Funkcije i njihov grafički prikaz u osnovnoškolskoj nastavi matematike

Brežnjak, Barbara

Master's thesis / Diplomski rad

2017

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:998197

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-03-28**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Barbara Brežnjak

FUNKCIJE I NJIHOV GRAFIČKI PRIKAZ U OSNOVNOŠKOLSKOJ NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se mentorici prof. dr. sc. Željki Milin Šipuš na posvećenom vremenu i pruženoj pomoći u izradi ovog diplomskog rada. Najveće hvala mojoj obitelji koja me bezuvjetno podržavala i ohrabrivala tijekom ostvarivanja mojih životnih i obrazovnih nastojanja.

SADRŽAJ

UVOD 1
1. Učenje istraživanjem i otkrivanjem 3
1.1. Ishodi učenja 4
2. Interpretacija točaka 7
2.1. AKTIVNOST OBITELJ 7
2.2. AKTIVNOST DVA AVIONA 13
2.3. AKTIVNOST LJETOVANJE 16
3. Jesu li grafovi samo slike? 19
3.1. AKTIVNOST KOŠARKA 19
3.2. AKTIVNOST GARDALAND 25
3.3. AKTIVNOST SPORT 32
4. Skiciranje grafova situacije opisane riječima 36
4.1. AKTIVNOST VINOGRAD 36
4.2. AKTIVNOST PRIČE 44
5. Skiciranje grafova situacije prikazane slikom 48
5.1. AKTIVNOST TRČANJE 48
5.2. AKTIVNOST VJETRENJAČA 53
6. Skiciranje grafova situacije prikazane tablicom 58
6.1. AKTIVNOST RAST STABLA 58
ZAKLJUČAK 63
LITERATURA 64
SAŽETAK 65
SUMMARY 66
ŽIVOTOPIS 67

UVOD

Matematika je snažan jezik za opisivanje i analizu mnogih aspekata našeg gospodarskog, fizičkog i društvenog okruženja. Nažalost, u matematici je moguće naučiti neka pravila bez razumijevanja temeljnih pojmova na koje se odnose, a to često rezultira matematikom koja postaje formalna, dosadna i nepraktična. Pojam funkcije jedan je od temeljnih matematičkih pojmova, vrlo značajan unutar same matematike kao i u primjeni matematike. Funkcije su bitan element matematičkog strukturiranja i modeliranja problema.

Prema aktualnom nastavnom planu i programu, pojam funkcije se uvodi u 7. razredu i to preko zapisa linearne funkcije. Pojam funkcije se ne bi trebao odmah uvoditi preko linearne funkcije niti preko strogog matematičkog zapisa, već kao odnos dviju zavisnih veličina. Na taj način bi učenici savladali pojam funkcije intuitivno te bi takav način prihvaćanja pojma funkcije bio primjeren uzrastu i olakšavao bi kasniji susret sa strogom matematičkom definicijom funkcije i njezinim zapisom.

Učenicima viših razreda osnovne škole nije teško razumjeti odnos između dviju veličina od kojih je jedna zavisna o drugoj. Lako je naći mnoštvo primjera koji su učeniku bliski i koji ukazuju na takav pojam funkcije. U ovom diplomskom radu nalaze se učeničke aktivnosti i nastavni materijali vezani uz funkcije u osnovnoškolskoj nastavi matematike. Postoji više načina na koji se funkcije mogu zadavati, no u ovom radu posvetit ćemo se najviše grafičkom prikazu zbog toga što se grafom može zorno opisati funkcija. No, iskustveno je poznato da je grafički prikaz funkcije učenicima teško razumljiv i sporo ga prihvaćaju, štoviše neki nikada u potpunosti. Stoga, korisno je poništiti mehaničku, gramatičku stranu matematičkog jezika i provesti nekoliko sati gdje je naglasak na korištenju matematike kao sredstvo komunikacije. Kao što poznata izreka kaže:

„Slika govori više nego tisuću riječi.“

U ovom radu prikazana je istraživačka odnosno aktivna nastava matematike u kojoj učenici uče otkrivanjem. Detaljniji opis o takvom načinu učenja uz navedene ishode koji su u nastavnom planu i programu te u kurikulumu nalazi se u prvom poglavlju. Zatim slijede poglavlja u kojima se nalaze učeničke aktivnosti redoslijedom kojim se mogu provoditi u nastavi. U drugom poglavlju se kreće od aktivnosti koje sadržavaju smještanje točaka u koordinatni sustav. U trećem poglavlju se obrađuje često spominjana tema, a to je jesu li grafovi samo slike. U četvrtom i petom poglavlju se nalaze aktivnosti skiciranja grafova situacija opisanih riječima, odnosno prikazanih slikom. U zadnjem poglavlju navedena je aktivnost skiciranja grafova situacije prikazane tablicom. No, kako se takav prikaz najčešće i najviše pojavljuje u nastavi matematike, ovdje je obrađen netipičan primjer prikazan tablicom koji se kasnije može upotrijebiti u srednjoškolskoj nastavi matematike.

1. Učenje istraživanjem i otkrivanjem

Nastava matematike učenicima treba omogućiti razvoj pozitivnog stava prema matematici i interesa za nju, te samopouzdanja u vlastiti matematički potencijal, prihvaćanje matematike kao smislene aktivnosti i njene primjene kao korisnog alata u raznim situacijama – svakodnevnom životu i zanimanju. Da bi učenici lakše samostalno savladali nastavni sadržaj potrebno je povećati njihovu uključenost u nastavu. Uključenost učenika u aktivnosti tijekom nastave bitan je preduvjet kvalitetnog učenja. Stoga je u ovom radu naglasak na aktivnostima koje će poticati učenike na samostalno otkrivanje i istraživanje.

Taj se pristup razlikuje od onih u kojima se činjenice i procesi uče s malo razumijevanja koja dovode do nesposobnosti primjene znanja u svakodnevnom životu i do lošeg dugoročnog stjecanja znanja. Ovakav pristup zahtijeva aktivnu ulogu učenika što znači učenje počevši od pitanja, a ne odgovora, te se oslanja na ono što je već poznato, ali ide dalje od tog. Učenje s razumijevanjem razlikuje se od sjećanja na činjenice.To ne znači da činjenice nisu važne, već da nisu dovoljne za samostalno razvijanje razumijevanja. Važno je da učenici razumiju zašto se neki proces događa, a ne samo na koji način se događa.

Istraživačka nastava matematike polazi od problemskog zadatka kojim se promiče dublje, nerutinsko učeničko razmišljanje. Istraživanja pokazuju da kada učenici naiđu na nešto novo najprije pokušaju doći do rješenja koristeći ideje i znanje iz ranijih iskustava. Tijekom rješavanja problema učeničke ideje se mogu mijenjati i nadograđivati novim iskustvima. Iskustva iz prve ruke su važna te bi svi učenici trebali razvijati vještine koje se koriste u testiranju ideja, a to su ispitivanja, predviđanja, promatranja, tumačenja, komuniciranja i refleksije.

Učenje otkrivanjem najčešće se odvija u obliku rada u skupinama ili u paru. Time dijalog i diskusija učenika potiče društvenost i doprinosi razvoju razumijevanja. Također, dajući učenicima priliku da se izražavaju svojim riječima i zapisuju svoja mišljenja, hipoteze i zaključke, kroz slobodan i suradnički proces, povećava se njihovo samopouzdanje.

Očekuje se da će pristup temeljen na istraživanjima i otkrivanjima poboljšati matematičko razumijevanje učenika, što će rezultirati njihovim matematičkim znanjima koja postaju funkcionalna u različitim kontekstima izvan onih uobičajenih školskih zadataka. Pomoći će učenicima razviti matematičku i znanstvenu znatiželju i kreativnost, kao i njihov potencijal za kritičko razmišljanje i analizu. Također će im pomoći da razviju točniju viziju matematike kao ljudske djelatnosti, smatraju matematiku kao temeljnu komponentu naše kulturne baštine i cijene ključnu ulogu koju ona igra u razvoju naših društava. Odnosno, cilj ovakvog pristupa učenju jest da učenici postanu samostalni i kreativni u kritičkom razmišljanju.

1.1. Ishodi učenja

Funkcije zauzimaju velik dio nastave matematike u srednjoškolskoj nastavi matematike, no početak otkrivanja pojma funkcije počinje već u osnovnoškolskoj nastavi matematike. U nastavku ćemo navesti što piše u osnovnoškolskom nastavnom programu i u kurikulumu.

Nastavnim planom i programom za osnovnu školu (vidi [4]) piše da učenik sedmog i osmog razreda treba naučiti odrediti točke koordinatne ravnine ako su joj zadane koordinate i obratno; očitati koordinate zadane točke, grafički prikazivati proporcionalnost; iz zadanoga grafičkog prikaza odčitavati vrijednosti, tj. koordinate točke, crtati graf linearne funkcije i iz nacrtanoga grafa iščitavati vrijednost funkcije; procjenjivati i provjeravati (računski i grafički) pripada li zadana točka grafu funkcije; određivati i opisivati ovisnost dviju veličina s pomoću tablice i grafa, usvojiti značenje nagiba pravca i odsječka na osi y i njihovu geometrijsku interpretaciju; ispitivati rast ili pad linearne funkcije prema nagibu pravca, crtati grafove funkcija $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$; odrediti ili procijeniti koordinate točaka na grafu.

U *Nacionalnom okvirnom kurikulumu za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje* ili, kraće, *NOK-u* (vidi [3]), funkcije su u nastavi matematike zastupljeni od sedmog razreda osnovne škole, odnosno na kraju trećeg obrazovnog ciklusa. Ako pogledamo koncepte koji se tiču funkcija, od učenika se očekuje da:

- uoči pravilnosti u svezi s brojevima, njihovim zapisima i računskim operacijama i primjenjuje ih

- prepozna proporcionalne veličine

- skicira jednostavne ravninske oblike

- uspoređuje, procjenjuje i mjeri duljinu, vrijeme

- određuje mjeriva obilježja objekta ili pojave u svakodnevnim situacijama i primjenjuje mjerenje pri rješavanju problema

- čita i tumači podatke prikazane tablicama, slikama te različitim grafovima

- prikazuje jednostavnu ovisnost dviju veličina (linearna, čista kvadratna, drugi korijen) riječima, tablicom pridruženih vrijednosti i grafički, opisuje takve prikaze te ih prevodi s jednoga na drugi

- crta u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini točku zadanu koordinatama

Osim matematičkih koncepata, prema *NOK-u*, učenik treba razviti i određene matematičke procese. Od učenika se očekuje da:

- organizirano prikazuje matematičke objekte, ideje, postupke i rješenja riječima, slikama,

crtežima, grafovima, tablicama, brojevima, simbolima i misaono

- odabire i primjenjuje prikladan prikaz u skladu sa situacijom i namjerom, povezuje različite prikaze i prelazi s jednih na druge

- izražava ideje i rezultate govornim i matematičkim jezikom, u skladu s dobi, različitim načinima (usmeno, pisano, vizualno i slično)

- sasluša i razmjenjuje matematičke ideje i objašnjenja te suradnički radi u skupinama

- uspoređuje, grupira i klasificira objekte i pojave prema zadanomu ili izabranomu kriteriju

- postavlja matematici svojstvena pitanja (Postoji li...? Ako postoji, koliko? Kako ćemo ih pronaći? Zbog čega? Koliko ima...? Što je poznato? Što trebamo odrediti? Kako ćemo odrediti? Zbog čega? Ima li rješenje smisla? Postoji li više rješenja?) te stvara i istražuje pretpostavke o matematičkim objektima, pravilnostima i odnosima

- obrazlaže odabir matematičkih postupaka i utvrđuje smislenost dobivenoga rezultata

- postavlja i analizira jednostavniji problem, planira njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka, rješava ga te tumači

- primjenjuje matematičke pojmove i postupke u različitim kontekstima

- izgrađuje novo matematičko znanje rješavanjem problema i modeliranjem situacija

Aktivnosti u nastavku osmišljene su kako bi pomoću njih učenici što bolje ostvarili ove postavljene ishode. Svaka aktivnost sadrži nastavne listiće koji su prikazani u dva oblika: prazni i riješeni. Očekivani odgovori učenika označeni su crvenom bojom.

Na samom početku rada nalazi se poglavlje s primjerima grafova koji prikazuju funkcije definirane na konačnim skupovima. Njihovi grafovi će biti (konačni broj) uređenih parova pridruženih veličina. Takva pridruživanja rjeđe su zastupljena u nastavi matematike kod nas, ali su svakako važna. U osnovnoškolskoj nastavni nije ni potrebno nazivati ih funkcijama, ali je potrebno da se učenici sretnu s takvim primjerima kako bi ih se potaklo na dublje razmišljanje i raspravu o točkama smještenim u koordinatni sustav.

