polje na uobičajen način

$$\begin{aligned} \hat{F}_{0i} &= -\hat{E}_i, \qquad F_{0i} = -E_i, \\ \hat{F}_{ij} &= -\epsilon_{ijk}\hat{B}_k, \qquad F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Važno je uočiti da se $\hat{F}_{\mu\nu}$, $\hat{E}_i$ i $\hat{B}_i$ mogu izraziti kao funkcije komutativnih operatora x i p (vidi (2.103)). Koristeći gore navedene definicije, sada možemo eksplicitno izračunati desne strane u jednadžbama (2.109) i (2.114) i izraziti ih pomoću komutativnih polja

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{B}} = a(\alpha+\beta)\dot{\vec{B}} \cdot \vec{p} - ae(\vec{D}_B \cdot \vec{B} + s\vec{E} \cdot \vec{B}), \tag{2.116}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \hat{\vec{E}} + \frac{\partial \hat{\vec{B}}}{\partial t} =& - a\left[(\alpha+\beta)(\dot{\vec{B}}p_0 - \dot{\vec{E}} \times \vec{p}) + \gamma(p \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot p)\right] \\ &+ ae\left[\vec{\Box}_E \times \vec{E} + D_B\vec{B} - (s+2)B_i\vec{\nabla}A_i\right], \end{aligned} \tag{2.117}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{E}} = \hat{\rho} - a(\alpha+\beta)(p_0\vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \dot{\vec{E}} \cdot \vec{p}) + ae\left[\vec{D}_E \cdot \vec{E} - (s+2)\vec{B}^2\right], \tag{2.118}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \hat{\vec{B}} - \frac{\partial \hat{\vec{E}}}{\partial t} =& \hat{\vec{j}} + a\left[(\alpha+\beta)(p_0\dot{\vec{E}} + \dot{\vec{E}}p_0 - p_0\vec{\nabla} \times \vec{B} - \dot{\vec{B}} \times \vec{p}) + \gamma(p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot p)\right] \\ &- ae\left[\vec{\Box}_B \times \vec{B} + D_E\vec{E} + (s+2)\vec{B} \times \vec{E} + sE_i\vec{\nabla}A_i\right]. \end{aligned} \tag{2.119}$$

Ove jednadžbe čine potpun skup κ-deformiranih Maxwellovih jednadžbi. Za pojednostavljivanje zapisa uveli smo sljedeće oznake $\vec{D}_B$, $\vec{D}_E$, D_B, D_E, $\vec{\Box}_B\times$

†U principu ovo je orginalni κ-Minkowskijev prostor [11], a kasnije su sve ekstenzije Liejevog tipa preuzele isto ime.

i $\vec{\Box}_E\times$, definirane na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
D_B &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\phi\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\phi}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}) + (2s+3)\phi\frac{\partial}{\partial t} - 2(s+1)\dot{\phi} + (s+2)(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) \\
&\quad + (s+2)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}), \\
D_E &= D_B + s\phi\frac{\partial}{\partial t} - 2(s+1)\dot{\phi} - 2(s+1)(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}), \\
\vec{D}_B &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\vec{A}}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}) + (s+1)\vec{A}\frac{\partial}{\partial t} - 2(s+1)\dot{\vec{A}}, \\
\vec{D}_E &= -\vec{D}_B + s\phi\vec{\nabla} + 2(s+1)\dot{\vec{A}}, \\
\vec{\Box}_B\times &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\times\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\vec{A}}\times(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}) - s\phi\vec{\nabla}\times + (s+1)\vec{A}\times\frac{\partial}{\partial t} - (3s+4)\dot{\vec{A}}\times, \\
\vec{\Box}_E\times &= -\vec{\Box}_B\times - s\phi\vec{\nabla}\times .
\end{aligned}
\tag{2.120}
$$

2.3.4 Prirodna realizacija

Sve korekcije koje dolaze od nekomutativnosti ovise o izboru realizacije operatora $\hat{x}_\mu$

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + \alpha x_\mu(a\cdot p) + \beta(x\cdot a)p_\mu + \gamma(x\cdot p)a_\mu, \tag{2.121}$$

tj. o realnim parametrima α, β i γ. Ovdje ćemo proučiti slučaj tzv. *prirodne* realizacije [36]. Najlakši način da se dođe do prirodne realizacije jest da od (2.121) zahtjevamo hermitičnost, tj. $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$ i fiksiramo parametar $\gamma = 0$. U tom slučaju dobivamo $\alpha = -1$ i $\beta = 1$, pa je operator $\hat{x}_\mu$ u prirodnoj realizaciji dan kao

$$\hat{x}_\mu^{nat} = x_\mu[1-(a\cdot p)] + (x\cdot a)p_\mu. \tag{2.122}$$

Parametar s sada postaje $s^{\text{nat}} = -1$. Oznake koje smo definirali u (2.120) u prirodnoj realizaciji poprimaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned}
\vec{D}_B &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\vec{A}}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}),\\
\vec{D}_E &= -\vec{D}_B - \phi\vec{\nabla},\\
D_B &= (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\phi\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\phi}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}) + \phi\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla}) + (\vec{\nabla}\cdot\vec{A}),\\
D_E &= D_B - \phi\frac{\partial}{\partial t},\\
\vec{\Box}_E\times &= \dot{\vec{A}}(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}) - (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\times\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{A}}\times,\\
\vec{\Box}_B\times &= -\vec{\Box}_E\times + \phi\vec{\nabla}\times .
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Za κ-deformirane Maxwellove jednadžbe dobivamo

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{B}} &= -ae(\vec{D}_B\cdot\vec{B} - \vec{E}\cdot\vec{B}),\\
\vec{\nabla}\times\hat{\vec{E}} + \frac{\partial\hat{\vec{B}}}{\partial t} &= ae(\vec{\Box}_E\times\vec{E} + D_B\vec{B} - B_i\vec{\nabla}A_i),\\
\vec{\nabla}\cdot\hat{\vec{E}} &= \hat{\rho} + ae(\vec{D}_E\cdot\vec{E} - \vec{B}^2),\\
\vec{\nabla}\times\hat{\vec{B}} - \frac{\partial\hat{\vec{E}}}{\partial t} &= \hat{\vec{j}} - ae(\vec{\Box}_B\times\vec{B} + D_E\vec{E} + \vec{B}\times\vec{E} - E_i\vec{\nabla}A_i),
\end{aligned} \tag{2.124}$$

koje su i dalje nelinearne što znatno otežava detaljniju analizu njihovih novih svojstava i poopćenih simetrija. Možemo promotriti i nekomutativne doprinose Lorentzovoj sili u prirodnoj realizaciji

$$\hat{F}_\mu^{nat} = \hat{G}_\mu^{nat} + eF_{\mu\nu}^{nat}(\hat{y})\dot{x}^\nu - m\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{nat}\dot{x}^\nu\dot{x}^\lambda, \tag{2.125}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{\mu\nu}^{nat} =&0,\\
\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{nat} =&ae(-F_{\mu 0}\eta_{\lambda\nu} + F_{0\nu}\eta_{\mu\lambda} + 3F_{\mu\nu}\delta_\lambda^0),\\
F_{\mu\nu}^{nat}(\hat{y}) =&F_{\mu\nu} + at(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x}\cdot p) - a\dot{F}_{\mu\nu}(x\cdot p),\\
\hat{G}_\mu^{nat} =&G_\mu(\hat{y}) - amG_0\dot{x}_\mu + am(G\cdot\dot{x})\delta_\mu^0.
\end{aligned} \tag{2.126}$$

Zanimljivo je za uočiti (vidi (2.125)) da sila ne ovisi samo o naboju čestice, već i o njenoj masi. Naravno u graničnom slučaju $a \to 0$, sva ovisnost o masi nestaje.

2.3.5 Neke fizikalne posljedice nekomutativnih korekcija

U ovom poglavlju smo konstruirali jednadžbu za silu te Maxwellove jednadžbe u κ-deformiranom prostor-vremenu. Pri tome smo koristili varijantu Feynmanovog pristupa, tj. princip minimalnog vezanja [76]. Krenuli smo od istih pretpostavki kao i Feynman [68; 71], koristili vezu među kanonski konjugiranim veličinama (položaj i impuls) te međusobne komutatore (ili Poissonove zagrade). Zatim, analogno Feynmanovom pristupu, koristili smo Jacobijeve identitete da nađemo jednadžbu za silu i Maxwellove jednadžbe. Naravno, jedina bitna razlika između Feynmanovog pristupa i principa minimalnog vezanja, jest ta da u minimalnom vezanju uvodimo baždarno polje kao vezu između kanonskog i kinetičkog impulsa [76; 68; 71]. Pošto u cijelom dosadašnjem računu nismo koristili eksplicitnu definiciju komutatora, već samo njegova algebarska svojstva, slijedi da se klasični limes ostvaruje samo zamjenom $(i\hbar)^{-1}[\,]$ s $\{\,\}_{PB}$ te operatori u Heisenbergovoj reprezentaciji postaju funkcije na klasičnom faznom prostoru.

Vidjeli smo da se gibanje nabijene čestice u κ-deformiranom prostoru može opisati kao gibanje kroz prostor u kojem postoji pozadinsko inducirano elektromagnetno polje (doprinosi proporcionalni $\dot{x}$) te inducirana zakrivljenost prostor vremena (doprinosi proporcionani s $\dot{x}^2$). Ova interpretacija je u skladu i s nekim istraživanjima provedenim na Moyalovom prostoru [100]. Nažalost, ove korekcije Lorentzovoj sili znatno ovise o snazi vanjskog polja, naboju i energiji čestice, stoga imaju jedino šanse biti opažene u visoko energetskim akceleratorskim zrakama i to kao male devijacije od klasičnih trajektorija. Naravno, ove nove korekcije narušavaju Lorentzovu simetriju te modificiraju fundamentalne disperzijske relacije [14].

Kao što je bilo i očekivano, svi novi nekomutativni doprinosi Lorentzovoj sili i Maxwellovim jednadžbama ovise o izboru realizacije nekomutativnih koordinata. Ovdje smo pobliže analizirali prirodnu realizaciju. Zašto smo baš tu realizaciju izabrali? Zato jer je a priori hermitska i ima zgodno svojstvo, a to je da se generatori translacija, tj. impuls transformira kao vektor s obzirom na Lorentzove transformacije.

Dobivene κ-deformirane Maxwellove jednadžbe su nelinearne čak i u prirodnoj realizaciji, što poprilično otežava općenitu analizu te ćemo sada razmotriti neke granične slučajeve kako bi dobili bolji osjećaj za prirodu nekomutativnih korekcija u elektrodinamici. Razmotrimo statični limes te uzmimo da iščezavaju $\hat{\rho}$, E, i ϕ. Sada smo dobili jednadžbe koje opisuju κ-deformiranu magnetostatiku

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{B}} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \hat{\vec{B}} &= \hat{\vec{j}}. \end{aligned} \tag{2.127}$$

Vidimo da što se tiče magnetostatike nismo dobili ništa novo. U elektrostatičkom limesu ćemo dobiti nešto zanimljiviju situaciju. Napomenimo da naša metoda ima prirodan i praktičan klasični granični slučaj. Naime, kako je već ranije spominjano, u svim računima gdje su se pojavljivali komutatori možemo staviti Poissonove zagrade, $\frac{1}{i\hbar}[,] \to \{,\}$, tada svi operatori postaju c-broj funkcije. U tom slučaju parametar τ postaje vlastito vrijeme (duljina). U klasičnom graničnom slučaju možemo pogledati što se dešava s Coulombovim zakonom, tj. silom između dvije mirujuće nabijene čestice e na udaljenosti r i razmotriti ulogu κ-deformacija u tom slučaju. Naravno, sad smo u nerelativističkom režimu, pa imamo $\frac{d\tau}{dt} = 1$. Čestice miruju $\dot{x}_i = 0$. U elektrostatičkom limesu G_μ, B i A iščezavaju a u nultom redu imamo $E = \frac{e}{4\pi r^2}$. Nakon uvrštavanja svega toga u (2.125), slijedi

$$\hat{F} = \frac{e^2}{4\pi r^2}(1 - 2am). \tag{2.128}$$

Vidimo da Coulombov zakon i dalje vrijedi što se tiče ovisnosti o međusobnoj udaljenosti. Međutim, nekomutativnost doprinosi promjeni naboja, bolje rečeno naboj ovisi o masi čestice $e \to e(1 - 2am)^{\frac{1}{2}}$. Dakle, u najnižem redu klasična elektrodinamika biva modificirana činjenicom da osnovni Coulombov zakon, uz električni naboj i udaljenost među česticama, sada ovisi i o masi čestica. Isto svojstvo je dobiveno u [30].

Promotrimo gibanje čestice mase m i naboja e koja se giba brzinom $\vec{v}$ u konstantnom vanjskom električnom polju iznosa E. Direktnim uvrštavanjem u (2.125) slijedi

$$\begin{aligned} \hat{\vec{F}} &= e\vec{E}(\gamma - am(2\gamma^2 + \vec{v}^2)) - aem(\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{v} \\ &= \gamma e\vec{E} - ame\vec{E}(2\gamma^2 + \vec{v}^2) - aem(\vec{E} \cdot \vec{v})\vec{v}, \end{aligned} \tag{2.129}$$

gdje je $\gamma = (1 - \vec{v}^2)^{1/2}$. Nadalje, bez gubitka općenitosti uzimamo $\vec{E} = (E, 0, 0)$ i dobivamo

$$\begin{aligned} \hat{F}^x &= eE(\gamma - am(2\gamma^2 + \vec{v}^2)) - aem(Ev^x)v^x \\ \hat{F}^y &= -aem(Ev^x)v^y \\ \hat{F}^z &= -aem(Ev^x)v^z. \end{aligned} \tag{2.130}$$

U ravnini okomitoj na električno polje lako nalazimo rješenje direktnom integracijom

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}(\tau) &= \dot{y}(0)e^{-aeEx(\tau)}, \\
\hat{y}(\tau) &= \dot{y}(0)\tau - \dot{y}(0)aeE\int d\tau x(\tau) + y(0),
\end{aligned}
\tag{2.131}
$$

Analogna jednadžba vrijedi i za $\hat{z}(\tau)$. Već vidimo prvi signal nekomutativnosti, a to su male devijacije od klasične trajektorije. Uz početne uvjete $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, dobivamo jednadžbu za $x(\tau)$

$$
\ddot{\hat{x}} = eE/m\frac{1}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} - \frac{2aeE}{1-\dot{x}^2} - 2aeE\dot{x}^2, \tag{2.132}
$$

što nakon integracije vodi na implicitnu jednadžbu

$$
\tau = \frac{m}{2eE}(\sqrt{1-v^2} + \sin^{-1}(v)) + \frac{2am^2}{e^2E}(-\frac{v^5}{5} + \frac{v^3}{3} + v) + O(a^2), \tag{2.133}
$$

gdje se lijepo vidi relativistički doprinos i nekomutativni doprinos. Jednadžba (2.133) jasno pokazuje kako svi nekomutativni doprinosi uz ovisnost o a, ovise i o masi i naboju.

Zanimljivo je razmotriti i Newtonov limes. Ako uzmemo $\dot{x}_i, G_0 = 0$ i $G_i = -G\frac{m^2}{r^2}$ u jednadžbi (2.97), slijedi da Newtonov zakon gravitacije ostaje nepromjenjen u najnižem redu. Ovo se razlikuje od istraživanja u [14].

§ 2.4 Geodetska jednadžba u κ-Minkowskijevom prostoru

2.4.1 Gravitacija i Feynmanov pristup

U ravnom prostoru, Feynmanov pristup i princip minimalnog vezanja su ekvivalentni [76; 31] i moguće je izvesti jednadžbu gibanja za nabijenu česticu. Kao što smo vidjeli isto vrijedi i za Minkowskijev prostor [31]. U [71] Feynmanov pristup je poopćen na opću relativnost, što je rezultiralo izvodom geodetske jednadžbe. Mi ćemo ovdje adaptirati formalizam razvijen u [71], kao što smo to napravili i u prošlom poglavlju, a sve to radimo kako bi na kraju došli do geodetske jednadžbe u nekomutativnom prostoru. Znamo da za relativističku česticu mase m i električnog naboja e vrijedi

$$\begin{aligned} [x_\mu(\tau), x_\nu(\tau)] = 0, \qquad & [x_\mu(\tau), p_\nu(\tau)] = -i\eta_{\mu\nu}, \\ F_\mu = \partial_\mu \phi + eF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu, \qquad & F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \end{aligned} \tag{2.134}$$

gdje je $p_\mu = m\dot{x}_\mu + eA_\mu$ operator kanonskog impulsa, $F_\mu = m\ddot{x}_\mu$ je sila, $F_{\mu\nu}$ je elektromagnetni tenzor (Faradayev tenzor), A_μ je baždarno polje i $\phi(x)$ je proizvoljna funkcija od x. Sada nas zanima samo čista gravitacija, pa nam neće trebati baždarno polje, tj. promatrati ćemo neutralne čestice. Dakle, za neutralne čestice imamo

$$\begin{aligned} [x_\mu, x_\nu] = 0, \qquad & [p_\mu, p_\nu] = 0, \\ [x_\mu, p_\nu] &= -i\eta_{\mu\nu} \\ F_\mu = 0, \qquad & p_\mu = m\dot{x}_\mu, \end{aligned} \tag{2.135}$$

gdje smo uzeli $\phi(x) = 0$, jer ovaj odabir vodi na ispravan izraz za geodetsku jednadžbu. Prijelaz s ravnog prostora u zakrivljeni se radi tako da proglasimo da (2.134) vrijede lokalno i da se gravitacija krije u jednostavnoj zamjeni metrike Minkowskog $\eta_{\mu\nu}$ s proizvoljnom metrikom $g_{\mu\nu}(X)$ [71]. Vidjeli smo da ovaj pristup vodi na geodetsku jednadžbu. Mi ćemo slično postupiti. Dakle, postuliramo

$$[X_\mu, X_\nu] = 0 \qquad [X_\mu, P_\nu] = -ig_{\mu\nu}(X), \tag{2.136}$$

međutim zadržavamo dozu opreza, pa za "metriku" $g_{\mu\nu}(X)$ samo pretpostavljamo da je formalna funkcija operatora X, a iz prve jednadžbe u (2.136) slijedi da je i simetričan na zamjenu indeksa. Znači i dalje svo "podizanje" i "spuštanje" indeksa se vrši pomoću $\eta_{\mu\nu}$ (ovo je sad različito od [71]). Sada je $X_\mu(\tau)$ novi operator položaja, a $P_\mu(\tau)$ je konjugirani impuls, $m\dot{X}_\mu = P_\mu$. Ključno je uočiti da možemo naći realizaciju za X i P pomoću komutativnih x i p u ravnom prostoru. Naime, ako uzmeno da vrijedi

$$X_\mu \equiv x_\mu, \qquad P_\mu \equiv g_{\mu\alpha} p^\alpha, \tag{2.137}$$

gdje x_μ i p_ν zadovoljavaju (1.3). Sada deriviramo jednadžbu (2.136) po τ i dobivamo

$$\frac{1}{m}[P_\mu, P_\nu] + m[X_\mu, \ddot{X}_\nu] = -i\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau}, \tag{2.138}$$

gdje smo koristili $\dot{P}_\mu = m\ddot{X}_\mu$. Koristeći (2.137) i (1.3) slijedi

$$[P_\mu, P_\nu] = i(g_{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha})p^\beta, \tag{2.139}$$

gdje smo koristili $[p_\mu, f(x,p)] = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Također imamo

$$\dot{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X_\beta}\dot{X}_\beta = \frac{1}{m}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial X_\beta}P_\beta = \frac{1}{m}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}g_{\beta\alpha}p^\alpha. \tag{2.140}$$

Jednadžbe (2.138), (2.139), i (2.140) nam sad daju

$$[X_\mu, m\ddot{X}_\nu] = -\frac{i}{m}(g_{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha})p^\beta. \tag{2.141}$$

Ako za operator $\ddot{X}$ vrijedi $\ddot{X}_\mu = \ddot{X}_\mu(x,p)$, tada lijeva strana jednadžbe (2.141) postaje

$$[X_\mu, \ddot{X}_\nu] = [x_\mu, \ddot{X}_\nu] = -i\frac{\partial \ddot{X}_\nu}{\partial p^\mu}, \tag{2.142}$$

pa sad možemo jednadžbu (2.141) integrirati po p^μ, pa dobivamo

$$m\ddot{X}_\nu = G_\nu + \frac{1}{2m}(g_{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha})p^\beta p^\mu, \tag{2.143}$$

gdje ćemo ubrzo izabrati $G_\nu(x) = 0$. Definiramo

$$\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta} = -\frac{1}{2}(g_{\mu\alpha}\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} - g_{\nu\alpha}\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}) \tag{2.144}$$

i naposljetku imamo

$$m\ddot{X}_\nu + \frac{1}{m}\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta}p^\beta p^\mu = 0. \tag{2.145}$$

Lako se uvjeriti da su svi Jacobijevi identiteti zadovoljeni. Jednadžba (2.144) jako podsjeća na definiciju Christoffelovog simbola u općoj teoriji relativnosti i naravno jednadžba (2.145) podsjeća na čuvenu geodetsku jednadžbu. No valja imati na umu da smo mi ovdje izveli kvantnu verziju geodetske jednadžbe i da je to operatorska jednadžba. Da bi uspostavili vezu s gravitacijom trebamo napraviti klasični limes. Naravno, kao i ranije uzimamo zamjenu $[,] \to \frac{1}{i}\{,\}_{PB}$ i sada svi operatori postaju komutirajuće c-broj funkcije. Sada ćemo pretpostaviti da je naša "metrika" invertibilna te definiramo njen inverz na sljedeći način

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta^\nu_\mu. \tag{2.146}$$

Koristeći (2.137), (2.144) i (2.146), slijedi

$$\begin{aligned} &g^{\beta\sigma}P_\sigma = p^\beta, \qquad g^{\beta\sigma}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} = -g_{\alpha\beta}\frac{\partial g^{\beta\sigma}}{\partial x^\rho}, \\ &\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta}g^{\beta\sigma}g^{\mu\sigma} = \frac{1}{2}g_{\nu\alpha}(\frac{\partial g^{\alpha\sigma}}{\partial x_\rho} + \frac{\partial g^{\alpha\rho}}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x_\alpha}) \equiv \Gamma_\nu^{\rho\sigma}, \end{aligned} \tag{2.147}$$

gdje je $\Gamma_{\nu}^{\rho\sigma}$ sada stvarno Christoffelov symbol. Koristeći jednadžbe (2.147) i (2.145) dolazimo do geodetske jednadžbe

$$\ddot{X}_{\nu} + \Gamma_{\nu}^{\mu\beta}\dot{X}_{\beta}\dot{X}_{\mu} = 0. \tag{2.148}$$

Važno je za napomenuti da smo sve manipulacije ("dizanje i spuštanje") indeksa radili s $\eta_{\mu\nu}$, dok je tenzor $g_{\mu\nu}$ bivao tretiran samo kao simetričan i invetibilan tenzor uz uvjet (2.146).

