SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Barić

PARTICIJE PRIRODNIH BROJEVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Zrinka Franušić

Zagreb, rujan 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bavimo se jednim naizgled jednostavnim matematičkim pojmom - *particijama prirodnih brojeva*. Particija nekog prirodnog broja n je način na koji ga možemo napisati kao zbroj prirodnih brojeva. Tako, na primjer, imamo sedam particija broja 5:

$$5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1,\ 1+1+1+1+1.$$

Budući je zbrajanje komutativno, da ne bi više puta prebrojili istu particiju, dogovor je da se particija zapisuje u padajućem poretku pribrojnika. Usprkos svojoj jednostavnoj definiciji, particije su bitan matematički objekt koji zadovoljava niz zanimljivih, neočekivanih i ne baš tako očitih svojstava. Teorija o particijama uključuje ozbiljnu matematiku iz područja teorije brojeva i kombinatorike, a razvija se već dugi niz godina. Koliko su particije zanimljiv matematički pojam govori i činjenica da su se njima bavili mnogi veliki matematičari kao što su *Euler*, *Legendre*, *Andrews*, *Schur*, *Bressoud*, *Franklin*, *Ramanujan*, *Alder*, ...

Matematika je znanost koja se razvija već tisućama godina. Tako su stari Grci zaslužni za pojam racionalnog broja, uvođenje urednog i sustavnog sklada u geometriji, te za ideju o izgradnji matematičke teorije zasnovane na aksiomatici i slijedu logičkih implikacija. Arapski i kineski matematičari su razvili lakši i učinkovitiji način zapisivanja brojeva, osnove algebre te računanje s nepoznanicama. Ulaskom u renesansu, počelo je ubrzano razvijanje matematike, koje rezultira novim i primjenjivim granama matematike kao što su analitička geometrija, diferencijalni i integralni račun, matematička logika i teorija skupova. Rapidni razvoj nastavlja se i danas, gdje mu poseban zamah daje interakcija računala i matematike. No, vratimo se na pojam particija. Taj je pojam toliko jednostavan da bi ga mogli predočiti i špiljskom čovjeku sljedećim crtežom:

```
o__              o__ o__
||               ||  ||
o__
||
```

```
o__              o__ o__o__
||               ||  ||  ||
o__
||
o__
||

o__ o__o__       o__ o__
||  ||  ||       ||  ||
                 o__
                 ||

o__              o__ o__o__
||               ||  ||  ||
o__
||
o__
||

o__ o__o__       o__ o__o__
||  ||  ||       ||  ||  ||
o__              o__
||               ||
```

Slika 1: Primjer crteža iz špilje

Crtež predstavlja simbolične slike četiriju životinja koje mogu biti poredane u redove i u stupce različitih duljina. Iz tog crteža mogu se iščitati različiti koncepti kao što su prebrojavanje, zbrajanje, jednakost, parnost i neparnost. Tablica 1 prikazuje kako bi danas mogli shvatiti i zapisati crtež iz špilje.

1 + 1	2
1 + 1 + 1 3	3 2 + 1
1 + 1 + 1 + 1 3 + 1	4 3 + 1

Tablica 1: Tablični prikaz crteža iz špilje

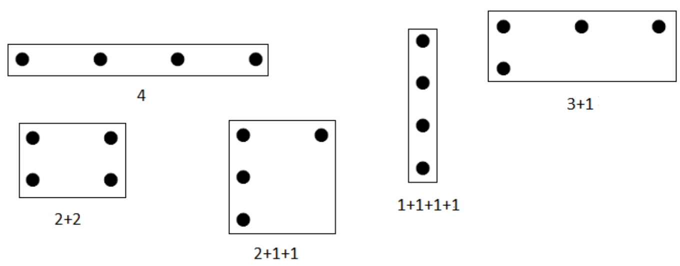
Prethodni zapis nije slučajno izabran. Naime, pribrojnici u lijevom stupcu, odnosno dijelovi particija su neparni, a u desnom stupcu su međusobno različiti. Broj prikaza brojeva 2, 3 i 4 s lijeve i desne strane je isti. Načinimo li analognu tablicu za brojeve 5 i 6, zaključak će ostati isti.

$1+1+1+1+1$	5
$3+1+1$	$4+1$
5	$3+2$
$1+1+1+1+1+1$	6
$3+1+1+1$	$5+1$
$3+3$	$4+2$
$5+1$	$3+2+1$

Tablica 2: Particije prirodnih brojeva 5 i 6

Svojstvo da je *broj particija od n čiji su pribrojnici neparni brojevi jednak broju particija od n čiji su pribrojnici međusobno različiti* vrijedi za svaki prirodan broj n. Prvi ga je dokazao Leonard Euler 1748. godine. pa je danas poznato pod nazivom *Eulerov identitet* iako je vrlo je vjerojatno da je bilo poznato i ranije.

Ovaj rad podijeljen je u tri poglavlja. U prvom definiramo pojam particije nekog prirodnog broja n, te uvodimo praktične oznake koje nam omogućavaju jednostavan zapis. Nadalje, iskazujemo i dokazujemo već spomenuti Eulerov identitet tako što opisujemo bijekciju između skupa svih particija broja n s neparnim pribrojnicima u skup svih particija od n s međusobno različitim dijelovima. To preslikavanje, odnosno njezin inverz, sastoji se od *spajanja* (zbrajanja), odnosno *cijepanja* (dijeljenja) pribrojnika particije. Na engleskom se te procedure popularno nazvaju *merge* i *split*. U istom poglavlju bavimo se i poopćenjem Eulerovog identiteta, to jest tražimo parove skupova prirodnih brojeva, tzv. *Eulerove parove* za koje bi vrijedio analogan identitet.



Slika 2: Ferrerovi dijagrami za particije broja 4

U drugom poglavlju bavimo se reprezentacijom particija. Naime, postoji više načina kako particiju nekog prirodnog broja možemo predočiti grafički. Osim zornog prikaza te reprezentacije nam omogućavaju jednostavne dokaze različitih kombinatornih identiteta. Najpoznatiji prikaz particije je tzv. *Ferrerov dijagram* (vidi Sliku 2). Uz to, dijagrami će nam omogućiti konstrukcije različitih bijektivnih preslikavanja između skupova particija.

Broj particija od n je rastuća funkcija, što nije teško otkriti. Koristeći Ferrerove dijagrame tu ćemo funkciju, odnosno niz ograničiti Fibonaccijevim brojem.

U posljednjem poglavlju prikazat ćemo još neke identitete za particije od kojih su neki zasluga velikog indijskog matematičara Srinivase Ramanujana.

Istaknimo kako je rad ispunjen nizom konkretnih primjera i slika koji olakšavaju razumijevanje teorije o particijama.

Poglavlje 1

Osnovno o particijama

1.1 Definicije osnovnih pojmova. Primjeri

Definicija 1.1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $l \in \mathbb{N}$ i $l \leq n$. **Particija broja** $n \in \mathbb{N}$ je uređenja l-torka prirodnih brojeva*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$$

za koju vrijedi

$$\lambda_i \geq \lambda_{i+1}, \; i = 1, \ldots, l-1,$$
$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i = n.$$

*Brojeve λ_i nazivamo **dijelovima particije**, a broj n je **težina particije**. Particiju λ težine n kratko zapisujemo kao*

$$\lambda \vdash n.$$

*Broj l nazivamo **duljinom particije** i označavamo s $l(\lambda)$. Skup svih particija $\lambda \vdash n$ označavamo s $\mathcal{P}_n$, to jest*

$$\mathcal{P}_n = \{\lambda : n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l, l \in \mathbb{N}\},$$

a broj svih mogućih particija od n s $p(n)$, odnosno

$$p(n) = |\mathcal{P}_n| .$$

*Uočimo da je s $n \mapsto p(n)$ dobro definirano preslikavanje s $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje nazivamo **funkcija particije**.*

Primjer 1.1.2. *Sve particije broja 7 duljine:*

- $l = 1 : (7)$;

- $l = 2 : (6, 1), (5, 2), (4, 3);$
- $l = 3 : (4, 2, 1), (3, 3, 1), (5, 1, 1), (3, 2, 2);$
- $l = 4 : (2, 2, 2, 1), (3, 2, 1, 1), (4, 1, 1, 1);$
- $l = 5 : (3, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1, 1);$
- $l = 6 : (2, 1, 1, 1, 1, 1);$
- $l = 7 : (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).$

Dakle,

$$p(7) = 15.$$

Iz same definicije particije broja jasno je da će funkcija particije $p(n)$ rasti. Radi se o funkciji koja uistinu brzo raste a prvih nekoliko njezinih vrijednosti navest ćemo u Tablici 3.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	15	...	20	...	28
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	...	176	...	627	...	3718

Tablica 3: Vrijednosti funkcije $p(n)$

Iz prethodne tablice može nam biti jasno da funkciju $p(n)$ ne možemo opisati nekom jednostavnom polinomijalnom ili eksponencijalnom formulom. Uskoro ćemo vidjeti da identiteti koji se pojavljuju u teoriji particija uključuju prebrojavanja particija koje zadovoljavaju neki specijalan uvjet. Broj takvih ćemo označiti s

$$p(n \,|\, [\text{ uvjet }]) \text{ ili } p(n \,|\, \lambda \in A),\ A \subset \mathcal{P}_n.$$

Posebno istaknuti podskupovi skupa svih particija $\mathcal{P}_n$ jesu oni čije se particije sastoje od neparnih dijelova, te oni čije se particije sastoje od međusobno različitih dijelova.

Definicija 1.1.3. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Skup svih particija $\lambda \vdash n$ čiji su dijelovi* neparni brojevi *označava se s $\mathcal{O}_n$, to jest*

$$\mathcal{O}_n = \{\lambda \in \mathcal{P}_n : \lambda_i \equiv 1 \pmod 2,\ i = 1, \ldots, l(\lambda)\}.$$

Skup svih particija $\lambda \vdash n$ čiji su dijelovi međusobno različiti brojevi *označava se s $\mathcal{D}_n$, to jest*

$$\mathcal{D}_n = \{\lambda \in \mathcal{P}_n : \lambda_i \neq \lambda_j,\ 1 \leq i < j \leq l(\lambda)\}.$$

Primjer 1.1.4. *Skupovi* $\mathcal{O}_n$ *i* $\mathcal{D}_n$ *za* $n = 3, 4$ *i* 5 *su:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_3 &= \{(3), (1, 1, 1)\},\\
\mathcal{D}_3 &= \{(3), (2, 1)\},\\
\mathcal{O}_4 &= \{(3, 1), (1, 1, 1, 1)\},\\
\mathcal{D}_3 &= \{(4), (3, 1)\},\\
\mathcal{O}_5 &= \{(5), (3, 1, 1)(1, 1, 1, 1, 1)\},\\
\mathcal{D}_5 &= \{(5), (3, 2), (4, 1)\}.
\end{aligned}$$

U Primjeru 1.1.4 vidimo da je kardinalitet skupova $\mathcal{O}_n$ i $\mathcal{D}_n$ jednak za $n = 3, 4, 5$, odnosno $|\mathcal{O}_n| = |\mathcal{D}_n|$. Zanimljivo je da uočeno svojstvo vrijedi i za svaki prirodan broj n, to jest broj particija od n čiji su dijelovi neparni brojevi jednak je broju particija čiji su svi dijelovi međusobno različiti brojevi. Opisano svojstvo poznato je pod nazivom *Eulerov identitet* a dokazat ćemo ga u odjeljku 1.2.

