SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Irena Barjašić

NASLJEĐIVANJE SIMETRIJE

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Irena Barjašić

Diplomski rad

Nasljeđivanje simetrije

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2017.

Zahvaljujem se mentoru doc. dr. sc. Ivici Smoliću na vječnoj dobroj volji i spremnosti izlaženja u susret, na odgovorima na sva pitanja i pomoći pri izradi ovog rada.
Zahvaljujem se također svojim prijateljima na moralnoj podršci, te obitelji.

Sažetak

Od Galilejeve invarijantnosti Newtonove mehanike, preko baždarne simetrije Maxwellove teorije, Noetherinih teorema, Lorentzove invarijantnosti specijalne teorije relativnosti, principa ekvivalentnosti opće teorije relativnosti prema baždarnim simetrijama novih teorija unifikacije, simetrije igraju centralnu ulogu u istraživanju prirode. U ovom radu osvrnut ćemo se na međudjelovanje simetrija prostorvremena te simetrija baždarnih polja i polja materije u gravitacijskim teorijama. Nakon matematičkog uvoda u simetrije, sustavno ćemo izložiti dosadašnje znanje o nasljeđivanju simetrija skalarnih i linearnih elektromagnetskih polja, a zatim prikazati i najnovije rezultate za nelinearna elektromagnetska polja. Sve pokazano stavit ćemo u kontekst ”no hair” teorema crnih rupa te elektromagnetskih potencijala, gdje se nasljeđivanje simetrije zahtjeva u pretpostavkama. Na kraju ćemo navesti neka rješenja koja lome nasljeđivanje simetrije kako bismo naglasili važnost klasifikacije uvjeta pod kojim simetrija nije nužno nasljeđena.
Ključne riječi: simetrije, invarijantnost, prostorvrijeme, polja, nasljeđivanje

Symmetry Inheritance

Abstract

From the Galilean invariance of Newton's mechanics, through gauge symmetries of Maxwell's theory, Noether's theorems, Lorentz's invariance of special relativity, the principle of equivalence of general relativity, to gauge symmetries of the new unification theories, symmetries have played a central role in the research of nature. In this dissertation we will turn our attention to the interaction of spacetime symmetries and gauge or matter field symmetries in gravitational theories. After a mathematical introduction to symmetries, we will systematically present the sofar known results on scalar and linear electromagnetic fields symmetry inheritance, and show the latest progress made for the nonlinear electromagnetic fields. Everything shown will be put in context with no hair theorems for black holes and electromagnetic scalar potentials, where the inheritance is implicitly assumed. Finally, we will specify some solutions which do not inherit symmetries, to state the importance of making a classification of symmetry-breaking solutions.

Keywords: symmetries, invariance, spacetime, fields, inheritance

Sadržaj

1 Uvod

Od samih začetaka fizike simetrije igraju značajnu ulogu u fizikalnim teorijama; već su stari Grci bili fascinirani simetrijama objekata te ih pokušavali preslikati u strukturu prirode, Kepler je pomoću simetrije opisivao kretanja planeta, a Newton je Galilejevu invarijantnost uključio u svoje zakone mehanike. Također je i Maxwell u svojim jednadžbama ujedinio Lorentzovu te baždarnu invarijantnost.

Unatoč tome, pristup u kojem se simetrije promatraju kao primarno svojstvo prirode iz kojeg potječu dinamički zakoni, prihvaćen je tek u 20. stoljeću, kad je Einstein iskoristio simetriju unutar Maxwellovih jednadžbi te simetriju prostorvremena kako bi formirao specijalnu teoriju relativnosti. Deset godina kasnije principom ekvivalencije – invarijantnošću zakona prirode na lokalne promjene koordinata – od specijalne napravio je opću relativnost. Upravo tih godina u svoj razvoj krenula je i kvantna mehanika, u kojoj su principi simetrije još više pokazali svoju fundamentalnu ulogu.

U klasičnoj mehanici simetriju možemo najlakše uočiti preko Hamiltonovog principa akcije. On se sastoji od toga da akciju

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L[x(t), \dot{x}(t)] \tag{1.1}$$

variramo između krajnjih točaka t_1 i t_2 kako bismo dobili ekstremalnu vrijednost koja onda u sebi sadržava jednadžbe gibanja. Transformaciju $x(t) \to \mathscr{R}[x(t)]$ koja ostavlja akciju nepromijenjenom nazivamo simetrijom klasičnog sustava. Budući da slijedi da su jednadžbe gibanja također invarijantne na transformaciju, možemo se poslužiti simetrijom prilikom izvođenja novih rješenja nekog sustava.

Još značajniji trag simetrije u prirodi je postojanje zakona očuvanja. Prva koja je otkrila poveznicu između globalne kontinuirane simetrije i očuvanosti neke veličine bila je Emmy Noether 1918. U svom poznatom teoremu pokazala je da iz invarijantnosti zakona fizike na prostorne transformacije slijedi očuvanost količine gibanja, iz invarijantnosti na rotaciju očuvanost kutne količine gibanja, a iz invarijantnosti na vremenske translacije očuvanje energije. Ključno svojstvo simetrije koja čuva neku veličinu je kontinuiranost, diskretne simetrije (vremenska inverzija ili prostorna refleksija) ne impliciraju nikakve zakone očuvanja.

Otkrićem kvantne teorije potreba za pozivanjem na principe invarijantnosti pokazala se neizbježnom. Stanje nekog sustava opisano valnom funkcijom $|\Psi\rangle$ u Hilbertovom prostoru nakon djelovanja linearnog operatora transformacije simetrije R prebačeno je u novo stanje $R|\Psi\rangle$, a zbog principa superpozicije dopušteno stanje je i njihova linearna kombinacija. Superpozicijom svih stanja povezanih rotacijom dobit ćemo stanje $|\Phi\rangle = \sum_R R|\Psi\rangle$ koje je rotacijski invarijantno, singletna reprezentacija grupe rotacija. Jedan primjer takvog stanje je osnovno stanje atoma vodika.

Novi oblik simetrije koji se pokazao ključan u kvantnoj mehanici, dotad nepoznat u klasičnoj fizici, bila je zamjena identičnih čestica, koja je riješila Gibbsov paradoks u statističkoj fizici. Ovisno o tome mijenja li valna funkcija čestice prilikom zamjenje predznak ili ne, elementarne čestice klasificirane su kao fermioni ili kao bozoni, čija je kvantna statistika međusobno razlika te im predviđa različito ponašanje.

Osim globalnih simetrija, koje opisuju invarijantnost različitih fizikalnih situacija, spomenimo i baždarne simetrije, čijom se primjenom mijenja samo opis fizikalne situacije, ali ne i cijela situacija. Baždarne simetrije su se prvo pojavile u Maxwellovoj elektrodinamici uvođenjem vektorskog potencijala A_μ, nakon transformacije $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\phi(x)$ magnetsko i električno polje se ne mijenjaju te baždarno invarijantni vektorski potencijal u početku nije shvaćan kao fizikalna veličina. Uvođenjem baždarnih teorija u fundamentalnu fiziku zadnjih godina takav stav se promijenio, baždarna invarijantnost povlači postojanje baždarnih bozona povezanih s vektorskim potencijalom, koji prenose fundamentalne sile. Time su lokalne baždarne simetrije prevladale u modernoj fizici; sve globalne simetrije su se pokazale ili slomljenima (parnost, vremenski obrat i simetrija naboja) ili približnima (simetrija nuklearne sile).

Iako se simetrija provlači kroz prirodne zakone, većina fizikalnih pojava pokazatelj je loma simetrije. Simetrični zakoni fizike spontano se lome pod asimetričnim početnim uvjetima; Newtonove jednadžbe su rotacijski invarijantne, no određena orbita planeta odabrana nekim početnim uvjetima nije. Suprotno tome, u kvantnoj mehanici osnovno stanje čestice superpozicija je svih klasično dopuštenih stanja te je time translacijski invarijantno. U sustavima s beskonačno stupnjeva slobode moguća je i asimetrična realizacija osnovnog stanja; što se manifestira kod kristala, magnetizma, supravodljivosti itd.

Iz svega dosad navedenog jasno je da simetrije igraju bitnu ulogu u opisu prirode, postavlja se samo pitanje koji je razlog što u prirodi opažamo simetrije. Istraživanjem pojava na višim energijama, sve više simetrije izlazi na vidjelo, upravo one koja je na nižim energijama slomljena ili skrivena. Dakle, priroda na fundamentalnoj razini teži simetriji, te je upravo to smjernica u budućim istraživanjima fundamentalnih zakona fizike. [1]

U ovom diplomskom radu fokus ćemo usmjeriti prema simetrijama u gravitaciji te poveznici između simetrija prostorvremena i simetrija polja unutar njih.

2 Simetrije

Simetrija je transformacija koja čuva neku strukturu, a skup svih transformacija neke strukture čini grupu. Ako za strukturu biramo prostorvrijeme, grupa koja nam je potrebna u njegovom proučavanju je Liejeva grupa transformacija. Ona je ujedno i diferencijabilna mnogostrukost na kojoj su grupne operacije glatke te nam je upravo zbog toga od interesa (Dodatak A).

Počnimo s općenitom definicijom prostora kao skupa X s funkcijom $F : X \to Y$ na skup Y definiran na X [2].

Definicija 2.1. *Kažemo da je funkcija F invarijantna na transformaciju $g : X \to X$ ako vrijedi:*

$$F(x) = F(gx), \quad \textit{za sve} \quad x \in X \tag{2.1}$$

gdje je $gx \equiv g(x)$ lijevo djelovanje grupe G na X.

Kako bismo mogli definirati djelovanje grupe na neki skup, prisjetimo se prvo pojma homomorfizma.

Definicija 2.2. *Neka su $(G, *)$ i $(H, \cdot)$ grupe. Preslikavanje $\phi : G \to H$ je homomorfizam ako za svaki $a, b \in G$ vrijedi:*

$$\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b) \tag{2.2}$$

Definirajmo još grupu na skupu bijekcija s operacijom kompozicije:

Teorem 1. *Ako je X neprazan skup, a $Bij(X)$ skup svih bijekcija $b : X \to X$, onda je $(Bij(X), \circ)$ grupa.*

Djelovanje elemenata grupe na neki skup sad je moguće izreći kao:

Definicija 2.3. *Neka je X neprazan skup i $(G, *)$ grupa. Akcija grupe G na skup X je homomorfizam $\alpha : (G, *) \to ((Bij(X)), \circ)$*

Djelovanje grupe na elemente $g_1, g_2 \in G$ možemo definirati slijeva:

$$\phi_L(g_1 g_2) = \phi_L(g_1) \circ \phi_L(g_2) \tag{2.3}$$

ili zdesna:

$$\phi_R(g_1 g_2) = \phi_R(g_2) \circ \phi_R(g_1) \tag{2.4}$$

no budući da je moguće za svaku akciju zdesna definirati jedinstvenu akciju slijeva, uvijek biramo da je djelovanje grupe definirano slijeva. Vratimo se sad na Definiciju 2.1, iz koje slijedi teorem [2]:

Teorem 2. *Skup svih transformacija od X na koje je F invarijantna čine grupu.*

Dokaz. Pokažimo da svojstva transformacija od X zadovoljavaju grupna svojstva:
1) zatvorenost:

Ako je F invarijantna na g i h, onda po Definiciji 2.1 znamo $F(x) = F(hx)$ za sve $x \in X$ i $F(y) = F(gy)$ za sve $y \in X$. Funkcija F također će biti invarijantna na kompoziciju djelovanja $gh = g \circ h$; $F(ghx) = F(g(hx)) = F(hx) = F(x)$.
2) identitet:

Očito vrijedi $F(x) = F(id_x(x))$,pa je F invarijantna na identitet id_x
3) inverz:

Za transformaciju g postoji inverz g^{-1} takav da $gg^{-1} = id_x$. Funkcija F je invarijantna na g^{-1} ako je i na g:

$$F(g^{-1}x) = F(g(g^{-1}x)) = F(x) \tag{2.5}$$

□

Grupa transformacija na koju je skup funkcija $\mathscr{F}$ na X invarijantnan nazivamo grupa simetrije.
Za grupu transformacija odabrat ćemo ϕ_t 1-parametarsku grupu difeomorfizama $\phi_t : \mathbb{R} \times M \to M$. Provjerimo da zadovoljava svojstva iz Teorema 1. [32]:

1) za svaki $t \in \mathbb{R}$ preslikavanje $\phi_t : M \to M$ je difeomorfizam

2) za svaki par $s, t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$

3)$\phi_0 = id_M$

Pomoću 1-parametarske grupe difeomorfizama možemo definirati Liejevu derivaciju kao mjeru promjene neke tenzorske veličine nakon infinitezimalne translacije djelovanjem te grupe:

$$\pounds_X T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} \equiv \lim_{t \to 0} \frac{\phi^*_{-t} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} - T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}}{t} \tag{2.6}$$

X^a je vektorsko polje pridruženo ϕ_t preko vektora $X_p \in T_pM$, tangentnih na orbitu ϕ_t. Ako za funkciju F na prostorvremenu odaberemo metriku g_{ab} transformacija koja čuva duljinu zvat će se izometrija.

Pogledajmo sve dosad navedeno raspisano u koordinatnom zapisu te iz invarijantnosti tenzora metrike na transformacije izvedimo Killingovu jednadžbu [3].