2.4.2 κ-deformacije gravitacije

U ravnom komutativnom prostoru koristili smo konjugirani par (x, p), za ravni nekomutativni prostor koristili smo $(\hat{x}, \hat{p})$, dok za zakrivljeni komutativni X, P. Pokazali smo da se operatori u ravnom nekomutativnom prostoru mogu izraziti kao funkcije, tj. formalni redovi ovisni samo o komutativnim x i p te naravno deformaciji a_μ. Sada želimo proučavati nekomutativni zakrivljeni prostor i za njega ćemo koristiti oznake $(\hat{X},\ \hat{P})$. Naravno, ideja je da i njih naposljetku zapišemo kao funkcije od x i p te deformacijskog parametra a_μ. Važno je uočiti da za neutralne čestice vrijedi $\hat{P}_\mu = m\frac{d\hat{X}_\mu}{d\tau}$. Krećemo od pretpostavke da je prostor na vrlo malim skalama duljine opisan κ-Mikowskijevim prostorom

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i(a_\mu \hat{X}_\nu - a_\nu \hat{X}_\mu), \tag{2.149}$$

gdje je realizacija dana s

$$\hat{X}_\mu = X_\alpha \varphi^\alpha{}_\mu, \tag{2.150}$$

a $\varphi^\alpha{}_\mu$ zadovoljava

$$\frac{\partial \varphi^\alpha{}_\mu}{\partial p^\beta}\varphi^\beta{}_\nu - \frac{\partial \varphi^\alpha{}_\nu}{\partial p^\beta}\varphi^\beta{}_\mu = a_\mu \varphi^\alpha{}_\nu - a_\nu \varphi^\alpha{}_\mu. \tag{2.151}$$

Konstruirati ćemo $\hat{P}_\mu$ iz zahtjeva da svi Jacobijevi identiteti i uvjet koji dobijemo deriviranjem (2.149)

$$[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu] + [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] = i(a_\mu \hat{P}_\nu - a_\nu \hat{P}_\mu) \tag{2.152}$$

moraju biti zadovoljeni. Također znamo neke granične slučajeve. Npr. u limesu komutativnog prostora $a \longrightarrow 0$ mora vrijediti

$$\begin{gathered} \hat{X}_\mu \longrightarrow X_\mu = x_\mu, \qquad \hat{P}_\mu \longrightarrow P_\mu = g_{\mu\alpha} p^\alpha, \\ [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] \longrightarrow -i g_{\mu\nu}(x), \end{gathered} \tag{2.153}$$

dok u limesu slabog gravitacijskog polja $g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$ mora vrijediti

$$\begin{gathered}\hat{X}_\mu \longrightarrow \hat{x}_\mu = x_\alpha {\varphi^\alpha}_\mu \qquad \hat{P}_\mu \longrightarrow \hat{p}_\mu = p_\alpha {\varphi^\alpha}_\mu \\ [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] \longrightarrow [\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu].\end{gathered} \tag{2.154}$$

Uzimajući sve ovo u obzir, vidimo da se konstrukcija $\hat{P}_\mu$ svodi na analogni postupak prijelaza iz ravnog prostora u zakrivljeni ($\eta_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}(x)$), samo što ćemo sada umjesto $g_{\mu\nu}(x)$ koristiti "metriku" koja komutira s $\hat{x}$, tj. $g_{\mu\nu}(\hat{y})$. Dakle, imamo

$$\hat{P}_\mu \equiv g_{\alpha\beta}(\hat{y}) p^\beta {\varphi^\alpha}_\mu. \tag{2.155}$$

Lako je vidjeti da koristeći (2.151), gornji *ansatz* zadovoljava sve Jacobijeve identitete i uvjet (2.152) u svim redovima u a. Ovo naravno nije najopćenitije rješenje za operator $\hat{P}_\mu$, međutim ovo rješenje je u potpunosti neperturbativno i zadovoljava sve uvjete egzaktno[‡]. U konačnici imamo

$$\hat{X} = x_\alpha {\varphi^\alpha}_\mu \qquad \hat{P}_\mu = g_{\alpha\beta}(\hat{y}) p^\beta {\varphi^\alpha}_\mu, \tag{2.156}$$

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i(a_\mu \hat{X}_\nu - a_\nu \hat{X}_\mu), \tag{2.157}$$

$$[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] = -i g_{\alpha\beta}(\hat{y}) \left(p^\beta \frac{\partial {\varphi^\alpha}_\nu}{\partial p^\sigma} {\varphi^\sigma}_\mu + {\varphi^\alpha}_\nu {\varphi^\beta}_\mu \right). \tag{2.158}$$

Jednadžbe (2.156, 2.157, 2.158) su neperturbativne, tj. vrijede u svim redovima po a_μ te će služiti kao početne premise u daljnjem razmatranju koje će uglavnom biti perturbativnog karaktera.

Derivirajmo (2.158) po τ te korištenjem $\frac{d\hat{P}_\mu}{d\tau} = m\ddot{\hat{X}}_\mu$ i $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$, dobivamo

$$[\hat{X}_\mu, m\ddot{\hat{X}}_\nu] = -\frac{1}{m}[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] - i\frac{dg_{\alpha\beta}(\hat{y})}{d\tau} \left(p^\beta \frac{\partial {\varphi^\alpha}_\nu}{\partial p^\sigma} {\varphi^\sigma}_\mu + {\varphi^\alpha}_\nu {\varphi^\beta}_\mu \right). \tag{2.159}$$

Za raspetljavanje jednadžbe (2.159) morat ćemo se poslužiti aproksimacijama, tako da ćemo tražiti samo linearne korekcije u a_μ. Stoga za rješenje jednadžbe (2.151) do prvog reda u a_μ dobivamo

$${\varphi^\alpha}_\mu = \delta^\alpha_\mu [1 + \alpha(a \cdot p)] + \beta a^\alpha p_\mu + \gamma p^\alpha a_\mu, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \tag{2.160}$$

gdje α, β i γ opet zadovoljavaju

$$\gamma - \alpha = 1, \qquad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2.161}$$

[‡]Za sustavno nalaženje operatora $\hat{P}_\mu$, red po red vidi Dodatak D.

Možemo izračunati desnu stranu jednadžbe (2.159) eksplicite do prvog reda u a_μ, koristeći (2.160, 2.156). Pošto nam je cilj naći prve korekcije za $\hat{\ddot{X}}_\mu$, možemo pisati

$$\hat{\ddot{X}}_\mu = \ddot{X}_\mu + \delta\ddot{X}_\mu(a) + O(a^2), \tag{2.162}$$

gdje je $\delta\ddot{X}(a)$ linearan u a_μ te općenito funkcija x i p, dok $\ddot{X}_\mu$ zadovoljava jednadžbu (2.145). Koristeći (2.162), lijeva strana jednadžbe (2.159) postaje

$$[\hat{X}_\mu, \hat{\ddot{X}}_\nu] = [\hat{X}_\mu, \ddot{X}_\nu] + [X_\mu, \delta\ddot{X}_\nu(a)] + O(a^2). \tag{2.163}$$

Kombiniranjem (2.159) i (2.66) slijedi

$$m[X_\mu, \delta\ddot{X}_\nu(a)] = -[\hat{X}_\mu, m\ddot{X}_\nu] - \frac{1}{m}[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] - i\frac{dg_{\alpha\beta}(\hat{y})}{d\tau}\left(p^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha{}_\nu}{\partial p^\sigma}\varphi^\sigma{}_\mu + \varphi^\alpha{}_\nu \varphi^\beta{}_\mu\right), \tag{2.164}$$

gdje za lijevu stranu vrijedi

$$[X_\mu, \delta\ddot{X}_\nu(a)] = [x_\mu, \delta\ddot{X}_\nu(a)] = -i\frac{\partial[\delta\ddot{X}_\nu(a)]}{\partial p^\mu}. \tag{2.165}$$

Prvo izračunamo desnu stranu jednadžbe (2.164) eksplicitno do prvog reda u a_μ (koristeći (2.145, 2.160, 2.156)), a zatim uzimajući u obzir (2.165) integriramo jednadžbu (2.66) da bi dobili $\delta\ddot{X}_\nu(a)$, koji onda uvrštavamo u (2.162) i naposljetku dobivamo

$$\hat{\ddot{X}}_\nu + \frac{1}{m^2}\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta}p^\beta p^\mu = \frac{1}{m^2}\tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu}p^\tau p^\delta p^\mu. \tag{2.166}$$

Operator $\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta}$ je dan u (2.144), dok za $\tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu}$ možemo pisati

$$\tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu} = \mathcal{T}_{\nu\tau\delta\mu} + \mathcal{F}_{\nu\tau\delta\mu}, \tag{2.167}$$

gdje su

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\nu\tau\delta\mu} = \frac{1}{3}\Bigg\{ & -\tilde{\Gamma}_{(\sigma\delta)\alpha}\left[2\alpha\delta^{\alpha}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}a_{\tau} + 2\beta\delta^{\alpha}_{[\mu}\eta_{\nu]\tau}a^{\sigma} + 2\gamma\delta^{\sigma}_{\tau}\delta^{\alpha}_{[\mu}a_{\nu]}\right] \\
& + 2\delta^{\alpha}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\Bigg[\Big(\alpha(a\cdot\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x})(x_{\tau}\bullet) + \beta(a\cdot x)(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\tau}}\bullet) + \gamma(x\cdot\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x})(a_{\tau}\bullet)\Big)\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x_{\beta}} \\
& + \alpha g_{\alpha\beta}\Big(\Big\langle\delta^{\beta}_{\tau}\bullet, (a\cdot\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x})\Big\rangle - (\frac{\partial^2 g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x}\cdot a)(x_{\tau}\bullet) + \frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\beta}}(a_{\tau}\bullet)\Big) \\
& + \beta g_{\alpha\beta}\left(a^{\beta}(\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\tau}}\bullet) + (a\cdot x)(\frac{\partial^2 g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\tau}\partial x_{\beta}}\bullet)\right) \\
& + \gamma\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 g_{\sigma\delta}}{\partial x_{\beta}\partial x^{\lambda}}x^{\lambda} - \tilde{\Gamma}_{(\delta\sigma)\alpha}\right)(a_{\tau}\bullet) - (\alpha-\gamma)(a\cdot\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x})(x\cdot\frac{\partial g_{\alpha\tau}}{\partial x})\Bigg] \\
& + 2\delta^{\lambda}_{[\mu}\delta^{\sigma}_{\nu]}\left[\beta g_{\alpha\beta}a^{\alpha}\left(\delta^{\beta}_{\tau}\bullet\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x_{\beta}}\eta_{\lambda\tau}\bullet\right) + \gamma a_{\lambda}\left(g_{\alpha\tau}\bullet\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x_{\alpha}} - \tilde{\Gamma}_{(\sigma\delta)\tau}\bullet\right)\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.168}
$$

i

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\nu\tau\delta\mu} = \frac{1}{3}\Bigg\{ & \delta^{\alpha}_{\nu}\delta^{\beta}_{\mu}\Bigg[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}}\Big(\alpha(a\cdot\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\delta x})x_{\tau} + \beta(a\cdot x)(\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x^{\tau}}\bullet) \\
& + \gamma(x\cdot\frac{\partial g_{\sigma\delta}}{\partial x})a_{\tau}\Big) + \gamma\Big(x^{\rho}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}\partial x^{\rho}}g_{\sigma\delta}a_{\tau} - \tilde{\Gamma}_{(\alpha\beta)\delta}a_{\tau}\Big) \\
& + \alpha\left(a^{\rho}x_{\delta}\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}\partial x^{\rho}}g_{\sigma\tau} + (a\cdot\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x})g_{\tau\delta}\right) + \beta\left(a^{\rho}g_{\rho\tau}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} + (a\cdot x)\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\sigma}\partial x^{\delta}}g_{\sigma\tau}\right)\Bigg] \\
& - (\alpha+\gamma)a_{\mu}\tilde{\Gamma}_{(\nu\delta)\tau} - \beta a^{\alpha}\left(\tilde{\Gamma}_{(\alpha\tau)\delta}\eta_{\mu\nu} + \tilde{\Gamma}_{(\alpha\nu)\delta}\eta_{\mu\tau} + \tilde{\Gamma}_{(\alpha\mu)\delta}\eta_{\nu\tau}\right) - 2\gamma\tilde{\Gamma}_{(\mu\tau)\delta}a_{\nu} \\
& - 2\alpha a_{\tau}\tilde{\Gamma}_{(\nu\mu)\delta} - \alpha\Big(x_{\mu}(a\cdot\frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\nu\delta\tau}}{\partial x}) - 2\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\delta}a_{\tau}\Big) - \beta\Big((a\cdot x)\frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\nu\delta\tau}}{\partial x^{\mu}} - 2\tilde{\Gamma}_{\nu\delta\tau}a_{\mu}\Big) \\
& - \gamma a_{\mu}\Big((x\cdot\frac{\partial\tilde{\Gamma}_{\nu\delta\tau}}{\partial x}) - 2\tilde{\Gamma}_{\nu\delta\tau}\Big)\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{2.169}
$$

Ovdje oznaka $\bullet$ predstavlja položaj operatora p^{τ} u jednadžbi (2.166). Važno je za uočiti da su nekomutativni doprinosi proporcionalni s p^3 i da ovise o izboru realizacije.

Sada možemo napraviti klasični limes na isti način kao što smo i do sada radili. Koristeći (2.146) i (2.156) dobivamo

$$\begin{aligned} p^\beta p^\mu &= g^{\beta\alpha} g^{\mu\sigma} \hat{P}_\alpha \hat{P}_\sigma + P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} P_{\sigma_3} \{...a...\}^{\beta\mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3} + O(a^2), \\ p^\tau p^\delta p^\mu &= g^{\tau\sigma_1} g^{\delta\sigma_2} g^{\mu\sigma_3} P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} P_{\sigma_3} + O(a). \end{aligned} \tag{2.170}$$

Nadalje, koristeći (2.166) dobivamo

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta} p^\beta p^\mu &= \Gamma_\nu^{\alpha\sigma} \hat{P}_\alpha \hat{P}_\sigma + \tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta} \{...a...\}^{\beta\mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3} P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} P_{\sigma_3} + O(a^2) \\ \tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu} p^\tau p^\delta p^\mu &= \tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu} g^{\tau\sigma_1} g^{\delta\sigma_2} g^{\mu\sigma_3} P_{\sigma_1} P_{\sigma_2} P_{\sigma_3} + O(a^2), \end{aligned} \tag{2.171}$$

Uzimajući u obzir činjenicu da vrijedi $\hat{P}_\mu = m\dot{\hat{X}}_\mu$ i (2.171) te uvrštavajući u (2.166), slijedi

$$\ddot{\hat{X}}_\nu + \Gamma_\nu^{\alpha\sigma} \dot{\hat{X}}_\alpha \dot{\hat{X}}_\sigma = m\Sigma_\nu^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \dot{\hat{X}}_{\sigma_1} \dot{\hat{X}}_{\sigma_2} \dot{\hat{X}}_{\sigma_3} + O(a^2) \tag{2.172}$$

gdje smo uveli

$$\Sigma_\nu^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \equiv -\tilde{\Gamma}_{\nu\mu\beta} \{...a...\}^{\beta\mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3} + \tilde{\Sigma}_{\nu\tau\delta\mu} g^{\tau\sigma_1} g^{\delta\sigma_2} g^{\mu\sigma_3} \tag{2.173}$$

i

$$\begin{aligned} &\{...a...\}^{\beta\mu\sigma_1\sigma_2\sigma_3} = -2g^{\epsilon\sigma_1} g^{\rho\sigma_2} g^{\sigma_3(\beta} g^{\mu)\kappa} \\ &\left[g_{\alpha\epsilon}(\alpha\delta^\alpha_\kappa a_\rho + \beta a^\alpha \eta_{\rho\kappa} + \gamma\delta^\alpha_\rho a_\kappa) + \alpha\Big(a \cdot \frac{\partial g_{\alpha\epsilon}}{\partial x}\Big) + \beta(a \cdot x)\frac{\partial g_{\alpha\epsilon}}{\partial x^\rho} + \gamma\Big(x \cdot \frac{\partial g_{\alpha\epsilon}}{\partial x} a_\rho\Big)\right]. \end{aligned} \tag{2.174}$$

Jednadžba (2.172) predstavlja geodetsku jednadžbu u κ-Minkowskijevom prostoru.