Nadalje, zanimljivo je i prebrojavati sve one particije nekog prirodnog broja određene fiksne duljine. Definiramo sljedeće:

Definicija 1.1.5. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, *te* $k \in \mathbb{N}$. *Broj svih particija* $\lambda \vdash n$ *duljine* k *označava se s* $p_k(n)$, *to jest*

$$p_k(n) = |\{\lambda \in \mathcal{P}_n \ : \ l(\lambda) = k\}|$$

Primjer 1.1.6. *Postoji sedam particija broja* 5*:*

$$(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1).$$

Lako možemo očitati vrijednosti funkcija $p_k(5)$ *za sve* $k = 1, \ldots, 5$*:*

$$p_1(5) = 1,\ p_2(5) = 2,\ p_3(5) = 2,\ p_4(5) = 1,\ p_5(5) = 1.$$

Sada ispišimo sve one particije kojima je najveći dio jednak k, to jest $\lambda_1 = k$*:*

1. $\lambda_1 = 1 : (1, 1, 1, 1, 1)$*;*

2. $\lambda_1 = 2 : (2, 2, 1)$*,* $(2, 1, 1, 1)$*;*

3. $\lambda_1 = 3 : (3, 2)$*,* $(3, 1, 1)$*;*

4. $\lambda_1 = 4 : (4, 1)$*;*

5. $\lambda_1 = 5 : (5)$.

Uočimo da je vrijednost funkcije $p_k(5)$ *jednaka broju particija od* 5 *čiji je najveći dio jednak* k *za sve* $k = 1, \ldots, 6$.

Primjer 1.1.7. *Postoji* 11 *particija broja* 6*:*

$$(6), (5, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 2, 2),$$

$$(3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1).$$

Kao u Primjeru 1.1.6 usporedit ćemo broj particija duljine k s brojem particija čiji je najveći dio jednak k. U tu svrhu koristimo sljedeću tablicu:

k	$p_k(6)$	particije za koje je $\lambda_1 = k$
1	1	$(1, 1, 1, 1, 1, 1)$
2	3	$(2, 2, 2)$, $(2, 2, 1, 1)$, $(2, 1, 1, 1, 1)$
3	3	$(3, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 1, 1)$
4	2	$(4, 2)$, $(4, 1, 1)$
5	1	$(5, 1)$
6	1	(6)

I u ovom slučaju lako se uvjeravamo da je vrijednost funkcije $p_k(6)$ jednaka broju particija od 6 *čiji je najveći dio jednak k za sve $k = 1, \dots, 6$.*

Svojstvo uočeno u primjerima 1.1.6 i 1.1.7 vrijedi i općenito.

Teorem 1.1.8. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$p_k(n) = p(n : n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_l, g(\lambda) = k),$$

pri čemu je $g(\lambda)$ najveći dio u particiji $\lambda \vdash n$.

Napomenimo da je najveći dio u particiji $\lambda \vdash n$, odnosno $g(\lambda)$, upravo jednak prvom dijelu u particiji λ_1 zbog dogovora da svaku particiju zapisujemo u padajućem poretku pribrojnika, odnosno dijelova. Iskazano svojstvo ćemo dokazati u poglavlju 2 (*Grafički prikaz particija*).

1.2 Eulerov identitet

U prethodnom odjeljku spomenuli smo *Eulerov identitet* koji kaže da je broj particija broja n čiji su dijelovi neparni brojevi jednak broju particija s različitim dijelovima te se uvjerili da vrijedi za neke vrijednosti broja n (vidi Primjer 1.1.4).

Teorem 1.2.1 (Eulerov identitet)**.** *Za svaki prirodni broj n, broj particija $\lambda \vdash n$ s neparnim dijelovima jednak je broju particija $\mu \vdash n$ s različitim dijelovima,*

$$p(n \,|\, [\textit{neparni dijelovi}]) = p(n \,|\, [\textit{različiti dijelovi}]). \tag{1.1}$$

za $n \geq 1$.

Razmislimo najprije na koje bismo sve načine mogli pristupiti dokazu prethodne tvrdnje. Najlakše bi bilo ako za funkcije $p(n\,|\,[\textit{neparni dijelovi}])$ i $p(n\,|\,[\textit{različiti dijelovi}])$ možemo naći eksplicitne formule. Odnosno, ako bismo mogli ustanoviti da za svaki prirodan n vrijedi $p(n\,|\,[\textit{neparni dijelovi}]) = f(n)$ gdje je f neka eksplicitna funkcija (npr. $f(n) = n^2 + 5n$) i ako bi isto vrijedilo za $p(n\,|\,[\textit{različiti dijelovi}]) = f(n)$, onda bi slijedila ispravnost identiteta. No, raspisivanjem vrijednosti ovih funkcija za prvih nekoliko prirodnih brojeva jasno je da tako nešto neće biti moguće:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n\,|\,[\textit{neparni dijelovi}])$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10

Dakle, vrijednosti iz tablica ne sugeriraju nikakvu jednostavniju funkciju koja bi riješila problem što i ne čudi jer bi na taj način uspjeli dobiti i jaču tvrdnju od one u Teoremu 1.2.1. Stoga se moramo okrenuti nekoj drugoj strategiji dokaza.

Općenito, ako želimo provjeriti da je broj elemenata skupa X jednak broju elemenata skupa Y, onda ne trebamo nužno naći točan broj elemenata tih skupova već je dovoljno ustanoviti da svaki element skupa X ima točno jednog "para" u skupu Y i obrnuto. (Primjer toga mogli smo vidjeti i na pećinskim crtežima, Slika 1). Jasno je da je opisano "uparivanje" zapravo konstrukcija jedne bijekcije $X \to Y$. Konkretno, ovaj identitet mogao bi se pokazati tako što konstruiramo bijekciju između skupova $\mathcal{O}_n$ (svih particija od n s neparnim dijelovima) i $\mathcal{D}_n$ (svih particija od n s različitim dijelovima). (Napomenimo da Euler nije koristio ovu ideju. On je koristio funkcije izvodnice koje predstavljaju vrlo jak alat, odnosno pokazuju se učinkovitijima za ovu svrhu.)

Na primjer, ako je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ i $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$, onda za tipičan primjer bijekcije s $X \to Y$ možemo uzeti

$$x_1 \mapsto y_1, \; x_2 \mapsto y_2, \; x_3 \mapsto y_3.$$

Štoviše, znamo da postoji točno $3! = 6$ bijekcija tročlanog skupa (to jest permutacija). No, ovo nam nije od velike pomoći da zaključimo kako bi konkretno definirali sliku neke particije. Particija prirodnog broja n je uređeni skup dijelova koji zbrojeni daju n, znači bijekcija između particija bi morala biti opisana u argumentima tih dijelova. Jednostavno preslikavanje koje si možemo lako predočiti bilo bi dijeljenje ("razdvajanje") parnog broja na dvije jednake polovice. Inverz ovog preslikavanja bio bi zbrajanje ("spajanje") dva jednaka dijela u novi dio koji je dvostruko veći.

Primjer 1.2.2. *U Primjeru 1.1.7 nabrojili smo sve particije broja* 6*. Neka je X skup svih onih particija čiji su svi dijelovi parni, to jest*

$$X = \{(6), (4, 2), (2, 2, 2)\}.$$

Budući da je svaki dio particije iz X oblika $2k$, njega možemo zamijeniti s $k + k$. Konkretno, imamo sljedeće

$$\begin{aligned} 6 &\to 3 + 3, \\ 4 + 2 &\to (2 + 2) + (1 + 1), \\ 2 + 2 + 2 &\to (1 + 1) + (1 + 1) + (1 + 1). \end{aligned}$$

Uočimo da smo na ovaj način dobili jednu bijekciju sa skupa X na skup

$$Y = \{(3, 3), (2, 2, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)\},$$

to jest na skup svih onih particija u kojima se svaki dio particije pojavljuje paran broj puta.

Prethodni primjer možemo poopćiti pa na taj način dobiti bijekciju sa skupa svih onih particija od n čiji su svi dijelovi parni na skup svih onih particija u kojima se svaki dio particije pojavljuje paran broj puta. Zaista,

$$(2\alpha_1, 2\alpha_2, \cdots, 2\alpha_m) \mapsto (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \alpha_m)$$

gdje je $(2\alpha_1, \cdots, 2\alpha_m) \in \mathcal{P}_n$ neka particija od n čiji su dijelovi parni. Jasno je da je i $(\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_m, \alpha_m) \in \mathcal{P}_n$ i da se svaki dio particije pojavljuje paran broj puta. Stoga vrijedi

$$p(n \,|\, [\textit{parni dijelovi}]) = p(n \,|\, [\textit{paran broj svakog dijela}]).$$

Uočimo da ako je n neparan, onda je očito $p(n \,|\, [\textit{parni dijelovi}]) = 0$.

Vratimo se na *Eulerov identitet* (1.1). Trebamo pronaći preslikavanje koje bi svakoj particiji od n čiji su svi dijelovi neparni brojevi pridružila particiju od n čiji su svi dijelovi međusobno različiti brojevi, i obratno.

Od neparnih dijelova do različitih dijelova: Koristit ćemo ideju iz Primjera 1.2.2, te ćemo od dva ista dijela particije dobiti jedan dvostruko veći i proceduru ponavljati sve dok se u particiji pojavljuju isti dijelovi. Dakle, procedura će stati u trenutku kada u particiji nema istih dijelova, pa je jasno da smo kao rezultat ove procedure dobili upravo particiju s različitim dijelovima. Ovu proceduru nazvat ćemo *spajanje* (ili *stapanje*), a na engleskom se naziva *merging*. Ideju ćemo ilustrirati u sljedećem primjeru.

Primjer 1.2.3. *Uzmimo particiju od* 13 *čiji su svi dijelovi neparni, npr.* $(3, 3, 3, 1, 1, 1, 1) \in \mathcal{P}_{13}$. *Vršimo sljedeće:*

$$\begin{aligned} 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 &\to (3 + 3) + 3 + (1 + 1) + (1 + 1) \\ &\to 6 + 3 + 2 + 2 \\ &\to 6 + 3 + (2 + 2) \\ &\to 6 + 3 + 4 \end{aligned}$$

Dobili smo particiju $(6, 3, 4) \in \mathcal{P}_{13}$ *čiji su svi dijelovi međusobno različiti.*

Dakle, opisali smo preslikavanje koje svakoj particiji $\lambda \vdash n$ čiji su dijelovi neparni brojevi pridruži particiju $\mu \vdash n$ čiji su dijelovi međusobno različiti, odnosno $f : \mathcal{O}_n \to \mathcal{D}_n$, $f(\lambda) = f(\mu)$. Ono što još moramo ustanoviti jest da je ustanovljeno preslikavanje f bijekcija. To ćemo ustvrditi tako što ćemo pokazati da f ima inverznu funkciju, to jest postoji $g : \mathcal{D}_n \to \mathcal{O}_n$ takva da je $f \circ g = 1_{\mathcal{D}_n}$ i $g \circ f = 1_{\mathcal{O}_n}$.

Od različitih dijelova do neparnih dijelova: Svaki parni dio particije "razbit" ćemo na dva dijela i proceduru ponavljati sve dok se u particiji pojavljuju parni dijelovi, odnosno kad ostanu samo neparni. Opisani postupak nazvat ćemo *cijepanje* (ili *dijeljenje*), odnosno na engleskom *splitting*. Pokažimo to na primjeru particije iz Primjera 1.2.3:

Primjer 1.2.4.

$$\begin{aligned} 6+3+4 &\to 6+3+(2+2) \\ &\to 6+3+2+2 \\ &\to (3+3)+3+(1+1)+(1+1) \\ &\to 3+3+3+1+1+1+1 \end{aligned}$$

U opisanim procedurama može se činiti proizvoljnim redosljed kojim dijelimo ili spajamo dijelove, no taj redoslijed neće utjecati na konačan rezultat. Nadalje, može se dogoditi da procedura ne daje particiju zapisanu u padajućem poretku dijelova. U tom slučaju potrebno ju je "presložiti" kao u sljedećem primjeru. Stoga bi naše procedure kao zadnji korak trebale sadžavati sortiranje dijelova particije od najvećeg prema najmanjem elementu.