Također, u nekim aktivnostima nacrtani grafovi nemaju unesene brojčane vrijednosti na osima kako bi se učenike potaklo na višu razinu rasprave. Time učenicima nisu nametnuta rješenja te se prilikom rasprave mogu otkriti nove ideje, a isto tako i otkloniti miskoncepcije. Dakako, radi preciznosti, nastavnik učenike treba upućivati da prilikom rješavanja zadataka unose vrijednosti na osi.

2. Interpretacija točaka

Ovo poglavlje sadrži aktivnosti koje od učenika zahtijevaju dublje razmišljanje i raspravu o točkama smještenim u koordinatni sustav. Sadrži tri aktivnosti koje postepeno uključuju naprednije ideje.

Prva aktivnost započinje uspoređivanjem položaja točaka u koordinatnom sustavu, zatim slijedi aktivnost uspoređivanja nagiba (rasta i pada), te u zadnjoj aktivnosti slijedi utvrđivanje korelacija i funkcijskih veza.

Što pojam funkcije i pojam grafa predstavlja, odnosno znači učenicima?

Prva misao je najčešće povezana s nekom od sljedećih ideja: uvrštavanje brojeva u formulu, popunjavanje tablica, biranje skale – vrijednosti na koordinatnim osima, određivanje točaka i spajanje tih točaka pravcem ili krivuljom. Ovom aktivnošću potaknut ćemo učenike na drugačije razmišljanje. Umjesto da započnemo algebrom i računanjem, počet ćemo sa svakodnevnim primjerima i uočiti kako brzo skiciranje grafa može poslužiti kao izvor informacija i time smanjiti pisanje zadataka s puno teksta i objašnjenja.

2.1. AKTIVNOST <u>OBITELJ</u>

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u grupi, riječima interpretirati koordinate točaka u zadanom grafu

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u tročlanoj grupi

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u tročlane grupe na način da u svakoj grupi treba biti prilike za svakog učenika da iznese i objasni svoju ideju i dobije komentare od ostalih učenika. Nastavnik svaku grupu treba ohrabrivati i poticati u diskusiji tako dugo dok ne dođu do zajedničkog zaključka.

Svaka grupa dobiva nastavni listić i pokušat će otkriti što dani grafovi predstavljaju te će zajednički odgovoriti na postavljena pitanja. Nastavnik šeće razredom, sluša i poziva učenike na diskusiju i objašnjavanje onog što uočavaju. Učenici svoje zaključke i objašnjenja zapisuju na nastavni listić (time vježbaju precizno matematičko izražavanje).

Napomena: Ako učenici ne napreduju u diskusiji prema nekom zaključku, nastavnik ih mora potaknuti savjetom, ali tako da izbjegne otkrivanje previše informacija kojim bi učenicima brzo dao točne odgovore. Potrebni su savjeti koji će učenike potaknuti na samostalno razmišljanje.

Loš primjer: *„Pogledajte točke označene brojevima 1 i 2. One predstavljaju dvije najstarije osobe. Koja od tih osoba je viša?“*

Dobar primjer: *„Kako možete sistematičnije promotriti dani graf?“*

Moguće poteškoće:

Kako na koordinatnim osima nema brojeva to bi nekim učenicima moglo uzrokovati poteškoće zbog toga što su njihova prethodna grafička iskustva temeljena na tehničkim vještinama povezanim s preciznim određivanjem točaka, odnosno ucrtavanjem.

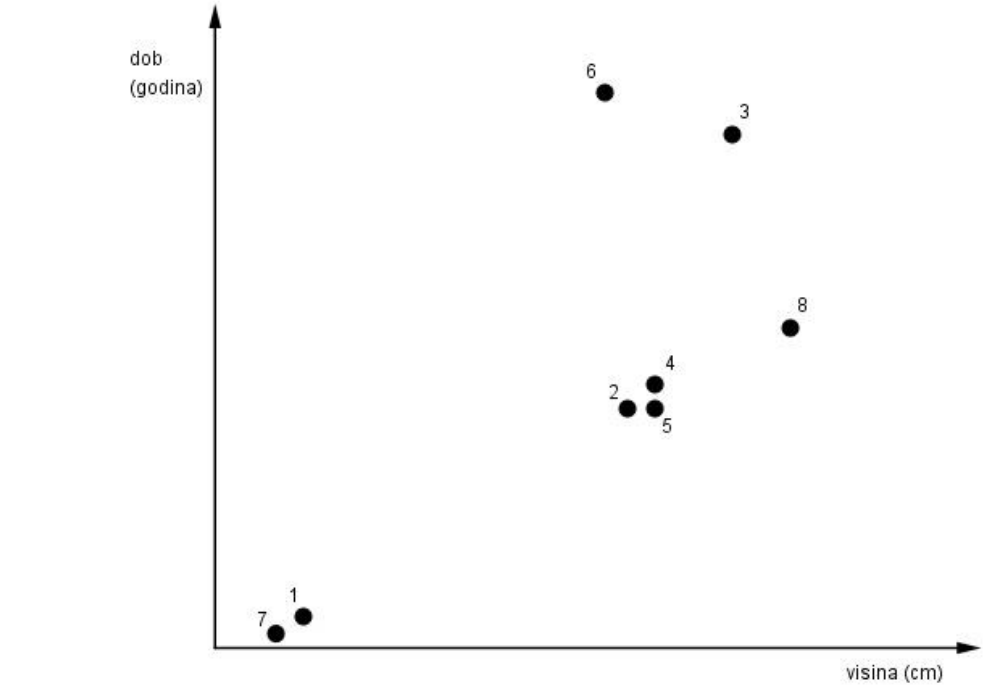
Dodavanjem vrijednosti na koordinatne osi, učenici će jednostavno očitati vrijednosti i odgovoriti na pitanja bez razmišljanja o značenju položaja tih točaka, što nije cilj ove aktivnosti.

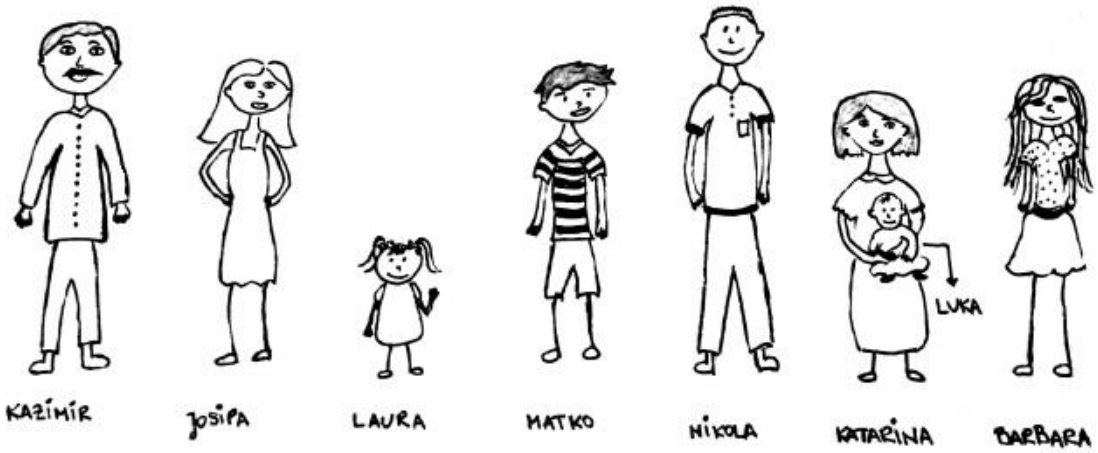
Dodatna napomena nastavniku: ukoliko se radi o slabijem razredu nastavnik bi morao podsjetiti učenike da se veličine u koordinatnom sustavu povećavaju s lijeva na desno, te vertikalno prema gore.

Primjer nastavnog listića

Zadatak: Odredite svakoj nacrtanoj osobi kojim je brojem predstavljena u danom grafu.

Svoja zapažanja i odgovore zapišite.





Osoba	Broj na grafu
Kazimir	
Josipa	
Laura	
Matko	
Nikola	
Katarina	
Luka	
Barbara	

Tko je najstarija osoba? _____.

Tko je najmlađa osoba? _____.

Tko je najviša osoba? _____.

Tko je najniža osoba? _____.

Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Odredite svakoj nacrtanoj osobi kojim je brojem predstavljena u danom grafu.

Svoja zapažanja i odgovore zapišite.

Osoba	**Broj na grafu**
Kazimir	3
Josipa	4
Laura	1
Matko	5
Nikola	8
Katarina	6
Luka	7
Barbara	2

Tko je najstarija osoba? Katarina.

Tko je najmlađa osoba? Luka.

Tko je najviša osoba? Nikola.

Tko je najniža osoba? Luka.

Napomena nastavniku: Zbunjenost učenika je često uzrokovana činjenicom da se visina nalazi na horizontalnoj osi, umjesto na vertikalnoj. Ova aktivnost dana je upravo s ciljem da učenici promotre graf kao apstraktni prikaz, a ne kao sliku (u smislu da je najviša točka najviša osoba). Time se potiče učenike da razmišljaju o danim podacima te da razmisle je li dani graf zapravo graf ovisnosti. (Dani graf nije graf ovisnsoti jer visina osobe ne ovisi o godinama osobe). U navedenoj aktivnosti nije predviđeno ulaženje u detaljniju i „iscrpljujuću" analizu podataka.

Primjer diskusije učenika U1, U2, U3:

U1: Iz slike je očito da je najviša osoba Nikola.

U2: Da, broj 6 je najviši.

U1: Da.

U2: Dakle, broj 6 je Nikola.

U1: Čekaj! Ne, ne. Broj 6 je najstarija osoba. Dakle, kažeš da je Nikola i najstarija osoba?

U2: Da, to sam rekao.

U1: Oprosti, mislim da bi ipak najstarija osoba bila Katarina.

U2: Dakle, Katarina je najstarija i najviša?

U1: Ali, postoji još osoba koje su mlađe od nje, ali su više, tako da ona nije najviša. Čekaj, radite li što vas dvoje?

U2: Rekao si da se složimo s tobom, pa smo se složili.

U3 nije ni sudjelovao u diskusiji, već je samo slušao.

2.2. AKTIVNOST DVA AVIONA

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, riječima interpretirati dani graf

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

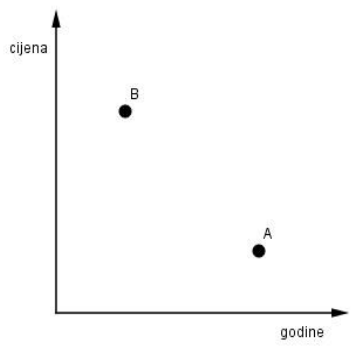
Primjer nastavnog listića

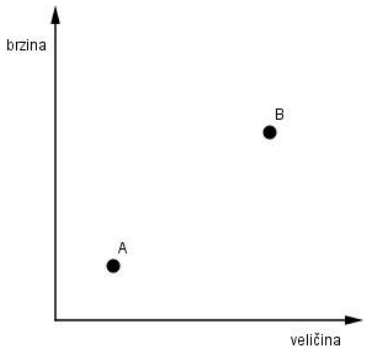
U lipnju se održava aeromiting u gradu Čakovcu. Stela je prisustvovala tom događaju i bila je oduševljenja vježbama koje su piloti izvodili sa svojim avionima.

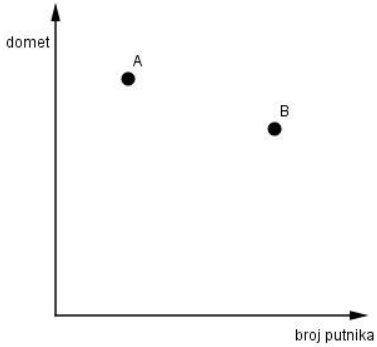




Dva aviona posebno su joj se dopala te je o njima saznala nešto više. Podatke koje je našla o tim avionima prikazala je sljedećim grafovima.







Zadatak: Jedan od grafova pokazuje da je avion B skuplji od aviona A. Jesu li sljedeće rečenice točne ili netočne?

Stariji avion je jeftiniji.

Brži avion je manji.

Veći avion je stariji.

Jeftiniji avion prevozi manje putnika.