Možemo reći da je metrika invarijantna na transformaciju $x^a \to x'^a$ ako vrijedi

$$g'_{ab}(y) = g_{ab}(y) \quad \text{za sve} \quad y^c \tag{2.7}$$

to jest, ako je transformirana metrika $g'_{ab}(x')$ jednaka funkcija argumenta x'^c kao i originalna metrika $g_{ab}(x)$ argumenta x^c. Napišimo prvo pravilo transformacije kovarijantnog tenzora g_{ab}:

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x' d}{\partial x^b} g'_{cd}(x') \tag{2.8}$$

Iskoristimo li (2.7) imamo:

$$g_{ab}(x) = \frac{\partial x'^c}{\partial x^a} \frac{\partial x'^d}{\partial x^b} g_{cd}(x') \tag{2.9}$$

Promatrat ćemo sve veličine u (2.9) kao funkcije od x kao $x'^a = x'^a(x)$ te pojednostavniti situaciju tako da uzmemo u obzir poseban slučaj infinitezimalne koordinatne transformacije:

$$x^a \to x'^a = x^a + \epsilon X^a(x) \tag{2.10}$$

gdje je ϵ mali, a X^a vektorsko polje. Deriviranjem (2.10) po x^b dobijemo:

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} = \delta^a{}_b + \epsilon \partial_b X^a \tag{2.11}$$

Ako uvrstimo (2.11) u (2.9) i razvijemo metriku u Taylorov red, imamo:

$$g_{ab}(x) = (\delta^c_a + \epsilon \partial_a X^c)(\delta^d_b + \epsilon \partial_b X^d) g_{cd}(x^e + \epsilon X^e) \tag{2.12}$$
$$= (\delta^c_a + \epsilon \partial_a X^c)(\delta^d_b + \epsilon \partial_b X^d)[g_{cd}(x) + \epsilon X^e \partial_e g_{cd}(x) + ...] \tag{2.13}$$
$$= g_{ab}(x) + \epsilon[g_{ad} \partial_b X^d + g_{bd} \partial_a X^d + X^e \partial_e g_{ab}] + O(\epsilon^2) \tag{2.14}$$

Zanemarimo li članove uz ϵ^2 vidimo da su prvi članovi s obje strane jednaki te da zagrada uz ϵ mora iščeznuti. Usporedimo tu zagradu sa:

$$\pounds_X T^{a...}{}_{b...} = X^c \partial_c T^{a...}{}_{b...} - T^{c...}{}_{b...} \partial_c X^a - ... + T^{a...}{}_{c...} \partial_b X^c + ... \tag{2.15}$$

te vidimo da je ona zapravo Liejeva derivacija metrike:

$$\pounds_X g_{ab} = X^c \partial_c g_{ab} + g_{ad} \partial_b X^d + g_{be} \partial_a X^e \tag{2.16}$$

Iskoristimo činjenicu da unutar Liejeve derivacije možemo zamijeniti obične derivacije kovarijantnima:

$$\begin{aligned} \pounds_X g_{ab} =& X^c \nabla_c g_{ab} + g_{ad} \nabla_b X^d + g_{be} \nabla_a X^e && (2.17) \\ =& X^c (\partial_c g_{ab} - \Gamma^f_{ca} g_{fb} - \Gamma^h_{cb} g_{ah}) \\ & + g_{ad} (\partial_b X^d + \Gamma^d_{bi} X^i) + g_{be} (\partial_a X^e + \Gamma^e_{aj} X^j) && (2.18) \\ =& X^c \partial_c g_{ab} + g_{ad} \partial_b X^d + g_{be} \partial_a X^e && (2.19) \end{aligned}$$

gdje se u drugom redu članovi uz Christoffelove simbole krate jer su im jedini indeksi koji se razlikuju slijepi.

Budući da smo za afinu koneksiju izabrali Christoffelov simbol, imamo:

$$\nabla_c g_{ab} \equiv 0 \tag{2.20}$$

te metrikom spustimo indekse vektorima pa konačno dobijemo uvjet za infinitezimalnu izometriju:

$$\pounds_X g_{ab} = \nabla_b X_a + \nabla_a X_b = 0 \tag{2.21}$$

Dobili smo Killingovu jednadžbu čija su rješenja Killingova vektorska polja X^a koja generiraju infinitezimalnu izometriju, drugim riječima, povlačenjem metrike po vektorskom polju X^a ona se ne mijenja.

Budući da je moguće bilo koji konačnu kontinuiranu transformaciju prointegrirati po beskonačnom nizu infinitezimalnih transformacija, dovoljno je promatrati samo infinitezimalne transformacije.

Daljnjim diferenciranjem dobit ćemo uvjete: [4]

$$\pounds_\xi R^a{}_{bcd} = 0 \tag{2.22}$$

$$\pounds_\xi R = 0 \tag{2.23}$$

$$\pounds_\xi (\nabla_{a_1} ... \nabla_{a_N} R) = 0, \quad N = 1, 2, ... \tag{2.24}$$

3 Nasljeđivanje simetrije

Prisjetimo li se nekih primjera baždarnih polja ili polja materije navedenih u klasičnoj literaturi, primjetit ćemo raznoliku ovisnost o koordinatama koja ne slijedi nikakvo pravilo. Budući da je takvim primjerima podloga prostorvrijeme Minkowskog koje je maksimalno simetrično, i bez računa vidimo da nema govora o nasljeđivanju simetrija. No, uvažimo li interakciju tih polja s prostorvremenom kojom ga modeliraju, pitanje nasljeđivanja simetrija s prostor vremena na neko polje slijedi intuitivno.

Uzmimo prostorvrijeme (M, g_{ab}, Π) koje se sastoji od Hausdorffove parakompaktne povezane D-dimenzionalne mnogostrukosti M, metrike g_{ab} Lorentzovog tipa i polja Π. Pretpostavimo da vrijedi (2.23), pa ako iz toga slijedi:

$$\pounds_\xi \Pi = 0 \tag{3.1}$$

kažemo da polje Π nasljeđuje tu simetriju. Nasljeđivanje simetrije ne slijedi nužno, već ovisi o prirodi polja i vrsti simetije. [6]

U ovom radu dotaknut ćemo se nasljeđivanja simetrije realnih i kompleksnih skalarnih polja te elektromagnetskog polja. Značaj samog nasljeđivanja za skalarna polja vidjet ćemo kod "no hair" teorema crnih rupa, koji nam govore da stacionarne konfiguracije konačnog stanja crnih rupa ne mogu imati nikakve parametre osim mase, naboja i angularnog momenta. Dakle, sva polja (kosa) u okolini iščezavaju. No, dokaz o nepostojanju kose crnih rupa slijedi samo uz prešutnu pretpostavku da skalarno polje koje promatramo nasljeđuje određenu simetriju prostorvremena. Kao protuprimjer, nedavno je pronađena crna rupa koja dopušta kompleksno skalarno polje u svojoj okolini upravo zbog nenasljeđivanja simetrije tog polja [5]. Stoga je potrebno provjeriti pod kojim uvjetima možemo stvarno iznijeti tu pretpostavku.

Kod nasljeđivanja simetrija elektromagnetskog polja poznat je rezultat:

$$\pounds_\xi F_{ab} = f {*F_{ab}} \tag{3.2}$$

gdje je f konstanta ako F_{ab} nije svjetlosnog tipa. Za F_{ab} svjetlosnog tipa s ponovljenim glavnim svjetlosnim smjerom k^a, f je određena s $f_{,[a}k_{b]} = 0$. Pretpostavka o nasljeđivanju simetrija elektromagnetskog polja koristi se u raznim teoremima jedinstvenosti crnih rupa [7], npr. jedinstvenost Reissner-Nordströmovog rješenja, koju su pokazali Israel [8] i Müller zum Hagen [9]. Carter [10] je prilikom proučavanja svojstava nabijenih rotirajućih crnih rupa također unaprijed pretpostavio postojanje dvaju Killingovih vektorskih polja koja čuvaju elektromagnetski tenzor. Zato je potrebno naglasiti da postoje i brojni primjeri polja koja ne nasljeđuju simetriju [4], jedan od kojih ćemo navesti u zadnjem poglavlju [30]. Budući da (2.26) vrijedi samo u $D = 4$ jer su jedino tamo F_{ab} i $*F_{ab}$ obje 2-forme, novija istraživanja su orijentirana prema $D \neq 4$ te prema nelinearnim elektromagnetskim poljima.

3.1 Skalarna polja

Kako bismo promotrili nasljeđivanje simetrija prostorvremena na skalarno polje, odredimo prvo klasu prostorvremena na koju ćemo se orijentirati u našim izvodima. Pretpostavit ćemo da je gravitacijska jednadžba oblika:

$$E_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{3.3}$$

gdje je E_{ab} polinom Riemannovih tenzora, koji može sadržavati kovarijantne derivacije i Levi-Civita tenzor, a T_{ab} tenzor momenta i energije polja materije. Pretpostavit ćemo da postoji barem jedan Killingov vektor ξ^a norme $N = \xi^a \xi_a$ te uvesti pokratu za Liejevu derivaciju $\pounds_\xi \psi \equiv \dot{\psi}$. Djelujemo li Liejevom derivacijom na (3.3) i iskoristimo (2.25), $\pounds_\xi \epsilon_{abc\dots} = 0$ i $\pounds_\xi \nabla_a = \nabla_a \pounds_\xi$ s lijeve strane ćemo dobiti nulu i vrijedit će:

$$\pounds_\xi T_{ab} = 0 \tag{3.4}$$

Primjenom dobivene jednadžbe na tenzore energije i momenta skalarnih polja dobit ćemo informacije o nasljeđivanju simetrije tih polja.

3.1.1 Realno skalarno polje

Navedimo prvo gustoću lagranžijana minimalno vezanog realnog skalarnog polja s općenitim potencijalom $V(\psi)$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\nabla^c \psi \nabla_c \psi + V(\psi)) \tag{3.5}$$

Pripadajući tenzor momenta i energije T_{ab} možemo izračunati ako akciju za polje:

$$S_\psi = \int d^D \sqrt{-g}\mathscr{L} \tag{3.6}$$

variramo po metrici:

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\psi}{\delta g^{ab}} = \nabla_a\psi\nabla_b\psi - \frac{1}{2}\left(\nabla_c\psi\nabla^c\psi + V(\psi)\right)g_{ab} \tag{3.7}$$

Kako bismo došli do izraza za $\pounds_\xi\psi$, izračunat ćemo prvo T i $T_{ab}T^{ab}$:

$$T = T_{ab}g^{ab} = \frac{2-D}{2}\nabla_a\psi\nabla^a\psi - \frac{D}{2}V(\psi) \tag{3.8}$$

$$T_{ab}T^{ab} = \frac{D}{4}(\nabla_a\psi\nabla^a\psi)^2 + \frac{D-2}{2}\nabla_a\psi\nabla^a\psi V(\psi) + \frac{D}{4}V(\psi)^2 \tag{3.9}$$

te preko njih izraziti $V(\psi)$:

$$V(\psi) = -\frac{T}{D} \pm \frac{D-2}{2D}\sqrt{\frac{DT_{ab}T^{ab} - T^2}{D-1}} \tag{3.10}$$

Djelujemo li sad Liejevom derivacijom na (3.10) i iskoristimo (3.4) dobit ćemo:

$$0 = \pounds_\xi V(\psi) = \frac{dV(\psi)}{d\psi}\pounds_\xi\psi \tag{3.11}$$

Možemo zaključiti da je simetrija naslijeđena u svim točkama gdje vrijedi $V'(\psi) \neq 0$.