Primjer 1.2.5. *Na particiju* $\lambda = (6, 5, 4) \in \mathcal{P}_{15}$ *opisana procedura izvršava sljedeće:*

$$\begin{aligned} (6,5,4) &\to (3,3,5,2,2) \\ &\to (3,3,5,1,1,1,1) \\ &\to (5,3,3,1,1,1,1). \end{aligned}$$

Budući da $(3, 3, 5, 1, 1, 1, 1) \notin \mathcal{P}_{15}$ *u zadnjem koraku morali smo sortirati particiju u silaznom poretku dijelova. Pogledajmo što radi inverzna procedura:*

$$\begin{aligned} (5,3,3,1,1,1,1) &\to (5,6,2,2) \\ &\to (5,6,4) \\ &\to (6,5,4). \end{aligned}$$

I ovom slučaju bilo je potrebno sortiranje u posljednjem koraku.

Primjer 1.2.6. *Odredit ćemo bijekcija s* $\mathcal{O}_6 \to \mathcal{D}_6$ *gdje su*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_6 &= \{(5,1),(3,3),(3,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)\}, \\ \mathcal{D}_6 &= \{(6),(5,1),(4,2),(3,2,1)\}. \end{aligned}$$

Primjenom procedure koja zbraja dva ista dijela particije dobivamo:

$$\begin{aligned} 5+1 &\to 5+1 \\ 3+3 &\to 6 \\ 3+1+1+1 &\to 3+2+1 \\ 1+1+1+1+1+1 &\to 2+2+2 \to 4+2. \end{aligned}$$

Dakle, bijekcija s $\mathcal{O}_6 \to \mathcal{D}_6$ *je dana s*

$$(5,1) \mapsto (5,1),\ (3,3) \mapsto (6),\ (3,1,1,1) \mapsto (3,2,1),\ (1,1,1,1,1,1) \mapsto (4,2).$$

Primjer 1.2.7. *Na particiju* $\lambda = (8,4,2) \in \mathcal{P}_{14}$ *opisana procedura cijepanja izvršava sljedeće:*

$$\begin{aligned} (8,4,2) &\to (4,4,2,2,1,1) \\ &\to (2,2,2,2,1,1,1,1,1,1) \\ &\to (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1). \end{aligned}$$

Uočimo kako smo cijepanjem dane particije po opisanoj proceduri dobili particiju čiji su svi dijelovi jednaki 1*. Možemo primijetiti kako su dani dijelovi početne particije zapravo potencije broja* 2*. Ovo vrijedi i općenito. Prema tome, svaka particija od n oblika*

$$\lambda = (2^{\alpha_1}, 2^{\alpha_2}, \dots, 2^{\alpha_m}),$$

pri čemu su $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m$ *i* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}_0$*, preslikava se u particiju oblika* $(1, \dots, 1)$.

Analogno kao što smo dokazali Eulerov identitet (1.1) možemo pokazati i sljedeću tvrdnju:

Propozicija 1.2.8. *Za prirodan broj* $n \geq 1$ *broj particija* $\lambda \vdash n$ *čiji su dijelovi neparni i duljina particije* $l(\lambda)$ *je paran broj (tj.* $l(\lambda) \equiv 0 \pmod 2$*) jednak je broju particija od n kojima su svi dijelovi različiti a neparnih dijelova ima paran broj, tj.*

$$p(n \,|\, [\text{ neparni dijelovi, duljina je parna}]) = \\ p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi, broj neparnih dijelova je paran }]).$$

Dokaz. Uočimo da nakon svakog koraka u proceduri spajanja se broj neparnih dijelova smanjuje za neki višekratnik od 2 ili ih ostaje jednako mnogo ukoliko su svi različiti. Nadalje, nakon jednog koraka u proceduri dijeljenja broj neparnih dijelova se povećava za neki višekratnik od 2 ili ih ostaje jednako mnogo ukoliko smo dijeljenjem dobili parne brojeve. Stoga se "parnost" neparnih dijelova prilikom vršenja spajanja i cijepanja ne mijenja. □

Primjer 1.2.9. *Procedura spajanja particiju* $(5, 5, 5, 5, 3, 3, 1, 1) \in \mathcal{P}_{28}$ *koja ima paran broj neparnih dijelova preslika u*

$$\begin{aligned}(5, 5, 5, 5, 3, 3, 1, 1) &\to (10, 10, 6, 2)\\ &\to (20, 6, 2).\end{aligned}$$

Dakle, dobili smo particiju $(20, 6, 2)$ *s različitim dijelovima koja nema neparnih dijelova. Na isti način za* $(5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 1) \in \mathcal{P}_{28}$ *dobivamo:*

$$\begin{aligned}(5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 1) &\to (10, 5, 6, 6, 1)\\ &\to (10, 5, 12, 1)\\ &\to (12, 10, 5, 1),\end{aligned}$$

odnosno particiju s različitim dijelovima koja ima dva neparna dijela.

Napomenimo da je Propozicija 1.2.8 "smislena" samo ako je n paran broj. Odnosno, u slučaju kada je n neparan broj particija $\lambda \vdash n$ u kojima se pojavljuje paran broj neparnih dijelova jednak je nuli (i naravno isto vrijedi za broj particija u kojima su svi dijelovi različiti a neparnih dijelova ima parno).

Uočimo da smo u dokazu Propozicije 1.2.8 zapravo pokazali i sljedeći identitet koji dobivamo zamjenom "parne duljine" neparnom.

Propozicija 1.2.10. *Za prirodan broj* $n \geq 1$ *broj particija* $\lambda \vdash n$ *čiji su dijelovi neparni i duljina particije* $l(\lambda)$ *je neparan broj (tj.* $l(\lambda) \equiv 1 \pmod 2$*) jednak je broju particija od* n *kojima su svi dijelovi različiti a neparnih dijelova ima neparan broj, tj.*

$$p(n \,|\, [\text{ neparni dijelovi, duljina je neparna}]) =$$
$$p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi, broj neparnih dijelova je neparan }]).$$

Primjer 1.2.11. *Procedura cijepanja* $(10, 7, 6, 5, 1) \in \mathcal{P}_{29}$ *koja ima neparan broj neparnih dijelova preslikava u*

$$\begin{aligned}(10, 7, 6, 5, 1) &\to (5, 5, 7, 3, 3, 5, 1)\\ &\to (7, 5, 5, 5, 3, 3, 1),\end{aligned}$$

odnosno u particiju koja ima neparno (7) neparnih dijelova.

1.3 Eulerovi parovi

Kao što smo vidjeli u prethodnom odjeljku procedura spajanja i cijepanja omogućava nam da ustanovimo jesu li neki podskupovi skupa $\mathcal{P}_n$ jednakobrojni. Možemo uočiti da se radilo o tipičnim podskupovima koji s jedne strane sadrže particije čiji su dijelovi iz nekog skupa A, a s druge, particije čiji su dijelovi međusobno različiti te iz nekog skupa B. Krajem 60-tih godina prošlog stoljeća, američki matematičar G. E. Andrews je predložio da se par skupova A i B za koje vrijedi identitet tipa Eulerovog (1.1) nazove *Eulerov par*. Precizno taj pojam definiramo na sljedeći način.

Definicija 1.3.1. *Neka su M i N neprazni podskupovi skupa $\mathbb{N}$. Kažemo da je (M, N)* ***Eulerov par*** *ako je za svaki prirodni broj n, broj particija $\lambda \vdash n$ s dijelovima iz skupa M jednak broju particija $\mu \vdash n$ s različitim dijelovima iz skupa N.*

Broj particija čiji su svi dijelovi elementi skupa M ćemo kraće zapisati kao

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } M]),$$

a broj particija čiji su svi dijelovi elementi skupa N i međusobno su različiti kao

$$p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } N]).$$

Dakle, prema definiciji $(M, N) \subseteq \mathbb{N}^2$ je Eulerov par ako je

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } M]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } N]),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tipičan primjer Eulerovog para daje nam Teorem 1.2.1.

Primjer 1.3.2. *Eulerov identitet (1.1) možemo zapisati kao*

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } \{1, 3, 5, \ldots\}]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } \{1, 2, 3, \ldots\}]),$$

pa je jasno da skup neparnih brojeva $M = \{1, 3, 5, \ldots\}$, i skup prirodnih brojeva, $N = \mathbb{N}$, predstavljaju Eulerov par (M, N).

Poopćenjem Primjera 1.2.7 dobivamo sljedeći rezultat:

Propozicija 1.3.3. *Za svaki prirodni broj n, broj particija s dijelovima jednakim 1 je jednak broju particija s različitim dijelovima koje su potencije broja 2, tj.*

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } \{1\}]) = p(n \,|\, [\text{ dijelovi su različite potencije broja } 2]). \tag{1.2}$$

Dokaz. Jedina particija od n čiji su svi dijelovi jednaki 1 je

$$\lambda = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{=n}.$$

Procedura stapanja će parovima jedinica pridružiti dvojke, parovima dvojki četvorke, parovima četvorki osmice itd. Stati će kad svi dijelovi budu različiti, a to je upravo nakon $\lfloor \log_2 n \rfloor$ koraka. Lako je za ustanoviti da smo na ovaj način zapravo zapisali broj n u binarnom brojevnom sustavu, odnosno u sustavu s bazom 2, tj.

$$n = 2^k + b_{k-1}2^{k-1} + b_{k-2}2^{k-2} + \cdots + b_1 2 + b_0, \tag{1.3}$$

gdje je $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$ i $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \{0, 1\}$.

Obrat je očit jer ako na particiju od n čiji su dijelovi jednaki potencijama broja 2 primijenimo proceduru cijepanja, onda dobivamo particiju $(1, 1, \ldots, 1)$. $\square$

Primjer 1.3.4. *Identitet (1.2) možemo zapisati kao*

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } \{1\}]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\}])$$

pa stoga uređeni par skupova $(\{1\}, \{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\})$ *predstavlja Eulerov par.*

S obzirom na to da u relaciji (1.2) lijeva strana ima vrijednost 1, pokazali smo i da svaki prirodan broj ima jedinstvenu particiju čiji su dijelovi različite potencije broja 2, odnosno postoje jedinstveni $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \{0, 1\}$ za koje vrijedi (1.3). Taj prikaz predstavlja *binarnu reprezentaciju* broja n, odnosno kraće pišemo

$$n = (b_k b_{k-1} \cdots b_0)_2,$$

pri čemu je $b_k = 1$. Na primjer, $1 = 2^0 = (1)_2$, $2 = 2^1 = (10)_2$, $3 = 2^1 + 2^0 = (11)_2$, $4 = 2^2 = (100)_2$, $5 = 2^2 + 2^0 = (101)_2$, $6 = 2^2 + 2^1 = (110)_2$, $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = (111)_2$, itd.

Primjer 1.3.5. *Lako možemo dobiti nove Eulerove parove od prijašnjih tako da particije iz Propozicije 1.3.3 pomnožimo prirodnim brojem c. Na primjer, za* $c = 3$ *vrijedi*

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } \{3\}]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } \{3, 6, 12, 24, \ldots\}]),$$

pa dobivamo $(\{3\}, \{3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots\})$.