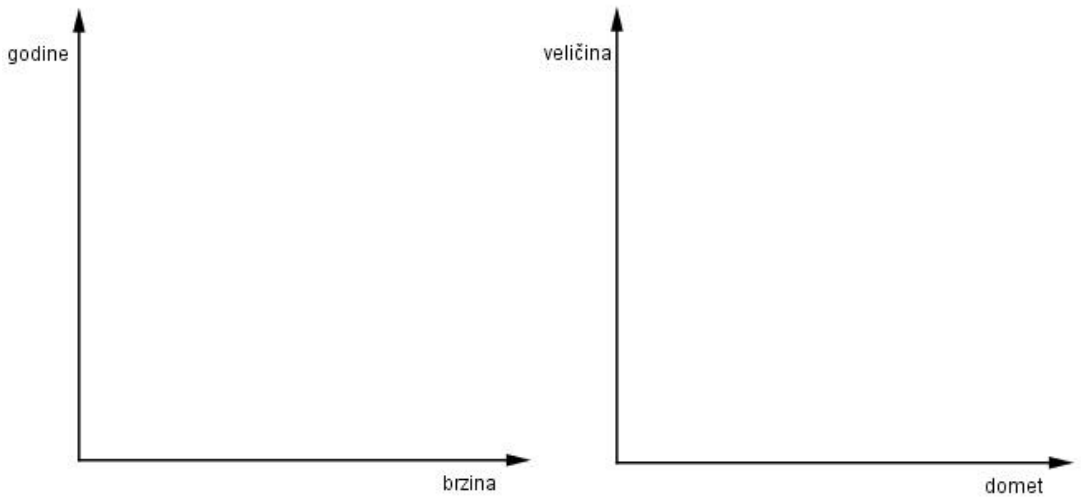
Što grafovi još prikazuju?

_____

_____

_____.

Na grafovima ispod označi dvije točke koje prikazuju avion A i B.



Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Jedan od grafova pokazuje da je avion B skuplji od aviona A. Jesu li sljedeće rečenice točne ili netočne?

Stariji avion je jeftiniji. T

Brži avion je manji. N

Veći avion je stariji. N

Jeftiniji avion prevozi manje putnika. T

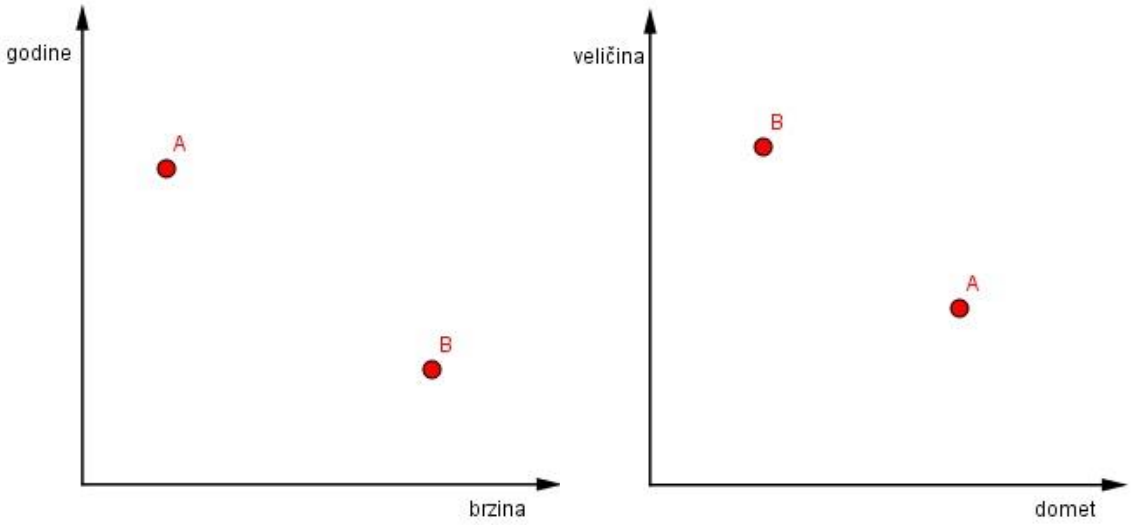
Što grafovi još prikazuju?

Grafovi prikazuju i sljedeće:

Avion A je stariji, jeftiniji, manji, sporiji i manjeg kapaciteta.

Avion B je noviji, skuplji, veći, brži i većeg kapaciteta.

Na grafovima ispod označi dvije točke koje prikazuju avion A i B.



2.3. AKTIVNOST LJETOVANJE

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, riječima interpretirati dani graf

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u četveročlanim grupama

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

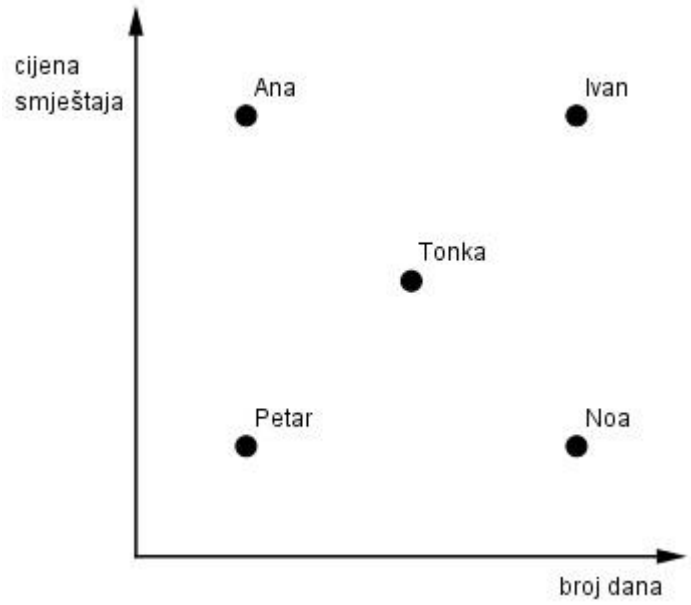
Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 15 minuta.

Primjer nastavnog listića

Zadatak: Prošlog ljeta, pet osoba je bilo na godišnjem odmoru - ljetovanju. Svi su bili u istom gradu, ali smjestili su se u par različitih hotela. Grafom je prikazana cijena smještaja i duljina boravka tih osoba u hotelima.

Napomena: Neke osobe su odsjele u istom hotelu.



1. Tko je bio u hotelu s 5 zvjezdica? Objasni.

_____.

2. Tko je bio u najjeftinijem hotelu? Objasni.

_____.

3. Koje osobe su odsjele u istom hotelu? Objasni.

_____.

Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Prošlog ljeta, pet osoba je bilo na godišnjem odmoru - ljetovanju. Svi su bili u istom gradu, ali smjestili su se u par različitih hotela. Grafom je prikazana cijena smještaja i duljina boravka tih osoba u hotelima.

Napomena: Neke osobe su odsjele u istom hotelu.

1. Tko je bio u hotelu s 5 zvjezdica? Objasni.

Ana – kratko vrijeme (malo dana), visoka cijena.

2. Tko je bio u najjeftinijem hotelu? Objasni.

Noa – više dana, mala cijena.

3. Koje osobe su odsjele u istom hotelu? Objasni.

Petar, Tonka i Ivan – cijena je proporcionalna s brojem dana.

U ovoj aktivnosti dobro je napraviti i razrednu diskusiju na način da nastavnik ostavi učenike da raspravljaju i nakon što je ponuđen točan odgovor.

Diskusija:

N: Tko je bio u hotelu s 5 zvjezdica?

U1: Ne možemo odgovoriti na to pitanje jer na grafu nema podatka o broju zvjezdica.

N: U2 što misli tvoja grupa? Objasni.

U2: Odgovor je Ana. Ona je bila malo dana na ljetovanju, a platila je puno.

N: Hvala U2. Ima li tko drugačiju ideju?

U3: Mi mislimo da su to Ana i Ivan.

N: Zašto?

U3: Zato što su najviše platili pa moraju biti u najskupljem hotelu.

Napomena nastavniku: Do ovog odgovora ne bi došlo i ne bi ga mogli prokomentirati, ukoliko bi nastavnik nakon odgovora U2 rekao da je to točan odgovor.

3. Jesu li grafovi samo slike?

U ovom poglavlju nalaze se tri aktivnosti koje su napravljene tako da izlože i izazovu diskusiju o uobičajenoj zabludi da su grafovi samo „slike“ situacija koje predstavljaju. Mnogi učenici ne mogu zamisliti grafove kao apstraktne prezentacije veza, već ih interpretiraju kao „slike“ koje predstavljaju danu situaciju te će u ovim aktivnostima uvidjeti svoje miskoncepcije i pokušati savladati nov način razmišljanja.

3.1. AKTIVNOST KOŠARKA

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, grafom prikazati situaciju prikazanu slikom

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

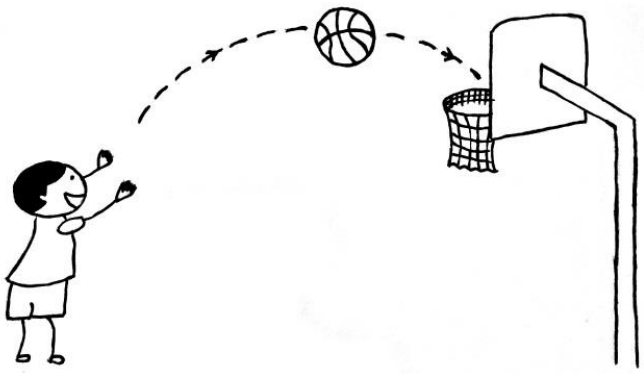
Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

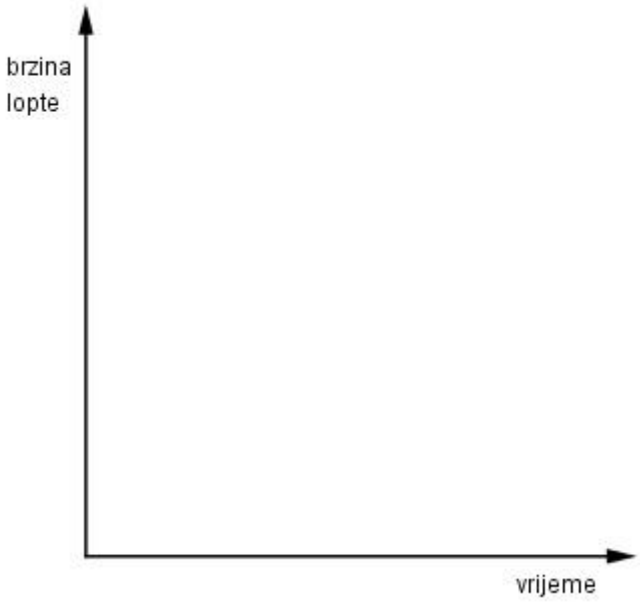
Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

Primjer nastavnog listića

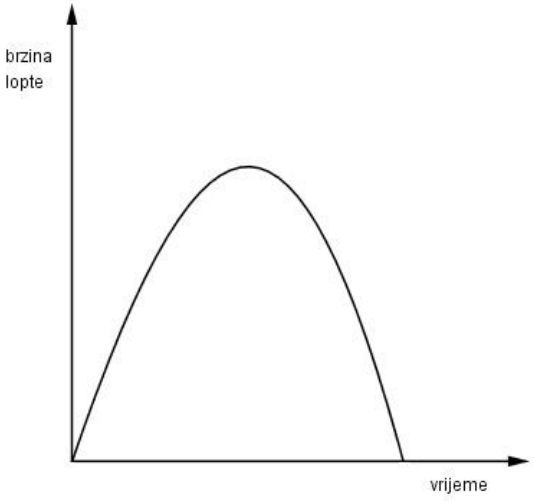
Zadatak: Prodiskutirajte o prikazanoj situaciji sa svojim parom iz klupe. Zatim zapišite što ste zaključili, kako se mijenja brzina lopte? Skicirajte graf koji prikazuje vaš opis situacije.





Ispod se nalazi graf kojeg je napravio jedan od učenika iz prethodne generacije.

Prokomentirajte ga.



Možete li pretpostaviti zašto je učenik nacrtao takav graf?

_____

_____

_____.

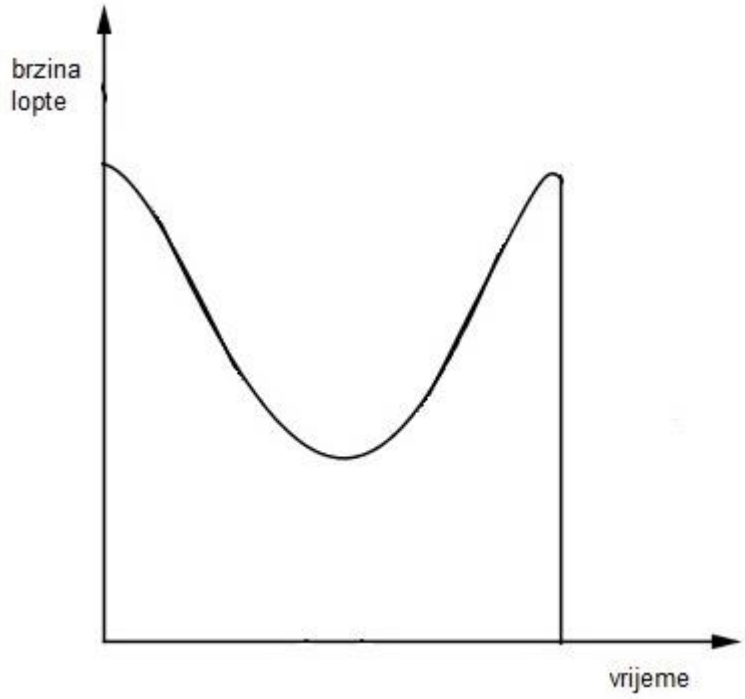
Vidite li kakvu poveznicu između tog grafa i danog crteža iznad (košarkaš s loptom)?