Za slučaj $V'(\psi) = 0$ moramo se poslužiti drukčijim pristupom; uvrstimo (3.8) u (3.7):

$$T_{ab} = \nabla_a\psi\nabla_b\psi + \frac{T+2V}{D-2}g_{ab} \tag{3.12}$$

te kontrahiramo s ξ^b i iskoristimo definiciju $\pounds_\xi\psi = \xi^b\nabla_b\psi$:

$$T_{ab}\xi^b = \nabla_a\pounds_\xi\psi + \frac{T+2V}{D-2}\xi_a \tag{3.13}$$

Budući da vrijedi $\pounds_\xi V(\psi) = \xi^a\partial_a V(\psi) = \xi^a V'(\psi)\partial_a\psi = 0$, Liejevom derivacijom (3.13) dobijemo:

$$0 = \pounds_\xi(T_{ab}\xi^b) = (\pounds_\xi\pounds_\xi\psi) + (\pounds_\xi\psi)\nabla_a(\pounds_\xi\psi) \tag{3.14}$$

a još jednom kontrakcijom s ξ^a slijedi:

$$0 = \xi^a \pounds_\xi (T_{ab}\xi^b) = \pounds_\xi ((\pounds_\xi \psi)^2) \tag{3.15}$$

Dakle, vidimo da je $\pounds_\xi \psi$ konstantno na orbitama od ξ^a, ako konstantu nazovemo c, vrijedi $\pounds_\xi \psi = c$ uz $\pounds_\xi c = 0$. Uvrštavanjem u (3.14) slijedi $c\nabla_a c = 0$, tako da, ako pretpostavimo $c \neq 0$, mora biti $\nabla_a c = 0$ u cijelom prostorvremenu. Ako je $\nabla_a c$ kontinuirana funkcija na nekom skupu O_ξ, invarijantnom na translacije po ξ^a, c mora biti konstanta na O_ξ. [6]

3.1.2 Kompleksno skalarno polje

Promotrimo sad pod kojim uvjetima je simetrija naslijeđena ako je skalarno polje ψ kompleksno. Raspisat ćemo jednadžbe preko dvije parametrizacije; kartezijeve $\psi = \rho + i\sigma$ i polarne $\psi = Ae^{i\alpha}$ te vidjeti što o naslijeđivanju možemo iz koje zaključiti. Naslijeđivanje ćemo smatrati potpunim ako bude vrijedilo $\dot{\rho} = \dot{\sigma} = 0$ ili $\dot{A} = \dot{\alpha} = 0$ ili djelomičnim ako makar jedna od navedenih funkcija iščezne.
Gustoća lagranžijana kompleksnog polja glasi:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\left(\nabla^a \psi (\nabla_a \psi)^* + V(\psi^* \psi)\right) \tag{3.16}$$

te korištenjem formule (3.7) dobijemo tenzor momenta i energije:

$$T_{ab} = \nabla_{(a}\psi \nabla_{b)}\psi^* - \frac{1}{2}\left(\nabla_c \psi \nabla^c \psi^* + V(\psi^* \psi)\right) g_{ab} \tag{3.17}$$

Budući da izrazi za $T_{ab}T^{ab}$ i T ispadnu komplicirani i nije moguće izraziti $V(\psi^*\psi)$ preko njih kao u prvom pristupu za realno skalarno polje, poslužit ćemo se drugim pristupom i pojednostavniti izraz za T_{ab} pomoću T. Polje ψ ćemo uvrstiti i u polarnom i kartezijevom rastavu:

$$T_{ab} = \nabla_a \rho \nabla_b \rho + \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma + \frac{T+V}{D-2} g_{ab} \tag{3.18}$$

$$= \nabla_a A \nabla_b A + A^2 \nabla_a \alpha \nabla_b \alpha + \frac{T+V}{D-2} g_{ab} \tag{3.19}$$

Kontrakcijom jednadžbe (3.4) Killingovim vektorom ξ^a zbog $\pounds_\xi \xi = [\xi, \xi] = 0$ će slijediti:

$$\pounds_\xi (T_{ab}\xi^a) = 0 \tag{3.20}$$

Ovu jednadžbu rastavit ćemo na dvije, projekciju uz ξ^a:

$$0 = \xi^b \pounds_\xi (T_a b \xi^a) = \pounds_\xi (T_{ab}\xi^a \xi^b) \tag{3.21}$$

te dio okomit na ξ^a:

$$0 = \xi_{[a} \pounds_\xi (T_{b]c}\xi^c) = \pounds_\xi (\xi_{[a} T_{b]c} \xi^c) \tag{3.22}$$

Kartezijeva parametrizacija

Odaberimo prvo jednadžbu (3.18) u kartezijevom raspisu. Kontrahiramo li tenzor momenta i energije vektorima ξ^a i ξ^b dobit ćemo:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = \dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{T+V}{D-2} N \tag{3.23}$$

pa korištenjem (3.21) imamo:

$$\pounds_\xi \left(\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{N}{D-2} V \right) = 0 \tag{3.24}$$

Dakle, na orbitama ξ^a slijedi:

$$\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{N}{D-2} V = \nu \tag{3.25}$$

gdje je ν funkcija zadana s $\pounds_\xi \nu = 0$. Dodatni uvjet koji ćemo morati nametnuti kako bismo dobili predznak od ν je jaki uvjet energije [11] koji u $D = 4$ glasi:

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab} \right) v^a v^b \geq 0 \tag{3.26}$$

i vrijedi za neki vektor v^a vremenskog tipa. Stoga na području gdje je ξ^a vremenskog tipa, koristeći $v^a = \xi^a$ možemo zaključiti $\nu \geq 0$.

Ograničimo se sad na maseni potencijal s masom skalarnog polja μ:

$$V = V_{mass} \equiv \mu^2 \psi^* \psi = \mu^2(\rho^2 + \sigma^2) \tag{3.27}$$

i $D = 4$ kako bi smo dobili konkretna rješenja. Uvrštavanjem u (3.25) dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$\dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{1}{2} N \mu^2 (\rho^2 + \sigma^2) = \nu \tag{3.28}$$

Pretpostavit ćemo da je simetrija djelomično naslijeđena, npr. $\dot{\sigma} = 0$ na O_ξ (analogno bi bilo da smo pretpostavili $\dot{\rho} = 0$), te uvesti pokrate:

$$\dot{\rho}^2 + \kappa \rho^2 = \lambda, \quad \kappa = \frac{1}{2} N \mu^2, \quad \lambda = \nu - \kappa \sigma^2 \tag{3.29}$$

za koje vrijedi $\pounds_\xi \kappa = \pounds_\xi \lambda = 0$. Sva rješenja ove linearne jednadžbe možemo pronaći u Dodatku u [6], podijeljena su na linearna (tip I), oscilatorna (tip II) i eksponencijalna (tip III). Jedino od tih rješenja, koje je omeđeno ili periodičko, a ne nasljeđuje simetriju je tip II za $\kappa > 0$ i $\lambda > 0$:

$$\rho = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} \sin\big(\sqrt{\kappa}(\zeta - \zeta_0)\big) \tag{3.30}$$

Raspišemo li (3.20) i uvrstimo (3.30) slijedi:

$$(c^2 - s^2)\kappa \nabla_a \lambda + s^2 \lambda \nabla_a \kappa + 2sc\lambda\sqrt{\kappa}(-2\sqrt{\kappa}\nabla_a(\sqrt{\kappa}(\zeta - \zeta_0)) + \mu^2 \xi) = 0 \tag{3.31}$$

gdje su $s \equiv \sin(\sqrt{\kappa}(\zeta - \zeta_0))$ i $c \equiv \cos(\sqrt{\kappa}(\zeta - \zeta_0))$. Kako ne bismo morali rješavati ovu jednadžbu poslužit ćemo se slijedećom logikom; u točkama gdje je $c = 1$ i $s = 0$ ili $c = 0$ i $s = 1$ vrijedi:

$$\kappa \nabla_a \lambda = 0 \quad \text{i} \quad \lambda \nabla_a \kappa = 0 \tag{3.32}$$

Zbog $\lambda \neq 0 \neq \kappa$, bar u jednoj točki vrijedit će $\nabla_a \lambda = 0$ i $\nabla_a \kappa = 0$, a zbog konstantnosti λ i κ te komutacije Liejeve i kovarijantne derivacije tvrdnju možemo proširiti iz te točke na orbite ξ^a te konačno na O_ξ. Predznak konstante $\kappa > 0$ za rješenje tipa II uz $N = 2\kappa/\mu^2$ ukazuje da u slučaju slomljene simetrije ξ^a mora biti vektor vremenskog tipa konstantne norme. Također iz (3.22)

$$\xi_{[a}\nabla_{b]}(\zeta - \zeta_0) = 0 \tag{3.33}$$

vidimo da ξ^a mora biti vektorsko polje ortogonalno na familiju hiperploha. Za linearno rješenje s $\lambda > 0$ (tip I) može se izvesti analogan zaključak.

Poopćimo li analizu na $\dot{\rho} \neq 0$ i $\dot{\sigma} \neq 0$, moramo upotrijebiti neke druge pretpostavke, npr. $\sigma = b\rho$ s $\dot{b} = 0$ kako bi olakšali rješavanje jednadžbe:

$$\dot{\rho}^2 + \kappa\rho^2 = \frac{\nu}{1+b^2} \tag{3.34}$$

gdje je $\kappa = \frac{1}{2}N\mu^2$. Budući da je b svugdje konstanta, tenzor momenta i energije (3.17) možemo pisati u obliku:

$$T_{ab} = (1+b^2)\nabla_a\rho\nabla_b\rho - \frac{1}{2}(1+b^2)(\nabla_c\rho\nabla^c\rho + \mu^2\rho^2)g_{ab} \tag{3.35}$$

za koji vidimo da je ekvivalentan tenzoru momenta i energije (3.7) za realno skalarno polje:

$$\psi = \rho\sqrt{1+b^2} \tag{3.36}$$

Dakle, možemo poslužiti zaključcima iz potpoglavlja 3.1.1, $\dot{\rho}$ i $\dot{\sigma}$ su nužno svugdje konstantni.

Polarna parametrizacija

Ponovimo priču iz kartezijeve parametrizacije, ovaj put s Liejevom derivacijom jednadžbe (3.19):

$$\pounds_\xi \left(\dot{A}^2 + A^2\dot{\alpha}^2 + \frac{N}{D-2}V(A^2) \right) = 0 \tag{3.37}$$

Ako funkciju unutar zagrada nazovemo λ, $(\pounds_\xi\lambda = 0)$ na Killingovim orbitama imat ćemo diferencijalnu jednadžbu:

$$\dot{A}^2 + A^2\dot{\alpha}^2 + \frac{N}{D-2}V(A^2) = \lambda \tag{3.38}$$

Upotrijebimo li uvjet (3.26) i argumente iz prošlog odlomka, vidjet ćemo da vrijedi

$\lambda \geq 0$ tamo gdje je ξ^a vremenskog tipa.

Pretpostavimo sad djelomično naslijeđenu simetriju $\dot{A} = 0$ na skupu O_ξ. Uvrstimo li taj uvjet u (3.38) te djelujemo na cijelu jednadžbu Liejevom derivacijom, vidjet ćemo da vrijedi $\ddot{\alpha} = 0$, tj. da je α linearna funkcija Killingovog parametra ζ. Raspišimo sad (3.20):

$$\pounds_\xi \left(\dot{A}\nabla_b A + A^2\dot{\alpha}\nabla_b\alpha + \frac{T+V}{D-2}\xi^b \right) = 0 \tag{3.39}$$

Iz zadanih uvjeta očito je da će prvi i treći član dati nulu, jedino će preostati:

$$A^2\dot{\alpha}\nabla_b\dot{\alpha} = 0 \tag{3.40}$$

Za polje ψ koje ne iščezava ($A \neq 0$) na O_ξ možemo zaključiti da mu je derivacija faze $\dot{\alpha}$ konstantna unutar O_ξ. Poznat primjer ovakvog rješenja koje ne nasljeđuje simetriju su skalarna polja oko bozonskih zvijezda.

U polarnoj parametrizaciji A i α ne pojavljuju se simetrično u jednadžbi (3.38) pa moramo odvojeno promotriti slučaj $\dot{\alpha} = 0$ na skupu O_ξ, uz pretpostavke $D = 4$ i $V = \mu^2(\rho^2 + \sigma^2)$. Uz iste pokrate kao za kartezijevu parametrizaciju (3.29), iz (3.38) dobivamo i isti tip diferencijalne jednadžbe:

$$\dot{A}^2 + \kappa A^2 = \lambda, \quad \kappa = \frac{1}{2}N\mu^2, \quad \lambda = \nu - \kappa\sigma^2 \tag{3.41}$$

Rješenje tipa I, s konstantnom fazom α i amplitudom A, poznato je već kao Wymanovo rješenje, a dotaknut ćemo ga se više u posljednjem poglavlju. Osim njega, kao i kod kartezijeve parametrizacije, simetriju lomi i rješenje tipa II:

$$A = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} \sin\big(\sqrt{\kappa}(\zeta - \zeta_0)\big) \tag{3.42}$$

uz konstantne $\kappa > 0$ i $\lambda > 0$ na nekom skupu O_ξ. Argumentima iz kartezijeve parametrizacije pokazujemo da rješenje tipa II zahtjeva da je ξ^a Killingov vektor prostornog tipa koji je ortogonalan na familiju hiperploha te konstantne norme na O_ξ.

3.1.3 Stacionarni, statični i osnosimetrični slučajevi

Pogledajmo konkretne primjere izometrija prostorvremena koje se često koriste u istraživanjima; stacionarno, statično i osnosimetrično prostorvrijeme. Za stacionarno prostorvrijeme Killingov vektor označit ćemo s $k^a = (\partial/\partial t)^a$, a za osnosimetrično s $m^a = (\partial/\partial\varphi)^a$. Pretpostavit ćemo da m^a ima kompaktne orbite te da je prostornog tipa (kako ne bi došlo do toga da imamo zatvorene krivulje vremenskog tipa). Vektor k^a se može mijenjati iz vremenskog tipa u prostorni u slučaju prisustva ergopodručja. Naglasimo da je statično prostorvrijeme poseban slučaj stacionarnog, u kojem za vektor k^a vrijedi da je ortogonalan na familiju ploha, tj. $k_{[a}\nabla_b k_{c]}$.

Primjenit ćemo sad zaključke iz prošlog potpoglavlja na stacionarno prostorvrijeme, za pretpostavku $\pounds_k A = 0$ vidimo da povlači da je $\pounds_k \alpha$ konstantno. U slučaju da je domena vanjskih komunikacija strogo stacionarna kao na primjer kod statičkih prostorvremena, vrijedi $k^a k_a < 0$, što znači da je λ iz (3.41) manja od nule. Znamo li da vrijedi $\pounds_k \alpha = 0$ slijedit će ili potpuno nasljeđivanje simetrije $\pounds_k A = 0$ ili dva slučaja nenasljeđivanja: rješenje tipa I s parametrom t za $\mu = 0$ ili rješenje tipa III s parametrom t za $\mu > 0$.