Sada ćemo se detaljnije pozabaviti istraživanjem Eulerovih parova (M, N). Odnosno, zanima nas hoće li za proizvoljan podskup $M \subseteq \mathcal{P}_n$ procedura stapanja/cijepanja uvijek dovesti do skupa N tako da (M, N) predstavlja Eulerov par. Lako možemo vidjeti da tako što neće biti uvijek moguće. Na primjer, ako M sadrži particije $3 + 3 + 3 + 3$ i $6 + 6$ onda njihovim spajanjem dobivamo istu particiju 12:

$$3 + 3 + 3 + 3 \to 6 + 6 \to 12.$$

Znači, dvije različite particije su se preslikale u istu, što znači da naše pridruživanje nije bijektivno. Uočimo da će se ista situacija ponoviti čim u skupu M dozvolimo da se pojave elementi a i $2^k a$, $k \in \mathbb{N}$. Općenito, vrijedi sljedeći teorem o Eulerovim parovima.

Teorem 1.3.6. *Neka je M podskup skupa prirodnih brojeva takav da niti jedan element u skupu M nije umnožak potencije broja 2 i nekog elementa skupa M, te neka je N skup koji sadrži sve elemente iz M i sve umnoške elemenata iz M s potencijama broja 2. Tada vrijedi*

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } M]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } N]),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, odnosno (M, N) je Eulerov par.

Pretpostavlja se da je do tvrdnje prethodnog teorema prvi došao židovski matematičar Issai Schur s početka 20-tog stoljeća, no to nigdje nije službeno objavio. Godine 1969. teorem je iskazao i dokazao G. E. Andrews.

Primjer 1.3.7. *Skupovi $M = \{1, 3\}$ i $N = \{1, 3, 2, 6, 4, 12, 8, 24, \ldots, 2^k, 3 \cdot 2^k, \ldots\}$ čine Eulerov par (M, N).*

No, zanimljivo je pitati se ima li još Eulerovih parova koji nisu obuhvaćeni Teoremom 1.3.6. Za početak ćemo za konkretan skup, i to onaj koji ne zadovoljava uvjete prethodnog teorema, ustanoviti da ne postoji skup s kojim bi on činio Eulerov par.

Primjer 1.3.8. *Tipičan skup koji nije "pokriven" Teoremom 1.3.6 je skup $M = \{1, 3, 6\}$ budući je 6 umnožak broja 3 i broja 2, tj. potencije 2^1. Pokušajmo konstruirati odgovarajući skup N tako da je (M, N) Eulerov par. Vrijednost funkcije p u slučaju da su svi dijelovi particije u M za prvih nekoliko prirodnih brojeva je:*

n	1	2	3	4	5	6
$p(n \,|\, [\text{dijelovi u } \{1, 3, 6\}])$	1	1	2	2	2	4

Pokušajmo konstruirati pripadni skup N za koji je

$$p(n \,|\, [\text{ dijelovi u } M]) = p(n \,|\, [\text{ različiti dijelovi u } N]), \tag{1.4}$$

za sve $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Pri tome nećemo koristiti proceduru spajanja već pokušati uspostaviti neko drugo bijektivno preslikavanje.

$n = 1$: $\mathcal{P}_1 = \{1\}$ *pa je* $N = \{1\}$.

$n = 2$: *Postoji samo jedna particija od* 2 *s dijelovima u* M *i to je* $1 + 1$ *i samo jedna particija od* 2 *s različitim dijelovima:* 2*. Stoga ako želimo da (1.4) bude zadovoljen za* $n = 1, 2$*, onda* $N = \{1, 2\}$.

$n = 3$: *Postoje dvije particije od* 3 *s dijelovima iz* M*:* $1+1+1$ *i* 3*, te dvije particije s različitim dijelovima:* $2 + 1$ *i* 3*. Stoga ako želimo da (1.4) bude zadovoljen za* $n = 1, 2, 3$*, onda* $N = \{1, 2, 3\}$.

$n = 4$: *Postoje dvije particije od 4 s dijelovima iz* M*:* $1 + 1 + 1 + 1$ *i* $3 + 1$ *i dvije particije s različitim dijelovima:* 4 *i* $3 + 1$*. Stoga (1.4) vrijedi za* $n = 1, 2, 3, 4$ *ako je* $N = \{1, 2, 3, 4\}$.

$n = 5$: *Postoje dvije particije od* 5 *s dijelovima iz* M*:* $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ *i* $3 + 1 + 1$ *i dvije particije s različitim dijelovima iz skupa* $N = \{1, 2, 3, 4\}$*:* $4 + 1$ *i* $3 + 2$*. Stoga ostaje* N *isti. Ako bi dodali broj* 5 *skupu* N*, tada bi imali još jednu particiju s različitim dijelovima:* 5*, pa (1.4) ne bi vrijedilo za* $n = 5$.

$n = 6$: *Postoje četiri particije od* 6 *s dijelovima iz* M*:* $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$*,* $3 + 1 + 1 + 1$*,* $3 + 3$*, te* samo *tri particije s različitim dijelovima iz skupa* $N = \{1, 2, 3, 4, 6\}$*:* $4 + 2$*,* $3 + 2 + 1$*,* 6*. Iako postoji još jedna particija s različitim dijelovima* $5 + 1$*, broj* 5 *ne smije biti u* N *zbog prethodne točke. Stoga ne možemo naći skup* N *takav da vrijedi (1.4) za* $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Primjer 1.3.8 ukazuje da nije za očekivati da ćemo naći drugih Eulerovih parova osim onih opisanih u Teoremu 1.3.6. Štoviše, mogu se pokazati sljedeće tvrdnje koje to dokazuju:

Propozicija 1.3.9. *Za dan podskup* $M \subseteq \mathbb{N}$ *postoji najviše jedan skup* $N \subseteq \mathbb{N}$ *takav da je* (M, N) *Eulerov par.*

Propozicija 1.3.10. *Neka je* $M \subseteq \mathbb{N}$ *i* $a, 2^k a \in M$*, za neke* $a, k \in \mathbb{N}$*. Tada ne postoji* $N \subseteq \mathbb{N}$ *takav da je* (M, N) *Eulerov par.*

Vrijedi i sljedeća karakterizacija Eulerovih parova.

Propozicija 1.3.11. *Skupovi* $M, N \subseteq \mathbb{N}$ *čine Eulerov par* (M, N) *ako i samo ako je* $M = N \backslash 2N$ *i* $2N \subset N$.

Poglavlje 2

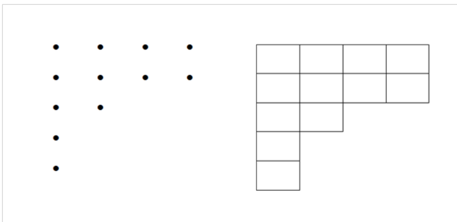
Grafički prikaz particija

Grafički prikaz particija nije samo bio zanimljiv špiljskom čovjeku o kojem smo govorili u Uvodu, već se mnoga svojstva particija upravo najbolje dokazuju grafički.

2.1 Ferrerovi dijagrami

Ovdje ćemo pokazati kako svakoj particiji pridružujemo graf, odnosno dijagram. Najčešće se radi *Ferrerovov dijagram*, odnosno *Ferrerova ploča*. Najjednostavnije ih je objasniti na primjeru.

Primjer 2.1.1. *Particiju* $(4, 4, 2, 1, 1)$ *možemo grafički reprezentirati na sljedeći način:*



Slika 3: Ferrerov dijagram i Ferrerova ploča za particiju $\lambda = (4, 4, 2, 1, 1)$

Lijevi dijagram sa Slike 3, tj. dijagram s točkicama, zove se *Ferrerov dijagram*, a desni, tj. dijagram s kvadratićima, zove se *Ferrerova ploča* ili *Youngov dijagram*. U ovom radu pretežno ćemo se služiti Ferrerovim dijagramom.

Definicija 2.1.2. *Neka je $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ particija od n, $n \in \mathbb{N}$. **Ferrerov dijagram** je skup svih cjelobrojnih uređenih parova (p, q) takvih da je*

$$1 \leq p \leq \lambda_i, \; q = k + 1 - i,$$

za sve $i = 1, 2, \ldots, k$.

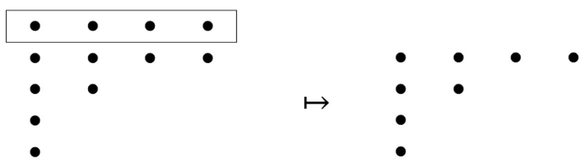
Dakle, Ferrerov dijagram za particiju $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ je skup

$$\{\underbrace{(1,1), \ldots, (\lambda_k, 1)}_{\text{1. red točkica}}, \underbrace{(1,2), \ldots, (\lambda_{k-1}, 2)}_{\text{2. red točkica}}, \ldots, \underbrace{(1,k), \ldots, (\lambda_1, k)}_{k\text{-ti red točkica}}\}.$$

Ukoliko svaku od točkica u Ferrerovom dijagramu zamijenimo jediničnim kvadratom s vrhovima (p, q), $(p + 1, q)$, $(p + 1, q + 1)$, $(p, q + 1)$, dobit ćemo Ferrerovu ploču.

U ovom poglavlju obraditi ćemo mnogo različitih transformacija tj. preslikavanja *Ferrerovih dijagrama*. Ako je takvo preslikavanje invertibilno, tada je bijekcija i može se koristiti za dokaz određenog identiteta.

Primjer 2.1.3. *Uzmimo graf particije* $(4, 4, 2, 1, 1)$ *i odstranimo mu gornji red.*



Slika 4: $(4, 4, 2, 1, 1) \mapsto (4, 2, 1, 1)$

Dakle, na ovaj način smo jednoj particiji od 12 *čiji je najveći dio jednak* 4 *pridružili particiju od* 8 *čiji su svi dijelovi manji ili jednaki* 4. *Očito je da postoji i inverz ovog preslikavanja.*

Kao što je opisano u prethodnom primjeru, izbacivanjem gornjeg reda u nekom Ferrerovom dijagramu dobivamo novi Ferrerov dijagram. Ako je uklonjen red duljine r, onda svi ostali redovi novog grafa imaju duljinu manju ili jednaku r. Obrnuto, svakom Ferrerovom dijagramu čiji su svi redovi duljine manje ili jednake r možemo dodati red duljine r na vrh te dobiti Ferrerov dijagram čiji je prvi (najveći) dio jednak upravo r. Stoga, dolazimo do sljedećeg identiteta.

Propozicija 2.1.4. *Za sve prirodne brojeve n i r, $r \leq n$ vrijedi:*

$$p(n \,|[\text{ najveći dio je } r]) = p(n - r \,|[\text{ svi dijelovi } \leq r]).$$

Dokaz. Provest ćemo i formalan dokaz dane tvrdnje baziran na ideji prikazanoj u Primjeru 2.1.3. Uzmimo

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathcal{P}_n$$

pri čemu je $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, $\lambda_1 = r$. Odstranjivanjem gornjeg reda u pripadnom Ferrerovom dijagramu dobivamo:

$$\lambda \mapsto \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{k-1})$$

pri čemu je

$$\mu_1 = \lambda_2, \ \ldots, \mu_{k-1} = \lambda_k.$$

Dakle, $\mu_1 + \cdots + \mu_{k-1} = \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n - r$, pa je $\mu \in \mathcal{P}_{n-r}$.