2.4.3 Newtonov limes

Kako bi dobili bolji osjećaj i izgradili fizikalnu intuiciju za nekomutativne efekte u gravitaciji promotriti ćemo tzv. Newtonov limes jednadžbe (2.172). U tu svrhu promotriti ćemo specijalan slučaj κ-deformacija, tj. uzet ćemo da vrijedi $a_\mu = (a, \vec{0})$. Newtonov limes je definiran s tri uvjeta [78]:

1. Čestice se sporo gibaju, tj.

$$\frac{d\hat{X}_i}{d\tau} << \frac{d\hat{X}_0}{d\tau}. \tag{2.175}$$

2. Gravitacijsko polje je slabo i može se shvatiti kao perturbacija oko ravne metrike, tj.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| << 1. \tag{2.176}$$

3. Gravitacijsko polje je statično.

Iz definicije inverzne metrike, $g_{\mu\nu}g^{\nu\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu}$, nalazimo da do prvog reda u h vrijedi $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$. Uvrštavajući to u jednadžbu (2.172) te ostavljajući samo linearne doprinose u a i h, dobivamo

$$\ddot{\hat{X}}_0 = 0, \tag{2.177}$$

$$\ddot{\hat{X}}_i + \frac{1}{2}\frac{\partial h^{00}}{\partial x^i}(\dot{\hat{X}}_0)^2 = m\Sigma_i^{000}(\dot{X}_0)^3. \tag{2.178}$$

Uočimo da zbog (2.177) možemo lako prijeći s derivacija po τ na derivacije po $\hat{t}$ u jednadžbi (2.178). Na prvi pogled se čini da zadnji član u (2.178) nije invarijantan na reparametrizaciju, no pošto zadržavamo samo doprinose linearne u a i h, slijedi $\dot{X}_0 = \frac{dt}{d\tau} \approx 1 + \frac{1}{2}h_{00} \approx 1 + O(h)$ što ne predstavlja problem kod reparametrizacije (uočite da Σ_i^{000} već je linearan u a i h). Znamo da u komutativnom slučaju za Newtonovu silu vrijedi

$$F^i = -G\frac{mM}{r^3}x^i = \frac{1}{2}\frac{\partial h^{00}}{\partial x^i}, \tag{2.179}$$

a definiranjem $\hat{F}^i = m\frac{d^2\hat{X}^i}{d\hat{t}^2}$ naposljetku slijedi

$$\hat{F}^i = F^i(1 - \frac{am}{3}C), \tag{2.180}$$

gdje je $C = 5\alpha + 5\beta + 12\gamma$. Važno je za uočiti da u izrazu za silu dobivamo korekcije proporcionalne s a, ali da je sila i dalje radijalna te da je funkcionalna ovisnost o udaljenosti ista kao i u komutativnom slučaju. Nekomutativne korekcije se mogu usporediti s tzv. Pioneerovom anomalijom. Primjetimo da nekomutativne korekcije ovise o masi čestice što vodi na narušavanje principa ekvivalencije u općoj teoriji relativnosti. Naravno, sve ovisi o izboru realizacije.

Nekomutativne korekcije sili u jednadžbi (2.180) slažu se s istraživanjima provedenim u [14], stoga su ograničenja na parametar a ista.

2.4.4 Poopćenje relacija neodređenosti

Dobro je poznata činjenica da u bilo kakvoj kvantnoj teoriji prostor vremena postoji ograničenje na moguće lokaliziranje čestica [79] te da nekomutativnost prostora vodi na poopćenje Heisenbergovih relacija neodređenosti [2]. Može se pokazati da se relacije neodređenosti trebaju modificirati već na nivou Newtonove gravitacije [80]. Da bi promotrili modifikacije Heisenbergovih relacija neodređenosti u našem pristupu, prvo ćemo pogledati nerelativistički limes jednadžbi (2.157, 2.158)

$$\begin{aligned} &[x_i, x_j] = 0, \\ &[x_i, p_j] = i\hbar(1 + ams)\delta_{ij}, \\ &[x_0, p_0] = -i\hbar(1 + 3am(s + 1)), \end{aligned} \tag{2.181}$$

gdje je $s = 2\alpha + \beta$. Sada, koristeći $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$ dobivamo poopćene relacije neodređenosti

$$\begin{aligned} &\Delta x_i \Delta x_j \geq 0, \\ &\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2}(1 + ams), \\ &\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}(1 + 3am(s + 1)). \end{aligned} \tag{2.182}$$

Poglavlje 3

Nekomutativnost i fizika crnih rupa

Proučavanje fizike crnih rupa ima važnu ulogu u istraživanju raznih kvantnih aspekata gravitacije. Iako su crne rupe rješenja klasičnih jednadžbi opće teorije relativnosti, mnogi uvidi u polu-klasičnim i/ili kvantnim opisima gravitacije dobiveni su proučavanjem teorije polja na zakrivljenim prostorima opisanih metrikom crne rupe. Primjerice, aspekti entropije crnih rupa i pripadajuća termodinamička svojstva [82; 83; 84; 85; 86] istraživana su u okviru raznih pristupa, uključujući teoriju struna [95; 87], "loop-kvantnu" gravitaciju [88], konformalnu teoriju polja [89; 90; 91] i neke druge slične [92; 93]. Postoje i razni pristupi koji su fokusirani na formuliranje nekomutativne teorije gravitacije i nekomutativnih inačica crnih rupa [47; 94; 96; 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103]. Pokazano je da se nekomutativna verzija BTZ crne rupe može opisati κ-deformiranom algebrom [32; 104]. Slično, na κ-deformirane algebre se nailazi i pri nekomutativnom opisu Kerrove crne rupe [105] te u nekim nekomutativnim kozmološkim scenarijima [51]. Stoga, čini se da postoji određena doza univerzalnosti u κ-deformiranim algebrama, pošto se javljaju u različitim nekomutativnim opisima gravitacije. Mi ćemo razmatrati svojstva određenih crnih rupa u okviru κ-deformiranih nekomutativnih sistema.

§ 3.1 Nekomutativni doprinosi entropiji crnih rupa

Postoji veza između mehaničkih i termodinamičkih svojstava crnih rupa u $3+1$ dimenziji [82; 83]. Proučavajući kvantnu teoriju polja u pozadini crnih rupa, Hawking je pokazao da crna rupa emitira termalno zračenje te je izveo relaciju koja povezuje površinu i entropiju crnih rupa [84]. Koristeći te rezultate i primjenjujući osnovne postulate kvantne mehanike, 't Hooft je pokazao da postoji divergencija u dostupnim energetskim nivoima kvantnomehaničke čestice koja se nalazi u blizini horizonta crne rupe. Međutim, gravitacijski efekti u blizini horizonta crne rupe će modificirati valnu funkciju te čestice i postoji mogućnost da se te divergencije ipak uklone. Ova situacija je modelirana u [86], gdje je uveden *cut-off* u broju dostupnih energijskih nivoa. Ovaj pristup gdje se uvodi tzv. *brick wall cut-off* je korišten i u slučajevima gdje dimenzija prostor-vremena nije nužno $3+1$ [106; 107] te je korišten za izračunavanje termodinamičkih veličina od interesa. Pokazano je da *cut-off* ovisi samo o horizontu crne rupe u $3+1$ dimenziji, dok u drugim dimenzijama može ovisiti i o masi propagirajućeg kvantnog polja [106]. Zanimljiva je činjenica da se divergencija entropije po jedinici površine Klein-Gordonovog polja, koje se propagira u pozadini crne rupe, može apsorbirati u renormalizaciju Newtonove gravitacijske konstante [108; 109].

't Hooftov pristup ili tzv. *brick wall* metoda je poslužila i za računanje entropije BTZ crne rupe [110]. BTZ crna rupa je rješenje Einsteinovih jednadžbi u $2+1$ dimenziji [111]. Naime, gravitacija u $2+1$ nema propagirajućih stupnjeva slobode, slično kao modeli u $1+1$ [112] te može poslužiti kao svojevrstan "laboratorij" za matematičku fiziku, jer je zgodna za testiranje raznih aspekata kvantne gravitacije i fizike crnih rupa. Entropija za skalarno polje u pozadini BTZ crne rupe može se dobiti korištenjem *brick wall cut-off*-a i to za rotirajuću i stacionarnu BTZ metriku [110]. Pokazano je da entropija ovisi o opsegu (površina u $2+1$) crne rupe, dok *cut-off* ne ovisi ni o masi, niti o angularnom momentu BTZ crne rupe.

3.1.1 Nekomutativno skalarno polje u zakrivljenom prostoru

Sada ćemo pobliže proučiti κ-deformirano skalarno polje na klasičnoj zakrivljenoj pozadini. U nedeformiranom (komutativnom) prostor-vremenu djelovanje skalarnog polja (Klein-Gordon (KG)) je dano s

$$\mathcal{S}_0 = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - m^2\phi^2 - \xi R\phi^2\right) \tag{3.1}$$

dok je jednadžba gibanja dana s

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}\ \ g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right) + m^2\phi + \xi R\phi = 0, \tag{3.2}$$

gdje su m masa skalara, ξ je parametar, a R je Riccijev skalar. Naš cilj je generalizirati akciju (3.1) i jednadžbu gibanja (3.2) za nekomutativne prostore, posebice za κ-Minkowskijev prostor.

Najprirodniji (a i najlakši!) način da generaliziramo (3.1) jest da sva točkasta množenja u (3.1) promoviramo u zvjezdasto (*star*) množenje, tj. $f(x)g(x) \to f(x) \star g(x)$. Naime, postoji izomorfizam između nekomutativne algebre $\hat{\mathcal{A}}$, generirane nekomutativnim koordinatama $\hat{x}_\mu$, i algebre $\mathcal{A}^\star$, generirane komutativnim koordinatama x_μ, ali s novim nekomutativnim množenjem u algebri $\star$ (tzv. *star product*). $\star$-produkt za bilo koja dva elementa $f(x)$ i $g(x)$ iz $\mathcal{A}^\star$ je definiran sa

$$f(x) \star g(x) = \hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \triangleright 1, \tag{3.3}$$

gdje su $\hat{f}(\hat{x})$ i $\hat{g}(\hat{x})$ elementi iz $\hat{\mathcal{A}}$, a akcija $\triangleright : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{A}$ je definirana s

$$x_\mu \triangleright f(x) = x_\mu f(x), \quad p_\mu \triangleright f(x) = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \tag{3.4}$$

Ovdje su x_μ i p_μ generatori Heisenbergove algebre $\mathcal{H}$ i zadovoljavaju

$$[x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0, \quad [p_\mu, x_\nu] = i\eta_{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

gdje je $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{dijag}(+,-,-,-)$. Radi jednostavnosti razmatrati ćemo $m = \xi = 0$ slučaj. Dakle, postuliramo nekomutativnu akciju $\hat{\mathcal{S}}$ za κ-deformirano skalarno polje

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{S}} &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \ g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi \star \partial_\nu\phi\right) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\ \ g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\hat{\phi}\partial_\nu\hat{\phi} \triangleright 1\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Važno je napomenuti da ćemo gravitaciju tretirati klasično, tj. metrika $g_{\mu\nu}$

je nedeformirana*.

Za sve daljnje račune koristit ćemo eksplicitno κ-Minkowskijev prostor i pripadnu "teoriju realizacija". Dakle, nekomutativne koordinate možemo realizirati pomoću operatora x i p kao

$$\hat{x}_\mu = x_\alpha \varphi^\alpha{}_\mu(p). \tag{3.7}$$

Znamo da $\varphi^\alpha{}_\mu(p)$ mora zadovoljavati

$$\frac{\partial \varphi^\alpha{}_\mu}{\partial p^\beta}\varphi^\beta{}_\nu - \frac{\partial \varphi^\alpha{}_\nu}{\partial p^\beta}\varphi^\beta{}_\mu = a_\mu \varphi^\alpha{}_\nu - a_\nu \varphi^\alpha{}_\mu, \tag{3.8}$$

što u u prvoj aproksimaciji vodi na

$$\varphi^\alpha{}_\mu = \delta^\alpha_\mu[1 + \alpha(a\cdot p)] + \beta a^\alpha p_\mu + \gamma p^\alpha a_\mu, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Realizacija proizvoljnog elementa u $\hat{\mathcal{A}}$, tj. $\hat{f}$ je dana s

$$\hat{f} = f(x) + \alpha(x\cdot \frac{\partial f}{\partial x})(a\cdot p) + \beta(a\cdot x)(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot p) + \gamma(a\cdot\frac{\partial f}{\partial x})(x\cdot p), \tag{3.10}$$

što vodi na $\star$-produkt (3.3) (do prvog reda u a_μ)

$$\begin{aligned} f(x)\star g(x) =& f(x)g(x) + i\alpha(x\cdot\frac{\partial f}{\partial x})(a\cdot\frac{\partial g}{\partial x}) \\ &+ i\beta(a\cdot x)(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}) + i\gamma(a\cdot\frac{\partial f}{\partial x})(x\cdot\frac{\partial g}{\partial x}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Uvrštavajući $f = g = \partial\phi$ u jednadžbe (3.6) i (3.11), možemo razviti nekomutativno djelovanje do prvog reda u a_μ

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}} =& \mathcal{S}_0 + \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\;\; g^{\mu\nu} \\ & \left[i\alpha x^\sigma \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\sigma \partial x^\mu}a^\beta + i\beta(a\cdot x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\beta\partial x^\mu} + i\gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x^\mu}a_\alpha x^\beta\right](\partial_\beta\partial_\nu\phi). \end{aligned} \tag{3.12}$$

*Naime, procedura koju ovdje izlažemo je poseban slučaj ($\mathcal{A}\neq 0$ i $\mathcal{B} = 0$) općenitije procedure opisane u Dodatku E. Ovaj specijalni slučaj se sastoji u tome da moramo uzeti limes malih zakrivljenosti (slabog gravitacijskog polja) ((E.5)$\rightarrow \hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + O(a\cdot\partial g)$) te ostavljajući samo doprinose linearne u a_μ. Znači, u ovom poglavlju zapravo istražujemo nekomutativno skalarno polje $\hat{\phi}$ na generičkoj klasičnoj pozadini opisanoj s metrikom $g_{\mu\nu}$. Važno je napomenuti da ćemo u ovom poglavlju ovo uzeti kao početnu pretpostavku pri izvodu svih relevantnih jednadžbi, pošto nam je cilj proučavati vodeće popravke entropiji BTZ crne rupe. BTZ crnu rupu smo izabrali zbog jednostavnosti, jer nam može poslužiti kao dobar *toy model*, iako procedura vrijedi za proizvoljnu metriku (a procedura u Dodatku E uzima u obzir i nekomutativne korekcije same gravitacije).

Uvodimo

$$\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} = i\sqrt{-g}\; g^{\beta\delta}\left(\alpha x^{\alpha} a^{\gamma} + \beta(a\cdot x)\eta^{\alpha\gamma} + \gamma a^{\alpha} x^{\gamma}\right) \tag{3.13}$$

tako da sad nekomutativno djelovanje možemo konciznije zapisati na sljedeći način

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_0 + \int \mathrm{d}^4 x \left(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}}\right). \tag{3.14}$$

Polazeći od teorije nekomutativnog skalarnog polja, opisane nekomutativnom akcijom (3.14), možemo izvesti jednadžbe gibanja za polje ϕ. Uočite da (3.14) sadrži više derivacije skalarnog polja, tj. lagranžijan je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, x), \tag{3.15}$$

pa trebamo koristiti općenite Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$\partial_{\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\phi)} - \partial_{\mu}\partial_{\nu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi)} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi}. \tag{3.16}$$

Koristeći (3.14) slijedi Euler-Lagrangeova jednadžba za nekomutativno skalarno polje u zakrivljenom prostoru

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma}(\sqrt{-g}\; g^{\sigma\nu}\partial_{\nu}\phi) &= \partial_{\alpha}\partial_{\beta}(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\gamma}\partial_{\delta}\phi) + \partial_{\gamma}\partial_{\delta}(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}\phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{\alpha} \partial_{\alpha}\partial_{\alpha}(\mathcal{A}^{\alpha\alpha\gamma\delta}\partial_{\gamma}\partial_{\delta}\phi + \mathcal{A}^{\gamma\delta\alpha\alpha}\partial_{\gamma}\partial_{\delta}\phi). \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.1.2 κ-deformirano skalarno polje u BTZ pozadini

Do sada smo sve račune provodili za proizvoljnu metriku $g_{\mu\nu}(x)$. Pošto su nekomutativni efekti povezani s fizikom na Planckovoj skali, za očekivati je da će prostor-vrijeme opisano metrikom crne rupe biti prirodna pozornica za istraživanje nekomutativnih teorija. Imajući to na umu, uvrstiti ćemo BTZ metriku [111; 113] u jednadžbu (3.14) te ćemo zapravo na taj način koristiti κ-deformirano skalarno polje kao probu za BTZ geometriju, kako bi istražili moguće nekomutativne efekte u fizici crnih rupa (sličnu motivaciju je imao i Hawking kada se poslužio kvantnim poljem kao probom za klasičnu crnu rupu, a naposljetku je dobio informaciju o njenoj entropiji, koja bi trebala biti na neki način mjera dostupnih kvantnih stanja unutar same crne rupe). BTZ crna rupa je opisana sljedećom metrikom

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{l^2} - 8GM & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\frac{r^2}{l^2}-8GM} & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

gdje smo uzeli da crna rupa nema angularni moment, tj. $J = 0$ i koordinate su (t, r, θ). U slučaju $J = 0$ BTZ crna rupa ima jednostven horizont $r_+ = l\sqrt{M}$. Kao što je već bilo rečeno, razmatramo nekomutativno polje $\hat{\phi}$ na nedeformiranoj klasičnoj pozadini $g_{\mu\nu}$, tj. u onom što slijedi koristit ćemo (3.18) eksplicitno u jednadžbama (3.13) i (3.14) te koristimo pojednostavljenje $a_\mu = (a, \vec{0})$. Iako smo sada znatno pojednostavili situaciju, jednadžbe gibanja koje dobijemo su i dalje netrivijalne te smo primorani koristi još aproksimacija (naravno samo ako su fizikalno opravdane). Prva aproksimacija koju ćemo koristi je tzv. dugovalna aproksimacija, to jest u jednadžbi gibanja ćemo se zadržati samo na najnižim derivacijama ($\partial\phi >> \partial^2\phi, \partial^3\phi, \partial^4\phi$). U ovoj aproksimaciji svi članovi koji su proporcionalni s α i γ ne doprinose, jer sadrže članove s višim derivacijama $\partial^{(2,3,4)}\phi$. Samo članovi proporcionalni s $\partial\phi$ prežive (važno je napomenuti da ovdje samo analiziramo nekomutativne doprinose koji su svi već pomnoženi s parametrom deformacije a_μ te se ova analiza naravno ne tiče kinetičkog člana!). Dakle, svi preživjeli nekomutativni doprinosi su proporcionalni s parametrom β. Dakle, samo realizacije koje su parametrizirane s β doprinose jednadžbi gibanja u dugovalnoj aproksimaciji. Naime, izbor realizacije je povezan s izborom vakuuma teorije koji se u principu fiksira eksperimentom. Npr. izbor $\beta = 1$ bi odgovarao *prirodnoj* realizaciji. Preostala jednadžba gibanja još uvijek je dosta komplicirana, pa ćemo koristiti WKB aproksimaciju kako bi našli spektar. Dok god je $M >> 1$ i zadržavamo se na linearnim članovima u a_μ, možemo koristiti ansatz $\phi(r, \theta, t) = R(r)e^{-i\omega t}e^{im\theta}$ kako bi proveli separaciju varijabli. Nakon što uzmemo sve gore navedeno u obzir, dolazimo do radijalne jednadžbe

$$\begin{aligned} r\left(8GM - \frac{r^2}{l^2}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \left(8GM - \frac{3r^2}{l^2}\right)\frac{\partial R}{\partial r} \\ + \left(\frac{m^2}{r} - \omega^2 \frac{r}{\frac{r^2}{l^2} - 8GM} - a\beta\omega \frac{8r}{l^2}\frac{\frac{3r^2}{2l^2} - 8GM}{\frac{r^2}{l^2} - 8GM}\right) R = 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

koja će biti glavni objekt istraživanja za ostatak ovog rada.

3.1.3 *Brick wall* metoda i entropija

Računanje entropije crnih rupa koristeći *brick wall* metodu je prvi put uvedeno u [86], a u [110] je primjenjeno i na slučaj BTZ. Mi ćemo ovdje pratiti isti slijed argumenata kao u [110], tako da iz jednadžbe (3.19) za r-ovisni radijalni valni broj dobivamo

$$k^2(r,m,\omega) = -\frac{m^2}{r^2\left(\frac{r^2}{l^2}-8GM\right)} + \omega^2\frac{1}{\left(\frac{r^2}{l^2}-8GM\right)^2} + a\beta\omega\frac{8}{l^2}\frac{\frac{3r^2}{2l^2}-8GM}{\left(\frac{r^2}{l^2}-8GM\right)^2}, \tag{3.20}$$

gdje smo korisitili ansatz $R(r) = \mathrm{e}^{i\int k(r)\mathrm{d}r}$ i WKB aproksimaciju. Prema polu-klasičnom kvantizacijskom pravilu za radijalni valni broj slijedi

$$\pi n = \int_{r_+ + h}^{L} k(r,m,\omega)\mathrm{d}r, \tag{3.21}$$

gdje je $n > 0$ glavni kvantni broj, m trebamo fiksirati tako da $k(r,m,\omega)$ bude realan te h i L su redom ultraljubičasti i infracrveni regulatori†. Za ukupan broj stanja s energijom manjom od ω imamo

$$\nu = \sum_{-m_0}^{m_0} n = \int_{-m_0}^{m_0} \mathrm{d}m\; n = \frac{1}{\pi}\int_{-m_0}^{m_0}\mathrm{d}m\int_{r_+ + h}^{L} k(r,m,\omega)\mathrm{d}r. \tag{3.22}$$

Za slobodnu energiju na inverznoj temperaturi β_T crne rupe vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\beta_T F} &= \sum_\nu \mathrm{e}^{-\beta_T E} = \prod_\nu \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta_T E}} \qquad / \ln \\
\beta_T F &= \sum_\nu \ln\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_T E}\right) = \int \mathrm{d}\nu \ln\left(1-\mathrm{e}^{-\beta_T E}\right) \qquad / \text{ parc. integ.} \\
&= -\int_0^\infty \mathrm{d}E \frac{\beta_T \nu(E)}{\mathrm{e}^{\beta_T E}-1}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sada izraz za slobodnu energiju F postaje

$$F = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\beta_T\omega}-1}\int_{r_+ + h}^{L}\mathrm{d}r\int_{-m_0}^{m_0}\mathrm{d}m \;\; k(r,m,\omega). \tag{3.24}$$

†U daljnjem računu za slobodnu energiju i entropiju koristiti ćemo limes $L \to \infty$ i razmatrati $h \approx 0$ te ćemo se zadržati na najdivergentnijem članu u h.