Za osnosimetrično prostorvrijeme $\pounds_m A = 0$ također će povlačiti da je $\pounds_m \alpha$ konstanta. Obrnuti slučaj gdje već znamo da $\pounds_m \alpha = 0$ ili će pokazati $\pounds_m A = 0$ ili ćemo imati rješenje koje ne nasljeđuje simetriju. Budući da je norma vektora $m^a m_a > 0$ to rješenje će biti tipa II za parametar φ uz $\mu > 0$ za m^a konstantne norme te ortogonalnosti na familiju hiperploha. Zbog kompaktnih orbita m^a, neomeđeno rješenje tipa I je isključeno. Analiza i za stacionarno i za osnosimetrično prostorvrijeme vrijedi jednako u kartezijevoj parametrizaciji. Također, za svako rješenje tipa II u stacionarnom osnosimetričnom prostorvrijeme vrijedi $\pounds_k A = 0$ ($\pounds_k \rho = 0$ ili $\pounds_k \sigma = 0$).

Ako je u prostorvremenu prisutna crna rupa, imamo na raspolaganju dodatni uvjet na skalarno polje. Na svakom Killingovom horizontu $H[\xi]$ vrijedi [12]:

$$R_{ab}\xi^a\xi^b \overset{H}{=} 0 \tag{3.43}$$

što uz Einsteinovu jednadžbu daje:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b \overset{H}{=} 0 \tag{3.44}$$

Tenzor momenta i energije bezmasenog realnog skalarnog polja (3.7) kontrahiran Killingovim vektorima ξ^a i ξ^b glasi:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = \dot{\psi}^2 - \left(\frac{1}{2}\nabla_c\psi\nabla^c\psi + V(\psi)\right) N \tag{3.45}$$

gdje je N norma Killingovih vektora na Killingovom horizontu jednaka nuli, pa uz (3.44) slijedi $\dot{\psi} = 0$, tj. simetrija je očuvana u prisutnosti Killingovog horizonta. Dakle, u statičnom prostorvremenu s Killingovim horizontom $H[k]$ ili u stacionarno simetričnom prostorvremenu s Killingovim horizontom $H[\xi]$ ($\xi^a = k^a + \Omega_H m^a$) slijedi $\pounds_k \psi = 0$.

Za kompleksno polje tenzor momenta i energije će izgledati kao:

$$T_{ab}\xi^a\xi^b = \dot{\rho}^2 + \dot{\sigma}^2 + \frac{T+V}{D-2}N \tag{3.46}$$

$$= \dot{A}^2 + A^2\dot{\alpha}^2 + \frac{T+V}{D-2}N \tag{3.47}$$

te iz $N = 0$ i (3.44) zaključujemo:

$$\pounds_\xi \rho \overset{H}{=} 0 \overset{H}{=} \pounds_\xi \sigma \quad \text{i} \quad \pounds_\xi A \overset{H}{=} 0 \overset{H}{=} A^2 \pounds_\xi \alpha \tag{3.48}$$

Također, ako polje ψ ne iščezava na $H[\xi]$ preko (3.48) $\pounds_\xi A = 0$ automatski povlači $\pounds_\xi \psi = 0$. U bezmasenom slučaju iz $\pounds_\xi \rho = 0$ ili $\pounds_\xi \sigma = 0$ slijedit će odmah $\pounds_\xi \psi = 0$.

Ako u stacionarnom prostorvremenu postoji rotirajuća crna rupa, postojat će i područje oko horizonta gdje za stacionarni Killingov vektor vrijedi $k^a k_a > 0$, tj. ergopodručje $\mathscr{E}$ u kojoj je k^a prostornog tipa. Dakle, zbog pozitivne norme vektora, rješenje koje ne nasljeđuje simetriju u slučaju u kojem znamo $\pounds_\xi \alpha = 0$ ($V = V_{mass}$) bit će tipa II, a ne tipa III. Za vektor k^a vrijedit će zato da mora biti ortogonalan na familjiu ploha, što po definiciji čini statično prostorvrijeme, u kojem se, po Vishveshwarinom teoremu [7], Killingov horizont $H[k]$ i površina ergopodručja poklapaju te ergopodručje ne postoji. Dakle, unutar ergopodručja uz $V = V_{mass}$ mora biti $\pounds_k \psi = 0$ ako je makar jedna Liejeva derivacija $\pounds_k \alpha$, $\pounds_k \rho$ ili $\pounds_k \sigma$ jednaka nuli.

3.2 Elektromagnetsko polje

Među prvim poljima za koja je potrebno bilo postaviti pitanje nasljeđivanja simetrije bilo je elektromagnetsko polje. Slučajevi koji ne naslijeđuju simetriju određeni su i klasificirani formulom [4]:

$$\pounds_\xi F_{ab} = f * F_{ab} \tag{3.49}$$

gdje je f konstanta za elektromagnetsko polje koje nije svjetlosnog tipa, dok je za elektromagnetsko polje svjetlosnog tipa s ponovljenim glavnim vektorom svjetlosnog smjera k^a funkcija f određena s $f_{,[a}k_{b]} = 0$. Simetrija je naslijeđena za $f = 0$.

Dokaz navedene tvrdnje za polja koja nisu svjetlosnog tipa originalno je izveden Rainichevim formalizmom [4](5.4), te je kasnije generaliziran na polja svjetlosnog tipa. Budući da su ti dokazi dosta nezgrapni, navest ćemo puno elegantniji dokaz preko formalizma spinora [13](Dodatak B).

Zapišimo prvo elektromagnetski tenzor F_{ab} kao spinor:

$$F_{ab} = F_{ABA'B'} = -F_{BAB'A'} \tag{3.50}$$

gdje smo u drugoj jednakosti zamjenom mjesta necrtanih i crtanih indeksa zasebno, naglasili njegovu antisimetričnost. Formulom:

$$\phi_{AB} \equiv \frac{1}{2} F_{ABC'}{}^{C'} = \phi_{BA} \tag{3.51}$$

definiramo spinorno polje ϕ kako bismo preko njega i simplektičke forme ϵ (B.3) izrazili elektromagnetski tenzor F_{ab} i njegov dual $*F_{ab}$:

$$F_{ab} = \epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} + \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} \tag{3.52}$$

$$*F_{ab} = i(\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} - \phi_{AB}\epsilon_{A'B'}) \tag{3.53}$$

Izraz za tenzor momenta i energije elektromagnetskog polja:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}\left(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\right) \tag{3.54}$$

uvrštavanjem jednadžbe (3.52) i izraza za metriku (B.16) možemo zapisati preko spinora:

$$T_{ab} = \frac{1}{2\pi}\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} \tag{3.55}$$

Uvjet da je F_{ab} tenzor svjetlosnog tipa $(F_{ab}F^{ab} = F_{ab} * F^{ab} = 0)$ preko ϕ_{AB} pišemo kao:

$$\phi_{AB}\phi^{AB} = 0 \tag{3.56}$$

Pretpostavimo li gravitacijsku jednadžbu jednaku kao i u poglavlju 3.1 kod analize naslijeđivanja simetrije skalarnih polja, centralna formula opet će nam biti (3.4):

$$\pounds_\xi T_{ab} = \pounds_\xi(\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}) = 0 \tag{3.57}$$

Raspišimo i u sljedećem redu pomnožimo univalentnim spinorima $\overline{\alpha}^{A'}$ i $\overline{\beta}^{B'}$:

$$(\pounds_\xi\phi_{AB})\overline{\phi}_{A'B'} + \phi_{AB}\pounds_\xi\overline{\phi}_{AB} = 0 \tag{3.58}$$

$$(\pounds_\xi\phi_{AB})\overline{\phi}_{A'B'}\overline{\alpha}^{A'}\overline{\beta}^{B'} + \phi_{AB}\overline{\alpha}^{A'}\overline{\beta}^{B'}\pounds_\xi\overline{\phi}_{A'B'} = 0 \tag{3.59}$$

Uvođenjem funkcije h kao kvocijenta precrtanih veličina, jasnije možemo vidjeti proporcionalnost:

$$\pounds_\xi\phi_{AB} = h\phi_{AB} \tag{3.60}$$

Vrijedit će naravno i:

$$\pounds_\xi\overline{\phi}_{AB} = \overline{h\phi}_{AB} \tag{3.61}$$

Vratimo sad dobiveni rezultat u (3.58):

$$h\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} + \phi_{AB}\overline{h\phi}_{A'B'} = 0 \tag{3.62}$$

$$(h + \overline{h})\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} = 0 \tag{3.63}$$

Iz zadnje jednakosti vidimo da zagrada $(h+\overline{h})$ mora biti jednaka nuli, iz čega možemo zaključiti da je funkcija h čisto imaginarna, $h = -if$.
Sad možemo Liejevom derivacijom djelovati na elektromagnetski tenzor (3.52) pa uvrstiti dobivene izraze (3.60) i (3.61)

$$\pounds_\xi F_{ab} = \epsilon_{AB}\pounds_\xi\overline{\phi}_{AB} + (\pounds_\xi\phi_{AB})\epsilon_{A'B'} \tag{3.64}$$

$$= if\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{AB} - if\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} \tag{3.65}$$

$$= f * F_{ab} \tag{3.66}$$

Dobili smo izraz (3.49), te nam još ostaje provjeriti svojstva funkcije f ovisno o vrsti elektromagnetskog polja.

Pogledajmo prvo slučaj u kojem elektromagnetsko polje nije svjetlosnog tipa. Iskoristimo dobivenu jednadžbu i njen Hodgeov dual:

$$\pounds_\xi F_{ab} = f * F_{ab} \tag{3.67}$$

$$\pounds_\xi * F_{ab} = -f F_{ab} \tag{3.68}$$

Djelujemo vanjskom derivacijom na ove dvije jednadžbe, te iskoristimo komutativnost Liejeve i vanjske derivacije:

$$\pounds_\xi dF = d(f * F) \tag{3.69}$$

$$\pounds_\xi d * F = -d(fF) \tag{3.70}$$

Zbog Maxwellovih jednadžbi u vakuumu $(dF = 0, d * F = 0)$ lijeva strana iščezava, a na desnoj vanjska derivacija djeluje samo na funkciju f te ju pretvara u vektor $X = df(X^a = \nabla^a f)$:

$$0 = X \wedge *F \tag{3.71}$$

$$0 = X \wedge F \tag{3.72}$$

Ako djelujemo Hodgeovim dualom na obje jednadžbe, prepoznat ćemo jednakosti:

$$i_X * \alpha = *(\alpha \wedge X), \quad i_X \alpha = (-1)^{m(p+1)+s} * (X \wedge *\alpha) \tag{3.73}$$

te konačno dobiti:

$$i_X F = X^a F_{ab} = X^{AA'} F_{ABA'B'} = 0 \tag{3.74}$$

$$i_X * F = X^a * F_{ab} = X^{AA'} * F_{ABA'B'} = 0 \tag{3.75}$$

Uvrstimo (3.52) i (3.53):

$$X^{AA'}(\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} + \phi_{AB}\epsilon_{A'B'}) = 0 \tag{3.76}$$

$$X^{AA'} i(\epsilon_{AB}\overline{\phi}_{A'B'} - \phi_{AB}\epsilon_{A'B'}) = 0 \tag{3.77}$$

Zbroj ovih dviju jednadžbi daje:

$$X^{AA'}\phi_{AB}\epsilon_{A'B'} = 0 \tag{3.78}$$

Pomnožimo (3.78) s $\phi^B{}_C$ te iskoristimo (B.21):

$$\frac{1}{2}X^A{}_{B'}(\phi_{CD}\phi^{CD})\epsilon_{AB} = 0 \tag{3.79}$$

$$(\phi_{CD}\phi^{CD})X_{CB'} = 0 \tag{3.80}$$

$$(\phi_{CD}\phi^{CD})\nabla_c f = 0 \tag{3.81}$$

Budući da promatramo slučaj gdje F_{ab} nije svjetlosnog tipa, zagrada ne iščezava kao (3.56) te je kovarijantna derivacija funkcije f, $\nabla_c f = 0$ jednaka nuli - pokazali smo da je f konstantna.

Za elektromagnetsko polje svjetlosnog tipa morat ćemo iskoristiti malo drukčiji pristup. Možemo napraviti dekompoziciju elektromagnetskog tenzora kao [15]:

$$-(X|X)F = X \wedge (-i_X F) + *(X \wedge (i_X * F)) \tag{3.82}$$

te iz (3.74) i (3.75) vidimo da lijeva strana mora biti jednaka nuli. Ako $F_{ab} \neq 0$, slijedi da je $(X|X) = 0$, tj. da je X vektor svjetlosnog tipa.
Ukoliko je tenzor F_{ab} svjetlosnog tipa, bit će i skalar ϕ_{AB} te ga prema (B.24) možemo rastaviti na univalentne spinore $\phi_{AB} = \alpha_A\alpha_B$ i preko njih zapisati (3.52):

$$F_{ABA'B'} = \alpha_A\alpha_B\epsilon_{A'B'} + \overline{\alpha}_{A'}\overline{\alpha}_{B'}\epsilon_{AB} \tag{3.83}$$

Pomnožimo li cijelu jednadžbu s vektorom svjetlosnog tipa $k^a \equiv \alpha^A\overline{\alpha}^B$ i iskoristimo $k^2 = 0$, slijedi:

$$F_{ab}k^a = 0 \tag{3.84}$$

Prema Petrovljevoj klasifikaciji Weylovog tenzora [16] k^a je ponovljeni glavni vektor svjetlosnog smjera. Iskoristimo sad jednadžbu (3.72) tako da je kontrahiramo s k^a.

$$(k|X)F - Xi_kF = 0 \tag{3.85}$$

Drugi član iščezne zbog (3.74) te nam uz $f \neq 0$ preostaje $k \cdot X = 0$. Imamo dva vektora svjetlosnog tipa k^a i X^a $(k^2 = 0, X^2 = 0)$ čiji je skalarni umnožak jednak nuli. Opciju $X^a = \nabla^a f = 0$ razradili smo već u dijelu sa elektromagnetskim tenzorom koji nije svjetlosnog tipa. Osim toga preostaje nam zaključiti proporcionalnost k^a i X^a, $k^a = \alpha X^a$, tj. $k \wedge X = 0$. Ovaj izraz možemo zapisati i kao $f_{,[a}k_{b]} = 0$, kako bismo ga prepoznali kao izraz s početka poglavlja koji smo i trebali dokazati.