_____

_____.

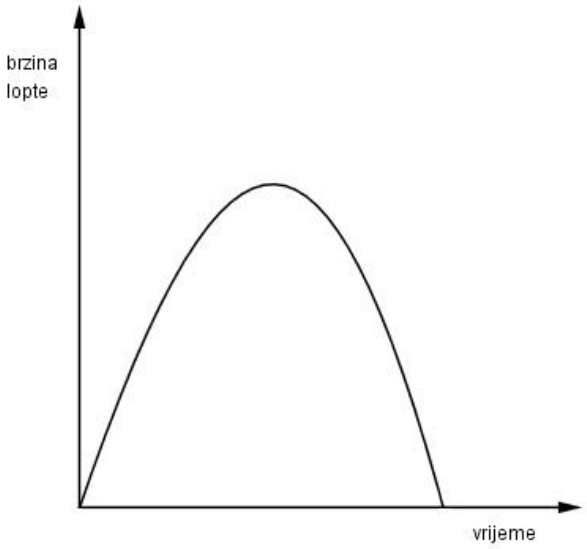
Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Prodiskutirajte o prikazanoj situaciji sa svojim parom iz klupe. Zatim zapišite što ste zaključili, kako se mijenja brzina lopte? Skicirajte graf koji prikazuje vaš opis situacije.



Ispod se nalazi graf kojeg je napravio jedan od učenika iz prethodne generacije.

Prokomentirajte ga.



Možete li pretpostaviti zašto je učenik nacrtao takav graf?

Učenik je nacrtao graf kao putanju lopte, bez uzimanja u obzir koje vrijednosti pišu na koordinatnim osima.

Vidite li kakvu poveznicu između tog grafa i danog crteža iznad (košarkaš s loptom)?

Da, putanja lopte je jednaka nacrtanom grafu, odnosno učenik je napravio najčešću pogrešku: „graf = slika“.

Tijek aktivnosti:

Tijekom aktivnosti nastavnik šeće razredom i sluša što učenici govore.

Neki učenici će vjerojatno pomiješati brzinu lopte s visinom koju doseže lopta i odgovorit će: „Brzina lopte se poveća nakon izbačaja.“ Dakle, neki učenici imaju osjećaj ako putanja lopte ide „gore i dolje“ da će tada i graf također ići „gore i dolje“. Takvo zaključivanje dodatno je pojačano činjenicom da lopta počinje i završava u mirovanju.

Napomena nastavniku:

Nastavnik mora izbjegavati osudu takvih odgovora te radije pozvati ostale učenike da komentiraju dobivena rješenja. Time nastavnik pokušava potaknuti učenike na diskusiju u kojoj učenici pokušaju biti dosljedni svojim uvjerenjima tako da postavljaju pitanja jedni drugima kako bi ih uvjerili u svoje zaključke.

Primjer pitanja koja potiču diskusiju učenika:

„Kada se lopta kreće najsporije?“

„Kada je brzina lopte najmanja?“

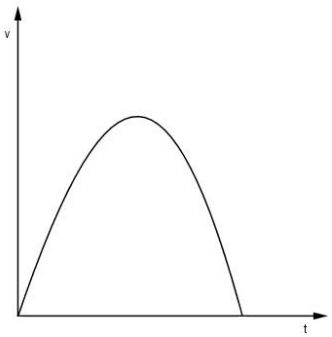
„Slaže li se vaš graf s tim?“

U ovoj aktivnosti nije potrebno diskutirati detaljno o situaciji kao u fizici pa tako raspravljati o gravitaciji i slično, već se to učenicima napomene da će o tome detaljnije raspravljati na fizici. Isto tako, nastavnik matematike može dogovoriti s nastavnikom fizike da na svojim satovima raspravljaju o istom zadatku, kako bi učenici dobili detaljniji uvid i mogućnost diskusije.

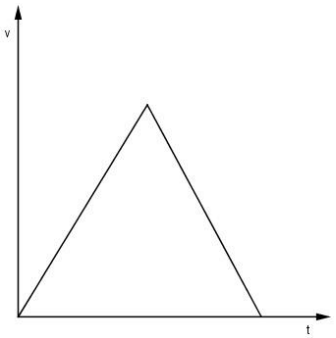
Nije važno da svi učenici dođu do „savršenog“ grafa. Važno je da su svi učenici upozoreni na veliku grešku interpretacije grafa kao slike koja predstavlja danu sitaciju (putanju lopte).

Diskusija:

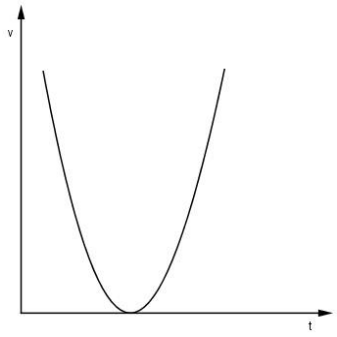
Nekoliko grupa skicira grafove na ploču i objašnjava kako su došli do njih. Ispod se nalaze grafovi koji se mogu pojaviti kao rješenje u razredu. Također, u ovom radu je ispod svakog grafa zapisano objašnjenje nacrtanog grafa kojeg su učenici usmeno prodiskutirali.

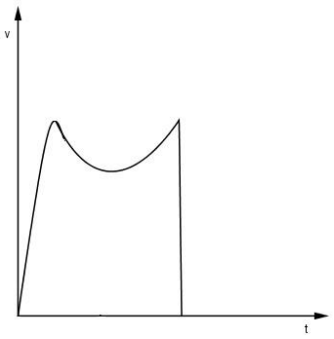


„graf = slika“



- uobičajena pojava jer lopta usporava dok ide prema gore i ubrzava kada ide prema dolje



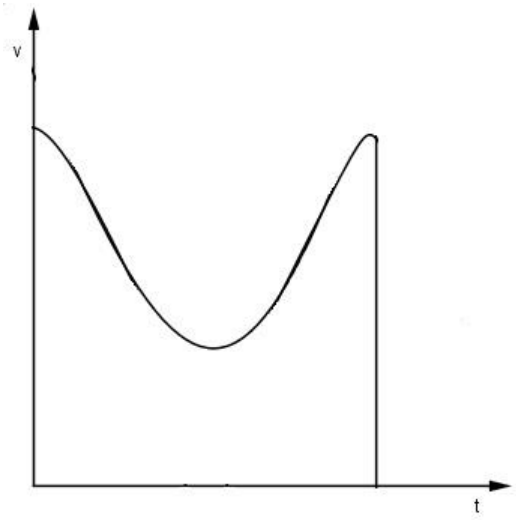


- lopta kreće brzo pa stane na sekundu, I onda opet ubrzava – učenik prepoznaje da lopta na najvišoj točki putanje postaje stacionarna

- lopta ubrzava nakon izbačaja pa usporava, pa ubrzava i onda završava u košu (odnosno na podu – zanemarimo odbijanje lopte dok padne na pod)

Nastavnik nakon diskusije skicira novi koordinatni sustav na ploču. Uz pomoć i komentare učenika nastavnik će skicirati graf. Učenici dolaze do zajedničkog zaključka što se događa s brzinom lopte.

Brzina lopte je najprije velika i polako se smanjuje, a zatim dok se lopta nalazi u svojem najvišem položaju, ona počine padati prema dolje i tada se brzina lopte ponovo poveća do trenutka kada prođe kroz koš, tada lopta završi na podu i nema više brzinu (miruje).



Time učenici uočavaju da je zapravo graf potpuno drugačiji, suprotan od putanje lopte, odnosno da putanja lopte nije jednaka grafu.

Nakon toga slijedi aktivnost u kojoj će učenici moći primijeniti upravo stečeno znanje.

3.2. AKTIVNOST GARDALAND

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, grafom prikazati situaciju prikazanu slikom

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

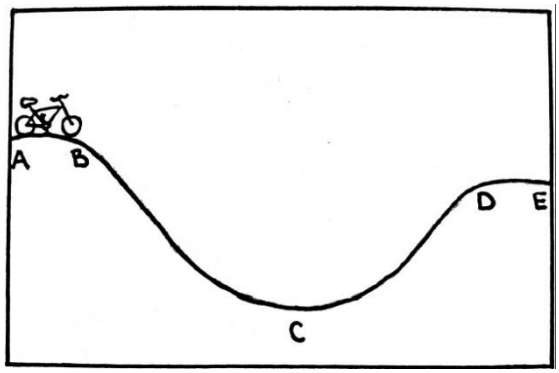
Tijek aktivnosti:

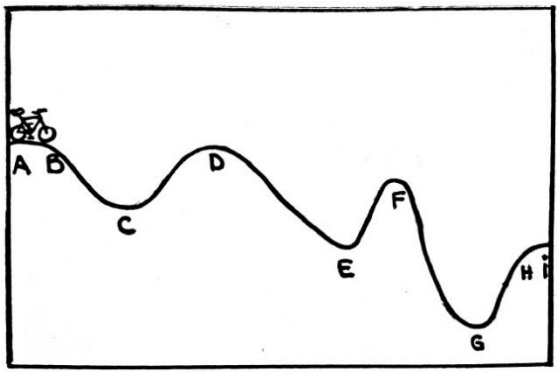
Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 15 minuta.

Primjer nastavnog listića

Zadatak: Jakov i Franka žele posjetiti Gardaland i svakodnevno maštaju o vožnji na „Blue tornadu“. No, kako su im roditelji obećali da će na izlet ići tek sljedeće godine, Jakov i Franka su odlučili napraviti tek jedan dio staze slične Blue tornadu kako bi se pripremili dogodine.

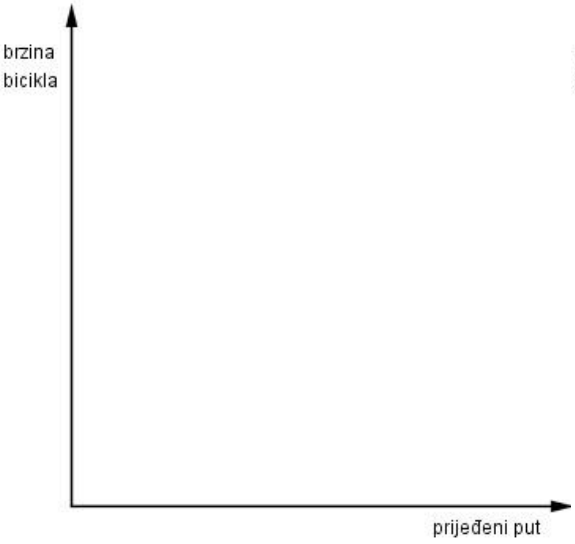
Srećom, njihovi baka i djed žive u selu punom brežuljaka te su Jakov i Franka tijekom praznika otkrili sljedeće staze koje mogu proći biciklima.

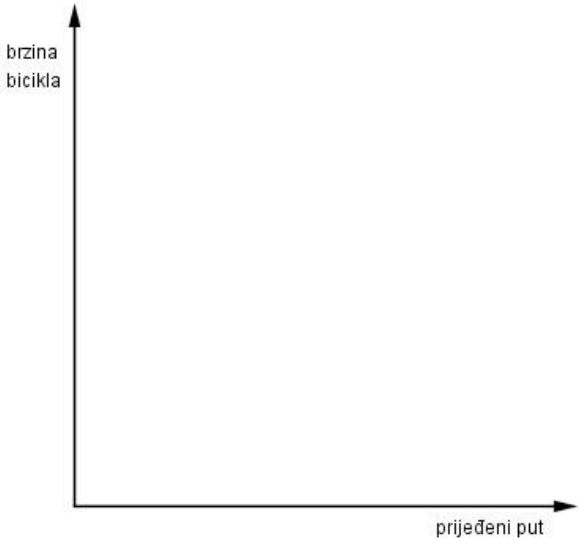




Opiši riječima i nacrtaj graf situacije prikazane na prvoj i drugoj slici.

Napomena: Prvo opišite riječima gibanje bicikla, a zatim pokrijte dani crtež i uz interpretaciju teksta nacrtajte traženi graf.





Odgovorite na sljedeća pitanja gledajući upravo nacrtane grafove.

Na kojim dijelovima staze se biciklist kretao brže? Sporije?

Graf 1. : _____

_____.

Graf 2. : _____

_____.

Kreće li se biciklist brže na mjestu B ili D? Zašto?

Graf 1. : _____

_____.

Graf 2. : _____

_____.

Gdje biciklist ubrzava, a gdje usporava? (Napišite mjesta.)