Nakon što provedemo sve integracije i zadržimo najdivergentniji član u h, slijedi

$$F = -\frac{l^{\frac{5}{2}}}{(8GM)^{\frac{1}{4}}}\frac{\zeta(3)}{\beta_T^3}\frac{1}{\sqrt{2h}} - 2a\beta\frac{(8GM)^{\frac{3}{4}}\sqrt{l}}{\sqrt{2h}}\frac{\zeta(2)}{\beta_T^2}, \tag{3.25}$$

što predstavlja egzaktan rezultat u smislu WKB metode te ζ je Euler-Riemannova zeta funkcija.

Sada možemo izvrijedniti entropiju za nekomutativno skalarno polje koristeći $S = \beta_T^2 \frac{\partial F}{\partial \beta_T}$. Dakle, dobivamo

$$\begin{aligned} S &= 3\frac{l^{\frac{5}{2}}}{(8GM)^{\frac{1}{4}}}\frac{\zeta(3)}{\beta_T^2}\frac{1}{\sqrt{2h}} + 4a\beta\frac{(8GM)^{\frac{3}{4}}\sqrt{l}}{\sqrt{2h}}\frac{\zeta(2)}{\beta_T} \\ &= S_0\left(1 + \frac{4}{3}a\beta\frac{8GM}{l^2}\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}\beta_T\right), \end{aligned} \tag{3.26}$$

gdje je S_0 entropija BTZ crne rupe u nedeformiranom slučaju sa Hawkingovom temperaturom $\beta_T = \frac{2\pi l^2}{r_+}$. Ova entropija je ekvivalentna s Bekenstein-Hawkingovom entropijom $S_0 = \frac{A}{4G} = \frac{2\pi r_+}{4G}$. Koristiti ćemo tu ekvivalenciju kako bi smo fiksirali *cut-off* h

$$h = \frac{9G^2\zeta^2(3)\sqrt{8GM}}{8l\pi^6}. \tag{3.27}$$

Drugim riječima, izabrali smo h tako da dobivena entropija zadovoljava entropija-površina (opseg) zakon, slično kao i u [86].

Gornji rezultat možemo iskoristiti u renormalizaciji (reskaliranju) Newtonove konstante. Ova renormalizacija je posljedica činjenice da je prirodno za očekivati da kvantni efekti na Planckovoj skali [108; 109] mogu biti i nekomutativnog porijekla. Označimo Newtonovu konstantu na Planckovoj skali s G^*. Ako pretpostavimo da entropija-površina (opseg) zakon i dalje vrijedi, ali s renormaliziranom Newtonovom konstantom, dobivamo

$$S = \frac{A}{4G^*}. \tag{3.28}$$

Uspoređujući dva izraza za entropiju, dolazimo do izraza za renormaliziranu Newtonovu konstantu

$$\frac{1}{G^*} = \frac{1}{G}\left(1 + \frac{8}{3}\frac{a\beta\pi}{l}\frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}\sqrt{8GM}\right). \tag{3.29}$$

Primjetimo da G^* ovisi o masi M, konstanti G i deformaciji a. Naravno, u slučaju $a = 0$ imamo $G^* \longrightarrow G$.

Važno je napomenuti da naš konačni rezultat u kojem korisitimo entropija-površina (opseg) zakon ne bi trebao biti preveliko iznenađenje, pošto se pokazalo da taj zakon je poprilično robustan na razne modifikacije polja koje se propagira (neovisno o tome da li je model lokalno Lorentz invarijantan ili nije) [114].

Analizirajmo pobliže naš rezultat. Dakle, koristili smo nekomutativno skalarno polje κ-Minkowskijevog tipa kao probu za istraživanje svojstava BTZ crne rupe, gdje smo se poslužili *brick wall* metodom [86] pri računanju nekomutativnih korekcija entropiji BTZ crne rupe. Očekuje se da će nekomutativni efekti imati značajniju ulogu na Planckovoj skali. Već se otprije zna da zbog kvantnih efekata na Planckovoj skali može doći do renormalizacije Newtonove konstante [108; 109]. U našem pristupu, također smo došli do svojevrsne renormalizacije Newtonove konstante. Pronašli smo i popravke entropija-površina (opseg) zakonu koje ovise o realizaciji i nekomutativnom parametru a. Ove popravke se skaliraju kao i uobičajena Bekenstein-Hawkingova entropija S_{BH} (koju smo mi označavali sa S_0). Ovo se razlikuje od situacije u [92], gdje u najnižem redu, nekomutativne korekcije entropiji imaju dva tipa doprinosa, gdje se samo jedan skalira s Bekenstein-Hawkingovom entropijom. Nadalje, doprinos koji se skalira sa S_{BH} ima negativan predznak, dok kod nas taj predznak ovisi o $a\beta$. Značenje negativnog predznaka nekomutativnog doprinosa u [92] je da se broj dostupnih mikrostanja smanjuje pošto je entropija manja. Međutim, kod nas predznak ovisi o $a\beta$ tako da je moguće da nekomutativnost smanjuje ili povećava broj dostupnih mikrostanja, ovisno o tom predznaku.

Sustav crne rupe i skalarnog polja možemo interpretirati kao dva podsustava koji su razdvojeni horizontom crne rupe. Možemo svakom od podsustava pridružiti reduciranu matricu gustoće. To se napravi tako da od ukupne matrice gustoće za cijeli sustav napravimo trag s obzirom na stupnjeve slobode jednog podsustava (to napravimo za oba podsustava posebno). Nadalje, ako je sustav opisan čistim stanjem, tada reducirane matrice gustoće oba podsustava vode na istu entropiju, koja se onda može dovesti u vezu sa spregnutom (*eng.* entanglement) entropijom [115]. Posljedično, spregnuta entropija obaju podsustava je jednaka. Drugim riječima, entropija crne rupe jednaka je entropiji modova skalarnog polja koji se propagiraju u i izvan horitonta crne rupe, a to smo mi u stvari i izračunali.

§ 3.2 Kvazinormalni modovi

Polazimo od jednadžbe (3.19) gdje koristimo sljedeću zamjenu varijabli

$$z = 1 - \frac{Ml^2}{r^2} \tag{3.30}$$

i dobivamo

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}z^2} + (1-z)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z} + \left(\frac{A}{z} + B + \frac{C}{1-z}\right)R = 0, \tag{3.31}$$

gdje su konstante A, B i C definirane kao[‡]

$$A = \frac{\omega^2 l^2}{4M} + a_0\beta_0\omega, \quad B = -\frac{m^2}{4M}, \quad C = 3a_0\beta_0\omega. \tag{3.32}$$

Radijalna jednadžba (3.31) je analitički rješiva[§] i njeno rješenje je dano s

$$R(z) = z^\alpha (1-z)^\beta F(z), \tag{3.33}$$

gdje je $F(z)$ hipergeometrijska funkcija koja zadovoljava

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}z^2} + [c - (1+a+b)z]\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} - abF = 0. \tag{3.34}$$

Imamo sljedeće veze među parametrima

$$c = 2\alpha + 1, \quad a + b = 2\alpha + 2\beta, \quad ab = (\alpha+\beta)^2 - B \tag{3.35}$$

i

$$\alpha^2 = -A, \quad \beta = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-4C}) \tag{3.36}$$

tako da imamo

$$a = \alpha + \beta + i\sqrt{-B}, \quad b = \alpha + \beta - i\sqrt{-B}. \tag{3.37}$$

Nadalje, bez gubitka općenitosti biramo $\alpha = -i\sqrt{A}$ i $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4C})$.

[‡]Preimenovali smo parametre deformacije $a\beta \equiv a_0\beta_0$, zbog kasnije pogodnosti.

[§]Važno je uočiti da (3.31) ima isti oblik kao jednadžba (8) u [113], tako da u principu samo izlažemo tamo napravljenu analizu.

Zanimaju nas kvazinormalni modovi. Kvazinormalni modovi su rješenja koja su čisto ulazeća na horizontu i iščezavaju u bekonačnosti [116]. Općenito, nalazimo dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe (3.31): $F(a,b,c,z)$ i $z^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, z)$ u blizini horizonta $z=0$. Rješenje koje zadovoljava uvjet da je čisto ulazeće na horizontu je dano s

$$R(z) = z^{\alpha}(1-z)^{\beta}F(a,b,c,z). \tag{3.38}$$

Pošto (3.38) vrijedi samo u okolini horizonta, za beskonačnost, tj. $z=1$ poslužit će nam linearna transformacijska formula

$$\begin{aligned} R(z) =& z^{\alpha}(1-z)^{\beta+c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \\ &+ z^{\alpha}(1-z)^{\beta}\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b,a+b-c+1,1-z), \end{aligned} \tag{3.39}$$

gdje prvi član iščezava, a iščezavanje drugog člana nam daje uvjete

$$c-a=-n, \quad \text{ili} \quad c-b=-n, \tag{3.40}$$

a $n=0,1,2...$ Ovi uvjeti u potpunosti određuju frekvencije kvazinormalnih modova. Imamo dva glavna moda: lijevi i desni. Njihove su frekvencije dane s

$$\omega_{L,R} = \pm\frac{m}{l} + a_0\beta_0\frac{2M}{l^2}(6n+5) - 2i\left[\frac{\sqrt{M}}{l}(n+1) \mp 3a_0\beta_0\frac{m}{l^2}\sqrt{M}\right]. \tag{3.41}$$

Primjetimo da u limesu $a_0 \to 0$ dobivamo uobičajene frekvencije kvazinormalnih modova za bezmaseno skalarno polje u pozadini BTZ crne rupe s $J=0$ (vidi [113]).

Veza s fiktivnom komutativnom BTZ crnom rupom

Pošto je jednadžba gibanja, (3.31), za bezmaseno nekomutativno skalarno polje energije ω i angularnog momenta m u pozadini BTZ crne rupe mase M i bez angularnog momenta ($J=0$) po formi ekvivalentna s jednadžbom gibanja skalarnog polja mase μ^f, energije ω i angularnog mometa m u pozadini BTZ crne rupe mase M^f i angularnog momenta J^f (vidi jednadžbu (8) u [113]), možemo uspostaviti 1-1 vezu ova dva slučaja. Dakle, postoji preslikavanje između našeg slučaja i onog opisanog u [113] preko uspoređivanje parametara A, B i C u oba slučaja:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\omega^2 l^2}{4M} + a_0\beta_0\omega = \frac{l^4}{4(r_+^2 - r_-^2)^2}\left(\omega r_+ - \frac{m}{l}r_-\right)^2 = A^f \\
B &= -\frac{m^2}{4M} = -\frac{l^4}{4(r_+^2 - r_-^2)^2}\left(\omega r_- - \frac{m}{l}r_+\right)^2 = B^f \\
C &= 3a_0\beta_0\omega = -\frac{\mu^f}{4} = C^f,
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

te pošto vrijedi

$$
M^f = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2}, \quad J^f = \frac{2r_+ r_-}{l}, \tag{3.43}
$$

možemo izraziti sve parametre u fiktivnom komutativnom slučaju preko parametara naše nekomutativne situacije

$$
M^f = M^f(a, M), \quad J^f = J^f(a, M), \quad \mu^f = \mu^f(a, M). \tag{3.44}
$$

Ova korespondencija nam sada olakšava interpretaciju. Naime, možemo reći da je fizikalna interpretacija NC efekata ta, da testiranje BTZ crne rupe ($M \neq 0, J = 0$) s masivnim nekomutativnim skalarnim poljem je ekvivalentno fiktivnoj komutativnoj situaciji u kojoj skalarno polje dobiva masu te se samo geometrija prostor vremena mijenja, jer crna rupa mijenja masu i dobiva angularni moment.

Poglavlje 4

Rasprava i zaključak

Sada ćemo diskutirati neke od fizikalnih motivacija za proučavanje matematičke strukture κ-Minkowskijevog prostora i njegove realizacije pomoću kvantnog faznog prostora.

κ-Minkowskijev prostor i κ-Poincaréova algebra pružaju okvir za objašnjenje nekih signala kvantne gravitacije, koji se mogu naći u opažanjima ultra-visoko energijskih kozmičkih zraka. Naime, devijacije od standardne teorije se mogu modelirati modifikacijom disperzijskih relacija, čija motivacija dolazi iz deformacija prostora, a posebno κ-deformacija [14; 118; 119].

Glavno je pitanje koji su učinci fizike na Planckovoj skali, to jest kako priroda nekomutativnih prostora utječe na konstrukciju kvantne teorije polja. Očiti učinak je promjena statistike čestica. Naime, informacija o statistici je ugrađena u koalgebarski sektor Hopfovih algebri koje opisuju poopćene simetrije. Točnije, čestična statistika je određena s R-matricom. Npr. za slobodno skalarno polje ϕ i poznavanjem R-matrice možemo modificirati algebru operatora stvaranja i poništenja pomoću

$$\phi(x) \otimes \phi(y) - R\phi(y) \otimes \phi(x) = 0 \tag{4.1}$$

te deformirati uobičajenu spin-statistika vezu za bozone na Planckovoj skali. R-matrica je definirana s

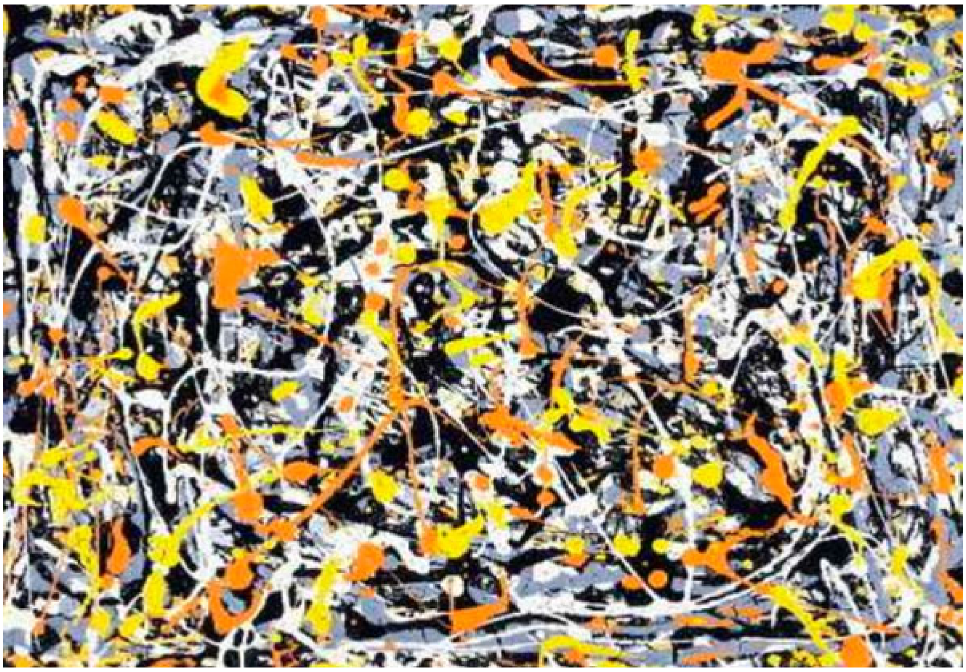
$$\begin{aligned} R = \tilde{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}^{-1} &= 1 \otimes 1 + ia_0 x^\alpha \left(p_\beta \otimes \left[\frac{\partial {\varphi_\alpha}^\beta}{\partial a_0} \right]_{a_0=0} - \left[\frac{\partial {\varphi_\alpha}^\beta}{\partial a_0} \right]_{a_0=0} \otimes p_\beta \right) + O(a_0^2) \\ &= 1 \otimes 1 + ia_0 r + O(a_0^2), \end{aligned} \tag{4.2}$$

gdje je r klasična r-matrica. Važno je napomenuti da mjerenje sustava koji se sastoje samo od jednočestičnih observabli neće nikad otkriti da li je sustav deformiran ili ne. Zakrenute deformacije koje ovdje razmatramo će se manifestirati samo u višečestičnom sektoru.

Vidjeli smo da u komutativnom limesu $[X_\mu, P_\nu]$ daje metriku $g_{\mu\nu}$, pa u analogiji s tim možemo interpretirati $[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu]$ (ili samo simetrični dio) kao nekomutativnu metriku $\hat{g}_{\mu\nu}$. Bilo bi vrlo zanimljivo nastaviti ovu analizu i pokušati naći nekomutativne analogone Riccijevog tenzora $\hat{R}_{\mu\nu}$ i Riccijevog skalara $\hat{R}$ te pokušati analizirati nekomutativnu Einsteinovu jednadžbu. Također zanimljivo bi bilo konstruirati lagranžijan čija bi varijacija upravo davala (2.172) kao rezultat principa minimalnog djelovanja. Pitanja vezana za invarijantni linijski element još uvijek ostaju otvorena.

U trećem poglavlju smo koristili BTZ crnu rupu kao model. Primjetite da se BTZ metrika javlja u diskusijama vezanim za geometriju u blizini horizonta velike klase crnih rupa [95]. Slično, κ-Minkowskijev tip nekomutativnosti se javlja u nekomutativnom opisu nekoliko geometrija crnih rupa. Dakle, plauzibilno je da neki od ovdje prezentiranih rezultata posjeduju određenu dozu univerzalnosti te posjeduju svojstva šire klase geometrija.

Nadam se da smo u ovom radu uspjeli pokazati moguće fizikalne aspekte nekomutativnih prostora te da smo uspjeli izgraditi fizikalnu intuiciju o tome kako "izgleda" gibanje čestica u takvim netrivijalnim situacijama. Ostaje pitanje kako stvarno nekomutativni prostor izgleda, tj. ako je glatka mnogostrukost opis uobičajenog prostor-vremena, što je nekomutativni analogon mnogostrukosti i kako on "izgleda" geometrijski? Kako ga sebi možemo zamisliti ? Unatoč velikom napretku nekomutativne geometrije kao grane matematike, mislim da je zasada još uvijek najslikovitiji prikaz nekomutativnog prostora ipak dan remek djelom 4.1 ingenioznog Jacksona Pollocka.



Slika 4.1: Jackson Pollock "Untitled N.3"

Dodatak A

Hopfova algebra

Hopfova algebra H je algebra (nad poljem $\mathbb{C}$) s množenjem $m : H \otimes H \to H$ i dva algebarska morfizma $\Delta : H \to H \otimes H$ (koprodukt), $\epsilon : H \to \mathbb{C}$ (kojedinica) te $\mathbb{C}$-linearnim preslikavanjem $S : H \to H$ (antipoda) koji za svaki $\xi \in H$ zadovoljavaju:

$$(\Delta \otimes 1)\Delta(\xi) = (1 \otimes \Delta)\Delta(\xi)$$

$$(\epsilon \otimes 1)\Delta(\xi) = (1 \otimes \epsilon)\Delta(\xi) = \xi$$

$$m\left((S \otimes 1)\Delta(\xi)\right) = m\left((1 \otimes S)\Delta(\xi)\right) = \epsilon(\xi)1$$

Operator zakretanja $\mathcal{F} \in H \otimes H$ Hopfove algebre H je invertibilni element koji zadovoljava

$$(\mathcal{F} \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\mathcal{F} = (1 \otimes \mathcal{F})(1 \otimes \Delta)\mathcal{F},$$

$$m(\epsilon \otimes 1)\mathcal{F} = 1 = m(1 \otimes \epsilon)\mathcal{F}.$$

Operator zakretanja $\mathcal{F}$ Hopfove algebre H služi za generiranje nove Hopfove algebre $H^{\mathcal{F}}$, koja je dana s $(H^{\mathcal{F}}, m^{\mathcal{F}}, \Delta^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}}, \epsilon^{\mathcal{F}})$. Vrijedi $H = H^{\mathcal{F}}$ kao algebre te $\epsilon = \epsilon^{\mathcal{F}}$. Novi koprodukt $\Delta^{\mathcal{F}}$ i antipoda $S^{\mathcal{F}}$ su dani s

$$\Delta^{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1}$$

$$S^{\mathcal{F}} = \chi\ S\ \chi^{-1}$$

gdje je $\chi^{-1} = m\left[(S \otimes 1)\,\mathcal{F}^{-1}\right]$.