3.3 Elektromagnetski skalarni potencijali

Iako se pitanje o naslijeđivanju simetrija nekog polja samo po sebi može činiti kao elegantno i fundamentalno, ono se također implicitno postavlja u mnogim teoremima i definicijama. Jedan od primjera su elektromagnetski skalarni potencijali, koji se koriste u nekim dokazima prvog zakona mehanike crnih rupa, kao i u dokazima teorema jedinstvenosti crnih rupa, a za njihovo definiranje nužno je naslijeđivanje simetrije elektromagnetskog polja. Dakle, pretpostavimo da vrijedi $\pounds_\xi F = 0$ i isto tako $\pounds_\xi * F = 0$. Električno i magnetsko polje definirani su za promatrača četverobrzine u^a kao:

$$E_a = -i_u F \tag{3.86}$$

$$B_a = i_u * F \tag{3.87}$$

U stacionarnim prostorvremenima stacionarnog promatrača s četverobrzinom u^a proporcionalnom Killingovom vektoru $k^a + \Omega m^a$, gdje je Ω konstantna kutna brzina, nije moguće postaviti postaviti na horizont. Killingov vektor na horizontu postaje svjetlosnog tipa te se ne može postići uvjet za normalizaciju brzine $u_a u^a = -1$. Zato radije uvodimo E_a i B_a kao kontrakciju elektromagnetskog tenzora s Killingovim vektorom ξ^a:

$$E_a = -i_\xi F_{ab} \tag{3.88}$$

$$B_a = i_\xi * F_{ab} \tag{3.89}$$

Kako bismo mogli uvesti potencijale za električno i magnetsko polje, prvo, po Poincaréovoj lemi, moramo pokazati da su ona zatvorene forme:

$$dE = -di_\xi F = -\pounds_\xi F + i_\xi dF = 0 \tag{3.90}$$

$$dB = di_\xi * F = -\pounds_\xi * F + i_\xi d * F = 0 \tag{3.91}$$

U drugoj jednakosti koristili smo Maxwellove jednadžbe u vakuumu i naslijeđenje simetrije. Sad možemo zapisati:

$$E = d\Phi \tag{3.92}$$

$$B = d\Psi \tag{3.93}$$

Za uvedene potencijale Φ i Ψ vidimo također da vrijedi:

$$\pounds_\xi \Phi = di_\xi \Phi + i_\xi d\Phi = -i_\xi i_\xi F = 0 \tag{3.94}$$

$$\pounds_\xi \Psi = di_\xi \Psi + i_\xi d\Psi = i_\xi i_\xi * F = 0 \tag{3.95}$$

te su oni konstantni na Killingovim orbitama.
Postoji više dokaza ([10], [22], [23]) koji konstantnost električnog i magnetskog skalarnog potencijala proširuju s Killingovih orbita na cijeli Killingov horizont $H[\xi]$, a međusobno se razlikuju po tome koriste li simetrije, jednadžbe polja ili bifurkaciju horizonta.

3.4 Nelinearno elektromagnetsko polje

Potreba za alternativnim modelom elektrodinamike vuče svoje korijene iz nekonzistentnosti Maxwellove elektrodinamike koja za vlastitu energiju točkastih naboja daje beskonačnost. Born i Infeld [17] [18] uveli su u pokušaju rješavanja tog problema modele nelinearnih elektromagnetskih polja, a kasnije su ti modeli iskorišteni i kako bi se regularizirale singularnosti crnih rupa [24] te kozmološke singularnosti [25]. Nelinearnosti elektromagnetskih polja također se pojavljuju u kvantnim korekcijama klasične elektromagnetske interakcije [26].

Zapišimo općenitu gustoću lagranžijana elektromagnetskog polja kao:

$$\mathscr{L}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \tag{3.96}$$

gdje su $\mathscr{F} \equiv F_{ab}F^{ab}$ i $\mathscr{G} \equiv F_{ab} * F^{ab}$. Za derivacije gustoće lagranžijana koristit ćemo pokrate:

$$\mathscr{L}_{\mathscr{F}} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{F}}, \quad \mathscr{L}_{\mathscr{G}} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{G}}, \quad \mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} \equiv \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \mathscr{F}^2} \quad \text{itd.} \tag{3.97}$$

Tenzor momenta i energije dobiven iz (3.96) glasi:

$$T_{ab} = -\frac{1}{4\pi}((\mathscr{L}_{\mathscr{G}}\mathscr{G} - \mathscr{L})g_{ab} + 4\mathscr{L}_{\mathscr{F}}F_{ac}F_b{}^c) \tag{3.98}$$

Lako se provjeri da se za $\mathscr{L}_{\mathscr{F}} = -1/4$ i $\mathscr{L}_{\mathscr{G}} = 0$ (3.98) svede na Maxwellov oblik (3.54). Napišimo još poopćene Maxwellove jednadžbe:

$$dF = 0 \tag{3.99}$$

$$d * Z = 0 \tag{3.100}$$

gdje je radi jednostavnosti uveden tenzor Z_{ab}:

$$Z_{ab} \equiv -4(\mathscr{L}_{\mathscr{F}}F_{ab} + \mathscr{L}_{\mathscr{G}} * F_{ab}) \tag{3.101}$$

koji se za Maxwellov izbor derivacija $\mathscr{L}_{\mathscr{F}} = -1/4$ i $\mathscr{L}_{\mathscr{G}} = 0$ svede na klasičan slučaj F_{ab}.

Pokažimo prvo rezultat dobiven za $D = 4$, u točkama otvorenog skupa $O \subseteq M$ na mnogostrukosti M na kojem vrijedi $\mathscr{L}_{\mathscr{F}} \neq 0$. Trag jednadžbe (3.98):

$$T = -\frac{1}{\pi}(\mathscr{L}_{\mathscr{F}}\mathscr{F} + \mathscr{L}_{\mathscr{G}}\mathscr{G} - \mathscr{L}) \tag{3.102}$$

te Maxwellov tenzor momenta i energije (3.54) uvrstimo u jednadžbu (3.98) kako bismo dobili izraz:

$$T_{ab} = -4\mathscr{L}_{\mathscr{F}}T_{ab}^{(Max)} + \frac{1}{4}Tg_{ab} \tag{3.103}$$

Liejeva derivacija (3.57) tenzora momenta i energije drugi član će poslati u nulu i ostaviti nam jednadžbu:

$$\pounds_\xi(\mathscr{L}_{\mathscr{F}}T_{ab}^{(Max)}) = 0 \tag{3.104}$$

Promotrimo li članove u $T_{ab}^{(Max)}$, vidimo da ako uvedemo pomoćno polje:

$$\tilde{F}_{ab} \equiv \sqrt{|\mathscr{L}_{\mathscr{F}}|} F_{ab} \tag{3.105}$$

(3.104) možemo svesti upravo na klasičan oblik za linearno polje $\tilde{F}_{ab}$:

$$\pounds_\xi \left(\tilde{F}_{ac}\tilde{F}_b^c - \frac{1}{4} g_{ab}\tilde{F}_{cd}\tilde{F}^{cd} \right) = 0 \tag{3.106}$$

Sad možemo iskoristiti dobro poznato rješenje dokazano u potpoglavlju 3.1:

$$\pounds_\xi \tilde{F}_{ab} = \alpha * \tilde{F}_{ab} \tag{3.107}$$

gdje je α realna funkcija. Vratimo li zapis preko originalnog tenzora F_{ab}:

$$\frac{1}{2\sqrt{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}} (\pounds_\xi \mathscr{L}_{\mathscr{F}}) F_{ab} + \sqrt{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} \pounds_\xi F_{ab} = \alpha \sqrt{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} * F_{ab} \tag{3.108}$$

vidimo da cijelu jednadžbu možemo podijeliti s $2\sqrt{\mathscr{L}_{\mathscr{F}}}$ i dobiti konačan izraz:

$$\pounds_\xi F_{ab} = \alpha * F_{ab} + \beta F_{ab} \tag{3.109}$$

a β smo uveli kao:

$$\beta = -\frac{1}{2\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} \pounds_\xi \mathscr{L}_{\mathscr{F}} \tag{3.110}$$

Pretpostavimo li da vrijedi $\alpha = 0$ te (3.109) kontrahiramo s F^{ab}, dobit ćemo:

$$\pounds_\xi \mathscr{F} = 2\beta \mathscr{F} \tag{3.111}$$

Raspišemo (3.110):

$$\beta = -\frac{1}{2\mathscr{L}_{\mathscr{F}}} \mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} \pounds_\xi \mathscr{F} \tag{3.112}$$

i uvrstimo u (3.111) kako bismo dobili uvjet:

$$\beta(\mathscr{F}\mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} + \mathscr{L}_{\mathscr{F}}) = 0 \tag{3.113}$$

i kojeg vidimo da je simetrija potpuno naslijeđena, $\beta = 0$ ako $(\mathscr{F}\mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} + \mathscr{L}_{\mathscr{F}}) \neq 0$ i $\alpha = 0$.

Pogledajmo sad restrikciju lagranžijana $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{F})$ te poopćimo dimenzije prostor vremena na $D \geq 2$, . Tenzor momenta i energije glasit će:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(\mathscr{L} g_{ab} - 4\mathscr{L}_{\mathscr{F}} F_{ac} F_b{}^c) \tag{3.114}$$

Liejeva derivacija traga od T_{ab} jednaka je nuli:

$$0 = (4\mathscr{F}\mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} - (D-4)\mathscr{L}_{\mathscr{F}})\pounds_\xi \mathscr{F} \equiv \mathscr{K}(\mathscr{F})\pounds_\xi \mathscr{F} \tag{3.115}$$

Definirajmo skup točaka $V \subseteq O$ u kojima vrijedi $\mathscr{K}(\mathscr{F}) \neq 0$ ili koje su elementi otvorenih skupova na kojima je konstantan $\mathscr{F}$ nula funkcije $\mathscr{K}(\mathscr{F})$. Dakle, sve točke u kojima imamo $\pounds_\xi \mathscr{F} = 0$ pripadaju u skup $W = \bar{V} \cap O$. Za te točke možemo pokazati i:

$$\pounds_\xi \mathscr{L} = \mathscr{L}_{\mathscr{F}} \pounds_\xi \mathscr{F} \tag{3.116}$$

$$\pounds_\xi \mathscr{L}_{\mathscr{F}} = \mathscr{L}_{\mathscr{F}\mathscr{F}} \pounds_\xi \mathscr{F} \tag{3.117}$$

Jedino ukoliko $\mathscr{K}(\mathscr{F}) = 0$ za svaki $\mathscr{F}$, iz jednadžbe (3.115) ne možemo ništa zaključiti.

Općenito rješenje slučaja $\mathscr{K}(\mathscr{F}) = 0$ bit će:

$$\mathscr{L}(\mathscr{F}) = A\mathscr{F}^{\frac{D}{4}} + B \tag{3.118}$$

Konstatnu B možemo zanemariti, budući da ne stoji uz metriku pa u jednadžbama polja dobivenim varijacijom doprinosi samo kozmološkoj konstanti. Dakle, jedina klasa lagranžijana za koje ne možemo donijeti nikakve zaključke o (3.115) jest:

$$\mathscr{L}(\mathscr{F}) = A\mathscr{F}^{\frac{D}{4}} \tag{3.119}$$

za koje akcija elektromagnetskog polja postaje konformalno invarijantna te tenzor momenta i energije ima $T = 0$.

Iskoristimo li dobiveni uvjet $\pounds_\xi \mathscr{F} = 0$ uz (3.57), postavit ćemo ograničenje na svojstva nasljeđivanja simetrija u dimenzijama $D \geq 2$:

$$\pounds_\xi (F_{ac} F_b{}^c) = 0 \tag{3.120}$$

Za općenito $D \geq 2$ zasad ne znamo više reći, no ograničimo li se na $D = 4$ iz relacije (3.117) vidimo da vrijedi $\beta = 0$. Kontrahiramo zatim (3.109) s F^{ab} i dobijemo uvjet:

$$0 = \pounds_\xi \mathscr{F} = 2\alpha \mathscr{G} \tag{3.121}$$

Dakle, ili će simetrija biti naslijeđena $(\alpha = 0)$, ili vrijedi $\mathscr{G} = 0$. Kontrakcijom (3.109) s $*F^{ab}$ pak imamo:

$$\pounds_\xi \mathscr{G} = -2\alpha \mathscr{F} \tag{3.122}$$

pa ako simetrija nije naslijeđena $(\alpha \neq 0, \mathscr{G} = 0)$, mora slijediti $\mathscr{F} = 0$.

Konačno, možemo reći da u četiri dimenzije nelinearna elektromagnetska polja koja nisu svjetlosnog tipa s lagranžijanom $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{F})$ moraju naslijediti simetrije prostorvremena.