Graf 1. : _____

_____.

Graf 2. : _____

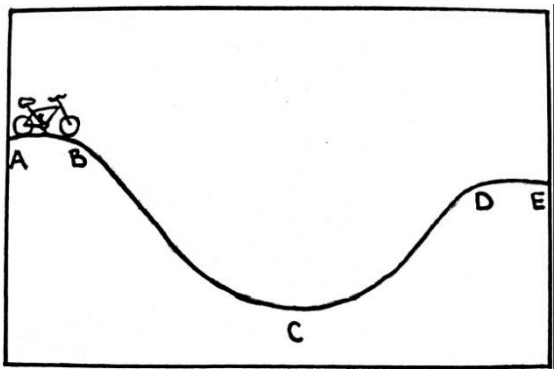
_____.

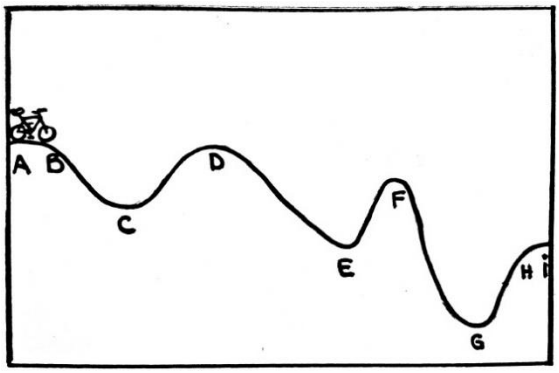
Nakon odgovora provjerite svoje odgovore promatrajući danu sliku s početka zadatka. Ako pronađete neke greške, ispravite ih.

Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Jakov i Franka žele posjetiti Gardaland i svakodnevno maštaju o vožnji na „Blue tornadu“. No, kako su im roditelji obećali da će na izlet ići tek sljedeće godine, Jakov i Franka su odlučili napraviti tek jedan dio staze slične Blue tornadu kako bi se pripremili dogodine.

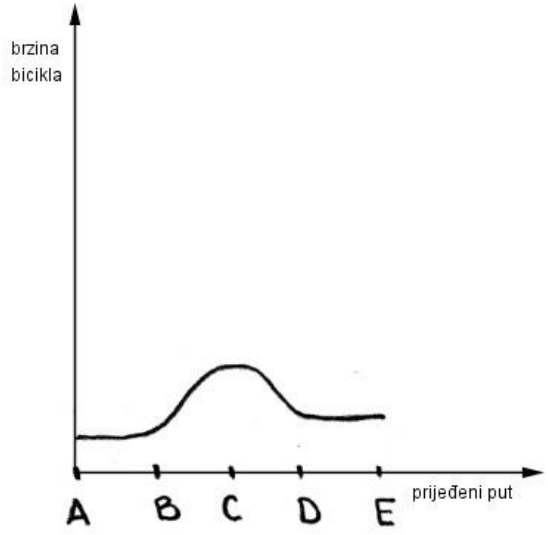
Srećom, njihovi baka i djed žive u selu punom brežuljaka te su Jakov i Franka tijekom praznika otkrili sljedeće staze koje mogu proći biciklima.

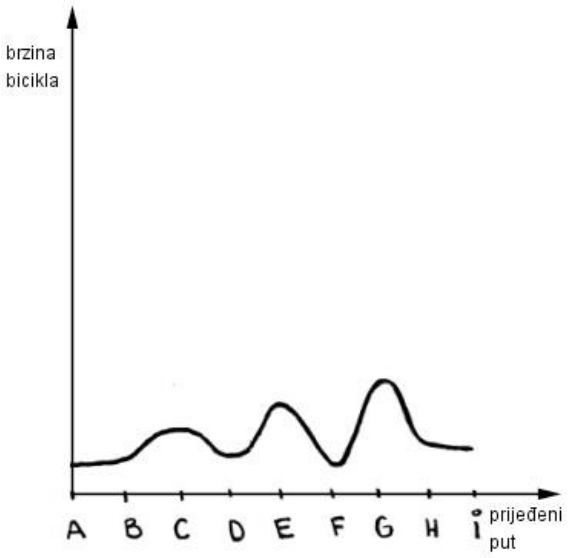




Opiši riječima i nacrtaj graf situacije prikazane na prvoj i drugoj slici.

Napomena: Prvo opišite riječima gibanje bicikla, a zatim pokrijte dani crtež i uz interpretaciju teksta nacrtajte traženi graf.





Odgovorite na sljedeća pitanja gledajući upravo nacrtane grafove.

Na kojim dijelovima staze se biciklist kretao brže? Sporije?

Graf 1. : Biciklist se brže kretao kada je krenuo u udolinu, a sporije kada je krenuo na uzbrdicu.

Graf 2. : Analogno kao u grafu 1.

Kreće li se biciklist brže na mjestu B ili D? Zašto?

Graf 1. : Brže se kreće na mjestu D zbog toga što na mjestu B biciklist tek započinje vožnju pa je brzina kretanja manja od brzine na mjestu B gdje se prije toga biciklist već kretao nekom brzinom.

Graf 2. : Analogno kao u grafu 1.

Gdje biciklist ubrzava, a gdje usporava? (Napišite mjesta.)

Graf 1. : Biciklist ubrzava od mjesta B do mjesta C.

Graf 2. : Biciklist ubrzava od mjesta B do mjesta C, zatim od mjesta D do E i od F do G.

Nakon odgovora provjerite svoje odgovore promatrajući danu sliku s početka zadatka. Ako pronađete neke greške, ispravite ih.

Tijek aktivnosti:

Kada učenici završe s popunjavanjem nastavnog listića nastavnik im daje novi zadatak.

Učenici moraju izmisliti neku kompliciraniju stazu za koju smatraju da očekuje Jakova i Franku u Gardalandu. Sliku učenici prosljeđuju svojem paru iz klupe. Nakon toga svaki učenik skicira graf za dobivenu sliku od svog para.

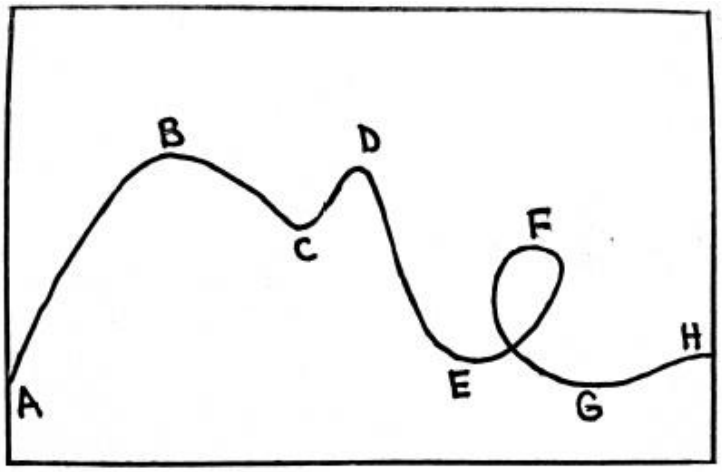
Diskusija:

Primijećujete li neku sličnost (poveznicu) slike s grafom? Zapišite.

Putanja biciklista je suprotna od grafa. Gdje se na slici nalazi brijeg, na grafu je brzina prikazana udolinom, jer u tom trenutku biciklist kod penjanja usporava.

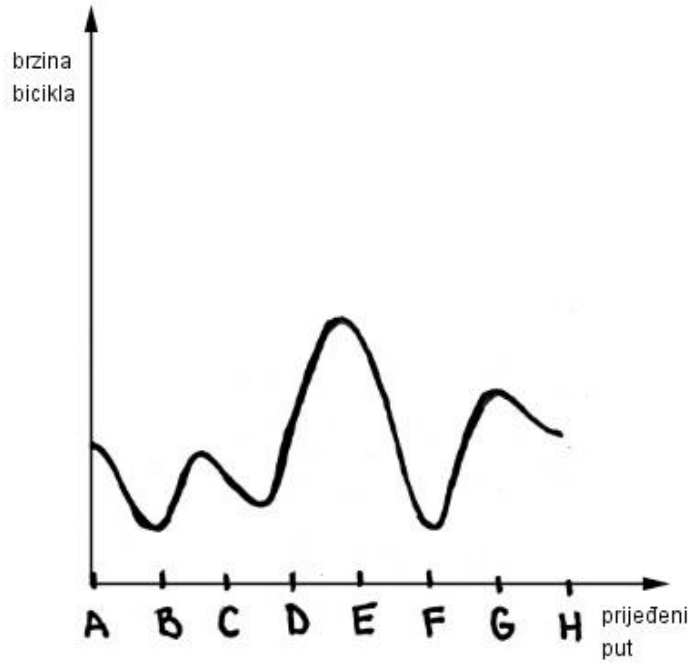
Postoje li neke iznimke? Moguća diskusija o grafu staze koja ima čvor. Ima li graf čvor?

Nastavnik može skicirati stazu koja ima čvor i zajedno s učenicima otkriti graf koji prikazuje brzinu kretanja tom stazom.



Nastavnik diskutira s učenicima da li se može pojaviti staza koja ima čvor, te neke primjere zapisuju u bilježnicu: staza „Blue tornado“ u Gardalandu, staza trkača gledana iz zraka (pričje perspektive), itd.

Nakon diskusije, rješenje, odnosno traženi graf nastavnik skicira na ploču.



Učenici uočavaju da ovaj graf nije suprotan putanji koju osoba prolazi, odnosno graf ne može imati čvor.

3.3. AKTIVNOST <u>SPORT</u>

Cilj aktivnosti: učenici će riječima interpretirati dani graf za ponuđene odgovore

Oblik rada: individualni rad

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

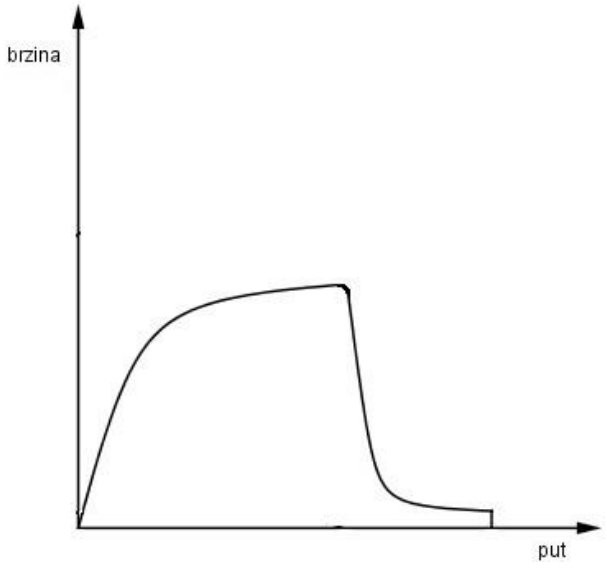
Tijek aktivnosti:

Ova aktivnost je zamišljena u obliku individualnog rada kojeg učenici odrade za domaću zadaću jer zahtjeva više vremena za razmišljanje i opisivanje. Zbog toga će se dobiti i detaljniji i kvalitetniji odgovori. Nakon što učenici naprave zadaću, nasatavnik na sljedećem satu s njima vodi diskusiju o rješenjima.

Učenici će tako čuti nove ideje i primjere kojih se oni nisu sjetili.

<u>Primjer nastavnog listića</u>

Zadatak: Koji sport proizvodi graf poput ovog? Odaberi najbolji odgovor od ispod ponuđenih i objasni kako točno on odgovara danom grafu.Zapišite zašto ste odbacili ostale ponuđene odgovore.



Ponuđeni odgovori:

- pecanje
- skakanje s motkom
- sprint 100 metara
- golf
- streljaštvo
- bacanje koplja
- skok u vis
- ronjenje
- skijanje po vodi
- nešto drugo



Očekivani pogrešni odgovori:

- Mislim da graf prikazuje skok s motkom zato što prikazuje visinu koju skakač doseže, a zatim slijedi oštar pad skakača, kao što i sam graf prikazuje.
  (Ovaj učenik nije proučio dane vrijednosti na koordinatnim osima, stoga povezuje vertikalnu os s visinom)

- Mislim da je riječ o nogometu zato što su igrači na početku utakmice življi i nisu umorni, ali prema kraju utakmice snaga igrača pada i oni ostaju na razini mirovanja do kraja utakmice

- Mislim da graf prikazuje bacanje kladiva zbog toga što se kladivo najprije kreće prema gore, a nakon nekog vremena počinje padati i na kraju se kotrlja po zemlji
  (Učenik povezuje sliku situacije s grafom – najčešća pogreška.)