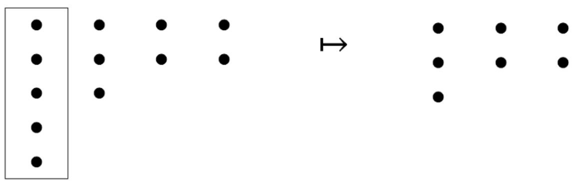
Obrat, neka je $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l) \in \mathcal{P}_{n-r}$ takva da je $\mu_1 \leq r$. Dodavanjem gornjeg reda duljine r u pripadni Ferrerov dijagram od μ dobivamo

$$\mu \mapsto r + \mu_1 + \cdots + \mu_l = n$$

Uz oznake, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l+1})$ pri čemu je $\lambda_1 = r, \lambda_2 = \mu_1, \ldots, \lambda_{l+1} = \mu_l$ lako možemo uočiti da je $\lambda \in \mathcal{P}_n$ čiji je najveći dio jednak r. Time je dokazan naveden identitet. □

Analogno, možemo proučavati uklanjanje prvog stupca iz Ferreovog dijagrama.

Primjer 2.1.5. *Uklonimo prvi stupac u grafičkom prikazu particije* $(4, 4, 2, 1, 1)$*: Dakle,*



Slika 5: $(4, 4, 2, 2, 1) \mapsto (3, 3, 1)$

particiji od 13 *koja ima* 5 *dijelova (odnosno duljina joj je* 5*) pridružili smo particiju od* $13 - 5 = 8$ *koja ima duljinu manju ili jednaku* 5.

Općenito, uklanjanjem stupca u nekom Ferrerovom dijagramu dobivamo novi Ferrerov dijagram u kojem ni jedan stupac nije dulji od odstranjenog stupca. Budući da je duljina prvog stupca jednaka broju redova što je ujedno i broj dijelova particije, ova transformacija dijagrama nas dovodi do sljedećeg identiteta.

Propozicija 2.1.6. *Za sve prirodne brojeve n i m, $m \leq n$ vrijedi:*

$$p(n \mid [\text{ } m \text{ dijelova }]) = p(n - m \mid [\text{ najviše moguće } m \text{ dijelova }]).$$

Dokaz. Neka je $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \in \mathcal{P}_n$. Odstranjivanjem prvog stupca u dijagramu od λ imamo:

$$\lambda \mapsto (\lambda_1 - 1) + \cdots + (\lambda_m - 1) = n - m.$$

Uočimo da $(\lambda_1 - 1) + \cdots + (\lambda_m - 1)$ ne mora predstavljati particiju broja $n - m$ jer se može dogoditi da je $\lambda_i - 1 = 0$, $\lambda_{i+1} - 1 = 0$, ..., $\lambda_m - 1 = 0$, no izbacivanjem takvih "dijelova" dobivamo particiju

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{m'}) = (\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_{m'} - 1) \in \mathcal{P}_{n-m},\ l(\mu) = m' \leq m.$$

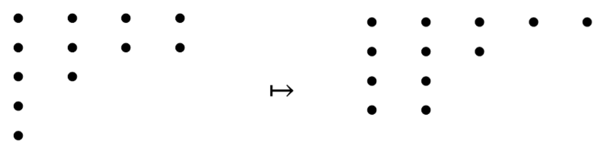
Obrat, uzmimo $\mu \in \mathcal{P}_{n-m}, \mu = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, $k \leq m$. Dodavanjem stupca duljine m dobivamo

$$m = (\lambda_1 + 1) + \cdots + (\lambda_k + 1) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{m-k}$$

particiju od n koja ima točno m dijelova. □

2.2 Konjugirane particije

Nacrtamo li *Ferrerov dijagram* na prozirnoj foliji i slučajno ga okrenemo licem dolje na projektoru i zarotiramo za 90°, stvar koja se često događa predavačima matematike, dobivena slika će i dalje prikazivati *Ferrerov dijagram*. Predavač je slučajno napravio transformaciju zvanu konjugacijom koju možemo vidjeti na Slici 6. Tim postupkom došlo je do zamjene redaka i stupaca u dijagramu.



Slika 6: Konjugacija particije $(4, 4, 2, 1, 1)$

Uočimo kako smo iz particije od n:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n,\ \lambda_1 = r$$

zrcaljenjem i rotacijom za 90°, tj. zamjenom stupaca i redaka u dijagramu dobili:

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \text{ broj dijelova koji su } \geq 1, \\ \mu_2 &= \text{ broj dijelova koji su } \geq 2, \\ &\vdots \\ \mu_r &= \text{ broj dijelova koji su } \geq r. \end{aligned}$$

Kako je $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_r \geq 1$, slijedi da je $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ jedna particija od n. Time je opravdana sljedeća definicija:

Definicija 2.2.1. *Kažemo da je particija μ nastala* ***konjugiranjem*** *particije λ ako je Ferrerov dijagram od μ dobiven zamjenom stupaca i redaka u Ferrerovom dijagramu particije λ. Još kažemo da μ* ***konjugirana*** *particija particije λ i pišemo* $\mu = \lambda^*$.

Dakle, retci u grafu particije λ^* predstavljaju stupce u grafu od λ i obratno, stupci u grafu particije λ^* predstavljaju retke u grafu od λ.

Primjer 2.2.2. *Uzmimo particiju* $(4, 4, 2, 1, 1)$ *i prikažimo ju tako da umjesto Ferrerovog dijagrama koristimo matricu tipa* $(5, 4)$ *(gdje je* 5 *duljina particije a* 4 *njen najveći dio) i to na način da ćemo umjesto točkica staviti jedinice, a na ostala mjesta nule. Time dobivamo sljedeću matricu:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transponirana matrica matrice A jednaka je

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

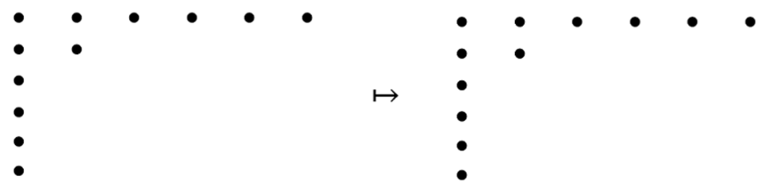
Lako možemo uočiti kako konjugacija particije zapravo odgovara transponiranju odgovarajuće matrice.

Budući da broj redaka u Ferrerovom dijagramu odgovara duljini particije a broj stupaca odgovara najvećem dijelu λ_1, vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.2.3. *Za sve prirodne brojeve $m \leq n$ vrijedi:*

$$p(n \,|\, [\text{ duljine } m]) = p(n \,|\, [\text{ najveći dio je } m]).$$

Primjer 2.2.4. *Na Slici* 7 *prikazana je konjugaciju particije* $\lambda = (6, 2, 1, 1, 1, 1)$. *Možemo uočiti kako smo dobili istu particiju, pa prema tome* $\lambda^* = (6, 2, 1, 1, 1, 1)$.



Slika 7: Konjugacija particije $\lambda = (6, 2, 1, 1, 1, 1)$

Prethodni primjer nam je skrenuo pozornost na one particije koje ne mijenjaju dijagram prilikom konjugacije. Analogija tomu su simetrične matrice.

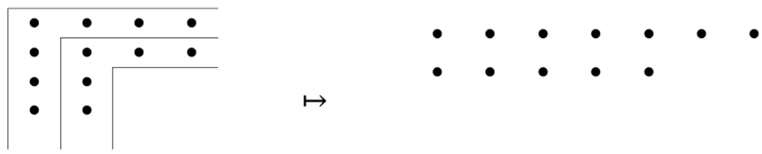
Definicija 2.2.5. *Kažemo da je particija* ***samokonjugirana*** *ako je jednaka svojoj konjugiranoj particiji tj. ako konjugacijom dobivamo isti Ferrerov dijagram.*

Primjer 2.2.6. *Sve samokonjugirane particije od* 12 *su:*

$$(6, 2, 1, 1, 1, 1),\ (5, 3, 2, 1, 1),\ (4, 4, 2, 2).$$

U sljedećem primjeru opisat ćemo kako možemo transformirati Ferrerov dijagram samokonjugirane particije.

Primjer 2.2.7. *Zadana je samokonjugirana particija* $(4, 4, 2, 2)$. *Spajanjem prvog retka i stupca načinimo prvi redak u novom dijagramu koji će imati* $4 + (4 - 1) = 7$ *točkica. Postupak ponovimo s drugim retkom i stupcem. Dobivamo redak dug* $(4-1)+((4-1)-1) = 5$.



Slika 8: Spajanje stupca i retka u jedan red

Samokonjugirane particije su simetrične s obzirom na glavnu dijagonalu te uvijek spajamo red sa stupcem iste dužine i pošto imaju jednu zajedničku točku, rezultat je uvijek red neparne duljine. Iz Slike 8 *možemo uočiti kako su dobiveni redovi različitih duljina. Ovdje smo opisali jednu prirodnu transformaciju samokonjugirane particije u particiju s različitim neparnim dijelovima.*

Možemo krenuti i obrnuto, od particije s različitim neparnim dijelovima. Svaki neparni dio particije je duljine $2m + 1$ pa ga možemo presložiti u redak i stupac duljine m sa zajedničkim vrhom. Ova bijekcija nam dokazuje još jedan identitet.

Teorem 2.2.8. *Za svaki prirodni broj n vrijedi:*

$$p(n \,|\, [\text{ samokonjugirane}]) = p(n \,|\, [\text{ različiti neparni dijelovi }])$$

2.3 Gornja ograda od $p(n)$

Jedno od pitanja koje nam se nameće proučavajući particije jest kako brzo raste funkcija $p(n)$ s rastom varijable n. Ponaša li se $p(n)$ kao polinom, eksponencijalna funkcija ili nešto treće? Zapravo, kako možemo biti sigurni da je $p(n)$ monotono rastuća funkcija? Odgovori na ova pitanja su složeni ali mi ćemo u ovom odjeljku vidjeti kako malo "igranja" s Ferrerovim dijagramima može dovesti do zanimljivih, barem djelomičnih odgovora.

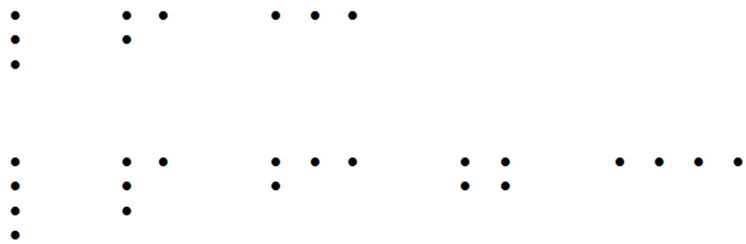
Pokažimo prvo da je $p(n)$ strogo rastuća funkcija. Drugim riječima, želimo pokazati

$$p(n) > p(n-1)$$

za sve $n \geq 2$.

Primjer 2.3.1. *Usporedimo dijagrame za particije za n* = 3 *i* 4.

Uočimo da su prve tri particije od n = 4 *dobivene dodavanjem jedne točke ispod zadnjeg reda dijagrama particije za n* = 3. *Zbog toga smo sigurni da prve tri particije*



imaju barem jedan dio jednak 1*, a preostale ne sadrže dio jednak* 1*. Dakle, konkretno smo pokazali*

$$p(4) = p(3) + p(4 \mid \textit{ svaki dio } > 1) > p(3).$$

Generalizacijom prethodnog primjera možemo zaključiti sljedeće. Ako svaki dijagram particije od $n-1$ proširimo dodavanjem jedne točke ispod zadnjeg reda dobit ćemo dijagram particije od n kojem je barem jedan dio jednak 1. I obrnuto, ako u dijagramu particije od n koja ima barem jedan dio jednak 1 obrišemo zadnji redak, dobit ćemo particiju od $n-1$. Stoga možemo zaključiti da vrijedi sljedeće:

$$p(n) = p(n-1) + p(n \mid \text{ svaki dio } > 1) > p(n-1) \tag{2.1}$$

za sve $n \geq 2$. Prema tome, $p(n)$ je strogo rastuća funkcija.