Naglasimo još, da će za statično prostorvrijeme naša tvrdnja uvijek vrijediti, budući da u njemu elektromagnetsko polje svjetlosnog tipa ne može postojati. Kako bismo to dokazali, pribjeći ćemo ponovno spinornom formalizmu.

U [7] (Teorem 8.2) navedeno je da statičnost prostorvremena $(\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0)$ povlači Riccijevu statičnost $(\xi_{[a} R_{b]c} \xi^c = 0)$, a preko [19], vidimo da za ortogonalno tranzitivne tenzore E_{ab} iz statičnosti slijedi $\xi_{[a} T^{(Max)}_{b]c} \xi^c = 0$ a time i:

$$\xi_{[a} T_{b]c} \xi^c = 0 \tag{3.123}$$

Prisjetimo se formule (3.55) za spinorni zapis tenzora momenta i energije:

$$T_{ab} = \frac{1}{2\pi} \phi_{AB} \overline{\phi}_{A'B'} \tag{3.124}$$

Kontrahiramo li T_{ab} s $k^a = k^{AA'}$ i iskoristimo (3.125) dobit ćemo:

$$\phi_{AB} \overline{\phi}_{A'B'} k^{AA'} = f k_{BB'} \tag{3.125}$$

gdje je $f = T_{CAC'A'} k^{AA'}$. Množenjem s ϕ^{BC} i korištenjem identiteta (B.21) slijedi:

$$\frac{1}{2} \phi_{EF} \phi^{EF} \epsilon_A{}^C \overline{\phi}_{A'B'} k^{AA'} = f k_{BB'} \phi^{BC} \tag{3.126}$$

Ako je elektromagnetsko polje svjetlosnog tipa $\phi_{AB} \phi^{AB} = 0$, lijeva strana će iščeznuti te ćemo ostati s dvije opcije: ili $f = 0$ ili $k_{BB'}\phi^{BC} = 0$. U slučaju da je $f = 0$, vratimo se u (3.126) te dobijemo:

$$\phi_{AB}\overline{\phi}_{A'B'}k^{AA'} = 0 \tag{3.127}$$

Vidimo da je to ekvivalentno slučaju $k_{BB?}\phi^{BC} = 0$ pomnoženom s $\overline{\phi}_{B'C'}$. Rastavimo sad $\phi_{AB} = \alpha_A\alpha_B$, uvrstimo u (3.127):

$$\alpha_A\overline{\alpha}_{A'}\alpha_B\overline{\alpha}_{B'}k^{AA'} = 0 \tag{3.128}$$

te prebacimo u vektorski zapis pomoću vektora svjetlosnog tipa $l_a = \alpha_A\overline{\alpha}_{A'}$:

$$l_a l_b k^a = 0 \tag{3.129}$$

Dakle, ili je vektor l_b nula te time i $\phi_{AB} = 0$, što znači da elektromagnetski tenzor iščezava, ili je skalarni umnožak $l_a k^a$ jednak nuli. No, budući da je k^a vremenskog tipa, njihov skalarni umnožak može biti jednak nuli jedino ukoliko je $l_a = 0$, što nas opet vraća na zaključak da elektromagnetski tenzor svjetlosnog tipa nužno iščezava u statičnom prostorvremenu.

Nakon što smo promotrili prostorvremena za $D \geq 4$, obratimo pažnju na dvije i tri dimenzije. Za lagranžijan oblika $\mathscr{L} = \mathscr{L}(\mathscr{F})$ u dvije dimenzije jednostavno se pokaže da je simetrija naslijeđena, dok je u tri dimenzije potrebno uvođenje dreinbein baze vektora u okolini orbite Killingovog polja:

$$g_{ab}e^a_{(\mu)}e^b_{(\nu)} = \eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1) \tag{3.130}$$

Elektromagnetski tenzor F_{ab} rastavimo preko uvedene baze, kao i sumu $F_{ac}{F_b}^c$, te nakon što povežemo matrice u dekompoziciji, djelovanjem (3.120) dokazujemo $\pounds_\xi F_{ab} = 0$.

3.5 *Kosa crnih rupa*

Pored elektromagnetskih skalarnih potencijala, kao primjer gdje se koristi nasljeđivanje simetrija možemo navesti i teoreme o kosi crnih rupa. Za crne rupe pretpostavljamo da vrijedi sljedeće: sve vanjštine stacionarnih, golih crnih rupa su Kerr-Newmanovog tipa - jedina svojstva koja im možemo pripisati su masa, naboj i angularni moment.

Bekenstein je u svojim dokazima [20] [21] potvrdio da stacionarne crne rupe ne mogu imati ni barionski ni strani broj. U ovom potpoglavlju navest ćemo dokaze da statična gola crna rupa ne može imati vanjsko klasično maseno ili bezmaseno skalarno polje, niti vanjsko klasično maseno vektorsko polje.

Pretpostavimo prvo da je u okolini crne rupe postignuto stacionarno stanje, da nema golih singulariteta te da je prostor vrijeme asimptotski ravno. Interakciju među poljima ćemo isključiti, osim minimalnog vezanja elektromagnetskog polja i promatrati pseudoskalarna i pseudovektorska polja.

Za simetriju prostorvremena uzet ćemo vrijeme, $\pounds_{x^0} g_{\mu\nu} = 0$, a stacionarni horizont opisat ćemo jednadžbom oblika $F(x^i) = 0$. Dakle, normala na horizont $n_\mu = F_{,\mu}$ kao i element površine dS_μ njoj proporcionalan nemaju vremensku komponentu. Opišimo polja Φ_k gustoćom lagranžijana $\mathscr{L}$ te napišimo Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial\Phi_k} - \partial_\mu\left(\frac{\partial(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\partial\Phi_{k,\mu}}\right) = 0 \tag{3.131}$$

Množenjem s $\Phi_k\sqrt{-g}d^4x$ te parcijalnim integriranjem možemo jedan član preko Stokesovog teorema pretvoriti u površinski i dobiti sljedeći izraz:

$$\sum_k\left[-\int\sqrt{\gamma}n_\mu\left(\Phi_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_{k,\mu}}\right)\sqrt{|\gamma|}d^3x + \int\left(\Phi_{k,\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_{k,\mu}} + \Phi_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_k}\right)\sqrt{-g}d^4x\right] = 0 \tag{3.132}$$

gdje smo sumirali po poljima po odabiru, a γ_{ab} je inducirana metrika na podmnogostrukosti. Granice prvog integrala su horizont, prostorna beskonačnost te vremenska prošla i buduća beskonačnost. Izraz pod prvim integralom zapisat ćemo kao:

$$b^\mu = \sum_k\left(\Phi_k\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\Phi_{k,\mu}}\right), \quad dS_\mu = \sqrt{|\gamma|}n_\mu d^3x \tag{3.133}$$

Ideja dokaza je pokazati da prvi integral iščezava, a da se u drugom podintegralna funkcija sastoji od pozitivnih dijelova koji onda svaki za sebe moraju biti jednaki nuli.

U slučaju statične crne rupe $b_\mu dS^\mu$ možemo ograničiti preko Schwarz-Cauchy-Bunjakowski nejednakosti:

$$(g_{ij}dS^ib^j)^2 \leq (g_{ij}dS^idS^j)(g_{nm}b^nb^m) \tag{3.134}$$

Budući da je prvi član s desne strane na horizontu jednak nuli, preostaje nam za svako polje provjeriti omeđenost sume $b_\mu b^\mu$ te $b^0 = 0$. Za granicu integrala u beskonačnosti može se iz jednadžbi polja vidjeti da ne doprinosi, jer za bezmasena polja b^μ trne kao $1/r^3$, a za masena polja eksponencijalno. Što se tiče vremenske beskonačnosti, normala n_μ imat će samo vremenski dio, a budući da ćemo pokazati $b^0 = 0$ za svako polje pojedinačno, suma $b^\mu dS_\mu$ bit će opet jednaka nuli. Nastavak dokaza raspisat za pojedinačna polja.

3.5.1 Realno skalarno polje

Promotrimo prvo maseno, neutralno, realno skalarno polje ψ s gustoćom lagranžijana:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + m^2\psi^2) \tag{3.135}$$

Uvrštavanjem u (3.131) dobijemo Klein-Gordonovu jednadžbu

$$\psi_{,\mu}{}^{;\mu} - m^2\psi = 0 \tag{3.136}$$

Prema definiciji (3.133) b_μ glasi $b_\mu = -\psi\psi_{,\mu}$ te se tu pozivamo na nasljeđivanje vremenske simetrije polja $\psi_0 = 0$ kako bismo se riješili člana b^0. Omeđenost $b_\mu b^\mu = \psi^2\psi_{,\mu}\psi^{,\mu}$ na horizontu osigurat ćemo ako promotrimo tenzor momenta i energije:

$$T_{\mu\nu} = \psi_{,\mu}\psi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha} + m^2\psi^2) \tag{3.137}$$

njegov trag T i umnožak $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$. Faktore iz $b^\mu b_\mu$ možemo zapisati kao:

$$\psi_{,\mu}\psi^{,\mu} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}) - \frac{1}{3}T^2\right)} \tag{3.138}$$

$$m^2\psi^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4}{3}(T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}) - \frac{1}{3}T^2\right)} - \frac{1}{2}T \tag{3.139}$$

Iz argumenta da su fizikalni skalari $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ i T omeđeni na horizontu, slijedi da su omeđene (3.138) i (3.139) te time i $b^\mu b_\mu$. Sad nam je od integrala (3.132) preostalo:

$$\int (g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + m^2\psi^2)\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{3.140}$$

Iz pozitivne semidefinitnosti g_{ij} (dio s g_{00} koji je negativno semidefinitan iščezne zbog $\psi_{,0} = 0$) vidimo da su oba člana podintegralne funkcije pozitivna, te da moraju iščeznuti zasebno, dakle $\psi = 0$ – statična crna rupa nema realnu skalarnu kosu.

3.5.2 Kompleksno skalarno polje

Prijeđimo sad na nabijeno skalarno polje minimalno vezano na elektromagnetsko polje vektorskog potencijala A_μ i tenzora $F^{\mu\nu}$. Gustoća lagrangijana dana je s:

$$\mathscr{L} = -(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*) - \frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad d_\alpha = \psi_{,\alpha} - ieA_\alpha\psi \tag{3.141}$$

Iskoristit ćemo statičnu situaciju da bismo odabrali baždarenje $A_i = 0$ i $A_{0,0} = 0$. Za struju:

$$j_\mu = ie(\psi d^*_\mu - \psi^* d_\mu) \tag{3.142}$$

u statičnoj situaciji vrijedi također $j^i = 0$ i ${j^0}_{,0} = 0$. Raspisivanjem navedenih uvjeta možemo pokazati da uz ansatz $\psi(x^\mu) = B(x^\mu)e^{i\phi(x^\mu)}$ za fazu $\phi(x^\mu)$ dobijemo da mora biti oblika $\omega x^0 + \psi$ uz realne ω i ϕ. Sad možemo iskoristiti invarijantnost teorije na baždarne transformacije $\psi \to \psi e^{ie\Lambda}$ i $A_\mu \to A_\mu + \Lambda_{,\mu}$ i uz $\Lambda = -(\omega x^0 + \phi)/e$ pretvoriti ψ u realnu i vremenski neovisnu funkciju te zadržati uvjete na A_μ. Izračunamo zatim $b_\mu = -(\psi d^*_\mu + \psi^* d_\mu)$ pa iz $\psi_{,0} = 0$ i $A_i = 0$ vidimo da vrijedi $b^0 = 0$, kao što nam je i potrebno, te da su b^i realni. Kako bismo još omeđili sumu:

$$b_\mu b^\mu = \psi\psi^*(d^\mu d_\mu + d^{\mu *} d^*_\mu + 2d^\mu d^*_\mu) \tag{3.143}$$

poslužit ćemo se tenzorom momenta i energije i njegovim fizikalnim skalarima T i $T^\mu T_\mu$ za koje znamo da su omeđeni:

$$T_{\mu\nu} = d_\mu d^*_\nu + d^*_\mu d_\nu - g_{\mu\nu}(d^\alpha d^*_\alpha + m^2\psi\psi^*) \tag{3.144}$$

$$T = -2d^\mu d^*_\mu - 4m^2\psi\psi^* \tag{3.145}$$

$$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = 2|d^\mu d_\mu|^2 + \frac{3}{4}Td^\mu d^*_\mu + \frac{1}{16}T^2 + \frac{1}{2}(d^\mu d^*_\mu)^2 \tag{3.146}$$

Iz posljednje dvije jednadžbe lako vidimo da članovi od interesa u (3.143), $\psi\psi^*$, $d^\mu d_\mu$ i $d^{\mu *}d^*_\mu$, moraju biti omeđeni, a time i cijela (3.143).
Odaberemo li za polja po kojima sumiramo u (3.132)ψ i ψ^*, slijedi:

$$\int \left[g_{ij}\psi^{,i}\psi^{,j} + (m^2 + g_{00}(eA^0)^2)\psi^2\right]\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{3.147}$$

Prvi član je veći od nule kao što smo već kod realnog polja objasnili, no problem nam predstavlja faktor g_{00} u drugom članu koji ga čini negativnim, te moramo pokazati da vrijedi $A^0 = 0$ kako bismo nastavili sa dokazom.