- Vjerujem da se radi o padobranstvu zato što se avion najprije diže u zrak te nakon nekog vremena padobranac skoči iz aviona, a potom se prizemlji i nastavi hodati

- Mislim da graf prikazuje ronioca koji se popeo na greben, zatim skočio i zaronio i nastavio plivati

Primjer točnih odgovora:

Skakanje padobranom zato što jasno prikazuje:

- ubrzanje (kako padobranac pada) tijekom skoka (pada) padobranca
- konačnu brzinu kada vjetar postane jednak gravitacijskoj sili
- brzo usporenje kada se padobran otvori
- oprezno (dugo) prizemljavanja
- mali skok prilikom doticaja tla

Napomena: neki učenici mogu komentirati da padobranac ne počinje padati sa nultom brzinom zbog horizontalnog kretanja avionom, no „brzina“ koju promatramo u ovom slučaju se smatra da je vertikalna brzina skakača prema dolje.

Pecanje – brzina udice

- krivulja predstavlja ubrzanje udice, a zatim naglo usporavanje kada dođe u vodu, pomiče se kroz vodu, a zatim stane kada štap – udica postane napeta

Napomena: Ovaj primjer je dobar stoga što najprije asocira učenike da bi to mogla biti zamka – „slika = graf“, no oni koji će razmisliti o mogućim rješenjima vezanih uz ovaj sport doći će do točnog odgovora.

Skakanje s motkom, golf, skok u vis, bacanje koplja ne odgovaraju grafu jer se brzina smanjuje dok se atletičar, lopta, kolje dižu i zrak, a povećava kada počinju padati. Stoga će na grafu brzine postojati lokalni minimum kao najveća točka putanje.

4. Skiciranje grafova situacije opisane riječima

Ovo poglavlje sadrži aktivnosti koje potiču učenike da usmeno opisuju i zatim skiciraju grafove.

Postoje dvije vrste opisivanja:

1. Puni opis – koji daje izravne, detaljne izvještaje kako varijable ovise jedna o drugoj
2. „Izazovne fraze“ – učenici moraju zamisliti sitaciju, a zatim sami odlučiti o ovisnosti danih varijabli

Unutar bilo koje aktivnosti, postoje znatne poteškoće koje ovise o kontekstu, poznavanju jezika i značajkama grafa.

4.1. AKTIVNOST VINOGRAD

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, grafom prikazati situaciju opisanu riječima

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta. Nakon toga će slijediti razredna diskusija.

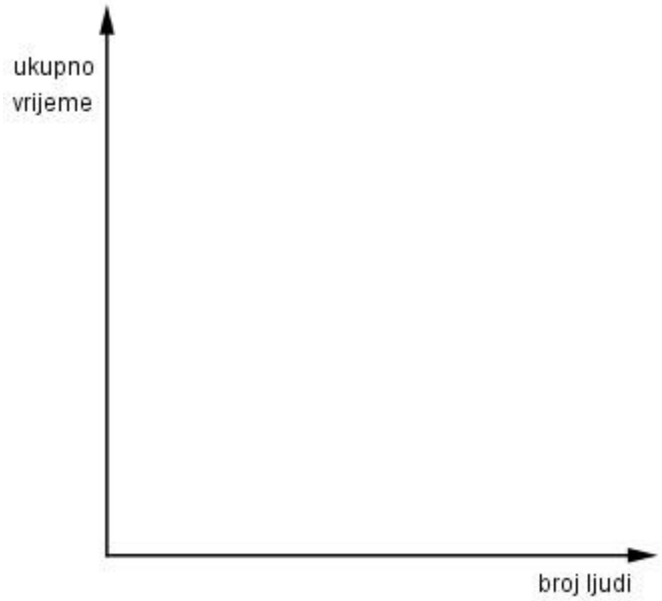
Primjer nastavnog listića

Zadatak: Matijina obitelj ima veliki vinograd. Svake jeseni vrijeme je za berbu grožđa, no ove godine tijekom berbe vrijeme se počelo pogoršavati. Kako bi grožđe bilo pobrano prije kiše Matijin otac je zamolio Matiju da pozove svoje prijatelje da im pomognu.



Otac je rekao: „Što će više ljudi raditi i pomoći, prije ćemo pobrati svo grožđe.“

Koristeći koordinatni sustav skicirajte graf koji prikazuje situaciju koju je Matijin otac opisao.



Usporedite grafove sa svojim parom i argumentirajte svoja rješenja. Zapišite objašnjenje kako ste došli do rješenja i odgovorite na sljedeća pitanja:

Hoće li graf imati „nagib prema gore“ ili „nagib prema dole“? Zašto?

_____

_____.

Hoće li graf biti pravac? Zašto?

_____

_____.

Hoće li graf sjeći koordinatne osi? Ako da, gdje? Ako ne, zašto ne?

_____

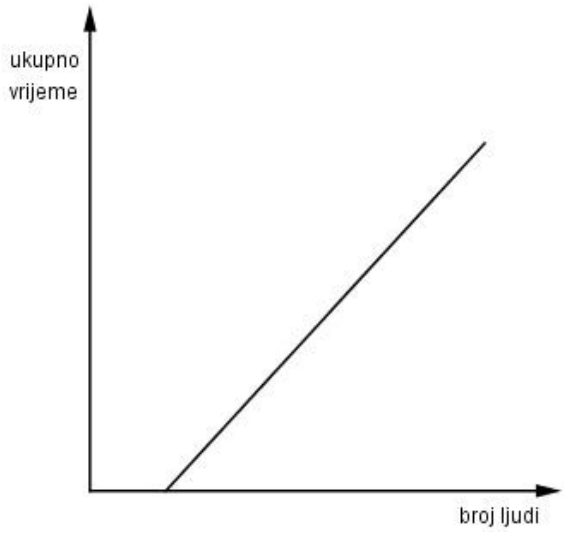
_____.

Tijek aktivnosti:

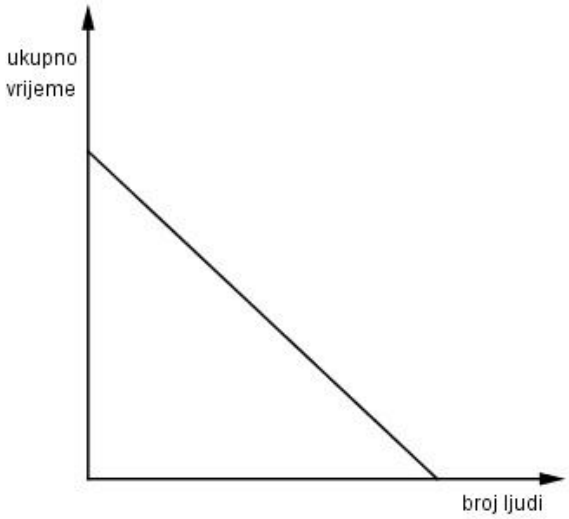
Nastavnik tijekom aktivnosti naglašava učenicima da svoja objašnjenja trebaju zapisati – kako su došli do odgovora i da nacrtaju svoja opažanja vezana uz dodatna tri pitanja koja se nalaze ispod grafa. Tijekom njihovog rada nastavnik šeće razredom i ispituje i sluša objašnjenja i razloge kako su učenici došli do rješenja.

No, u ovom trenutku bolje je da nastavnik ne daje odgovore ili sugestije kako ne bi narušio razrednu diskusiju.

Nako što učenici završe s radom u paru nekoliko učenika skicira svoje grafove na ploču. Nastavnik tijekom šetnje razredom uočava različita rješenja te proziva na ploču upravo učenike koji imaju različita rješenja (po mogućnosti da se pojave oba dana rješenja koje se nalaze u nastavku rada).



Graf 1.



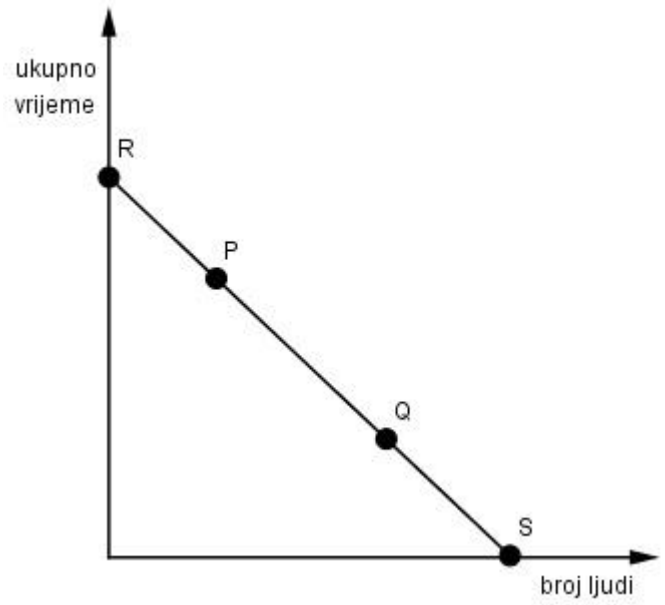
Graf 2.

Diskusija:

Interpretacija prvog rješenja (Graf 1.):
Do ovog rješenja, odnosno grafa se dolazi kada učenici krivo protumače zadane vrijednosti na koordinatnim osima – „Na početku, par ljudi bere grožđe, ali kako vrijeme prolazi sve više i više ljudi se pridružuje branju.“

Ovo je česta pojava krive interpretacije kod učenika zbog toga što učenici vertikalnu os tumače kao „proteklo vrijeme“. Učenici su navikli na takve oznake pa je ovo dobar primjer kod kojeg će učenici morati prepoznati da se na koordinatnoj osi nalazi vrijednost „ukupno vrijeme potrebno za završetak berbe“.
Ako se takvo rješenje pojavi u razredu, nastavnik treba objasniti učenicima da to nije ista situacija kao kod aktivnosti bacanja lopte u koš (poglavlje 2). U ovom primjeru nije moguće na grafu staviti prst duž krivulje i zamisliti kako vrijeme prolazi jer svaka točka grafa predstavlja drugačiju moguću situaciju.

Kada se objasne sve miskoncepcije kod prvog grafa, slijedi diskusija o drugom grafu (Graf 2.). Nastavnik postupno na grafu označava točke – tijekom diskusije.



N: Što točka *P* predstavlja?

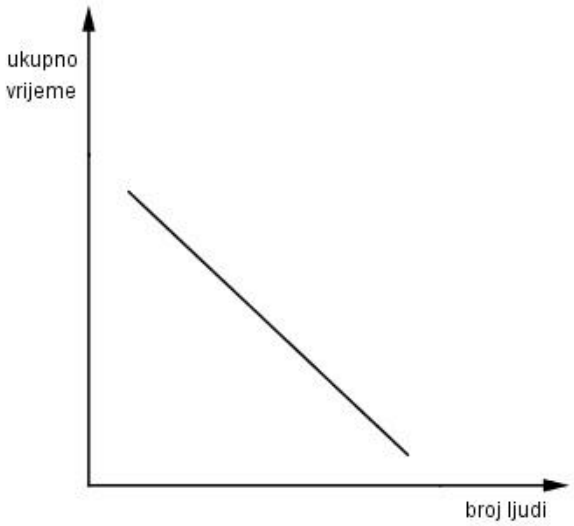
U: Ako malo ljudi bere grožđe tada će im trebati puno vremena da poberu svo grožđe.

N: Što predstavlja točka *Q*?

U: Ako puno ljudi bere grožđe brzo će sve pobrati.

N: A što se događa u točki *R*, odnosno *S*? (ovo pitanje bi trebalo učenicima omogućiti da shvate da graf ne može dirati koordinatne osi.)

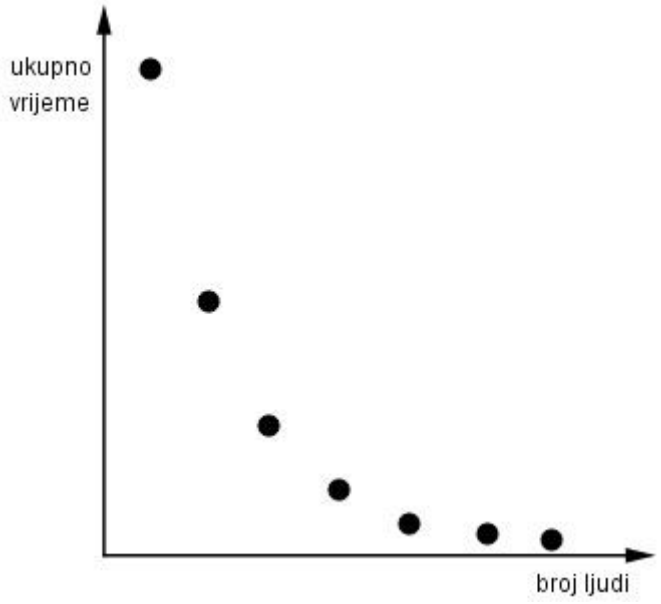
Neki učenici će predložiti da bi graf tamo trebao biti zakrivljen, dok drugi govore da krajeve treba obrisati.



Nakon tog prijedloga nastavnik govori učenicima da uzmu u obzir situaciju kada se jako puno ljudi pridruži u branju grožđa. To bi većini učenika trebalo omogućiti da shvate da desni kraj grafa ne može završiti samo tako kao što su predložili na grafu iznad.