Sljedeći zadatak je odrediti brzinu rasta funkcije $p(n)$, odnosno pokušati odrediti neku "poznatu" gornju ogradu. U tu svrhu koristit ćemo niz *Fibonaccijevih brojeva*.

Definicija 2.3.2. *Niz* (F_n) *zadan početnim vrijednostima* $F_1 = 1, F_2 = 1$*, te rekurzivnom relacijom*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

za sve $n \geq 2$ *naziva se* ***Fibonaccijev niz****. Opći član niza* F_n *još zovemo n-ti Fibonaccijev broj.*

Ako usporedimo rekurziju za Fibonaccijeve brojeve i jednakost u (2.1), vidimo sličnost, posebice ako bi vrijednost od $p(n \mid \textit{ svaki dio } > 1)$ doveli u vezu s $p(n-2)$. Ustanovili smo da dodavanjem jedne točke ispod dijagrama particije od $n-1$ dobivamo dijagram particije od n koji sadrži barem jednak dio jednak 1, i obratno, tj.

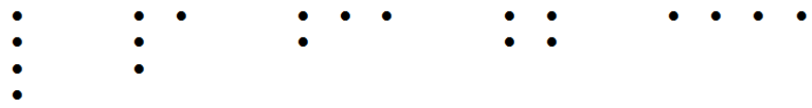
$$p(n-1) = p(n \mid [\textit{ postoji barem jedan dio } = 1]).$$

Po analogiji je

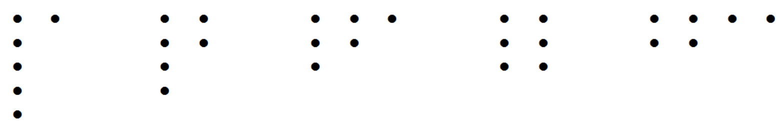
$$p(n-2) = p(n \mid [\textit{ postoji barem jedan dio } = 2]).$$

Sada još trebamo dovesti u vezu particije od n kojima je barem jedan dio jednak 2 i particije od n kojima je svaki dio veći od 1. U tu svrhu pogledajmo sljedeći primjer.

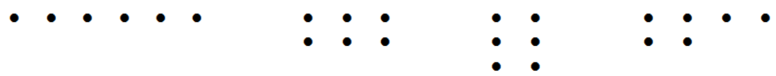
Primjer 2.3.3. *Neka je* $n = 6$*. Sve particije od* $n - 2 = 4$ *dane su sljedećim dijagramima:*



Sada u svaki dijagram za particiju od 4 *umetnimo jedan red s dvije točkice, tj. svakoj particiji od* 4 *dodamo jedan pribrojnik (dio) jednak* 2*. Odnosno, dobivamo sljedeće dijagrame particija od* 6 :



Svaka od tih particija ima barem jedan dio jednak 2*. Sljedeće dijagrame načinimo tako da sve dijelove koji su jednaki* 1 *"preselimo" u zadnji dio koji je jednak 2 (odnosno u zadnji redak koji ima dva stupca). Uočimo da ako to napravimo na dijagramu particije* $(2, 2, 1, 1)$ *dobivamo* $(2, 4)$ *što ne predstavlja particiju jer* $\lambda_1 = 2 < 4 = \lambda_2$*. Tranformaciju je moguće napraviti na svim ostalim particijama:* $(2, 1, 1, 1, 1)$*,* $(3, 2, 1)$*,* $(2, 2, 2)$ *i* $(4, 2)$ *(pri čemu se posljednje dvije particije ne mijenjaju):*



Time smo pokazali:

$$p(4) = p(6 \,|\, [\, \textit{postoji barem jedan dio } = 2]) = p(6 \,|\, [\, \textit{svaki dio } > 1]) + p(4 \,|\, (2, 1, 1)),$$

odnosno

$$p(4) \geq p(6 \,|\, [\, \textit{svaki dio } > 1]).$$

Stoga je

$$p(6) = p(5) + p(6 \,|\, [\, \textit{svaki dio } > 1]) \leq p(5) + p(4).$$

Poopćavanjem prethodnog primjera možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned} p(n-2) &= p(n \,|\, [\text{ svaki dio } > 1]) + \\ & \quad p(n-2 \,|\, [\textit{ najmanji dio veći od 1 } < 2 + \textit{ broj dijelova jednakih 1}]), \end{aligned}$$

odnosno

$$p(n-2) \geq p(n \,|\, [\text{ svaki dio } > 1]).$$

pa iz (2.3.1) slijedi

$$p(n) \leq p(n-1) + p(n-2), \tag{2.2}$$

za sve $n \geq 3$.

Teorem 2.3.4. *Za svaki prirodni broj n, funkcija particija $p(n)$ je manja ili jednaka $(n+1)$-om Fibonaccijevom broju, tj.*

$$p(n) \leq F_{n+1}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo principom matematičke indukcije.
Baza indukcije. Provjerimo vrijedi li tvrdnja za $n = 1$ i $n = 2$:

$$p(1) = 1 = F_2, \ p(2) = 2 = F_3.$$

Pretpostavka indukcije. Neka je $k \geq 3$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $1 \leq n < k$.
Korak indukcije: Za $k \geq 3$ prema (2.2) slijedi

$$p(k) \leq p(k-1) + p(k-2) \leq F_k + F_{k-1} = F_{k+1},$$

što je i trebalo dokazati. Dakle, $p(n) \leq F_{n+1}$, za sve $n \geq 1$. □

2.4 Bressoudova bijekcija

Želimo promatrati one particije čiji su dijelovi međusobno različiti. Jedan od načina da opišemo neki skup međusobno različitih prirodnih brojeva jest da zahtijevamo da je apsolutna vrijednost razlike svakog para brojeva iz tog skupa jednaka barem jedan, odnosno veća ili jednaka jedan.

Definicija 2.4.1. *Kažemo da su svi dijelovi particije* ***super različiti*** *ako je apsolutna vrijednost razlike svaka dva dijela jednaka barem dva.*

Primjer 2.4.2. *U skupu svih particija od* 11 *ima točno sedam onih koje imaju super različite dijelove. To su:*

$$(11), (10, 1), (9, 2), (8, 3), (7, 4), (6, 4, 1), (7, 3, 1).$$

Ako nas zanimaju particije čiji su svi dijelovi međusobno različiti, onda skupu particija sa super različitim dijelovima moramo dodati i one particije čija apsolutna vrijednost razlike dijelova može biti jedan:

$$(8, 2, 1), (6, 5), (6, 3, 2), (5, 4, 2), (5, 3, 2, 1).$$

Dakle, postoji 12 particija od 11 *čiji su svi dijelovi međusobno različiti.*

Sljedeći teorem opisuje broj particija sa super različitim dijelovima.

Teorem 2.4.3. *Za svaki prirodni broj n vrijedi:*

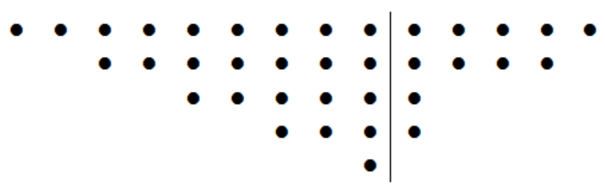
$$p(n\,|\,[\text{ super različiti dijelovi}]) =$$
$$p(n\,|\,[\text{ različiti dijelovi, svaki paran dio je dvostruko veći od broja neparnih dijelova}])$$

Za $n = 11$, desna strana jednakosti ima sedam particija:

$$(11), (10, 1), (8, 3), (7, 4), (7, 3, 1), (6, 4, 1), (6, 5).$$

Na sljedećem primjeru ilustrirat ćemo ideju za dokaz identiteta u Teoremu 2.4.3 kojeg je 1980. godine dao američki matematičar David Bressouda.

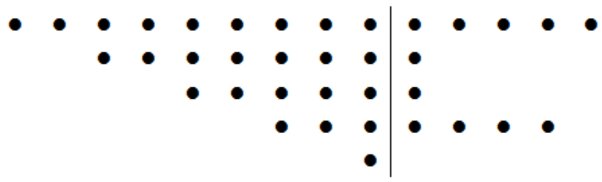
Primjer 2.4.4. *Dana je particija od* 36 *sa super različitim dijelovima:* $(14, 11, 6, 4, 1)$. *Sad ćemo njen Ferrerov dijagram zapisati malo drugačije nego što smo navikli. Počevši od prvo reda, odnosno najgornjeg reda, pomaknut ćemo svaki sljedeći red za dva mjesta u desno i na taj način dobiti "pomaknuti" Ferrerov dijagram:*



Vertikalnu liniju u 'pomaknutom" dijagramu smo povukli tako da točkice s lijeve strane ocrtavaju pravokutan trokut čije su katete $l = l(\lambda) = 5$ i $2l - 1 = 9$. S desne strane od vertikalne linije nalazi se particija broja 11*:* $(5, 4, 1, 1)$ *.Zaista,*

$$36 - (1 + 3 + \cdots + (2l - 1)) = 36 - l^2 = 36 - 25 = 11.$$

Sada posložimo sve retke u dijagramu tako da se s desne strane nalaze najprije neparni dijelovi u padajućem poretku a zatim parni dijelovi, također u padajućem poretku. Dobivamo sljedeći dijagram:



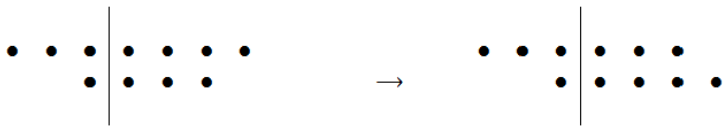
Ignorirajući vertikalnu liniju dobili smo novu particiju od 36*:* $14 + 8 + 6 + 7 + 1$*, odnosno službeno zapisanu kao* $(14, 8, 7, 6, 1)$ *kojoj je svaki parni dio veći od dvostrukog broja neparnih dijelova. Lako se može ustanoviti da bi ponavljajući ovu proceduru unazad od particije* $(14, 8, 7, 6, 1)$ *došli do particije* $(14, 11, 6, 4, 1)$.

Uočimo da Bressoudova procedura particiji sa super različitim dijelovima uvijek pridružuje particiju čiji su različiti dijelovi, a svaki paran dio je dvostruko veći od broja neparnih dijelova. Zaista, rezultat ove procedure jest dijagram koji završava s neparnim dijelovima. Pretpostavimo da ih ima točno k. Tada najmanji parni dio s desne strane ima najmanje $2k + 1$ točkica, pa će vrijediti traženo svojstvo.

Opišimo sada i proceduru koja će particiji čiji su različiti dijelovi, a svaki paran dio je dvostruko veći od broja neparnih dijelova pridružiti particiju sa super različitim dijelovima. Najprije graf particije posložimo tako da prvo posložimo parne dijelove u silaznom poretku, a zatim nadodamo neparne dijelove također u silaznom poretku. Pomaknemo svaki red dijagrama za dvije točkice u desno, počevši od gornjeg reda. Povučemo vertikalnu liniju tako da se na lijevoj stranu u zadnjem (donjem) redu nalazi jedna točkica. Konačno posložimo retke u grafu tako da točkice s lijeve strane budu u padajućem poretku. Dobili smo novu particiju čiji su dijelovi super različiti jer se susjedna dva retka razlikuju za barem 2 točkice.