Prosumiramo li u (3.133) umjesto po skalarnim poljima po vektorskom potencijalu, imamo izraz za b^μ:

$$b^\mu = -\frac{1}{4\pi} F^{\mu\nu} A_\nu \tag{3.148}$$

Iz odabranog baždarenja i antisimetričnosti elektromagnetskog tenzora odmah vidimo da vrijedi $b^0 = 0$. Raspišemo li $b_\mu b^\mu$:

$$b^\mu b_\mu = \frac{1}{16\pi^2}(F^{\mu\nu}F_{\mu\rho})(A^\nu A_\rho) = \frac{1}{16\pi^2}(F^{\mu\nu}F_{\mu\rho})(A^\nu A_\rho) = \frac{1}{16\pi^2}(F^{\mu 0}F_{\mu 0})(A^0 A_0) \tag{3.149}$$

Faktor $F_{\mu 0}F^{\mu 0}$ je fizikalni skalar te mora biti omeđen, a $A^0 A_0$ možemo ograničiti pomoću specifičnog naboja po mezonu

$$\frac{\sqrt{-j^\mu j_\mu}}{\psi^2} = \sqrt{-4e^2 g_{00}(A^0)^2}, \quad j^0 = -2e^2 A^0 \psi^2, \quad j^i = 0 \tag{3.150}$$

koji mora biti omeđen. Raspisivanjem smo ograničili $g_{00}(A^0)^2$ pa time i $b^\mu b_\mu$. Sad možemo raspisati (3.132) po A^μ:

$$\int g_{00}\left[\frac{1}{4\pi} g_{ij} F^{0i} F^{0j} + 2eA^{0^2}\psi^2\right]\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{3.151}$$

Oba člana u integralu su negativno definitna (zbog g_{00}) te zasebno iščezavaju, dakle $A^0 = 0$. Ako se sad vratimo u (3.148), vidimo da je drugi član pozitivan te mora vrijediti $\psi = 0$, dakle ne može postojati ni kompleksna skalarna kosa. U slučaju neutralnog polja $e = 0$ vezat ćemo polje ψ za fiktivni skalarni potencijal A_μ koji neće doprinositi fizikalnim veličinama, ali ćemo moći primjeniti gornji izvod.

3.5.3 Vektorsko polje

Pogledajmo još maseno, neutralno, realno vektorsko polje B_μ recipročne Comptonove valne duljine $m > 0$. Tenzor polja glasi:

$$H_{\mu\nu} = B_{\nu,\mu} - B_{\mu,\nu} \tag{3.152}$$

te gustoća lagranžijana:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16\pi}H^{\mu\nu}H_{\mu\nu} - \frac{m^2}{8\pi}B_\mu B^\mu \tag{3.153}$$

Jednadžbu gibanja dobivenu iz (3.131) nazivamo Proca jednadžba:

$$H^{\mu\nu}{}_{;\nu} + m^2 B^\mu = 0 \tag{3.154}$$

Iako je $H_{\mu\nu}$ analogan elektromagnetskom tenzoru $F_{\mu\nu}$, polje B_μ je fizikalno pa nije podložno baždarnim transformacijama kao i A_μ. Analogiju iz prošlog potpoglavlja možemo povući i za računanje b^μ, koji onda iznosi $b^\mu = -H^{\mu\nu}B_\nu/4\pi$ te imamo $b^\mu b_\mu = (F^{\mu\nu}F_{\mu\rho})(A^\nu A_\rho)/16\pi^2$. Kako bismo mogli dobiti potrebne uvjete za b^μ, proučit ćemo ponašanje Proca polja pod vremenskom inverzijom. Znamo da pod vremenskom inverzijom za metriku vrijedi $g_{ij} \to g_{ij}$,$g_{00} \to g_{00}$ i $g_{0i} \to -g_{0i}$ pa ako u (3.154) s desne strane dodamo struju, zaključujemo $B_0 \to B_0$,$B_i \to -B_i$ te $H^{0i} \to H^{0i}$ i $H^{ij} \to -H^{ij}$. Budući da se u statičkom prostorvremenu fizikalne veličine ne mijenjaju pod vremenskom inverzijom, mora vrijediti $B_i = 0$ i $H^{ij} = 0$. Sad vidimo da je $b^0 = 0$, a $b^\mu b_\mu$ je omeđeno, prema argumentima analognim kao u prošlom potpoglavlju. Kad raspišemo (3.132), vidimo:

$$\int g_{00}[g_{ij}H^{0i}H^{0j} + m^2(B^0)^2]\sqrt{-g}d^4x = 0 \tag{3.155}$$

Kao i u primjerima dosad, zaključujemo da je $B^0 = 0$, te uz $B^i = 0$ što imamo iz analize za vremensku inverziju, možemo ukupno reći da vrijedi $B_\mu = 0$.

Ako stavimo da vrijedi $m = 0$, B_μ prestaje biti fizikalna veličina te postaje podložno baždarnim transformacijama. Iz toga slijedi da ni $b_\mu b^\mu$ nije omeđeno na horizontu te da dokaz ne vrijedi. Budući da znamo da postoji Reissner-Nordströmovo rješenje koje se sastoji od crne rupe s vanjskim elektromagnetskim poljem, a jedino bezmaseno polje koje poznajemo je elektromagnetsko, teorem je i tu regularan.

4 Rješenja koja lome nasljeđivanje simetrije

4.1 Skalarna rješenja

Primjer bezmasenog skalarnog polja koje je linearna funkcija vremena u statičnom prostorvremenu prvi je pronašao Wyman [27] u pokušaju da pronađe sva statična sfernosimetrična rješenja jednadžbe polja:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} = 8\pi T_{ij} \tag{4.1}$$

s tenzorom momenta i energije:

$$T_{ij} = \nabla_i\psi\nabla_j\psi - \frac{1}{2}g_{ij}\nabla_m\psi\nabla^m\psi \tag{4.2}$$

i statičnim, sfernosimetričnim linijskim elementom ($\pounds_t g_{ab} = 0, \pounds_\psi g_{ab} = 0$):

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{4.3}$$

$\nu(r)$ i $\lambda(r)$ su funkcije koje tražimo. Ako se pretpostavi sferna simetrija polja ψ kao $\nabla_i\psi = (\partial_r\psi(t,r), 0, 0, \partial_t\psi(t,r))$, koristeći Takenove [28] formule dobijemo uvjet:

$$\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = 0 \tag{4.4}$$

Grananjem ova dva slučaja, vidimo da nam $\partial_r\psi \neq 0$ nije od interesa jer $\pounds_r g_{ab} \neq 0$ te simetrija u odnosu na translaciju po r nije ni postojala. Stoga promotrimo jednadžbu $\partial_t\psi \neq 0$, iz koje odmah slijedi $\psi = \gamma t$ – bezmaseno skalarno polje neograničeno linearno raste u vremenu iako je prostorvrijeme statično! Za nepoznate funkcije unutar metrike dobijemo dva rješenja, ili vrijedi $e^{\nu(r)} = 8\pi\gamma^2 r^2$ i $e^\lambda = 2$, ili je e^ν i e^λ moguće zapisati samo u obliku Taylorovog reda.

Nedavno je otkrivena [5]i klasa rješenja minimalno vezanog kompleksnog masenog polja u Einsteinovoj gravitaciji, koja opisuje rotirajuće crne rupe sa regularnim horizontom i skalarnom kosom. Jednadžbe polja korištene u dokazu glase:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{4.5}$$

$$\nabla_a\nabla^a\psi = \mu^2\psi \tag{4.6}$$

a tenzor momenta i energije:

$$T_{ab} = 2\psi^*_{,(a}\psi_{,b)} - g_{ab}[\psi^*_c\psi^{,c} + \mu^2\psi^*\psi] \tag{4.7}$$

Analizom perturbacija lineariziranog skalarnog polja oko Kerrove metrike vidimo da će se za kritičnu frekvencijju polja pojaviti diskretni set vezanih stanja polja. Kako bismo proučili mogućnost postojanja masenih polja u okolini crne rupe, pogledajmo nelinearnu deformaciju Kerrove metrike danu kao:

$$ds^2 = e^{2F_1}\left(\frac{dr^2}{N} + r^2 d\theta^2\right) + e^{2F_2}r^2\sin^2\theta(d\varphi - Wdt)^2 - e^{2F_0}Ndt^2, \quad N = 1 - \frac{r_H}{r} \tag{4.8}$$

koja ima dva Killingova vektora $\xi = \partial_t$ i $\eta = \partial_\varphi$, a F_i i W su funkcije samo od r i θ. Za ansatz uzimamo:

$$\psi(r, \varphi, \theta, t) = \phi(r, \theta)e^{i(m\varphi - wt)} \tag{4.9}$$

ne pretpostavljajući da nasljeđuje simetrije prostorvremena ξ i η. ϕ uzimamo kao realnu funkciju, $w > 0$ je frekvencija, a $m = \pm1, \pm2, ...$ kutni broj. Nakon određivanja rubnih uvjeta, jednadžbe (4.5) i (4.6) s ansatzom (4.8) i (4.9) riješene su numerički te su dobivene funkcije F_i, W i ϕ - u okolini crne rupe postoji kompleksna skalarna kosa.

4.2 Elektromagnetska rješenja

Jedan od poznatih primjera elektromagnetskih tenzora koji ne nasljeđuju simetriju svog prostorvremena otkrili su Tariq i Tupper [29] tražeći elektrovakuumska prostor vremena u kojima je Weylov tenzor algebarski općenit (ima četiri jednostavna glavna smjera svjetlosnog tipa) i u kojima su glavni smjerovi svjetlosnog tipa ili elektromagnetsko polje tangentni na kongruencije svjetlosnog tipa. Koordinatnim transformacijama:

$$r \leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2r}, \quad z \leftrightarrow y, \quad \varphi \leftrightarrow 2z, \quad t \leftrightarrow u + r \tag{4.10}$$

originalne metrike [29] dobili smo stacionarno osnosimetrično prostorvrijeme:

$$ds^2 = \frac{1}{(2r)^2}(dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2 - (dt - 2zd\varphi)^2 \tag{4.11}$$

Tenzor elektromagnetskog polja glasi:

$$F_{ab}dx^a \wedge dx^b = -2^{3/2}[\frac{1}{r}\cos\alpha dr \wedge (dt - 2zd\varphi) + \sin\alpha dz \wedge d\varphi], \quad \alpha = -2lnr + \alpha_0 \tag{4.12}$$

Prostorvrijeme je invarijantno na sljedeća četiri Killingova vektora:

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.13}$$

$$\eta = \frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{4.14}$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial}{\partial z} + 2\varphi\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.15}$$

$$\zeta_2 = r\frac{\partial}{\partial r} + z\frac{\partial}{\partial z} - \varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{4.16}$$

koji generiraju četveroparametarsku jednostavno tranzitivnu grupu izometrija. Funkciju α iz jednadžbe (4.12) nazivamo kompleksijski skalar koji je definiran preko kompleksijskog vektorskog polja:

$$\alpha_{,j} \equiv \frac{\partial\alpha}{\partial x^j} = \alpha_j, \quad \alpha_l = (R_{ab}R^{ab})^{-1}\epsilon_{lijk}R^{is;j}R_s{}^k \tag{4.17}$$

Za elektromagnetski tenzor koji nije svjetlosnog tipa znamo da vrijedi ([30], teorem 2.1):

$$\pounds_\xi F_{ij} = f * F_{ij}, \quad f = \xi^j\alpha_j \tag{4.18}$$

Sad možemo lako izračunati konstante f za naš primjer:

$$\xi^i\alpha_i = \eta^i\alpha_i = \zeta_1{}^i\alpha_i = 0, \quad \zeta_2{}^i\alpha_i = -2 \tag{4.19}$$

te vidjeti da su naslijeđene sve simetrije osim posljednje:

$$\pounds_\xi F_{ij} = \pounds_\eta F_{ij} = \pounds_{\zeta_1} F_{ij} = 0 \tag{4.20}$$

$$\pounds_{\zeta_2} F_{ij} = -2 * F_{ij} \tag{4.21}$$

5 Zaključak

U ovom radu osvrnuli smo se na pitanje nasljeđivanja simetrije prostorvremena koja je generirana Killingovim poljem ξ^a:

$$\pounds_\xi g_{ab} = 0. \tag{5.1}$$

na neko baždarno polje ili polje materije Π

$$\pounds_\xi \Pi = 0 \tag{5.2}$$

unutar tog prostorvremena.

Sam pojam simetrija prvo smo uveli općenito preko Liejevih grupa te smo zatim suzili područje od interesa na gore navedene Killingove izometrije koje promatramo unutar nekog prostorvremena. U raspisivanju smo počeli od skalarnih polja, pokazali pod kojim uvjetima je simetrija nasljeđena te klasificirali rješenja koja izmiču nasljeđivanju. Stavili smo dokaze u kontekst simetrija prostorvremena koje se najčešće pojavljuju u teorijama te uzeli u obzir situaciju kad je prisutna crna rupa. Zatim smo napravili istu analizu za elektromagnetsko polje preko spinornog formalizma. Spomenuli smo također jedan od novijih rezultata, generalizaciju dokaza s linearnih na nelinearna elektromagnetska polja.

Kao motivaciju istraživanja nasljeđivanja simetrija naveli smo elektromagnetske skalarne potencijale te kosu crnih rupa, u kojima je, uz razne teoreme jedinstvenosti crnih rupa te druge primjere, nasljeđivanje simetrija na polje od interesa unaprijed pretpostavljeno. Na kraju smo radi ilustracije naveli protuprimjere u kojima simetrija nije naslijeđena, kako bismo opravdali potrebu za klasifikacijom nasljeđivanja simetrija.