Simetrije specijalne teorije relativnosti, tj. prostora Minkowskog algebarski su opisane Poincaré-Hopfovom algebrom $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ koja je generirana rotacijama, potiscima i translacijama. Analogno, simetrije κ-Minkowskijevog prostora su opisane κ-Poincaré-Hopfovom algebrom $\mathcal{U}(\mathcal{P}_\kappa)$.

Zašto nam treba "Hopf" pri opisu simetrija specijalne relativnosti? Naime, jednočestična asimptotska stanja se transformiraju s obzirom na ireducibilne reprezentacije Poincaréove algebre $\mathcal{P}$ definirane s

$$[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\rho}] = -i\left(\eta_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\lambda}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} + \eta_{\mu\rho}M_{\nu\lambda}\right)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i\left(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu\right).$$

Da bi proširili djelovanje simetrijske algebre s jednočestičnih na višečestična stanja, treba nam koprodukt $\Delta : \mathcal{U}(\mathcal{P}) \to \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$.

Ako je ρ reprezentacija* od $\mathcal{P}$ koja djeluje na vektorskom prostoru V kao $|\phi\rangle \to \rho(\Lambda)\,|\phi\rangle$, gdje je $\Lambda \in \mathcal{P}$ i $|\phi\rangle \in V$, tada za djelovanja na dvočestično stanje imao

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \to (\rho \otimes \rho)\Delta(\Lambda)\,|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$$

Zanimljivo je da je zamjena čestica dana s *flip* operatorom τ te su moguće statistike čestica određene iz kompatibilnosti s koproduktom $[\tau, \Delta] = 0$. Dakle, kao ključne objekte Poincaré-Hopfove algebre $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ imamo:
koprodukt $\Delta : \mathcal{U}(\mathcal{P}) \to \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$, s pripadnim djelovanjem na generatore

$$\Delta M_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu}, \quad \Delta P_\mu = P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu$$

kojedinica $\epsilon : \mathcal{U}(\mathcal{P}) \to \mathbb{C}$, s pripadnim djelovanjem na generatore

$$\epsilon(M_{\mu\nu}) = \epsilon(P_\mu) = 0$$

antipoda $S : \mathcal{U}(\mathcal{P}) \to \mathcal{U}(\mathcal{P})$, s pripadnim djelovanjem na generatore

$$S(P_\mu) = -P_\mu, \quad S(M_{\mu\nu}) = -M_{\mu\nu}.$$

Tako npr. za djelovanje generatora translacija P_μ na jednočestična stanja zadanog impulsa vrijedi

$$\rho(P_\mu)\,|p\rangle = p_\mu\,|p\rangle\,,$$

dok za djelovanje na dvočestično stanje imamo

$$(\rho\otimes\rho)\Delta(P_\mu)\,|p_1\rangle\otimes|p_2\rangle = (\rho\otimes\rho)(P_\mu\otimes 1+1\otimes P_\mu)\,|p_1\rangle\otimes|p_2\rangle = (p_1+p_2)_\mu\,|p_1\rangle\,.\otimes|p_2\rangle\,,$$

Međutim mi u fizici često samo pišemo

$$P_\mu\,|p_1\rangle \otimes |p_2\rangle = (p_1 + p_2)_\mu\,|p_1\rangle \otimes |p_2\rangle\,,$$

jer znamo da je impuls očuvan, pa nekako uspijemo izbjeći eksplicitno korištenje Hopfove algebre, ali ona je već tu čim smo napisali gornju relaciju.

*Točnije ρ: $\mathcal{P} \longrightarrow End(V)$.

Dodatak B

Hopfov algebroid

§ .1 Kvantni fazni prostor kao Hopfov algebroid

Hopfov algebroid* je definiran totalnom algebrom $\mathcal{H}$ (kvantni fazni prostor), baznom algebrom $\mathcal{A}$, množenjem m, koproduktom Δ_0, antipodom S_0, kojedinicom ϵ_0, preslikavanjem izvora α_0 i preslikavanjem mete β_0. Koprodukt Δ_0 je preslikavanje $\Delta_0 : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{R}_0)(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})\Delta_0\mathcal{T}/\mathcal{I}_0$ definirano s (1.15). Koprodukt Δ_0 je homomorfizam, zadovoljava (1.15) i uvijet koasocijativnosti

$$(\Delta_0 \otimes 1)\Delta_0 = (1 \otimes \Delta_0)\Delta_0. \tag{B.1}$$

Antipoda S_0 je preslikavanje $S_0 : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ i antihomomorfizam $S_0(h_1 h_2) = S_0(h_2)S_0(h_1)\ \forall\ h_1, h_2 \in \mathcal{H}$. Za generatore Heisenbergove algebre imamo

$$S_0(x_\mu) = x_\mu, \quad S_0(p_\mu) = -p_\mu. \tag{B.2}$$

Kojedinica $\epsilon_0 : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{A}$ je definirana s $\epsilon_0(h) = h \triangleright 1 \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H},\ \forall\ h \in \mathcal{H}$. Primjetite da $\epsilon_0(\mathcal{H}) = \mathcal{A}$. Preslikavanje izvora $\alpha_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{H}$ i preslikavanje mete $\beta_0 : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{H}$ su jednaka i svode se na $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{H}$. Koprodukt Δ_0, antipoda S_0 i kojedinica ϵ_0 zadovoljavaju sljedeće uvjete

$$\begin{aligned} m(\epsilon_0 \otimes 1)\Delta_0 &= m(1 \otimes \epsilon_0)\Delta_0 = 1 \\ m(S_0 \otimes 1)\Delta_0 &= m(1 \otimes S_0)\Delta_0 = \epsilon_0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

*Ovdje ćemo izložiti strukture faznih prostora kao Hopfov algebroid i nećemo dati općenitu definiciju. Za opću definiciju vidi [22; 23; 24].

§ .2 Zakrenuti kvantni fazni prostor kao Hopfov algebroid

Zakrenuti Hopfov algebroid je definiran ukupnom algebrom $\mathcal{H}$ (kvantni fazni prostor), baznom algebrom $\hat{\mathcal{A}}$ (gdje su elementi $\hat{\mathcal{A}}$ dani eksplicitno u nekoj realizaciji), množenjem m, zakrenutim koproduktom $\Delta_{\mathcal{F}} \equiv \Delta$, antipodom $S_{\mathcal{F}} \equiv S$, kojedinicom $\epsilon_{\mathcal{F}} \equiv \hat{\epsilon}$, preslikavanjem izvora $\hat{\alpha}$ i preslikavanjem mete $\hat{\beta}$. Ova zakrenuta struktura također zadovoljava aksiome Hopfovog algebroida. Koristeći operator zakretanja $\mathcal{F} \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{J}$ i njegov inverz $\mathcal{F}^{-1} \in (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})/\mathcal{J}_0$, koji zadovoljavaju uvjet kocikličnosti (1.24) i uvjet normalizacije (1.26), možemo definirati zakrenuti koprodukt $\Delta h : \Delta_0\mathcal{H} \mapsto \Delta\mathcal{H}$

$$\Delta h = \mathcal{F}\Delta_0 h\mathcal{F}^{-1}, \quad \forall \;\; h \in \mathcal{H} \tag{B.4}$$

koji zadovoljava uvjet koasocijativnosti

$$(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta. \tag{B.5}$$

Antipoda $S : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ je homomorfizam definiran sa

$$S(h) = \chi S_0(h)\chi^{-1} \tag{B.6}$$

gdje je $\chi^{-1} = m\left[(S_0 \otimes 1)\mathcal{F}^{-1}\right]$. Kojedinica $\hat{\epsilon} : \mathcal{H} \mapsto \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$ je definirana s

$$\hat{\epsilon}(h) = m\left\{\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\epsilon_0(h) \otimes 1)\right\}. \tag{B.7}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}(f) = \hat{f}, &\quad \epsilon_0(\hat{f}) = f, \\ \hat{\epsilon}(f \star g) = \hat{f}\;\hat{g}, &\quad \epsilon_0(\hat{f}\;\hat{g}) = f \star g, \\ \hat{\epsilon}(\epsilon_0(\hat{f})) = \hat{f}, &\quad \epsilon_0(\hat{\epsilon}(f)) = f, \end{aligned} \tag{B.8}$$

$\forall f \equiv f(x),\; g \equiv g(x) \in \mathcal{A}$ i $\hat{f} \equiv \hat{f}(\hat{x}),\; \hat{g} \equiv \hat{g}(\hat{x}) \in \hat{\mathcal{A}}$. Rekonstruirajmo preslikavanja izvora i mete koristeći operator zakretanja. Prvo definiramo α i β, $\alpha : \mathcal{A}_\star \to \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$, $\beta : \mathcal{A}_\star \to \mathcal{H}$ kao

$$\alpha(f(x)) = m\left(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\alpha_0(f(x)) \otimes 1)\right), \quad \alpha_0(f(x)) = f(x) \tag{B.9}$$

i

$$\beta(f(x)) = m\left(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(\beta_0(f(x)) \otimes 1)\right), \quad \beta_0(f(x)) = f(x). \tag{B.10}$$

Sada, preslikavanja izvora i mete su definirana kao

$$\hat{\alpha} = \alpha\epsilon_0|_{\hat{\mathcal{A}}} \tag{B.11}$$

i

$$\hat{\beta} = \beta\epsilon_0|_{\hat{\mathcal{A}}}. \tag{B.12}$$

Koprodukt Δ, antipoda S i kojedinica ϵ zadovoljavaju

$$\begin{aligned} m(\hat{\epsilon} \otimes 1)\Delta = m(1 \otimes S^{-1}\hat{\epsilon} \quad S)\Delta = 1 \\ m(S \otimes 1)\Delta = S^{-1}\hat{\epsilon} \quad S \\ m(1 \otimes S)\Delta = \hat{\epsilon} \end{aligned} \tag{B.13}$$

te su kompatibilni s Hopf algebroid strukturom u [22]. Veza između [22] i našeg pristupa je dana s $\alpha\epsilon \mapsto \hat{\epsilon}$ i $\beta\epsilon \mapsto S^{-1}\hat{\epsilon}$, pošto u našem slučaju $\hat{\epsilon} : \mathcal{H} \mapsto \hat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{H}$. U nedeformiranom slučaju imamo $\alpha\epsilon \mapsto \epsilon_0$ i $\beta\epsilon \mapsto S_0^{-1}\epsilon_0 = \epsilon_0$.

§ .3 κ-deformirani fazni prostor kao Hopfov algebroid

κ-deformirani fazni prostor $\hat{\mathcal{H}}$ generiran nekomutativnim koordinatama $\hat{x}_\mu$ i impulsom p_μ također ima strukturu Hopfovog algebroida koji je definiran s totalnom algebrom $\hat{\mathcal{H}}$, baznom algebrom $\hat{\mathcal{A}} \subset \hat{\mathcal{H}}$, množenjem m, koproduktom Δ (zadovoljava (B.5) i (1.10)), antipodom S, kojedinicom $\hat{\epsilon}$, preslikavanjem izvora $\hat{\alpha}$ i preslikavanjem mete $\hat{\beta}$. Kojedinica $\hat{\epsilon}$ je definirana kao

$$\hat{\epsilon}(\hat{h}) = \hat{h} \blacktriangleright 1, \quad \forall \hat{h} \in \hat{\mathcal{H}}. \tag{B.14}$$

Uvedimo $\hat{y}_\mu$ kao desno množenje s $\hat{x}_\mu$

$$\hat{y}_\mu \blacktriangleright \hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\hat{x}_\mu \tag{B.15}$$

i

$$\Delta\hat{y}_\mu = 1 \otimes \hat{y}_\mu \tag{B.16}$$

sa sljedećim svojstvom

$$[\hat{x}_\mu, \hat{y}_\nu] = 0, \quad [\hat{y}_\mu, \hat{y}_\nu] = -i(a_\mu\hat{y}_\nu - a_\nu\hat{y}_\mu). \tag{B.17}$$

Primjetite da $\hat{Q}_\mu = \hat{y}_\mu \otimes 1 - 1 \otimes \hat{x}_\mu$ sa svojstvom $\hat{Q}_\mu \blacktriangleright \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}} = 0$ generira desni ideal $\mathcal{J}$ definiran kao $\mathcal{J} = \mathcal{U}_+(\hat{Q})\hat{\mathcal{H}} \otimes \hat{\mathcal{H}}$ i zadovoljava $\mathcal{J} \blacktriangleright \hat{\mathcal{A}} \otimes \hat{\mathcal{A}} = 0$.

Antipoda S je definirana s $S(\hat{y}_\mu) = \hat{x}_\mu$ i zadovoljava

$$\begin{aligned} m(\hat{\epsilon} \otimes 1)\Delta = m(1 \otimes S^{-1}\hat{\epsilon} \;\; S)\Delta = 1 \\ m(S \otimes 1)\Delta = S^{-1}\hat{\epsilon} \;\; S \\ m(1 \otimes S)\Delta = \hat{\epsilon} \end{aligned} \tag{B.18}$$

Antipoda za p_μ, tj. $S(p_\mu)$ slijedi iz $m(S \otimes 1)\Delta(p_\mu) = m(1 \otimes S)\Delta(p_\mu) = 0$. Preslikavanje izvora $\hat{\alpha} : \hat{\mathcal{A}} \mapsto \hat{\mathcal{H}}$ je homomorfizam, a preslikavanje mete $\hat{\beta} : \hat{\mathcal{A}} \mapsto \hat{\mathcal{H}}$ je antihomomorfizam definiran s $\hat{\beta} = S^{-1}\hat{\alpha}$. Koprodukt Δ, antipoda S, kojedinica $\hat{\epsilon}$ i množenje m definiraju Hopf algebroid strukturu $\hat{\mathcal{H}}$ koja je izomorfna sa zakrenutom Hopf algebroid strukturom $\mathcal{H}$.

Važno je uočiti da operator zakretanja $\mathcal{F}$ koji dobijemo pomoću realizacija (1.2) vodi na

$$\hat{x}_\mu = m\left(\mathcal{F}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(x_\mu \otimes 1)\right) = x_\alpha \varphi^\alpha{}_\mu(p). \tag{B.19}$$

Slično za $\hat{y}_\mu$ imamo

$$\hat{y}_\mu = m\left(\tilde{\mathcal{F}}^{-1}(\triangleright \otimes 1)(x_\mu \otimes 1)\right) = x_\alpha \tilde{\varphi}^\alpha{}_\mu(p), \tag{B.20}$$

gdje je $\tilde{\mathcal{F}}$ definiran kao $\tilde{\mathcal{F}} = \tau_0 \mathcal{F} \tau_0$, pri čemu je τ_0 operator izmjene, $\tau_0(h_1 \otimes h_2) = h_2 \otimes h_1, \forall h_1, h_2 \in \mathcal{H}$.

Dodatak C

Orginalni Feynmanov izvod Maxwellovih jednadžbi

§ .1 Feynmanov originalni izvod

U ovom poglavlju ćemo prikazati orginalni Feynmanov izvod, ili barem onaj kojeg se prisjeća Dyson, a pripisuje ga Feynmanu [67]. Do u detalje ćemo izložiti sve korake i kasnije komentirati sve posljedice. Izvod ćemo izložiti prateći radove [68; 71]. Izvod se temelji na sljedećim pretpostavkama:

- Nerelativistička čestica se giba u trodimenzionalnom Euklidovom prostoru s položajem $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$, gdje je t vrijeme.
- Brzina čestice $\dot{x}_i(t)$ i koordinate položaja $x_i(t)$ zadovoljavaju sljedeće komutacijske relacije:
$$[x_i(t), x_j(t)] = 0, \tag{C.1}$$
$$[x_i(t), \dot{x}_j(t)] = \frac{i\hbar}{m}\delta_{ij}. \tag{C.2}$$
- Čestica zadovoljava Newtonovu jednadžbu:
$$F_i(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}_i(t). \tag{C.3}$$

Strategija dokaza jest derivirati relacije (C.1) i (C.2) po t i iskoristiti Jacobijeve relacije. Operatore $x_i(t)$ i $\dot{x}_j(t)$ shvaćamo kao nekomutirajuće operatore u Heisenbergovoj slici.

Deriviranjem relacije (C.2) po t dobivamo

$$m[x_i(t), \ddot{x}_j(t)] + m[\dot{x}_i(t), \dot{x}_j(t)] = 0, \tag{C.4}$$

pa korištenjem (C.3) slijedi

$$[x_i(t), F_j(t)] = m[\dot{x}_j(t), \dot{x}_i(t)]. \tag{C.5}$$

Desna strana u (C.5) je antisimetrična obzirom na zamjenu indeksa i i j. Znači da možemo pisati

$$[x_i(t), F_j(t)] = -[x_j(t), F_i(t)] = m[\dot{x}_j(t), \dot{x}_i(t)] = -m[\dot{x}_i(t), \dot{x}_j(t)]. \tag{C.6}$$

Dobili smo da je komutator komponenata brzina antisimetričan tenzor u indeksima i i j, pa ga općenito u trodimenzionalnom prostoru možemo napisati pomoću totalnog antisimetričnog Levi-Civita tenzora na sljedeći način

$$m[\dot{x}_i(t), \dot{x}_j(t)] = -[x_i(t), F_j(t)] = \frac{i\hbar}{m}\epsilon_{ijk}B_k. \tag{C.7}$$

Pomnožimo li (C.7) sa ϵ_{ijl} i iskoristimo identitet

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}, \tag{C.8}$$

dobivamo

$$B_k = \frac{m^2}{2i\hbar}\epsilon_{kij}[\dot{x}_i(t), \dot{x}_j(t)]. \tag{C.9}$$

Relaciju (C.9) uzimamo kao definiciju operatora B_k, koji općenito može biti funkcija od x, $\dot{x}$ i t. Promotrimo Jacobijev identitet za x_i, $\dot{x}_j$ i $\dot{x}_k$

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, x_i]] + [\dot{x}_k, [x_i, \dot{x}_j]] = 0. \tag{C.10}$$

Na osnovu (C.2) slijedi da zadnja dva člana iščezavaju, pa imamo

$$[x_i, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0, \tag{C.11}$$

pa zbog (C.7) naposljetku dobivamo

$$[x_i, B_j] = 0, \tag{C.12}$$

što znači da $B_j(x, \dot{x}, t)$ komutira sa $x(t)$, ali i puno više od toga. Naime, za općenitu funkciju $f(x, \dot{x}, t)$, zbog (C.1) i (C.2), vrijedi

$$[x_i, f(x, \dot{x}, t)] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_i}, \tag{C.13}$$

$$[\dot{x}_i, f(x, t)] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{C.14}$$

tako da ako funkcija komutira sa x znači da ona ne ovisi o $\dot{x}$ i obratno. Dakle, iz (C.12) i (C.13) slijedi

$$[x_i, B_j] = 0 = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}_i}, \tag{C.15}$$

što znači da je B_j samo funkcija od x i t, to jest $B_j(x,t)$. Pogledajmo što nam daje Jacobijev identitet za $\dot{x}_l$, $\dot{x}_j$ i $\dot{x}_k$, tj.

$$[\dot{x}_l, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] + [\dot{x}_j, [\dot{x}_k, \dot{x}_l]] + [\dot{x}_k, [\dot{x}_l, \dot{x}_j]] = 0. \tag{C.16}$$

Množenjem (C.16) sa ϵ_{jkl} dobivamo

$$\epsilon_{jkl}[\dot{x}_l, [\dot{x}_j, \dot{x}_k]] = 0, \tag{C.17}$$

odakle zbog (C.9) slijedi

$$[\dot{x}_l, B_l] = 0, \tag{C.18}$$

što u kombinaciji sa (C.14) daje

$$[\dot{x}_l, B_l] = -\frac{i\hbar}{m}\frac{\partial B_l}{\partial x_l} = 0. \tag{C.19}$$