Primjer 2.4.5. *Za* $n = 11$ *Bressoudova bijekcija particije* (11)*,* $(10, 1)$*,* $(8, 3)$*,* $(6, 4, 1)$ *i* $(7, 3, 1)$ *preslikava u njih same, dok se* $(9, 2)$ *preslika u* $(7, 4)$*, a* $(7, 4)$ *u* $(6, 5)$*. Primjenom Bressoudovog preslikavanja na* $(9, 2)$ *imamo:*

Analogno za particiju $(7, 4)$ *dobivamo:*

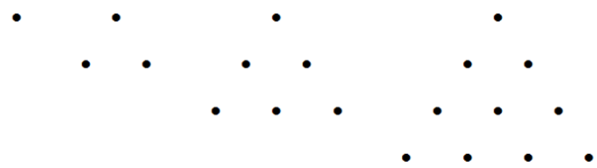


2.5 Eulerov peterokutni brojevni teorem

Leonhard Euler je bio jedan od najproduktivnijih matematičara u povijesti. Njegov životni opus se sastoji od mnogo tisuća stranica, stoga nas niti ne čudi što njegovo ime nosi više identiteta. Osim identiteta koji govori da je broj particija s različitim dijelovima jednak broju particija s neparnim dijelovima u ovom odjeljku predstaviti ćemo identitet između particija s neparno odnosno parno mnogo međusobno različitih dijelova. Zapravo, *Legendre* je bio prvi koji je Eulerove rezultate interpretirao u terminima particija. Za razliku od svih identiteta koje smo do sada proučavali, ovaj identitet za neke vrijednosti od n ima tzv. korekcijski član ± 1. U imenu teorema spominju se *pentagonalni brojevi* pa krenimo prvo od njih. Brojevi

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$$

nazivaju se *trokutasti brojevi*. Razlog ovom imenu je jasan ukoliko ih prikažemo dijagramom kao na Slici 9:



Slika 9: Trokutasti brojevi

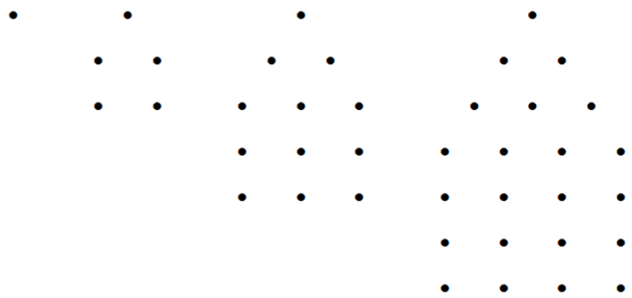
Neka je $j \in \mathbb{N}$. Označimo s T_j j-ti trokutasti broj. On je dan sljedećom eksplicitnom formulom:

$$T_j = 1 + 2 + 3 + \cdots + j = \frac{j(j+1)}{2}.$$

Slično tome, peterokutni brojevi su :

$$1, 5, 12, 22, \ldots,$$

dobiveni povećavanem peterokuta kao što je prikazano Slici 10. Iz Slike 10 možemo vidjeti

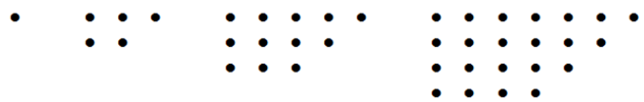


Slika 10: Peterokutni brojevi

kako se za $j \geq 2$, j-ti peterokutni broj sastoji od kvadrata stranice duljine j, odnosno koji se sastoji od j^2 točkica i trokutastog broja $T_{j-1} = \dfrac{(j-1)j}{2}$. Soga, ako s P_j označimo j-ti peterokutni broj, onda imamo

$$P_j = \frac{(j-1)j}{2} + j^2 = \frac{j(3j-1)}{2}.$$

Okrenimo sada peterokute na bočnu stranicu i posložimo točkice tako da dobijemo Ferrerove dijagrame:



Možemo vidjeti da su to Ferrerovi dijagrami od određenih particija koje uvijek imaju različite dijelove: (1), $(3,2)$, $(5,4,3)$, $(7,6,5,4)$ itd. Ove osobite particije će se pojaviti kao posebni slučajevi u dokazu Eulerovog peterokutnog brojevnog teorema.

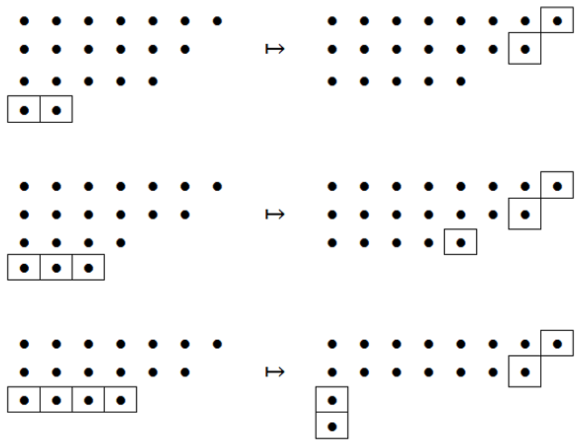
Teorem 2.5.1. *Za svaki prirodni broj n vrijedi da je*

$$p(n \,|\, [\text{ paran broj različitih dijelova}]) = p(n \,|\, [\text{ neparan broj različitih dijelova}]) + e(n),$$

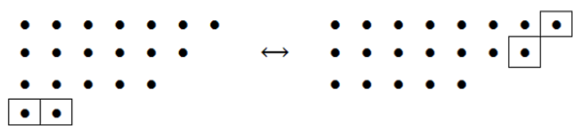
gdje je $e(n) = (-1)^j$ *ako je* $n = \frac{j(3j\pm1)}{2}$ *za neki prirodni broj* j*, a ako takav* j *ne postoji onada je* $e(n) = 0$.

Za dokaz koji ćemo dati zaslužan je *Fabian Franklin* američki matematičar židovskih korijena iz 19. stoljeća. Iako rođen u Mađarskoj, veći dio života provodi u SAD. Eulerov teorem dokazao je 1881.

Dokaz. Identitet se dokazuje konstruiranjem bijekcije sa skupa svih particija od n koje sadrže parno različitih dijelova na skup svih particija od n koje koje sadrže neparno različitih dijelova. Ideju za tu bijekciju izložit ćemo na nekoliko primjera, a ona se sastoji u tome da najmanji dio distribuiramo između ostalih dijelova (redova).



Prve dvije transformcije su dobre zbog toga što se particija s različitim dijelovima preslika u particiju s različitim dijelovima. No, problem je u tome što su se dvije različite particije preslikale u istu: $(7, 6, 5, 2) \mapsto (8, 7, 5)$ i $(7, 6, 4, 3) \mapsto (8, 7, 5)$, što znači da tako definirano preslikavanje ne bi bila bijekcija. Iz ovog problema se možemo izvući na sljedeći način. Ako je "najdesnija" dijagonala u Ferrerovom dijagramu kraća od zadnjeg reda, odnosno najmanjeg reda, onda "skidamo" dijagonalu i stavljamo ju na dno dijagrama. Ako je "najdesnija" dijagonala dulja od zadnjeg reda onda točkice zadnjeg red raspodjeljujemo po dijagonali, počevši od prvog reda. Odnosno imamo sljedeće:



No, ipak u točno dva slučaja naše preslikavanje ne funkcionira. Prvi je slučaj kad je broj točkica na dijagonali jednak broju točkica u zadnjem redu, a drugi kad je zadnji red za jednu točkicu dulji kao što je prikazano na sljedećoj slici:

Dakle, problematična je točno jedna particija od $\frac{j(3j-1)}{2}$ i točno jedna particija od $\frac{j(3j+1)}{2}$. Za j neparan stoga imamo jednu particiju od $\frac{j(3j-1)}{2}$ (ili $\frac{j(3j+1)}{2}$) više s neparnim brojem različitih dijelova koja nema svoj par među particijama s parnim brojem različitih dijelova, a za j paran upravo obrnuto. Stoga smo pokazali tvrdnju teorema. $\square$

Poglavlje 3

Rogers-Ramanujanovi identiteti

3.1 Otkrivanje prvog Rogers-Ramanujanovog identiteta

U odjeljku 2.4 smo definirali *super različite* dijelove particija. Daljnjim proučavanjem možemo gledati dijelove particija kod kojih je razlika svaka dva dijela barem tri ili četiri itd. S obzirom na to uvodimo sljedeći pojam.

Definicija 3.1.1. *Kažemo da su svi dijelovi particije d-* ***različiti****, za* $d \in \mathbb{N}$ *ako je apsolutna vrijednost razlike svaka dva dijela barem d. Specijalno, kažemo da su dijelovi particije* 0 ***-različiti*** *ako postoje bar dva ista dijela u particiji.*

Za ilustraciju, pogledajmo sljedeću tablicu u kojoj se nalaze sve particije s 2-različitim dijelovima za $n = 1, 2, \dots, 11$.

n	#	Particije od n s 2 - različitim dijelovima
1	1	(1)
2	1	(2)
3	1	(3)
4	2	(4), (3, 1)
5	2	(5), (4, 1)
6	3	(6), (5, 1), (4, 2)
7	3	(7), (6, 1), (5, 2)
8	4	(8), (7, 1), (6, 2), (5, 3)
9	5	(9), (8, 1), (7, 2), (6, 3), (5, 3, 1)
10	6	(10), (9, 1), (8, 2), (7, 3), (6, 3, 1), (6, 4)
11	7	(11), (10, 1), (9, 2), (8, 3), (7, 4), (7, 3, 1), (6, 4, 1)

Pokušajmo konstrurati skup $N \subseteq \mathbb{N}$ za koji je

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi u } N]) = p(n \,|\, [\textit{ 2- različiti dijelovi}]) \tag{3.1}$$

za sve $n = 1, 2, 3, \ldots, 11$ slično kao u odjeljku 1.3 gdje smo pokušali konstruirati *Eulerov par*.

$n = 1$: $\mathcal{P}_1 = \{1\}$ pa je $N = \{1\}$.

$n = 2$: Postoji jedna particija od 2 s 2 - različitim dijelovima te imamo jednu $(1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2$, onda 2 ne smijemo dodati u N.

$n = 3$: Postoji jedna particija od 3 s 2 - različitim dijelovima i to je (3) te imamo jednu $(1, 1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3$, onda 3 ne smijemo dodati u N.

$n = 4$: Postoje dvije particije od 4 s 2 - različitim dijelovima i to su (4) i $(3, 1)$ te imamo jednu $(1, 1, 1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4$, onda 4 moramo dodati u N. $N = \{1, 4\}$.

$n = 5$: Postoje dvije particije od 5 s 2 - različitim dijelovima te imamo dvije $(4, 1)$ i (1, 1, 1, 1, 1) koristeći dijelove iz $N = \{1, 4\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4, 5$, onda 5 ne smijemo dodati u N.

$n = 6$: Postoje tri particije od 6 s 2 - različitim dijelovima te imamo dvije $(4, 1)$ i (1, 1, 1, 1, 1, 1) koristeći dijelove iz $N = \{1, 4\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, onda 6 moramo dodati u N. $N = \{1, 4, 6\}$.

$n = 7$: Postoje tri particije od 7 s 2 - različitim dijelovima te imamo tri $(6, 1)$, $(4, 1, 1, 1)$ i $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1, 4, 6\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, onda 7 ne smijemo dodati u N.

$n = 8$: Postoje četiri particije od 8 s 2 - različitim dijelovima te imamo četiri $(6, 1, 1)$, $(4, 4)$, $(4, 1, 1, 1, 1)$ i $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1, 4, 6\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, onda 8 ne smijemo dodati u N.

$n = 8$: Postoji pet particija od 9 s 2 - različitim dijelovima te imamo četiri $(6, 1, 1)$, $(4, 4, 1)$, $(4, 1, 1, 1, 1, 1)$ i $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ koristeći dijelove iz $N = \{1, 4, 6\}$. Stoga ako želimo da (3.1) bude zadovoljen za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, onda 9 moramo dodati u N. $N = \{1, 4, 6, 9\}$.