Nastavnik zatim pita učenike što će se dogoditi sa lijevim krajem grafa. Mogu se pojaviti odgovori i zbunjenost učenika poput „da ne može „pola“ čovjeka brati grožđe“ pa graf mora početi s jednom osobom.

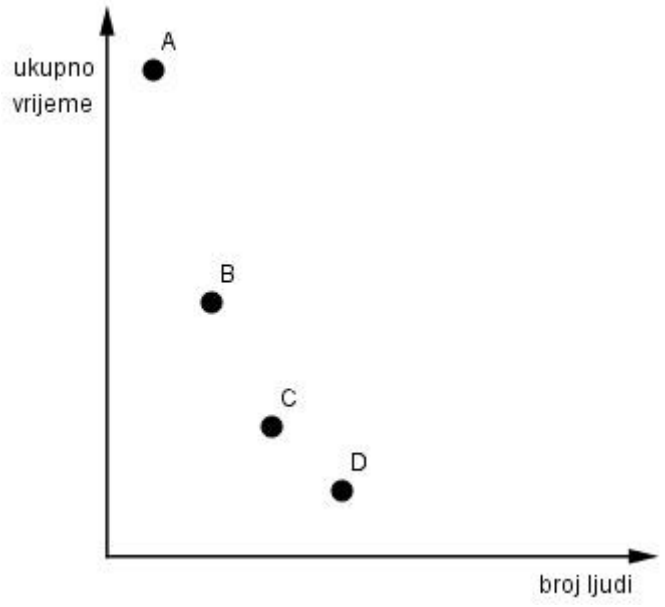
Napomena za učenike: graf se zaista sastoji od određenih točaka (cjelobrojnih).



Učenici mogu doći do rješenja i intuitivno:

„Ako udvostručimo broj ljudi, potrebno vrijeme branja će se prepoloviti.“

Ovakvo razmišljanje dovodi od točke *A*, zatim do točke *B, C, D*,...



Nakon diskusije nastavnik govori učenicima da u bilježnicu zapišu točno objašnjenje i skiciraju graf do kojeg su zajednički došli.

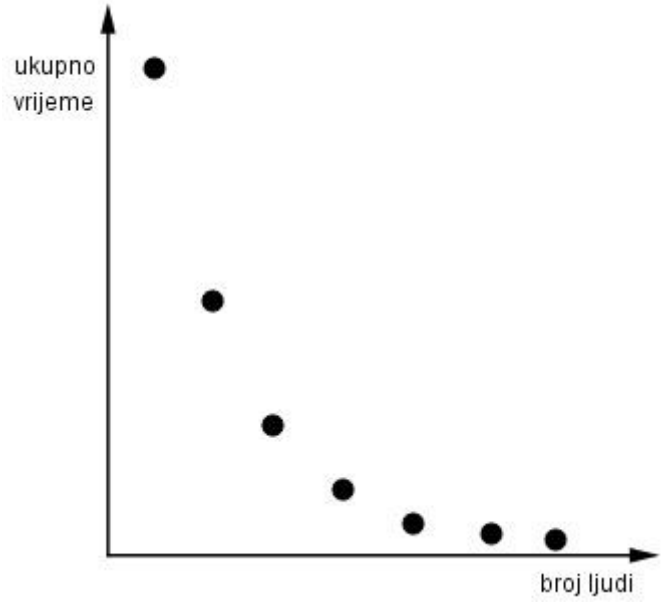
Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Matijina obitelj ima veliki vinograd. Svake jeseni vrijeme je za berbu grožđa, no ove godine tijekom berbe vrijeme se počelo pogoršavati. Kako bi grožđe bilo pobrano prije kiše Matijin otac je zamolio Matiju da pozove svoje prijatelje da im pomognu.



Otac je rekao: „Što će više ljudi raditi i pomoći, prije ćemo pobrati svo grožđe.“

Koristeći koordinatni sustav skicirajte graf koji prikazuje situaciju koju je Matijin otac opisao.



Usporedite grafove sa svojim parom i argumentirajte svoja rješenja. Zapišite objašnjenje kako ste došli do rješenja i odgovorite na sljedeća pitanja:

Hoće li graf imati „nagib prema gore“ ili „nagib prema dole“? Zašto?

„Nagib prema dole“ jer dok se broj ljudi poveća, ukupno vrijeme branja grožđa će se smanjiti.

Hoće li graf biti pravac? Zašto?

Neće biti pravac stoga što se ukupno vrijeme duplo brže smanjuje nego li se broj ljudi povećava.

Hoće li graf sjeći koordinatne osi? Ako da, gdje? Ako ne, zašto ne?

Graf neće sjeći koordinate osi jer one predstavljaju broj ljudi i ukupan broj određenog vremena. Ako barem jedna osoba bere grožđe za taj posao joj je potrebno neko vrijeme.

4.2. AKTIVNOST PRIČE

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, povezivati grafove i situaciju opisanu riječima

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

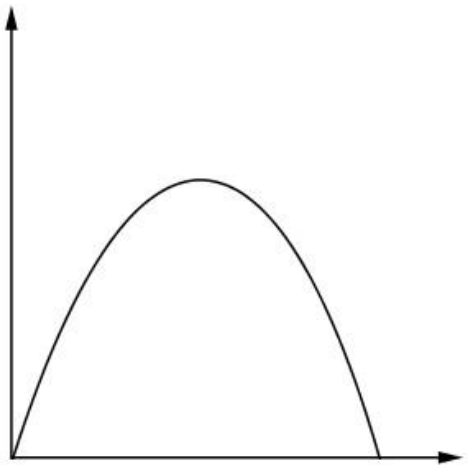
Primjer nastavnog listića

Zadatak: Odaberite četiri grafa koji najbolje opisuju navedene četiri situacije. Precrtajte grafove, označite vrijednosti na koordinatnim osima i objasnite svoj odabir navodeći sve pretpostavke koje ste koristili.

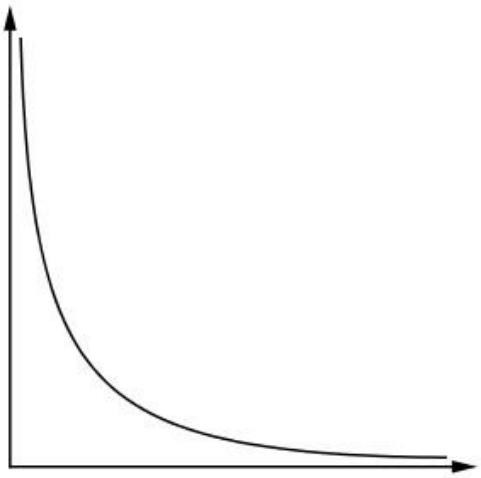
Napomena: Ako ne možete pronaći odgovarajući graf nacrtajte svoj. Također, dani grafovi mogu odgovarati i više situacija.

1. Cijena automobila sada raste puno brže nego li tijekom zadnjih deset godina.
2. Kako se mijenja temperatura zraka tijekom godine u Europi?
3. Trkač na početku utrke kreće sporije kako bi mu preostalo dovoljno snage za cijelu utrku. Pri kraju utrke trkač ubrzava i koristi svu snagu kako bi s dobrim rezultatom završio utrku.
4. Kako se mijenja broj kolača tijekom proslave rođendana?

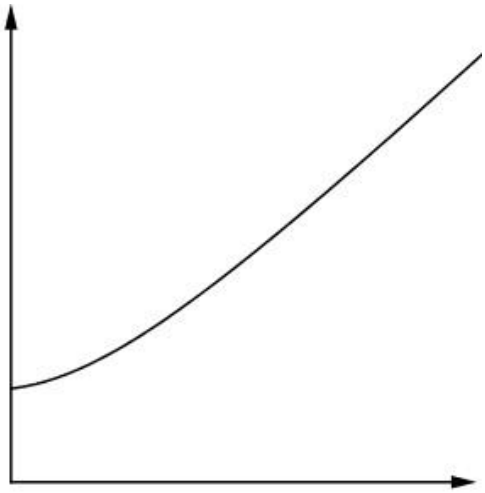
Grafovi:



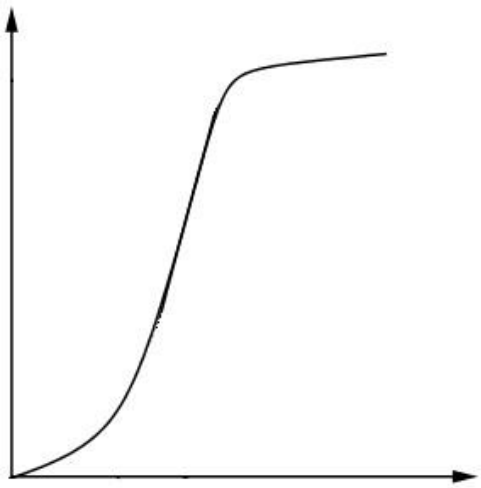
Graf 1



Graf 2



Graf 3



Graf 4

Primjer mogućih rješenja:

Graf 1 - odgovor 2 Graf 2 - odgovor 4

Graf 3 - odgovor 1 Graf 4 – odgovor 3

Zašto?

Graf 1 - odgovor 2: Kako se mijenja temperatura zraka tijekom godine u Europi?

Temperatura zraka je najviša tijekom sredine godine, pa ukoliko koordinatne osi prikazuju mjesece u godini te temperaturu zraka onda ovaj graf odgovara opisanom pitanju.

Graf 2 - odgovor 4: Kako se mijenja broj kolača tijekom proslave rođendana?

Ukoliko na koordinatnim osima označimo vrijeme od početka rođendana pa nadalje te broj kolača, onda ovaj graf pokazuje da je na početku rođendana bilo puno kolača, a tijekom vemena se broj tih kolača brzo smanjio.

Graf 3 - odgovor 1: Cijena automobila sada raste puno brže nego li tijekom zadnjih deset godina.

U ovom primjeru se pojavljuje rijei „rast“ i „puno brže“ te pronalazimo u rješenjima graf koji brzo raste nakon nekog određenog vremena. To je upravo treći graf i koordinatne osi u ovom primjeru mogu predstavljati broj godina i cijenu automobila.

Graf 4 – odgovor 3: Trkač na početku utrke kreće sporije kako bi mu preostalo dovoljno snage za cijelu utrku. Pri kraju utrke trkač ubrzava i koristi svu snagu kako bi s dobrim rezultatom završio utrku.

Preostaje je još jedan odgovor, no nastavnik upućuje učenike kao što je već napomenuto u samom tekstu zadatka, da ukoliko ne mogu pronaći odgovarajući graf nacrtaju svoj.

Također, dani grafovi mogu odgovarati i više situacija. Stoga učenici najprije provjeravaju odgovara li dani graf opisanom primjeru.

Ukoliko na osi apscisa označimo brzinu trčanja, a na osi ordinata broj kilometara, odnosno duljinu staze, tada će dani graf odgovarati opisanom primjeru.

Nakon prezentiranja rješenja i diskusije o ponuđenim rješenjima, učenici zapisuju primjere drugih grupa, a za domaću zadaću im preostaje da razmisle o dodatnim primjerima koji bi mogli odgovarati ponuđenim grafovima ili opisanim primjerima. Isto tako, nastavnik govori učenicima da mogu osmislite svoje primjere i grafove o kojima mogu prodiskutirati na sljedećem satu.

5. Skiciranje grafova situacije prikazane slikom

U ovom poglavlju se nalazi aktivnost u kojoj učenici diskutiraju o svojstvima grafičkog prikaza kao što su maksimum i minimum. Kod skiciranja grafova u ovakvim situacijama učenike treba osvjestiti kako bi u obzir uzeli sve podatke koji su im dani i koje trebaju sami pretpostaviti.

5.1. AKTIVNOST TRČANJE

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, opisati riječima i grafom prikazati situaciju prikazanu slikom

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

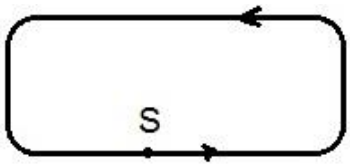
Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

Primjer nastavnog listića

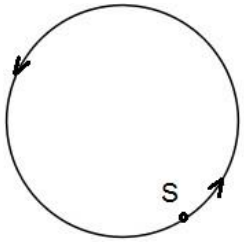
Zadatak: Aida se pridružila skupini trkača koja se priprema za maraton. Svaki dan imali su drugačiji trening i trčali su različitim stazama. Staze nisu bile dugačke pa su trkači trčali više krugova.

Što mislite, kako će se mijenjati brzina trčanja Aide tijekom trećeg kruga svake od danih staza?