Dakle, dobivamo da divergencija od $\vec{B}(x,t)$ iščezava:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{C.20}$$

Vratimo se sada na relaciju (C.7) u kojoj figurira sila $F_j(x, \dot{x}, t)$. Budući da je sila općenita funkcija od x, $\dot{x}$ i t, zbog (C.13) vrijedi

$$[x_i, F_j(x, \dot{x}, t)] = \frac{i\hbar}{m}\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i}, \tag{C.21}$$

što uzimajući u obzir (C.7) daje

$$\frac{\partial F_j}{\partial \dot{x}_i} = \epsilon_{jik} B_k. \tag{C.22}$$

Sada možemo gornju relaciju integrirati po $\dot{x}_i$ i dobiti silu. Integracija je trivijalna jer B_k ne ovisi o $\dot{x}$. Dobivamo

$$F_j(x, \dot{x}, t) = \epsilon_{jik} B_k \dot{x}_i + E_j(x,t), \tag{C.23}$$

gdje je $E_j(x,t)$ proizvoljna vektorska funkcija koja ne ovisi o $\dot{x}$. Treba napomenuti da pri integriranju po $\dot{x}$ nije definirano stoji li $\dot{x}_i$ lijevo ili desno od B_k, što nije isto jer oni međusobno ne komutiraju. Slična stvar se događa i pri kvantizaciji klasičnih hamiltonijana, kada se javljaju produkti tipa xp, pa se onda takvi produkti simetriziraju kao $xp \to \frac{1}{2}(xp+px)$. Naime, najnepristraniji pristup rješavanju ovakvih problema jest tzv. Weylovo uređenje operatora (vidi [72]) koje ćemo označavati s $\langle ... \rangle$. Imajući ovo u vidu, za silu dobivamo

$$F_j(x,\dot{x},t) = E_j(x,t) + \langle \epsilon_{jik}\dot{x}_i B_k \rangle , \tag{C.24}$$

odnosno,

$$\vec{F}(x,\dot{x},t) = \vec{E}(x,t) + \left\langle \vec{\dot{x}} \times \vec{B} \right\rangle , \tag{C.25}$$

što ima oblik Lorentzove sile. Izračunajmo sada totalnu vremensku derivaciju jednadžbe (C.9)

$$\frac{dB_l}{dt} = \frac{\partial B_l}{\partial t} + \left\langle \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} \right\rangle = -\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jkl}[\ddot{x}_j, \dot{x}_k]. \tag{C.26}$$

Desnu stranu u (C.26) možemo pomoću (C.3) i izraza za silu danog u (C.24) napisati u obliku

$$\begin{aligned} &-\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jkl}[\ddot{x}_j, \dot{x}_k] = \\ &= -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}[E_j, \dot{x}_k] - \frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn}\left\langle [\dot{x}_m B_n, \dot{x}_k] \right\rangle . \end{aligned} \tag{C.27}$$

Dalje, korištenjem identiteta

$$\epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}, \tag{C.28}$$

relacija (C.27) postaje

$$\begin{aligned} &-\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jkl}[\ddot{x}_j, \dot{x}_k] = \\ &= -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}[E_j, \dot{x}_k] - \frac{im}{\hbar}\left\langle [\dot{x}_k B_l, \dot{x}_k] \right\rangle + \frac{im}{\hbar}\left\langle [\dot{x}_l B_k, \dot{x}_k] \right\rangle . \end{aligned} \tag{C.29}$$

Koristeći Leibnitzovo pravilo za komutatore

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \tag{C.30}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} &-\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jkl}[\ddot{x}_j, \dot{x}_k] = \\ &= -\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}[E_j, \dot{x}_k] - \frac{im}{\hbar}\left\langle \dot{x}_k[B_l, \dot{x}_k] + [\dot{x}_k, \dot{x}_k]B_l - \dot{x}_l[B_k, \dot{x}_k] - [\dot{x}_l, \dot{x}_k]B_k \right\rangle . \end{aligned} \tag{C.31}$$

Drugi član pod Weylovim uređenjem u (C.31) je identički jednak nuli, a zbog (C.7) zadnji član je $\sim \epsilon_{lkm} B_m B_k = 0$. Korištenjem (C.14) i uvrštavanjem (C.29) u (C.26), naposlijetku dobivamo

$$\frac{\partial B_l}{\partial t} + \left\langle \dot{x}_m \frac{\partial B_l}{\partial x_m} \right\rangle = \epsilon_{jkl} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \left\langle \dot{x}_k \frac{\partial B_l}{\partial x_k} \right\rangle - \left\langle \dot{x}_l \frac{\partial B_k}{\partial x_k} \right\rangle . \tag{C.32}$$

Vidimo da je drugi član na lijevoj strani jednak drugom članu na desnoj strani jednadžbe. Zadnji član na desnoj strani je zbog (C.20) jednak nuli. Kao rezultat nalazimo

$$\frac{\partial B_l}{\partial t} = \epsilon_{jkl} \frac{\partial E_j}{\partial x_k}, \tag{C.33}$$

što vektorski napisano daje

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \tag{C.34}$$

Dakle, polazeći od relativno općenitih pretpostavki (u duhu kvantne mehanike) našli smo najopćenitiji izraz za silu (C.25), koji je po formi jednak Lorentzovoj sili. U njoj figuriraju operatori $\vec{E}(x,t)$ i $\vec{B}(x,t)$, koji moraju zadovoljavati jednadžbe (C.20) i (C.34), koje su po formi jednake homogenim Maxwellovim jednadžbama. Jednadžba (C.20) implicira da se $\vec{B}$ može napisati kao rotacija vektorskog polja, a onda se zbog (C.34) može uvesti i skalarno polje na način da vrijedi

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{C.35}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{C.36}$$

gdje je $\Phi(x,t)$ skalarni potencijal, a $\vec{A}(x,t)$ vektorski potencijal. Postoji baždarna sloboda pri odabiru potencijala. Ako redefiniramo operatore na način da

$$\begin{aligned} \vec{B} &\to \frac{q}{c}\vec{B} \\ \vec{E} &\to q\vec{E}, \end{aligned} \tag{C.37}$$

tada za jednadžbe (C.20), (C.34), (C.25), (C.35) i (C.36) redom dobivamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{C.38}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{C.39}$$

$$\vec{F}(x, \dot{x}, t) = q\vec{E}(x,t) + \frac{q}{c}\left\langle \vec{\dot{x}} \times \vec{B} \right\rangle, \tag{C.40}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{C.41}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \tag{C.42}$$

gdje je q naboj čestice, a c brzina svjetlosti u vakuumu. Sada možemo uspostaviti korespodenciju između naših rezultata i elektrodinamike na način da $\vec{E}$ identificiramo s električnim poljem, a $\vec{B}$ s magnetnim poljem. To jest, govoreći u Dysonovom smislu, nametanje komutacijskih relacija (C.1) i (C.2) implicira da postoji električno i magnetno polje koje zadovoljava homogene Maxwellove jednadžbe i da je sila na česticu Lorentzova sila. Preostale dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe se uzimaju kao definicija izvora gustoće naboja i struje.

§ .2 Galilejeve pretpostavke vs. Lorentz invarijantan rezultat

Uočimo da smo u prošlom odjeljku krenuli s nerelativističkim pretpostavkama invarijantnim na Galilejeve transformacije, a kao rezultat smo dobili Maxwellove jednadžbe koje su invarijantne na Lorentzove transformacije. Kako je to moguće? Čini se kao da u ovom Feynmanovom formalizmu možemo istovremeno pomiriti Newtonovu mehaniku i elektrodinamiku. Upravo je taj problem naveo Einsteina na put prema otkriću specijalne teorije relativnosti kao svojevrstan "popravak" Newtonove mehanike. U čemu se sastoji trik [69]? Naravno da je nemoguće istovremeno zadovoljiti postulate Newtonove mehanike i specijalne teorije relativnosti. Greška se sastoji u tome što smo bili zaneseni ljepotom, rezultata koji su po formi identični homogenim Maxwellovim jednadžbama i Lorentzovoj sili, zaključili da su preostale dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe "samo" definicije izvora [68] i upravo to vodi na kontradikciju. Naime, ispada da ako za definiciju polja $\vec{B}$ i $\vec{E}$ uzmemo relacije (C.9) i (C.25), kako nam u principu i nalaže ovaj pristup, i s obzirom na njih nađemo kako se oni transformiraju na Galilejeve transformacije, pokazuje se da su naše Maxwellove jednadžbe, to jest (C.20) i (C.34), ustvari isto invarijantne na Galilejeve transformacije [70]. A za preostale dvije nehomogene Maxwellove jednadžbe se uzima njihov oblik bez tzv. struje pomaka kao definiciju izvora i sve je konzistentno i invarijantno na Galilejeve transformacije. Taj oblik bez struje pomaka je svojevrstan nerelativistički limes Maxwellovih jednadžbi [73].

Sada ćemo kvantificirati gornje tvrdnje. Dakle, Feynmanov pristup nam daje

$$\begin{aligned} B_k =& \frac{m^2}{2i\hbar}\epsilon_{kij}[\dot{x}_i, \dot{x}_j] \\ E_i =& m\ddot{x}_i - \epsilon_{ijk}\langle \dot{x}_j B_k \rangle \,. \end{aligned} \tag{C.43}$$

Galilejeve transformacije za koordinatu i brzinu u sustavu (crtani) koji se giba s obzirom na ishodište brzinom $\vec{v}$ su

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - v_i t, \\ \dot{x}'_i &= \dot{x}_i - v_i, \end{aligned} \tag{C.44}$$

pa se polje $\vec{B}$ ne mijenja, tj.

$$B'_i = B_i. \tag{C.45}$$

Zbog (C.44) ispada da je akceleracija invarijantna

$$\ddot{x}'_i = \ddot{x}_i. \tag{C.46}$$

Što se polja $\vec{E}$ tiče, na osnovu (C.43) slijedi

$$E'_i = E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k. \tag{C.47}$$

Ako sa (C.45) i (C.47) uđemo u jednadžbe (C.20) i (C.34), koristeći transformacije prostornih i vremenskih derivacija

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{C.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{C.49}$$

dobivamo

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \times \vec{E}' = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{C.50}$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \tag{C.51}$$

Dakle, homogene Maxwellove jednadžbe su kovarijantne na Gallilejeve transformacije kad se polja transformiraju obzirom na iste i kovarijantne na Lorentzove transformacije kad se polja transformiraju na relativistički način. Ovo je vrlo zanimljivo, ali se radi samo o matematičkoj slučajnosti, jer to ne vrijedi i za nehomogene Maxwellove jednadžbe. Kontradikcija nastupa ako se za definiciju izvora uzmu prave Maxwellove jednadžbe, jer one nisu kovarijantne na Gallilejeve transformacije. Odbacivanjem člana sa strujom pomaka, što je ekvivalentno nerelativističkom limesu [73] i sa zahtjevom da se ρ i j_i transformiraju nezavisno od polja, slijedi da su zadovoljavajuće nehomogene jednadžbe koje su kovarijantne na Galilejeve transformacije dane s

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \tag{C.52}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j}. \tag{C.53}$$

Pri tome, transformacije za gustoću naboja i struje moraju imati sljedeći oblik

$$\rho' = \rho - v_i j_i, \tag{C.54}$$

$$j_i' = j_i. \tag{C.55}$$

Tek sada možemo (uz redefiniciju polja) na konzistentan način proglasiti $\vec{E}$ električnim poljem, $\vec{B}$ magnetnim poljem, $\vec{F}$ Lorentzovom silom i dane jednadžbe za polja Maxwellovim jednadžbama (u nerelativističkom limesu naravno!). Dakle, imamo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{C.56}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{C.57}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \tag{C.58}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{C.59}$$

$$\vec{F}(x, \dot{x}, t) = q\vec{E}(x, t) + \frac{q}{c}\left\langle \vec{\dot{x}} \times \vec{B} \right\rangle, \tag{C.60}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{C.61}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \tag{C.62}$$

§ .3 Klasični limes Feynmanovog pristupa

U prvom odjeljku ovog poglavlja prezentirali smo Feynmanov pristup, u kojem su ključne pretpostavke da su x_i i $\dot{x}_j$ operatori u Heisenbergovoj slici i da zadovoljavaju komutacijske relacije (C.1) i (C.2). Međutim, nigdje u računu nismo iskoristili eksplicitnu definiciju komutatora, to jest $[A, B] = AB - BA$, već samo neka njegova svojstva [71]. Koristili smo, naime,

(i) antisimetričnost

$$[A, B] = -[B, A], \tag{C.63}$$

(*ii*) bilinearnost

$$[\lambda A \pm \mu B, C] = \lambda[A, C] \pm \mu[B, C], \tag{C.64}$$

$$[A, \lambda B \pm \mu C] = \lambda[A, B] \pm \mu[A, C], \tag{C.65}$$

gdje su λ i μ proizvoljni c-brojevi,
(*iii*) Jacobijev identitet

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]], \tag{C.66}$$

(*iv*) Leibnizovo pravilo 1

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \tag{C.67}$$

(*v*) Leibnizovo pravilo 2

$$\frac{d}{dt}[A, B] = [\frac{dA}{dt}, B] + [A, \frac{dB}{dt}]. \tag{C.68}$$

Valja uočiti da Poissonova zagrada $\{,\}$ također zadovoljava svojstva (C.63)-(C.67). To je direktna posljedica njene definicije

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q}\frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial q}, \tag{C.69}$$

gdje su $A(q,p)$ i $B(q,p)$ klasične opservable, koje ne ovise eksplicitno o vremenu, nego implicitno kroz $q(t)$ i $p(t)$, a to su generalizirana koordinata i generalizirani impuls. Svojstvo (C.68), koje komutator automatski zadovoljava, ne vrijedi za Poissonovu zagradu. Naime, totalna vremenska derivacija od (C.69) je

$$\frac{d}{dt}\{A, B\} = \left\{\frac{dA}{dt}, B\right\} + \left\{A, \frac{dB}{dt}\right\} - \{A, B\}\left(\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p}\right). \tag{C.70}$$

Zbog zadnjeg člana na desnoj strani jednadžbe (C.70) ne vrijedi svojstvo (C.68). Bez poznavanja jednadžbi gibanja, to jest $\dot{q} = h(q,p)$ i $\dot{p} = g(q,p)$, ne možemo ništa zaključiti o svojstvima zadnjeg člana u (C.70). Međutim, ako znamo hamiltonijan $H(q,p)$, možemo iskoristiti kanonske jednadžbe gibanja $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ i $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$, pa za zadnji član nalazimo

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} + \frac{\partial \dot{p}}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0. \tag{C.71}$$

Dakle, ako postoji hamiltonijan sistema $H(q,p)$, imamo

$$\frac{d}{dt}\{A, B\} = \left\{\frac{dA}{dt}, B\right\} + \left\{A, \frac{dB}{dt}\right\}, \tag{C.72}$$

Prema tome, zadovoljena su sva svojstva koja zadovoljava i komutator, a bile su nam potrebne pri Feynmanovom izvodu. Znači, potpuno analogni izvod vrijedi i u klasičnim terminima, gdje $x_i(t)$ opisuje trajektoriju čestice, a $\dot{x}_j(t)$ brzinu čestice te vrijedi $\frac{1}{i\hbar}[,] \rightarrow \{,\}$. Analogno vrijede svi zaključci kao i u kvantnom slučaju, samo što sada baratamo s klasičnim veličinama, to jest c-brojevima, a ne s operatorima, to jest q-brojevima. Ovo predstavlja lijepu ilustraciju Ehrenfestovog teorema. Iako je orginalna motivacija bila kvantna čestica, Feynmanov pristup funkcionira i za klasičnu česticu.

§ .4 Značenje Feynmanovog izvoda

U ovom odjeljku odgovorit ćemo na dva očita pitanja. Jedno je: "Što ovaj izvod zapravo znači?", a drugo: "Zašto to sam Feynman nije objavio?". Ovaj pristup nam kaže na koji način komutacijske relacije (koje su srž kvantne mehanike) ograničavaju moguću formu sile. U Feynmanovom pristupu nema spomena lagranžijana, hamiltonijana, varijacijskog principa ili Heisenbergovih jednadžbi. Feynmanova motivacija je bila naći "novu" fiziku te je sa svojim izvodom pokušao naći moguće alternative standardnoj teoriji [68]. Htio je, u potrazi za općenitijom teorijom, izbjeći korištenje standardnih metoda (lagranžijana, hamiltonijana,...), a na neki način je ponovno izveo elektrodinamiku, to jest standardnu i dobro poznatu teoriju. Za njega je to bio pokazatelj da je njegov "revolucionarni" program propao, i, ne izvevši ništa nova, rad nije niti objavio. Sreća je u tome što ga je pokazao Dysonu, koji ga je upamtio i 40 godina poslije nakon Feynmanove smrti, njemu u čast i objavio. Da bismo razumjeli zašto Feynman nije objavio rad, treba ga staviti u njegov povijesni kontekst. To je bila 1948. godina i svi su se mučili spajanjem specijalne relativnosti i kvantne mehanike, a svi pokušaji su rezultirali strašnim divergencijama u računima opservabilnih veličina. Feynman je još uvijek bio sumnjičav oko potpunog prihvaćanja svih "kvantnih dogmi" te je pokušao izgraditi teoriju izvan uobičajenih konvencionalnih metoda teorijske fizike. U tim pokušajima nije bio sam. Neki od najvećih fizičara tog doba, uključujući Yukawu, Borna i Heisenberga [74], su pokušavali svojim programima radikalno reformirati fiziku. Svi ovi pokušaji su propali, a za Feynmana i njegov, jer je reproducirao "staru" fiziku. Dyson se nije složio s Feynmanom. Rad je bio vrijedan objavljivanja (što je i dokazano samim Dysonovim objavljivanjem, a i raspravom koje je kasnije sam Feymanov pristup započeo) jer u njemu ipak ima nešto novoga. Nova metoda i novi pogled na problem su upravo ono što nam i treba u fizici. Kako bi demonstrirali da je Feynmanov pristup baš primjer nove metode, sada ćemo isti rezultat izvesti konvencionalnom metodom, točnije Lagrangeovom metodom.

Polazimo od komutacijske relacije između impulsa p_k i položaja x_j

$$[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}. \tag{C.73}$$

Možemo definirati vektorski potencijal $A_k(x)$ kao

$$p_k = m\dot{x}_k + A_k(x), \tag{C.74}$$

ali tako da vrijedi (C.2), odnosno

$$[x_j, A_k] = 0. \tag{C.75}$$

A_k ne ovisi o brzini $\dot{x}$ već samo o x i t. U Lagrangeovom pristupu vrijedi

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}, \tag{C.76}$$

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial x_k}, \tag{C.77}$$

gdje je $L = L(x, \dot{x}, t)$ lagranžijan. Integracijom (C.76) preko $\dot{x}_k$

$$L(x, \dot{x}, t) = \int p_k d\dot{x}_k = \int (m\dot{x}_k + A_k)\, d\dot{x}_k = \frac{m\dot{x}_k^2}{2} + \langle \dot{x}_k A_k \rangle - \Phi(x), \tag{C.78}$$

gdje smo iskoristili relaciju (C.74) i činjenicu da je $\Phi(x)$ skalarna funkcija koja ovisi samo o x i t. Derivacijom (C.74) po vremenu nalazimo

$$\frac{dp_k}{dt} = m\ddot{x}_k + \frac{dA_k}{dt} = m\ddot{x}_k + \left\langle \dot{x}_m \frac{\partial A_k}{\partial x_m} \right\rangle + \frac{\partial A_k}{\partial t}. \tag{C.79}$$

U drugu ruku, iz (C.77) i (C.78) slijedi

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial x_k} = \left\langle \dot{x}_m \frac{\partial A_m}{\partial x_k} \right\rangle - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}. \tag{C.80}$$

Uvrštavanjem (C.80) u (C.79) dobivamo

$$m\ddot{x}_k = \left\langle \dot{x}_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_m} \right) \right\rangle - \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}. \tag{C.81}$$

Član u zagradi, možemo zapisati kao $F_{km} = \partial_k A_m - \partial_m A_k$. Ako definiramo $B_l = \epsilon_{lkm}\partial_k A_m$, tada zbog svojstva Levi-Civita tenzora vrijedi $F_{km} = \epsilon_{kml}B_l$. Definiramo $E_k = -\partial_k \Phi - \partial_t A_k$. Zbog (C.3), možemo (C.81) napisati kao

$$F_k = E_k + \epsilon_{kml} \langle \dot{x}_m B_l \rangle\,. \tag{C.82}$$

Dakle, poznavanjem Lagrangeove metode relativno jednostavno smo dobili iste rezultate kao i Feynmanovom metodom, to jest dobili smo da zbog Heisenbergove komutacijske relacije imamo Lorentzovu silu

$$\vec{F} = \vec{E} + \left\langle \dot{\vec{x}} \times \vec{B} \right\rangle, \tag{C.83}$$

u kojoj su polja dana preko potencijala

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial_t \vec{A}, \tag{C.84}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \tag{C.85}$$

i kao takva automatski zadovoljavaju homogene Maxwellove jednadžbe te lagranžijan

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}_k \dot{x}_k + \langle \dot{x}_k A_k \rangle - \Phi. \tag{C.86}$$

Međutim, Lagrangeova metoda zahtjeva pretpostavku postojanja lagranžijana, njegove veze s impulsom (C.76) i (C.77) i pretpostavku o postojanju potencijala, kako bi reproducirala željene rezultate. Ništa od toga nam nije trebalo u Feynmanovom izvodu, dapače, postojanje polja i potencijala slijedi kao rezultat, odnosno Feynmanov pristup je nova i alternativna metoda i kao takva vrijedna daljnjeg istraživanja.