Analognim postupkom u skupu N dobivamo niz brojeva: 1, 4, 6, 9, 11, 14, 16, 19, 21, 24, ... Uočimo kako smo dobili niz prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daje ostatak 1 ili 4. Prema tome, N je skup svih prirodnih brojeva m za koje je

$$m \equiv 1 \text{ ili } 4 \pmod 5.$$

Teorem 3.1.2 (Prvi Rogers-Ramanujanov identitet)**.** *Za svaki prirodni broj n, broj particija čiji dijelovi daju ostatak* 1 *ili* 4 *pri dijeljenju s* 5 *jednak je broju particija s* 2 *- različitim dijelovima, tj.*

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi } \equiv 1 \textit{ ili } 4 \pmod 5]) = p(n \,|\, [\textit{ 2- različiti dijelovi}]) \tag{3.2}$$

Napomenimo kako gore navedena konstrukcija skupa N ne dokazuje Teorem 3.1.2 već smo ispravnost tvrdnje provjerili za prvih par $n \in \mathbb{N}$. Međutim, opisana metoda nam je bila jako korisna za otkrivanje potencijalnog novog identiteta. Indijski matematičar *Srinivasa Ramanujan*, po kojem je ovaj teorem i dijelom dobio ime, nije koristio ovu metodu već je koristio funkcije izvodnice.

3.2 Alderova pretpostavka

Prvi Rogers-Ramanujanov identitet vezan je za dijelove particija koji su oblika 1 ili 4 (mod 5), odnosno $\pm 1 \pmod 5$. Uočimo i da *Eulerov identitet* (1.2.1) možemo zapisati kao

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi } \equiv \pm 1 \pmod 4]) = p(n \,|\, [\textit{ 1- različiti dijelovi}]).$$

Budući da i *Prvi Rogers-Ramanujanov identitet* glasi

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi } \equiv \pm 1 \pmod 5]) = p(n \,|\, [\textit{ 2- različiti dijelovi}]),$$

možemo se prirodno zapitati vrijedi li sljedeći identitet

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi } \equiv \pm 1 \pmod{d+3}]) = p(n \,|\, [\textit{ d- različiti dijelovi}]),$$

za nenegativan cijeli broj d. Navedeni identitet poznatiji je kao *Adlerova prepostavka*, no vrlo brzo ćemo se uvjeriti da ona nije točna.

Neka je $d = 3$. Dijelovi koji zadovoljavaju kongruenciji $\pm 1 \pmod 6$ su $1, 5, 7, 11$, itd. Dakle, imamo particije koje su sastavljene od $1, 5, 7, 11$, itd. Napomenimo da ćemo koristiti kraći zapis particija. Na primjer, $7^2 5^1 1^4$ predstavlja particiju $(7, 7, 5, 1, 1, 1, 1)$.

U sljedećoj tablici dani su zapisi particija sastavljenih od dijelova $1, 5, 7, 11, \ldots$ te particije čiji su dijelovi 3 - različiti, za $n = 1, 2, \ldots, 9$.

n	dijelovi od $\{1,5,7,11,\dots\}$	3 - različiti dijelovi
1	1^1	1
2	1^2	2
3	1^3	3
4	1^4	4
5	$1^5, 5^1$	5, (4, 1)
6	$1^6, 5^1 1^1$	6, (5, 1)
7	$1^7, 5^1 1^2, 7^1$	7, (6, 1), (5, 2)
8	$1^8, 5^1 1^3, 7^1 1^1$	8, (7, 1), (6, 2)
9	$1^9, 5^1 1^4, 7^1 1^2$	9, (8, 1), (7, 2), (6, 3)

Možemo uočiti kako za $n = 9$ imamo 3 particije s dijelovima $\pm 1 (\mathrm{mod}\ 6)$ i četiri particije s 3 -različitim dijelovima. Prema tome, naša pretpostavka da je

$$p(n \mid [\ \textit{dijelovi}\ \equiv \pm 1 \pmod 6]) = p(n \mid [\ \textit{3- različiti dijelovi}])$$

ne vrijedi općenito za sve $n \in \mathbb{N}$.

Matematičar *Lehmer* je dokazao da za bilo koji $d \geq 3$ ne postoji skup N takav da vrijedi:

$$p(n \mid [\ \textit{d-različiti dijelovi}\ ]) = p(n \mid [\ \textit{dijelovi u } N]),$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Nakon toga *Alder* je svoju jednakost pretvorio u sljedeću nejednakost

$$p(n \mid [\ \textit{dijelovi}\ \equiv \pm 1 \pmod{d+3}]) \leq p(n \mid [\ \textit{d- različiti dijelovi}]),\ \textit{za sve } n, d \geq 0.$$

Ova nejednakost predstavlja otvoren problem, odnosno problem kojeg još nitko nije niti dokazao niti pobio.

3.3 Schurov teorem

Schur je djelovao samostalno, budući je za vrijeme Prvog svjetskog rata bio u Njemačkoj čime je bio odvojen od razvoja matematike koja se u to doba događala u Velikoj Britaniji. Svojim proučavanjem particija je između ostalog otkrio i dokazao Rogers-Ramanujanove identitete te je pronašao način modificiranja Adlerove pretpostavke. Njegov teorem glasi:

Teorem 3.3.1. *Za bilo koji prirodan broj n, broj particija od n s dijelovima kongruentnim* $\pm 1 \pmod 6$ *jednak je broju particija s* 3 *- različitim dijelovima među kojima nema uzastopnih višekratnika broja* 3.

Lema 3.3.2. *Podskupovi prirodnih brojeva*

$$N = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \equiv \pm 1 \pmod 6\} = \{1, 5, 7, 11, \ldots\}$$

i

$$M = \{m \in \mathbb{N} \,:\, m \not\equiv 0 \pmod 3\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots\}$$

čine Eulerov par.

Dokaz. Prema Lemi 3.3.2 imamo

$$p(n \,|\, [\textit{ dijelovi } \equiv \pm 1 \pmod 6]) = p(n \,|\, [\textit{ različiti dijelovi} \equiv \pm 1 \pmod 3]). \tag{3.3}$$

Stoga ćemo konstruirati bijekciju između skupa svih particija s različitim dijelovima kongruentnim $\pm 1 \pmod 3$ i skupa particija s 3 - različitim dijelovima među kojima nema uzastopnih višekratnika broja 3. Za to koristimo tzv. *Bressoudovu bijekciju*.

Počinjemo s particijom P s različitim dijelovima kongruentnim $\pm 1 \pmod 3$ te ćemo ju transformirati u novu particiju P_1 tako da spojimo (zbrojimo) dijelove koji se razlikuju za najviše dva počevši od najmanjega. Bit će nam lakše ako dijelove složimo u stupce. Na primjer:

$$P = \begin{array}{c} 11 \\ 10 \\ 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad P_1 = \begin{array}{c} 11 \\ 10+8 \\ 5 \\ 2+1 \end{array}$$

Spojeni parovi kada ih zbrojimo uvijek daju višekratnik broja 3, a uzastopni višekratnici se na ovaj način ne mogu pojaviti. Ako je između dva višekratnika od 3 u stupcu za P_1 i brojeva, onda se ti višekratnici moraju razlikovati za najmanje $(2+i) \cdot 3$.

U sljedećem koraku oduzimamo uzastopne višekratnike od 3 od dijelova P_1, počevši s oduzimanjem nule od najdonjeg dijela i nastavljajući prema gore. Ostavljamo višekratnike od 3 u novom stupcu sa strane.

$$P_1 = \begin{array}{c} 11 \\ 10+8 \\ 5 \\ 2+1 \end{array} \quad \rightarrow \quad P_2 = \begin{array}{cc} 11-9 & 9 \\ 10+8-6 & 6 \\ 5-3 & 3 \\ 2+1-0 & 0 \end{array}$$

Sada, preuredimo prvi stupac od P_2 u padajućem poretku:

$$P_2 = \begin{array}{cc} 11-9=2 & 9 \\ 10+8-6=12 & 6 \\ 5-3=2 & 3 \\ 2+1-0=3 & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad P_3 = \begin{array}{cc} 12 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{array}$$

Naposljetku, zbrojimo brojeve u svakom redu od P_3

$$P_3 = \begin{matrix} 12 & 9 \\ 3 & 6 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad P_4 = \begin{matrix} 21 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

Zadnja transformacija mora uvijek rezultirati s particijom P_4 s različitim dijelovima gdje nema uzastopnih višekratnika od 3. Opisali smo četiti jednostavne transformacije koje sačinjavaju transformaciju od particije P s različitim dijelovima kongruentnim $\pm 1 \pmod 3$ u particiju P_4 s 3- različitim dijelovima bez uzastopnih višekratnika od 3. Cijela ova transformacija je invertibilna. Stoga je i bijekcija, te smo time dokazali Schurov teorem. □

Ovim teoremom Schur je rasvijetlio razlog zašto Alderova pretpostavka pada za $n = 9$. Prema Schurovom teoremu, 9 je prvi broj koji se može razdijeliti u dijelove koji sadrže dva uzastopna višekratnika od 3, konkretno $(6, 3)$.

Bibliografija

[1] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison - Wesly, 1976.

[2] G. E. Andrews, K. Ericson *Integer partitions*, Cambrige University press. USA, 2004.

[3] I. Martinjak, *O Eulerovom teoremu o particijama*, Osječki matematički list, 16 (2016), 1-14, dostupno na http://hrcak.srce.hr/164848 (kolovoz 2017.)

[4] M. Primc, *Identiteti Rogers - Ramanujanovog tipa*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ primc/page%5Frrhr.html (kolovoz 2017.)

[5] *Fibonaccijevi brojevi*, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci%5Fnumber (kolovoz 2017.)

[6] *Particije prirodnih brojeva*, dostupno na https://en.wikipedia.org/wiki/Partition%5F(number%5Ftheory) (kolovoz 2017.)

Sažetak

Particija prirodnog broja n je svaka uređena k-torka prirodnih brojeva $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ za koju je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ i

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Broj svih particija prirodnog broja n označava se s $p(n)$. Tako je $p(4) = 5$, budući da 4 možemo prikazati kao sljedeće sume 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Iako su particije izuzetno jednostavan matematički pojam, one su bitan matematički objekt koji zadovoljava niz zanimljivih i neočekivanih svojstava. U ovom radu će se opisati kako se particije mogu vizualizirati pomoću Ferrerovih dijagrama. Također, iskazati će se i dokazati neki identiteti za $p(n)$, na primjer Eulerov identitet, koristeći metodu bijekcije.

Summary

A partition of a positive integer n is a k-tuple $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ consisting of positive integers such that $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$ and

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

The number of partitions of n is given by the partition function $p(n)$. For instance, $p(4) = 5$ since 4, $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ and $1 + 1 + 1 + 1$ represent all partitions of 4. Although partitions seems to be very simple mathematical concept, they are important mathematical objects that have many interesting and unexpected properties. In this thesis, we decribe how integer partitions can be graphically visualized with Ferrers graphs. Also, we give and prove some partition identities, like Euler's identity, by using the bijective method.

Životopis

Rođena sam u Zagrebu 13. siječnja 1988. godine gdje sam završila osnovnu i srednju školu. Osnovnu školi sam pohađala u OŠ Brezovica, a srednju u XI. gimnaziji. Trenutno sam studentica diplomskog studija Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu na matematičkom odsjeku, nastavnički smjer Matematika, kojeg sam upisala u rujnu 2013. godine.