Dodaci

Dodatak A Liejeva grupa

Definicija A.1. *Liejeva grupa je C^∞ mnogostrukost G koja je također grupa, tako da su grupne operacije množenja:*

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(a,b) = ab \tag{A.1}$$

i inverza:

$$i : G \to G, i(a) = a^{-1} \tag{A.2}$$

diferencijabilne. Za $a \in G$ lijevo množenje definiramo sa $l_a : G \to G, l_a(x) = \mu(a,x) = ax$, a desno $r_a : G \to G, r_a(x) = \mu(a,x) = xa$. Lijevo i desno množenje još zovemo lijeva i desna translacija. [31]

Budući da je djelovanje lijeve translacije elementa grupe g difeomorfizam grupe samu na sebe koji preslikava element identiteta u g, možemo reći da je Liejeva grupa homogen prostor, dakle lokalno izgleda jednako oko svake točke. Proučavanje lokalne strukture Liejeve grupe svodi se na proučavanje okoline elementa identiteta, zbog čega ključnu ulogu igra tangentni prostor T_eG na identitetu Lijeve grupe. Formalno zapisano [32]:

Definicija A.2. *Tangentan vektor u točki p je preslikavanje $v : C_p^\infty \to \mathbb{R}$, koje za sve $f, g \in C_p^\infty$ i $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ zadovoljava*

1. linearnost:

$$v(\kappa f + \lambda g) = \kappa v(f) + \lambda v(g) \tag{A.3}$$

2.Leibnizovo pravilo

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \tag{A.4}$$

Skup svih tangentnih vektora u točki $p \in M$ označavamo s T_pM.

Teorem 3. *Skup T_pM s operacijama zbrajanja vektora $u, v \in T_pM$ i množenja skalarom $\lambda \in \mathbb{R}$ definiranima kao:*

$$(u+v)(f) = u(f) + v(f), \quad (\lambda u)(f) = \lambda u(f) \tag{A.5}$$

za svaku $f \in C_p^\infty$ je vektorski prostor koji nazivamo tangentni prostor.

Budući da Liejeva grupa ima svojstvo da je za svaki $g \in G$ lijeva translacija $l_g : G \to G$ na g difeomorfizam s inverzom $l_{g^{-1}}$, postoji izomorfizam tangentnih prostora između elementa g i elementa identiteta e:

$$l_{g^*} = (l_g)_{*,e} : T_e G \to T_g G \tag{A.6}$$

Dakle, ako možemo opisati tangentni prostor $T_e G$, imamo zapravo opis bilo kojeg tangentnog prostora $T_g G$. Ako na tangentni prostor $T_e G$ dodamo kanonsku operaciju $[\,,\,]$, oni skupa čine Liejevu algebru Liejeve grupe G.

Definicija A.3. *Neka je K polje. Liejeva algebra nad K je vektorski prostor V nad K skupa s produktom $[\,,\,] : V \times V \to V$, koji je za vektorska polja X i Y iz V i funkciju f u točki $p \in V$ definiran kao:*

$$[X, Y]_p f = (X_p Y - Y_p X) f \tag{A.7}$$

i zadovoljava sljedeća svojstva:

1) bilinearnost:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \tag{A.8}$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y] \tag{A.9}$$

2) antikomutativnost:

$$[Y, X] = -[X, Y] \tag{A.10}$$

3) Jacobijev identitet:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \tag{A.11}$$

Dodatak B Spinori

U četverodimenzionalnim modelima prostorvremena, osim četverovektora, postoji i alternativni alat za proučavanje klasičnih teorija polja - dvokomponentni spinori. Osnovni objekt kod ovog pristupa je spin-prostor, dvodimenzionalni kompleksni vektorski prostor S sa simplektičkom formom ϵ, tj. antisimetričnom kompleksnom bilinearnom formom. Tri su osnovna svojstva spinora u 4-mnogostrukostima Lorentzovog tipa [14]:

1) Izomorfizam između spinskog prostora (S, ϵ_{AB}) i njegovog duala (S^*, ϵ^{AB}) preko simplektičke forme ϵ koja povezuje spinore s gornjim i donjim indeksima kao:

$$\epsilon^{AB}\phi_B = \phi^A \tag{B.1}$$

$$\phi^B\epsilon_{BA} = \phi_A \tag{B.2}$$

U matričnoj reprezentaciji imamo:

$$\epsilon_{AB} = \epsilon^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

pa lako možemo naći vezu $\phi^0 = \phi_1$ i $\phi^0 = \phi_1$. Za crtane spinske prostore (S', ϵ') vrijede analogne relacije.

2) Između necrtanih (S, ϵ_{AB}) i crtanih kompleksno konjugiranih $(S', \epsilon_{A'B'})$ spinskih prostora postoji anti-izomorfizam, označavamo ga povlakom te vrijedi:

$$\overline{\psi^A} \equiv \overline{\psi}^{A'} \tag{B.4}$$

$$\overline{\psi^{A'}} \equiv \overline{\psi}^{A} \tag{B.5}$$

Elementi spinskog prostora kompleksnom konjugacijom preslikavaju se u komplementarni spinski prostor. Zapisano po komponentama imamo:

$$\overline{w^A} \equiv \overline{w}^{A'} \equiv \begin{pmatrix} \overline{\alpha} \\ \overline{\beta} \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

kao i:

$$\overline{z^{A'}} \equiv \overline{z}^A \equiv \begin{pmatrix} \overline{\gamma} \\ \overline{\delta} \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

gdje crta iznad funkcija predstavlja njihovu kompleksnu konjugaciju. Kompleksnom konjugacijom simplektičke forme ona ostaje očuvana $\overline{\epsilon}_{A'B'} = \epsilon_{A'B'}$.

3) Izomorfizam između tangentnog prostora T u nekoj točki prostorvremena i tenzorskog produkta necrtanog spinskog prostora (S, ϵ_{AB}) i crtanog spinskog prostora $(S', \epsilon_{A'B'})$ glasi:

$$T \equiv (S, \epsilon_{AB}) \otimes (S', \epsilon_{A'B'}) \tag{B.8}$$

te ga izražavamo preko Infeld-van der Waerden simbola $\sigma^a{}_{AA'}$ i $\sigma_a{}^{AA'}$. Spinor $v^{AA'}$ izražavamo preko vektora v^a kao:

$$v^{AA'} = v^a \sigma_a{}^{AA'} \tag{B.9}$$

$$v^a = v^{AA'} \sigma^a{}_{AA'} \tag{B.10}$$

Za Infeld-van der Waerdenove simbole vrijede jednakosti:

$$\overline{\sigma_a}^{AA'} = \sigma_a{}^{AA'} \tag{B.11}$$

$$\sigma_a{}^{AA'} \sigma^b{}_{AA'} = \delta_a{}^b \tag{B.12}$$

$$\sigma_a{}^{AA'} \sigma^a{}_{BB'} = \epsilon_B{}^A \epsilon_{B'}{}^{A'} \tag{B.13}$$

$$\sigma_{[a}{}^{AA'} \sigma_{b]A}{}^{B'} = -\frac{i}{2} \epsilon_{abcd} \sigma^{cAA'} \sigma^d{}_A{}^{B'} \tag{B.14}$$

Formu ω_a pišemo preko spinora kao:

$$\omega_{AA'} \equiv \omega_a \sigma^a{}_{AA'} \tag{B.15}$$

a metriku:

$$\epsilon_{AB} \epsilon_{A'B'} \equiv \eta_{ab} \sigma^a{}_{AA'} \sigma^b{}_{BB'} \tag{B.16}$$

Zapišimo konačno spinor u prostorvremenu Minkowskog u koordinatnom sustavu preko 2×2 matrice:

$$x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

Pogledajmo još kako Maxwellova dva forma $F \equiv F_{ab} dx^a \wedge dx^b$ izgleda napisana kao spinor:

$$F_{AA'BB'} = \frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{BB'AA'}) = \phi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \phi_{A'B'}\epsilon_{AB} \tag{B.18}$$

gdje su:

$$\phi_{AB} \equiv \frac{1}{2} F_{AC'B}{}^{C'} = \phi_{(AB)} \tag{B.19}$$

$$\phi_{AB} \equiv \frac{1}{2} F_{AC'B}{}^{C'} = \phi_{(AB)} \tag{B.20}$$

Ovdje je upotrijebljen identitet:

$$T_{AB} - T_{BA} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB} T_C{}^C \tag{B.21}$$

kako bi izrazili $\frac{1}{2}(F_{AA'BB'} - F_{AB'BA'})$ i $\frac{1}{2}(F_{AB'BA'} - F_{BB'AA'})$. Oble zagrade predtavljaju simetrizaciju (AB), a uglate [AB] antisimetrizaciju. Antisimetrični dio ϕ_{AB} iščezava zbog antisimetričnosti F_{ab}:

$$\phi_{[AB]} = \frac{1}{4}\epsilon_{AB} F_{CC'}{}^{CC'} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\eta^{cd} F_{cd} = 0 \tag{B.22}$$

U Lorentzovom slučaju vrijedi još:

$$\overline{\phi_{AB}} \equiv \overline{\phi}_{A'B'} = \phi_{A'B'} \tag{B.23}$$

Svaki neiščezavajući vektor svjetlosnog tipa k^a možemo zapisati kao [33]:

$$k^a = \pm\kappa^A \overline{\kappa}^{A'} \tag{B.24}$$

Bibliography

[1] Gross D. J. The role of symmetry in fundamental physics. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol.93, no.25, 1996.`http://www.pnas.org/content/93/25/14256.full`

[2] Szekeres, P. A Course in Modern Mathematical Physics: Groups, Hilbert Space and Differential Geometry. Cambridge University Press, 2004.

[3] d'Inverno, R. Introduction to Einstein's relativity. Oxford University Press, 1992.

[4] Stephani, H.; Kramer, D.; MacCallum, M.; Hoenselaers, C.; Herlt, E. Exact Solutions of Einstein's FIeld Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[5] Herdeiro, C. A. R.; Radu E. Kerr black holes with scalar hair. Physical Review Letters 112 221101

[6] Smolić, I. Symmetry inheritance of scalar fields. Classical and Quantum Gravity. 32(2015) 145010

[7] Heusler, M. Black Hole Uniqueness Theorems. Cambridge University Press, 1996.

[8] Israel, W. Event horisons in static electrovac spacetimes. Common. Math. Phys., 8, 245-260, 1968.

[9] Müller zum Hagen, H.; Robinson, D. C.; Seifert, H.J. General relativity and Gravitation, 5, 61-72, 1974.

[10] Carter B. Black hole equilibrium states, Black holes. New York: Gordon and Breach, 1973.

[11] Poisson, E. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

[12] Wald, R. General Relativity. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1984.

[13] Tod P. Conditions for nonexistence of static or stationary, Einstein-Maxwell, non-inheriting black-holes. General Relativity and Gravitation 38 111-27, 2007.

[14] Esposito, G. Complex General Relativity. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[15] Cvitan, M.; Dominis Prester P.; Smolić I. Does three-dimensional electromagnetic field inherit the spacetime symmteries? Classical and Quantum Gravity. 33(2016) 077001

[16] O'Donnell, P. Introduction to 2-Spinors in General Relatiyity. World Scientific Publishing, 2003.

[17] Born M. On the Quantum theory of the Electromagnetic Field. Proceedings of the Royal Society of London, 1934.

[18] Born M.; Infeld L. Foundations of the New Field Theory. Proceedings of the Royal Society of London, 1934.

[19] Smolić I. Constraints on the symmetry noninheriting scalar black hole hair. Physical Review D 95,024016, 2017.

[20] Bekenstein, J. D. Nonexistence of baryon number for static black holes. Physical Review D 5, 1239-46, 1972.

[21] Bekenstein, J. D. Nonexistence of baryon number for black holes: II. Physical Review D 5, 2403-12, 1972.

[22] Gao S.; Wald R. M. The 'Physical process' version of the first law and the generalized second law for charged and rotating black holes. Physical Review D 64,084020, 2001.

[23] Smolić I. Killing horizons as equipotential hypersurfaces. Classical and Quantum Gravity 29, 2012.

[24] Ayón Beato, E.; García, A. Physical Review Letters 80,5056, 1998.

[25] Gárcia-Salcedo, R.; Bréton, N. Int. J. Mod. Phys. A 15, 4341, 2000.

[26] Elizalde, E.; Lidsey, J. E.; Nojiri, S.; Odintsov, S.D. Physical Letter B, 574, 1, 2003.

[27] Wyman M. Static spherically symmetric scalar fields in general relativity. Physical Review D 63 103510, 1981.

[28] Takeno H. The Theory of Spherically Symmetric Space-Times. Daigaku, Hiroshima, 1963.

[29] Tariq N.; Tupper B. O. J. A Class of algebraically general solutions of the Einstein-Maxwell equations for non-null electromagnetic fields. General Relativity and Gravitation 6, 1975.

[30] Michalski H.; Wainwright J. Killing vector fields and the Einstein-Maxwell field equations in general relativity. General Relativity and Gravitation 6, 289-318 , 1975.

[31] Tu L. W. An Introduction to Manifolds. Springer, 2010.

[32] Smolić, I. Diferencijalna geometrija u fizici (skripta). `http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/dgf.pdf`

[33] Stewart, J. Advanced General Relativity. Cambridge University Press, 1996.