Dodatak D

Konstrukcija $\hat{P}_\mu$

Postoji općenitija konstrukcija operatora $\hat{P}_\mu$ (perturbativno u a_μ). Deriviranjem jednadžbe (2.149) po τ dobivamo

$$[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu] + [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] = i(a_\mu \hat{P}_\nu - a_\nu \hat{P}_\mu). \tag{D.1}$$

Ovo nam fiksira samo antisimetrični dio $[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu]$. Možemo pisati

$$[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu] = \hat{S}_{\mu\nu} + \hat{A}_{\mu\nu} \tag{D.2}$$

gdje su $\hat{S}_{\mu\nu} = \hat{S}_{\nu\mu}$ i $\hat{A}_{\mu\nu} = -\hat{A}_{\nu\mu}$. Koristeći (D.1) i (D.2) dobivamo

$$\hat{A}_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(a_\mu \hat{P}_\nu - a_\nu \hat{P}_\mu). \tag{D.3}$$

U limesu $a \longrightarrow 0$ mora vrijediti

$$[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu] \stackrel{a\to 0}{\to} [P_\mu, X_\nu] = i g_{\mu\nu}, \tag{D.4}$$

tako da do prvog reda u a_μ imamo $\hat{S}_{\mu\nu} = i g_{\mu\nu} + \delta S(a)_{\mu\nu}$ tj.

$$\hat{S}_{\mu\nu} = i g_{\mu\nu} + i a_\alpha G_{\mu\nu}^{\ \ \alpha\beta}(x) p_\beta + O(a^2), \tag{D.5}$$

gdje je $G_{\mu\nu}^{\ \ \alpha\beta} = G_{\nu\mu}^{\ \ \alpha\beta}$. Dakle, vrijedi

$$[\hat{P}_\mu, \hat{X}_\nu] = i g_{\mu\nu} + i a_\alpha G_{\mu\nu}^{\ \ \alpha\beta}(x) p_\beta + \frac{i}{2}(a_\mu \hat{P}_\nu - a_\nu \hat{P}_\mu). \tag{D.6}$$

Možemo dobiti jednadžbe za operator $G_{\mu\nu}^{\ \ \alpha\beta}(x)$ iz zahtjeva da vrijede Jacobijevi identiteti do prvog reda u a. Zbog

$$[[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu], \hat{P}_\lambda] + [[\hat{X}_\nu, \hat{P}_\lambda], \hat{X}_\mu] + [[\hat{P}_\lambda, \hat{X}_\mu], \hat{X}_\nu] = 0 \tag{D.7}$$

dobivamo uvjet

$$a_\alpha(G_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta - G_{\mu\beta}{}^\alpha{}_\nu) = \alpha a^\alpha \left(x_\beta \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - x_\nu \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \right) + \beta x^\alpha \left(a_\beta \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - a_\nu \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} \right) + \gamma(x \cdot a) \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\nu} \right) + \frac{3}{2}(a_\nu g_{\mu\beta} - a_\beta g_{\nu\mu}) \tag{D.8}$$

Sada možemo konstruirati $G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x)$ pomoću $\eta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ i $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} x_\beta$, što simbolički možemo zapisati na sljedeći način

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_i A_i (g \cdot \eta)_{\mu\nu\alpha\beta} + \sum_i B_i (\eta \cdot g \cdot \frac{\partial g}{\partial x} x)_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad A_i, B_i \in \mathbb{R} \tag{D.9}$$

Dobiti ćemo uvjete na koeficijente A_i i B_i uvrštavanjem u jednadžbu (D.8) i iz zahtjeva da poznajemo limes $g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$. U konačnici $G_{\mu\nu\alpha\beta}$ je određen pomoću parametara α i β te dodatna četiri slobodna parametra. Koristeći eksplicitni oblik za $G_{\mu\nu\alpha\beta}$ možemo u principu naći $\hat{P}_\mu$ iz jednadžbe (D.6). Ova procedura je općenita i vrijedi u prvom redu u a, ali se može iterativno ponavljati za računanje doprinosa viših redova. A priori konstrukcija gdje je $\hat{P}_\mu = g_{\alpha\beta}(\hat{y}) p^\beta \varphi^\beta{}_\mu$ i koju smo koristili u dosadašnjem radu jest poseban slučaj ove metode, međutim, dok je ova metoda perturbativna, ovaj ansatz je neperturbativan te vrijedi u svim redovima te je njegova konstrukcija prirodna i u snažnoj analogiji s komutativnim slučajem.

Dodatak E

Nekomutativno skalarno polje u nekomutativnom zakrivljenom prostoru

U trečem poglavlju zbog nedostatka kompletne teorije kvantne gravitacije, prisiljeni smo ograničiti naša istraživanja na κ-deformacije polja i tretirati gravitaciju klasično. Međutim, u [15], analizirana je geodetska jednadžba za česticu u κ-deformiranom zakrivljenom prostoru. U ovom pristupu, tj. tzv. "Feynmanovom pristupu", komutator između koordinate položaja $\hat{X}_\mu$ i impulsa $\hat{P}_\nu$ može se interpretirati kao nekomutativna metrika

$$[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] \equiv -i\hat{g}_{\mu\nu} = -ig_{\alpha\beta}(\hat{y}) \left(p^\beta \frac{\partial \varphi^\alpha{}_\nu}{\partial p^\sigma} \varphi^\sigma{}_\mu + \varphi^\alpha{}_\nu \varphi^\beta{}_\mu \right) \tag{E.1}$$

gdje je

$$g_{\mu\nu}(\hat{y}) = g_{\mu\nu}(x) + \gamma(x \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x})(a \cdot p) + \alpha(a \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x})(x \cdot p) + \beta(x \cdot a)(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} \cdot p) \tag{E.2}$$

Jednadžba (E.1) nam omogučava da analiziramo κ-deformacije metrike. Postuliramo nekomutativno djelovanje* $\hat{\mathbb{S}}$ za nekomutativno skalarno polje u κ-

*Npr. jedan jednostavniji primjer nekomutativnog prostora je tzv. Moyalov prostor koji je definiran s $[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\Theta_{\mu\nu}$, gdje se $\Theta_{\mu\nu}$ tretira kao konstantni tenzor. U ovom pristupu (vidi [47; 94; 51] i reference u tim radovima), simetrije opće teorije relativnosti, tj. simetrije difeomorfizama su formulirane u jeziku Hopfovih algebri, koje su prirodan okvir za proučavanje kvantizacije Lievih grupa i Lievih algebri. Zatim je teorija gravitacije formulirana na način da je kovarijantna s obzirom na deformirane difeomorfizme, što automatski vodi na nekomutativnu geometriju. Ovdje je nužno uvesti *star*-produkt, zakrenute deformiranom prostoru s netrivijalnom metrikom na sljedeći način

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu} \star \partial_\mu\phi \star \partial_\nu\phi) \\ &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left(\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\hat{\phi}\partial_\nu\hat{\phi} \triangleright 1\right). \end{aligned} \tag{E.3}$$

U slučaju κ-Minkowskijevog prostora možemo koristiti takozvanu "teoriju realizacija" (vidi prvo poglavlje ili [13; 20]) i razviti *star* produkt kao formalni red i deformaciji a_μ. Primjetite da u gornjoj relaciji ostavljamo volumen d^4x nedeformiran [117]. Možemo razviti $\hat{\phi}$ i $\hat{g}_{\mu\nu}$ do prvog reda u deformaciji

$$\hat{\phi} = \phi(x) + \alpha(x \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x})(a \cdot p) + \beta(a \cdot x)(\frac{\partial\phi}{\partial x} \cdot p) + \gamma(a \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x})(x \cdot p), \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} =& g_{\mu\nu}(\hat{y}) + 2\alpha g_{\mu\nu}(a \cdot p) + \alpha g_{\nu\beta}a_\mu p^\beta + \beta(\eta_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}a^\alpha p^\beta + g_{\nu\beta}a^\beta p_\mu + g_{\mu\alpha}a^\alpha p_\nu) \\ &+ \gamma(g_{\mu\beta}a_\nu p^\beta + g_{\nu\beta}p^\beta a_\mu + g_{\mu\alpha}p^\alpha a_\nu), \end{aligned} \tag{E.5}$$

te uvrstiti u djelovanje, koje također razvijamo do prvog reda u a_μ. Uvedimo sljedeću notaciju zbog jednostavnijeg računa

$$\begin{aligned} &\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + ia_\alpha G^{\alpha\beta}_{\mu\nu}(x)\partial_\beta \equiv g_{\mu\nu} + \delta(g_{\mu\nu}), \quad \delta(g_{\mu\nu}) \triangleright 1 = 0 \\ &\partial_\mu\hat{\phi} = \partial_\mu\phi + ia_\alpha\varphi^{\alpha\beta}_\mu(x)\partial_\beta \equiv \partial_\mu\phi + \delta(\partial_\mu\phi), \quad \delta(\partial_\mu\phi) \triangleright 1 = 0. \end{aligned} \tag{E.6}$$

simetrije, operator zakretanja i znati njihove međusobne veze. Konstrukcija koju izlažemo u ovom Dodatku (a i njen specijalan slučaj u poglavlju 3) je kovarijantna s obzirom na zakrenute difeomorfizme. Važno je naglasiti da je moguće konstruirati odgovarajući operator zakretanja (koji se konstruira kao u prvom poglavlju u [20], gdje smo pokazali da za svaku realizaciju postoji odgovarajući operator zakretanja koji vodi na jedinstveni asocijativni *star* produkt) čija primjena se svodi na konstrukciju u ovom Dodatku te osigurava opću kovarijantnost početne akcije. Ovdje ćemo krenuti od *star* produkta i realizacije. Međutim, mogli smo jednako tako krenuti od operatora zakretanja te korištenjem zakrenutih difeomorfizama naći jednadžbu gibanja. Glavna prednost korištenja *star* produkta jest da kada napišemo djelovanje pomoću njega onda, je ono automatski kovarijantno s obzirom na deformirane simetrije. Naravno u graničnom slučaju $a_\mu \to 0$, *star* produkt se svodi na obično množenje i vraćamo se na uobičajenu komutativnu kovarijantnost.

Razvijanjem djelovanja (E.3) do prvog reda u deformaciji nalazimo

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{S}} &= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(g_{\mu\nu}+\delta(g_{\mu\nu}))\,(\partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi))\,(\partial_\nu\phi+\delta(\partial_\nu\phi))\triangleright 1\\
&= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(g_{\mu\nu}+\delta(g_{\mu\nu}))\,(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+\delta(\partial_\mu\phi)\partial_\nu\phi)\triangleright 1\\
&= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(g_{\mu\nu}+\delta(g_{\mu\nu}))\,(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+[\delta(\partial_\mu\phi),\partial_\nu\phi])\triangleright 1\\
&= \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi+g^{\mu\nu}[\delta(\partial_\mu\phi),\partial_\nu\phi]+[\delta(g_{\mu\nu}),\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi])+O(a^2)\\
&\equiv \mathcal{S}_0+a\mathcal{S}'.
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Koristeći

$$\delta(\partial_\mu\phi)=ia_\alpha\varphi_\mu^{\alpha\beta}(x)\partial_\beta, \tag{E.8a}$$

zajedno s

$$\varphi_\mu^{\alpha\beta}(x)=\alpha\left(x\cdot\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial x^\mu}\right)\eta^{\alpha\beta}+\beta x^\alpha\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\beta\partial x^\mu}+\gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x^\mu}x^\beta, \tag{E.8b}$$

i

$$\delta(g_{\mu\nu})=ia_\alpha G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x)\partial_\beta, \tag{E.8c}$$

te

$$\begin{aligned}
G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x) &= \gamma\left(x\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x}\right)\eta^{\alpha\beta}+\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}x^\beta+\beta x^\alpha\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}+2\alpha g_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}+\alpha g_\nu{}^\beta\delta_\mu^\alpha\\
&\quad+\beta(\eta_{\mu\nu}g_\alpha{}^\beta+g_{\nu\alpha}\delta_\mu^\beta+g_{\mu\alpha}\delta_\nu^\beta)+\gamma(g_\mu{}^\beta\delta_\nu^\alpha+g_\nu{}^\beta\delta_\mu^\alpha+g_\mu{}^\beta\delta_\nu^\alpha),
\end{aligned} \tag{E.8d}$$

dobivamo izraz za djelovanje (E.7)

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{S}} &= \mathcal{S}_0+\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\Bigg\{g^{\mu\nu}\left[i\alpha x^\sigma\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\sigma\partial x^\mu}a^\beta+i\beta(a\cdot x)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\beta\partial x^\mu}+i\gamma\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\alpha\partial x^\mu}a_\alpha x^\beta\right](\partial_\mu\partial_\nu\phi)\\
&+ia_\alpha G_{\mu\nu}^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\beta\partial x_\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\nu}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\beta\partial x_\nu}\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}\right]\Bigg\},
\end{aligned} \tag{E.9}$$

koji vrijedi do prvog reda u deformacijskom parametru. Nadalje, definiramo

$$\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}=i\sqrt{-g}\;g^{\beta\delta}\,(\alpha x^\alpha a^\gamma+\beta(a\cdot x)\eta^{\alpha\gamma}+\gamma a^\alpha x^\gamma) \tag{E.10a}$$

i

$$\mathcal{B}^{\beta}_{\rho\sigma} = i\sqrt{-g}\; a_\alpha \left(G^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} + G^{\alpha\beta}_{\sigma\rho}\right), \tag{E.10b}$$

tako da možemo zapisati djelovanje u nešto kompaktnijoj formi

$$\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_0 + \int \mathrm{d}^4x \left(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} + \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial\phi}{\partial x^\gamma}\right). \tag{E.11}$$

Jednadžba (E.11) predstavlja djelovanje za nekomutativno skalarno polje u nekomutativnom zakrivljenom prostoru, razvijeno do prvog reda u deformacijskom parametru a.

Polazeći od djelovanja (E.11), možemo naći jednadžbe gibanja za polje ϕ. Uočite da djelovanje (E.11) sadrži više derivacije u polju ϕ, tj. naš lagranžijan je $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \partial\phi, \partial^2\phi, x)$. Dakle, moramo koristiti Euler-Lagrangeove jednadžbe za teoriju s višim derivacijama. Euler-Lagrangeova jednadžba za naš slučaj glasi

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi)} - \partial_\mu\partial_\nu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\partial_\nu\phi)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}. \tag{E.12}$$

Pri računu jednadžbe gibanja trebat će nam

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = 0, \quad \frac{\delta(\partial_\alpha\phi)}{\delta(\partial_\mu\phi)} = \delta^\mu_\alpha, \quad \frac{\delta(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)}{\delta(\partial_\mu\partial_\nu\phi)} = \delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}, \tag{E.13a}$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\sigma\phi)} = 2\sqrt{-g}\; g^\sigma{}_\nu \partial^\nu\phi + \mathcal{B}^{\alpha\beta\sigma}(\partial_\alpha\partial_\beta\phi), \tag{E.13b}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\sigma\partial_\rho\phi)} &= \mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}\left[(\delta^\sigma_\alpha\delta^\rho_\beta + \delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \Theta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta})(\partial_\gamma\partial_\delta\phi) + (\delta^\sigma_\gamma\delta^\rho_\delta + \delta^\rho_\gamma\delta^\sigma_\delta - \Theta^{\rho\sigma}_{\gamma\delta})(\partial_\alpha\partial_\beta\phi)\right] \\ &\quad + \mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma}(\delta^\sigma_\alpha\delta^\rho_\beta + \delta^\rho_\alpha\delta^\sigma_\beta - \Theta^{\rho\sigma}_{\alpha\beta})(\partial_\gamma\phi),\end{aligned} \tag{E.13c}$$

gdje smo definirali $\Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 1$ kada $\alpha = \beta = \mu = \nu$ i $\Theta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = 0$ inače. Dakle, za jednadžbu gibanja dobivamo

$$\begin{aligned}\partial_\sigma(\sqrt{-g}\; g^{\sigma\nu}\partial_\nu\phi) &= \partial_\alpha\partial_\beta(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\phi) + \partial_\gamma\partial_\delta(\mathcal{A}^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha\partial_\beta\phi) \\ &\quad + \partial_\alpha\partial_\beta(\mathcal{B}^{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma\phi) - \frac{1}{2}\partial_\sigma(\mathcal{B}^{\alpha\beta\sigma}\partial_\alpha\partial_\beta\phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_\alpha \partial_\alpha\partial_\alpha(\mathcal{A}^{\alpha\alpha\gamma\delta}\partial_\gamma\partial_\delta\phi + \mathcal{A}^{\gamma\delta\alpha\alpha}\partial_\gamma\partial_\delta\phi + \mathcal{B}^{\alpha\alpha\gamma}\partial_\gamma\phi).\end{aligned} \tag{E.14}$$

Kao što vidimo jednadžba (E.14) je poprilično netrivijalna, pa ćemo njenu analizu rastaviti na tri moguća režima:

- Nekomutativno polje $\hat{\phi}$ na klasičnoj pozadini $g_{\mu\nu}$. U tom slučaju $\mathcal{A} \neq 0$, $\mathcal{B} = 0$, gdje su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ definirani u (E.10).
- Komutativno polje ϕ na deformiranoj pozadini $\hat{g}_{\mu\nu}$: $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} \neq 0$,
- Nekomutativno polje $\hat{\phi}$ na deformiranoj pozadini $\hat{g}_{\mu\nu}$: $\mathcal{A} \neq 0$, $\mathcal{B} \neq 0$.

Mi smo detaljno analizirali prvi slučaj u trećem poglavlju, a preostala dva ostaju za buduća istraživanja.

Bibliografija

[1] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Phys. Lett. B331 (1994) 39.
S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, Comm. Math. Phys. Volume 172, Number 1 (1995), 187-220.

[2] A. Kempf, Lett. Math. Phys. 26,1 (1992); M. Maggiore, Phys. Lett. **B304** (1993) 63.
A. Kempf and G. Mangano, Phys. Rev.D 55, 7909 (1997); hep-th/9612084

[3] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 09, 032 (1999); hep-th/9908142

[4] J. de Boer, P. A. Grassi and P. van Nieuwenhuizen, Phys.Lett. B 574, 98 (2003)

[5] G. Amelino-Camelia, L. Smolin, A. Starodubtsev, Class. Quant. Grav. 21, 3095, (2004), arXiv:hep-th/0306134
L.Freidel, J. Kowalski-Glikman and L. Smolin, Phys. Rev. D 69(2004) 044001, hep-th/0307085
L. Freidel and E.R. Livine, Phys.Rev. Lett. 96 (2006) 221301, hep-th/0512113

[6] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, JHEP 0002 (2000) 020, arXiv:hep-th/9912072

[7] H. Grosse and R. Wulkenhaar, JHEP 0312(2003) 019, arXiv:hep-th/0307017

[8] H. Grosse and M. Wohlgenannt, Nucl.Phys. B748 (2006) 473-484, arXiv:hep-th/0507030

[9] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, Rev.Mod.Phys.73:977-1029,(2001), arXiv:hep-th/0106048

[10] R. J. Szabo, Phys.Rept.378:207-299,(2003), arXiv:hep-th/0109162

[11] J. Lukierski, A. Nowicki, H. Ruegg and V. N. Tolstoy, Phys. Lett. B 264,331 (1991).
J. Lukierski, A. Nowicki and H. Ruegg, Phys.Lett. B 293, 344 (1992).
J. Lukierski and H. Ruegg, Phys. Lett. B 329, 189 (1994), hep-th/9310117.

[12] S. Majid and H. Ruegg, Phys.Lett. B 334, 348 (1994), hep-th/9404107.

[13] S. Meljanac and M. Stojic, Eur. Phys. J. C47, 531 (2006).
S. Meljanac, S. Krešic-Juric and M. Stojic, Eur. Phys. J. C51, 229 (2007).
S. Meljanac, A. Samsarov, M. Stojic and K. S. Gupta, Eur. Phys. J. C 53, 295 (2008), arXiv:0705.2471.
S. Meljanac, S. Krešic-Juric, J. Phys. A41:235203, 2008, arXiv:0804.3072

[14] P. A. Bolokhov and M. Pospelov, Phys. Lett. B677(2009) 160.
A. Borowiec, K. S. Gupta, S. Meljanac and A. Pachoł, Europhys. Lett. 92, 20006 (2010), arXiv:0912.3299.
E. Harikumar, M. Sivakumar, N. Srinivas, Mod.Phys.Lett.A26:1103-1115,2011, arXiv:0910.5778 [hep-th]
E. Harikumar and A. K. Kapoor, Mod.Phys. Lett.A 25 (2010) 2991, arXiv:1003.4603 [hep-th]

[15] E. Harikumar, T. Juric and S. Meljanac, Phys. Rev. D 86,045002 (2012) arXiv:1203.1564 [hep-th].

[16] M. Arzano, J. Kowalski-Glikman, A. Walkers, Europhys. Lett. 90 (2010) 30006

[17] D. Kovacevic, S. Meljanac, A. Pachol and R. Štrajn, Phys. Lett. B 711 (2012) 122, arXiv:1202.3305 [hep-th]

[18] S. Meljanac, A. Samsarov, R. Štrajn, JHEP 08 (2012) 127, arXiv:1204.4324

[19] T. Jurić, S. Meljanac and R. Štrajn, Physics Letters A 377 (2013), pp. 2472-2476, arXiv:1303.0994 [hep-th]

[20] T. Juric, S. Meljanac, R. Strajn, Int. J. Mod. Phys. A Vol. 29 (2014) 1450022.

[21] T. Juric, D. Kovacevic and S. Meljanac, ‘ arXiv:1402.0397 [math-ph].

[22] J.H. Lu, Internat. J. Math. 7 (1996)

[23] P. Xu, Commun. Math. Phys. 216, 539-581 (2001)

[24] G. Böhm, “Hopf Algebroids”, Handbook of Algebra (2008), arXiv:0805.3806 [math.QA]

[25] M. Arzano and A. Marciano, “Symplectic geometry and Noether charges for Hopf algebra space-time symmetries”,Phys. Rev. D 76 (2007) 125005 [arXiv:hep-th/0701268];
M. Daszkiewicz, J. Lukierski and M. Woronowicz, “κ-Deformed Statistics and Classical Fourmomentum AdditionLaw”, Mod. Phys. Lett. A 23 (2008) 653 [arXiv:hep-th/0703200];
C. A. S. Young and R. Zegers, “Covariant particle statistics and intertwiners of the kappa-deformed Poincare algebra”, Nucl. Phys. B 797 (2008) 537 [arXiv:0711.2206];
C. A. S. Young and R. Zegers, “Covariant particle exchange for kappa-deformed theories in 1+1 dimensions”, Nucl. Phys. B 804 (2008) 342 [arXiv:0803.2659]

[26] T. R. Govindarajan, K. S. Gupta, E. Harikumar, S. Meljanac and D. Meljanac, Phys. Rev. D **77**, 105010 (2008), arXiv:0802.1576.

[27] H. C. Kim, Y. Lee, C. Rim and J. H. Yee, Phys. Lett. B 671, 398 (2009), arXiv:hep-th/0808.2866.
J.G. Bu, J.H. Yee and H.C. Kim, Phys. Lett. B 679, 486 (2009), arXiv:0903.0040v2.

[28] K. S. Gupta, S. Meljanac and A. Samsarov, Phys. Rev. D 85 (2012) 045029 [arXiv:1108.0341 [hep-th]

[29] F.M. Andrade, E. O. Silva, Physics Letters B 719 (2013) pp. 467-471 ; arXiv:1212.1944.
V. G. Kupriyanov, J. Math. Phys. 54, 112105 (2013), arXiv:1204.4823[math-ph]
V.G. Kupriyanov, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 245303, arXiv:1209.6105 [math-ph]

[30] E. Harikumar, Europhys.Lett. 90, 21001 (2010), arXiv:1002.3202v3.

[31] E. Harikumar, T. Jurić and S. Meljanac, Phys. Rev. D 84, 085020 (2011), arXiv:1107.3936

[32] B.P. Dolan, Kumar S. Gupta, A. Stern, Class.Quant.Grav. 24:1647-1656, (2007), arXiv:hep-th/0611233

[33] P. Schupp, S. Solodukhin, arXiv:0906.2724 [hep-th]

[34] P. Kosinski, J. Lukierski and P. Maslanka, Phys.Rev. D 62, 025004 (2000), arXiv:hep-th/9902037.
L. Freidel, J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, Int. J. Mod. Phys. A 23, 2687 (2008), arXiv:0706.3658.
H. C. Kim, Y. Lee, C. Rim and J. H. Yee, J. Math.Phys. 50, 102304 (2009), arXiv:hep-th/0901.0049.

[35] T. R. Govindarajan, K. S. Gupta, E. Harikumar, S. Meljanac and D. Meljanac, Phys. Rev. D 80, 025014 (2009), arXiv:0903.2355.

[36] S. Meljanac and A. Samsarov, Int. J. Mod. Phys. A 26, 1439 (2011), arXiv:1007.3943.

[37] J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, Phys. Lett. B 539, 126 (2002), hep-th/0203040.
J. Kowalski-Glikman and S. Nowak, Int. J.Mod. Phys. D 12, 299 (2003).
G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman, and L. Smolin, Phys.Rev. D84 (2011) 084010, Gen.Rel.Grav. 43 (2011) 2547-2553, Int.J.Mod.Phys. D20 (2011) 2867-2873.

[38] S. Hossenfelder, Phys. Rev. Lett. 104, 140402 (2010)

[39] U. Jacob, F. Mercati, G. Amelino-Camelia and T. Piran, Phys. Rev. D 82, 084021 (2010), arXiv:1004.0575 [astro-ph.HE].

[40] G. Amelino-Camelia, M. Matassa, F. Mercati and G. Rosati, Phys. Rev. Lett. 106, 071301 (2011), arXiv:1006.2126 [gr-qc].

[41] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman, L. Smolin, Phys. Rev. D 84 (2011), 084010

[42] S. Meljanac, A. Pachol, A. Samsarov, K. S. Gupta, Phys. Rev. D 87, 125009 (2013), arxiv:1210.6814 [hep-th]

[43] V. G. Drinfeld, Soviet Math. Dokl. 32, 254 (1985).

[44] V. G. Drinfeld, Alg. Anal. 1:6, 114 (1989) (Leningrad Math. J. 1:6, 1419 (1990)).

[45] S. Majid, *Foundations of Quantum Group Theory*, Cambridge University Press, 1995.

[46] M. Chaichian, P.P. Kulish, K. Nishijima, A. Tureanu, Phys. Lett. B 604 (2004) 98-102, hep-th/0408069

[47] P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijević, F. Meyer, P. Schupp, J. Wess, Class.Quant.Grav. 22 (2005) 3511-3532, arXiv:hep-th/0504183

[48] P. Aschieri, F. Lizzi and P. Vitale, Phys. Rev. D **77** 025037, (2008), arXiv:0708.3002v2.

[49] P. Aschieri, A. Schenkel, arXiv:1210.0241 [math.QA]

[50] P. Aschieri, L. Castellani, JHEP 0906:086,(2009), arXiv:0902.3817 [hep-th]

[51] T. Ohl, A. Schenkel, JHEP 0901:084, (2009), arXiv:0810.4885 [hep-th]; T. Ohl, A. Schenkel, JHEP 10 (2009) 052, arXiv:0906.2730 [hep-th]

[52] A. Borowiec and A. Pachol, SIGMA **6**, 086 (2010), arXiv:1005.4429.

[53] J. Lukierski, H. Ruegg, V. N. Tolstoy, A. Nowicki, J.Phys.A27:2389-2400, (1994), arXiv:hep-th/9312068

[54] J. Kowalski-Glikman, Lect. Notes. Phys. **669** (2005) 35.

[55] D. Kovačević, S. Meljanac: J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 135208, [arXiv:1110.0944].

[56] M. V. Battisti, S. Meljanac, Phys. Rev. D 82 (2010) 024028, arXiv:1003.2108 [hep-th]

[57] S.Meljanac, D.Meljanac, A.Samsarov, M.Stojić, Mod. Phys. Lett. A25:579-590, (2010), arXiv:0912.5087 [hep-th].

[58] S.Meljanac, D.Meljanac, A.Samsarov, M.Stojić, Phys. Rev. D 83, 065009, (2011), arXiv:1102.1655 [math-ph]

[59] P. Aschieri, M. Dimitrijević, F. Meyer, J. Wess, Class.Quant.Grav. 23 (2006) 1883-1912, arXiv:hep-th/0510059

[60] A. Borowiec and A. Pachol, Phys. Rev. D **79**, 045012 (2009), arXiv:0812.0576.

[61] S. Meljanac and S. Krešić-Jurić, Int. J. Mod. Phys. A **26** (20), 3385 (2011), arXiv: 1004.4547.

[62] A. Berard, Y. Grandati and H. Mohrbach, J. Math. Phys. **40** (1999) 3732.

[63] A. Berard, Y. Grandati and H. Mohrbach, Phys. Lett. **A 254** (1999) 133; A. Berard and H. Mohrbach, Int. J. Theort. Phys. **30** (2000) 2623.

[64] A. Boulahoual and M. B. Sedra, J. Math. Phys. **44** (2003)5888; A. Berard, H. Mohrbach, J. Lages, P. Gosselin, Y. Grandati, H. Boumrar and F. Menas, J. Phys. Conf. Ser. **70** (2007), 012004; J. F. Carinena and H. Figueroa, J. Phys. **A39** (2006) 3763.

[65] E. Harikumar, A. K. Kapoor and R. Verma, Phys. Rev. **D 86** (2012) 045022.

[66] E. Harikumar and R. Verma, Mod. Phys. Lett. **A 28** (2013)1350063.

[67] F. J. Dyson, Feynman at Cornell, Phys. Today 42(2), 32-38 (1989)

[68] F. J. Dyson, Feynman's proof of the Maxwell equation, Am. J. Phys. Vol. 58, No. 3. 1990

[69] N. Dombey, Am. J. Phys. 59(1) (1991) 85
R. W. Brehme, Am. J. Phys. 59(1) (1991) 85
J. L. Anderson, Am. J. Phys. 59(1) (1991) 86
I. E. Farquar, Am. J. Phys. 59(1) (1991) 87

[70] A. Vaidya and C. Farina, Phys. Lett. 153 A(1991), 265

[71] S. Tanimura, Annals of Physics 220 (1992), 229-247

[72] T. D. Lee, Particle Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers, 1981, 476-480
W. Greiner and J. Reinhardt, Field Quantization, Springer, 1996, 347-348

[73] M. Le Bellac and J. M. Levy-Leblond, Nuovo Cimento 14B (1973) 217
J. M. Levy-Leblond, in: Group theory and its applications, Vol.2, ed. E. M. Loebl (Academic Press, New York, 1971)

[74] H. Yukawa, Phys. Rev. 77, 219-226 (1950)
M. Born, Rev. Mod. Phys. 21, 463-473 (1949)
W. Heisenberg, Z. Naturforsch, 5a, 251-259 (1950)

[75] R. M. Wald, General Relativity, The Universety of Chicago Press, Chicago (1984)

[76] M. Montesinos, A. Perez-Lorenzana, Int. J. Theor. Phys.38 (1999) 901.

[77] V. O. Rivelles, Phys. Lett. **B558** (2003) 191.

[78] S. Caroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity (2003)

[79] T. Padmanhaban, Ann. Phys. 165, 38 (1985); G. Venenciano, Europhys. Lett. 2, 199 (1986)

[80] C. A. Mead, Phys. Rev. **B135** (1964) 849.

[81] F. Brau, J. Phys A **32** (1999) 7691; S. Das and E. C. Vagenas, Can. J. Phys. 87 (2009)223, ibid, PhyS. Rev. Lett. 101 (2008) 221301.

[82] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7** (1973) 2333.

[83] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D9** (1974) 3292.

[84] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[85] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D 14** (1976) 870.

[86] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B 256** (1985) 727.

[87] A. Sen, JHEP **1304** (2013) 156.

[88] R. K. Kaul and P. Majumdar, Phys.Rev.Lett. **84** (2000) 5255.

[89] S. Carlip, Lect.Notes Phys. **769** (2009) 89.

[90] D. Birmingham, Kumar S. Gupta and Siddhartha Sen, Phys.Lett. **B 505** (2001) 191.

[91] Kumar S. Gupta and Siddhartha Sen, Phys.Lett. **B 526** (2002) 121.

[92] J. C. Lopez-Dominguez, O. Obregon, M. Sabido and C. Ramirez, Phys. Rev. D **74** (2006) 084024.

[93] J. C. Lopez-Dominguez, O. Obregon and S. Zacarias, Phys. Rev. D **80** (2009) 104020.

[94] P.Aschieri, M.Dimitrijevic, F.Meyer, J.Wess, Class.Quant.Grav. 23 (2006) 1883.

[95] O. Aharony, S. Gubser, J. Martin Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, Phys.Rept. **323** (2000) 183.

[96] J. W. Moffat, Phys. Lett. **B 491** (2000) 345.

[97] A. H. Chamseddine, Commun. Math. Phys. **218** (2001) 283.

[98] H. Nishino and S. Rajpoot, Phys. Lett. **B 532** (2002) 334.

[99] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, K. S. Gupta and S. Kurkcuoglu, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 5799.

[100] E. Harikumar and V. O Rivelles, Class. Quant. Grav. **23** (2006) 7551.

[101] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, Phys. Rev. D **78**, 023516 (2008)

[102] C. Bastos, O. Bertolami, N.C. Dias, J.N. Prata, Phys. Rev. D **80**, 124038 (2009)

[103] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias and J. N. Prata, Phys. Rev. D **84**, 024005 (2011)

[104] B.P. Dolan, Kumar S. Gupta and A. Stern, J.Phys.Conf.Ser. **174** (2009) 012023.

[105] P. Schupp and S. Solodukhin, arXiv:0906.2724 [hep-th].

[106] R. B. Mann, L. Tarasov and A. Zelnikov, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 1487.

[107] R. B. Mann and T. G. Steele, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 475.

[108] L. Suskind and J. Uglum, Phys. Rev. **D50** (1994) 2700.

[109] J. G. Demers, R. Lafrance, and R. C. Myers, Phys. Rev **D 52** (1995) 2245.

[110] S-W Kim, W. T. Kim, Y-J. Park and H. Shin, Phys. Lett. **B 392** (1997) 311.

[111] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849.

[112] W. T. Kim and Y-J. Park, Phys. Lett. **B 347** (1995) 217.

[113] D. Birmingham; Phys. Rev D 64, 064024 (2001).

[114] Dmitry Nesterov, Sergey N. Solodukhin, Nucl.Phys. B842 (2011) 141-171

[115] S. N. Solodukhin, Living Rev. Rel. **14** (2011) 8.

[116] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, Phys. Rev. D 62, 024027 (2000)

[117] T. Jurić, S. Meljanac and R. Strajn,
Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450121 [arXiv:1312.2751 [hep-th]].

[118] G. Amelino-Camelia, T. Piran, Phys. Rev. D 64, (2001), arXiv:astro-ph/0008107.

[119] Gambini, Pulin, Phys. Rev. D 59 (1999)

Curriculum Vitae

First name | Surname : Tajron Jurić

Address

Theoretical Physics Division
Ruđer Bošković Institute
Bijenička cesta 54, P.O.B. 331
HR-10002 Zagreb, Croatia

e-mail: tjuric@irb.hr | telephone: +385 1 457 1353 |

Born 28 December 1987, Zagreb (Croatia)

Education

1994-1996	Elementary school (*Susedgrad*, Zagreb)
1996-2002	Elementary school (*Ksaver Šandor Đalski*, Donja Zelina)
2002-2006	High school (*Srednja škola Sesvete, opća gimnazija*, Zagreb)
2006-2011	Faculty of Science, University of Zagreb
5 May 2011	**Mag. Phys** , Master thesis: *Feynman approach to electrodynamics and gravity* advisor: dr. sc. Stjepan Meljanac
2011-2014	PhD student, University of Zagreb
September 2014	**PhD** thesis completed and submited; (expected defence date: 26 November 2014) advisor: dr. sc. Stjepan Meljanac

Research interests

Modern aspects of Standard model, QFT, mathematical physics and especially aspects of symmetries and noncommutative geometry.

Position

Since 2011 research assistant at Theoretical Physics Division, Ruđer Bošković Institute.

Teaching experience

Teaching assistant at the University of Zagreb, Department of Physics where he gave/give exercises and seminars in:

- Physics 1&2 (first year courses for Chemists 2011/12)
- General Physics 1&2 (first year courses for Physicists 2012/13)
- General Physics 3&4 (second year courses for Physicists 2013/2014)
- Mathematical methods for physics 1&2 (second year courses for Physicists 2014/2015)

List of publications

1. E. Harikumar, T. Jurić and S. Meljanac, "*Electrodynamics on κ-Minkowski space-time*," Phys. Rev. D **84**, 085020 (2011) [arXiv:1107.3936 [hep-th]].

2. E. Harikumar, T. Jurić and S. Meljanac, "*Geodesic equation in κ-Minkowski spacetime*," Phys. Rev. D **86** (2012) 045002 [arXiv:1203.1564 [hep-th]].

3. T. Jurić, S. Meljanac and R. Štrajn, "*Differential forms and κ-Minkowski spacetime from extended twist*," Eur. Phys. J. C **73** (2013) 2472 [arXiv:1211.6612 [hep-th]].

4. T. Jurić, S. Meljanac and R. Strajn, "*κ-Poincaré-Hopf algebra and Hopf algebroid structure of phase space from twist*," Phys. Lett. A **377** (2013) 2472 [arXiv:1303.0994 [hep-th]].

5. T. Jurić, S. Meljanac and R. Strajn, "*Twists, realizations and Hopf algebroid structure of kappa-deformed phase space*," Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 5, 1450022 [arXiv:1305.3088 [hep-th]].

6. T. Jurić, S. Meljanac and R. Strajn, "*Universal κ-Poincaré covariant differential calculus over κ-Minkowski space*," Int. J. Mod. Phys. A **29** (2014) 1450121 [arXiv:1312.2751 [hep-th]].

7. K. S. Gupta, E. Harikumar, T. Juric, S. Meljanac and A. Samsarov, "*Effects of Noncommutativity on the Black Hole Entropy*," Adv. High Energy Phys. Vol. 2014 (2014), Article ID 139172, arXiv:1312.5100 [hep-th]

8. T. Juric, D. Kovacevic and S. Meljanac, "*κ-deformed phase space, Hopf algebroid and twisting*," SIGMA 10 (2014), 106, 18, arXiv:1402.0397 [math-ph] (SIGMA 2014)

Schools and conferences

- „*Sarajevo School of High Energy Physics*", May 2011, Sarajevo, BiH
- „*The BS2011 School – Cosmology and Particle Physics Beyond the Standard Models*", Donji Milanovac, Srbija, August 2011
- „*Supersymmetry for toddlers ... and experimentalists*", IRB, Zagreb, December 2011
- „*2nd Mediterranean Conference on Classical and Quantum Gravity*", Veli Lošinj, June 2013
- Clay Mathematics Institute Summer School 2014; "*Periods and Motives: Feynman amplitudes in the 21st century*", ICMAT, Madrid (Spain) June 30 - July 25, 2014
- Summer School: "*Topics in Non-commutative Geometry*", HIM, Bonn, Germany, September 8-12, 2014