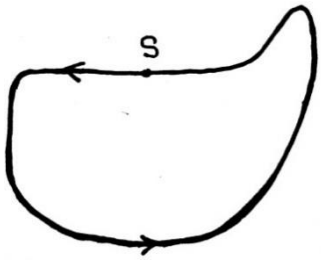
Staza „Savski nasip“



Staza „Bundek“

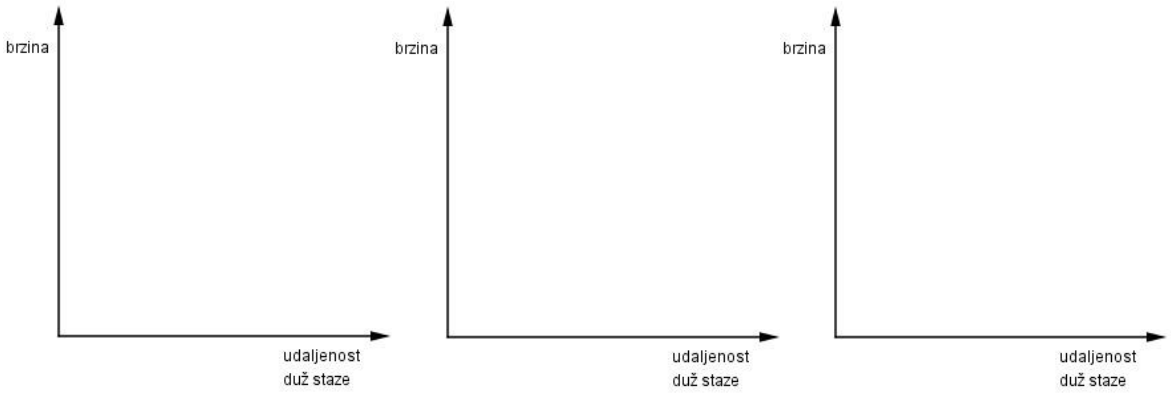


Staza „Jarun“



Objasnite svoj odgovor u svakom slučaju – riječima i skiciranjem grafa. Jasno navedite sve pretpostavke.

Staza „Savski nasip“ Staza „Bundek“ Staza „Jarun“



Usporedite grafove sa svojim parom u klupi. Nakon diskusije, odredite tri grafa sa kojima se oboje slažete da su rješjenja danog zadatka.

Diskusija:

Tijekom aktivnosti nastavnik šeće razredom i učenicima napominje da su prve dvije staze jednostavnije od treće te neka ne treću stazu obrate pažnju. Postavlja im pitanja:

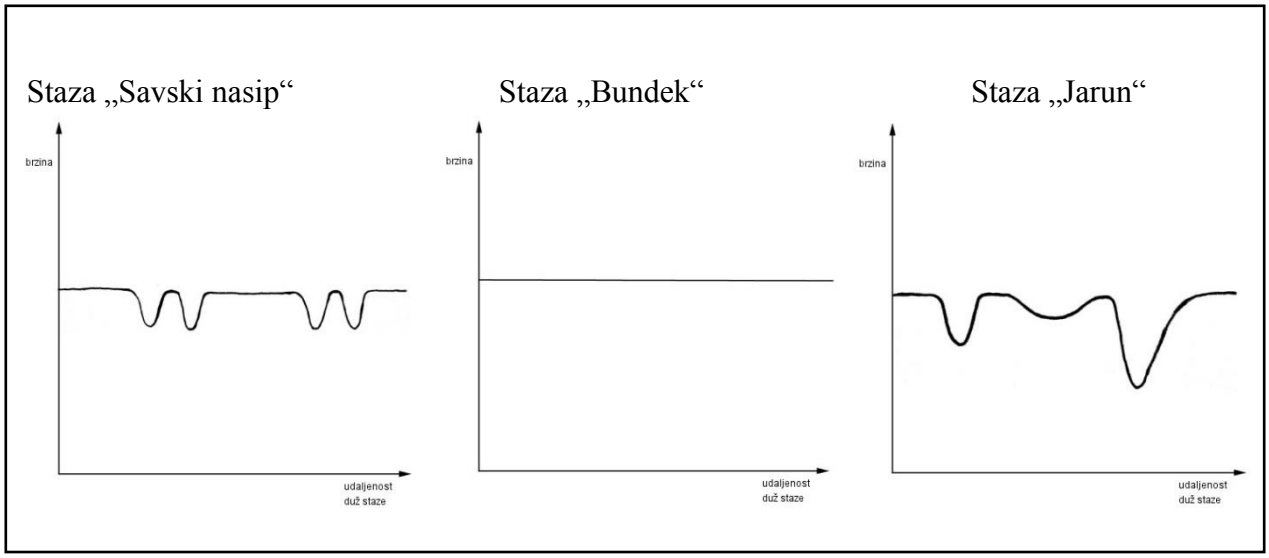
„Koliko zavoja ima jedan krug staze?“

„Koji zavoji su najopasniji?“

„Koji ravni dio staze je nadulji?“

Nakon što učenici završe s radom, nastavnik proziva neke učenike da svoja rješenja skiciraju na ploču.

Primjer **rješenja** nastavnog listića



Učenici objašnjavaju svoje odgovore:

Staza „Savski nasip“ Pretpostavimo da Aida trči u skupini s ostalim trkačima, jednakom brzinom duž ravnog dijela staze. Zatim dolazi do prvog zavoja u kojem mora usporiti kako se ne bi sudarila s nekim od trkača ili istrčala van staze (promašila most koji vodi preko Save). Stoga na tim dijelovima brzina trčanja Aide se smanjuje, a zatim povećava ponovo do brzine kojom je i prije zavoja trčala.

Staza „Bundek“ Ova staza ima oblik kružnice stoga zaključujemo da Aida tijekom staze trči jednakom brzinom bez usporavanja ili ubrzavanja zbog toga što nema zavoja koji bi se isticali od ostatka staze, kao što je slučaj kod prethodne staze.

> Napomena nastavniku: Dodatno pitanje koje nastavnik može postaviti učenicima jest da li je Aidina brzina trčanja ovom stazom jednaka njezinoj brzini trčanja stazom koja je ravna (bez zavoja)? Uspoređivanjem učenici uočavaju da te dvije brzine nisu jednake, već da je brzina trčanja kružnom stazom manja.

Staza „Jarun“ Ova staza ima različite zavoje. Ističu se dva zavoja, prvi zavoj slijedi odmah nakon starta koji je otprilike pod pravim kutom te drugi zavoj koji se nalazi prije samog cilja. Taj zavoj je oštriji od prvog te će ovdje Aida trebati jako usporiti.

Tijekom skiciranja rješenja na ploču nastavnik ne mora prozivati samo one učenike za koje je vidio da su dobili točno rješenje, već može prozvati i učenike koji su drugačije riješili zadataka. Uz njihovo objašnjavanje ostali učenici mogu vidjeti gdje dolazi do najčešćih grešaka. Nastavnik tako dugo može prozivati učenike na ploču dok se svi slože s nacrtanim rješenjem na ploči.

Napomena: učenici ne brišu svoja rješenja u bilježnicama već ispod skiciraju točno rješenje, kako bi se tijekom učenja mogli prisjetiti svojih grešaka i tako ih izbjeći u daljnjim zadacima.

Nakon diskusije, nastavnik govori učenicima da svatko od njih osmisli svoju stazu, koja ima najmanje pet zavoja. Zatim učenici crteže proslijede svojem paru i pokušaju skicirati graf koji će prikazivati kako brzina trčanja Aide ovisi o udaljenosti duž dane staze.

Napomena nastavniku: U ovoj aktivnosti nastavnik može osmisliti drugačije staze, koje će biti poznatije učenicima, npr. staze koje se nalaze u gradu u kojem se nalazi škola ili neke poznatije europske staze za trčanje. Također nastavnik može u dogovorom s nastavnikom iz tjelesnog i zdrastvenog odgoja osmisliti staze koje će učenici moći i istrčati.

5.2. AKTIVNOST VJETRENJAČA

Napomena nastavniku: Ova aktivnost može biti povezana s gradivom iz predmeta geografija, pri čemu učenici prije ili nakon aktivnosti mogu detaljnije istražiti gdje se sve nalaze vjetrenjače odnosno vjetroelektrane u Hrvatskoj i čemu one služe. Također, mogu pronaći nove dimenzije vjetrenjača i tako varirati podatcima koji su zadani u ovoj aktivnosti i osmišljavati nove zadatke i nova pitanja.

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, opisati riječima i grafom prikazati situaciju prikazanu slikom

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u paru

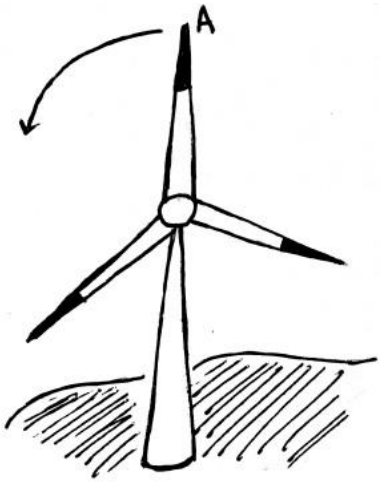
Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u parove i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

Primjer nastavnog listića

Zadatak: Mjerenja određenih karakteristika vjetra pokazala su kako je za iskorištavanje energije vjetra povoljno područje Jadrana. Stoga su prve hrvatske vjetroelektrane izgrađene upravo na tom području.



Vjetrenjača prikazana na slici vrti se stalnom brzinom. Središte vjetrenjače nalazi se na visini od 50 m od tla, a na njega su pričvršćene lopatice duljine 24 m. Jednoj lopatici je potrebno 4 sekunde da dođe od najviše do najniže visine. Promatrajte kretanje vrha lopatice koji se na početku nalazi u točki *A* i odgovorite na sljedeća pitanja.

a) Koliko iznosi najveća visina od tla do vrha lopatice (u metrima) tijekom vrtnje? Zašto?

_____

_____.

b) Koliko iznosi najmanja visina od tla do vrha lopatice (u metrima) tijekom vrtnje? Zašto?

_____

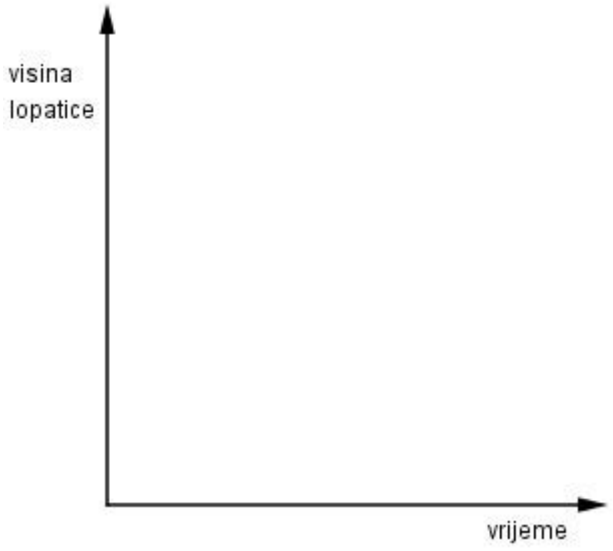
_____.

c) Koliko je vremena potrebno da lopatica vjetrenjače napravi jedan krug? Zašto?

_____

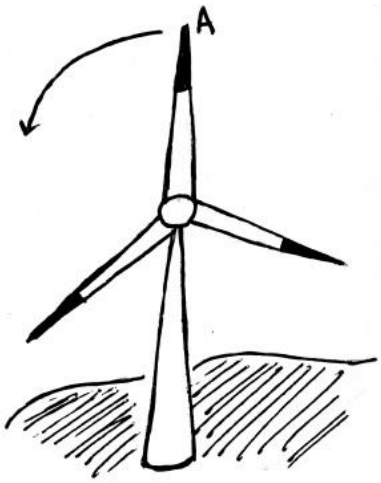
_____.

d) Nacrtajte graf ovisnosti (funkcije) visine vrha lopatice u ovisnosti o vremenu.



Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Mjerenja određenih karakteristika vjetra pokazala su kako je za iskorištavanje energije vjetra povoljno područje Jadrana. Stoga su prve hrvatske vjetroelektrane izgrađene upravo na tom području.



Vjetrenjača prikazana na slici vrti se stalnom brzinom. Središte vjetrenjače nalazi se na visini od 50 m od tla, a na njega su pričvršćene lopatice duljine 24 m. Jednoj lopatici je potrebno 4 sekunde da dođe od najviše do najniže visine. Promatrajte kretanje vrha lopatice koji se na početku nalazi u točki *A* i odgovorite na sljedeća pitanja.

a) Koliko iznosi najveća visina od tla do vrha lopatice (u metrima) tijekom vrtnje? Zašto?

Vjetrenjača ima maksimalnu visinu na 74 m, zato što se središte vjetrenjače nalazi na 50 m, a duljina lopatice je 24 m. Stoga, dok će lopatica biti u najvišem položaju (okomito na tlo) visina će iznositi 50 m + 24 m = 74 m.

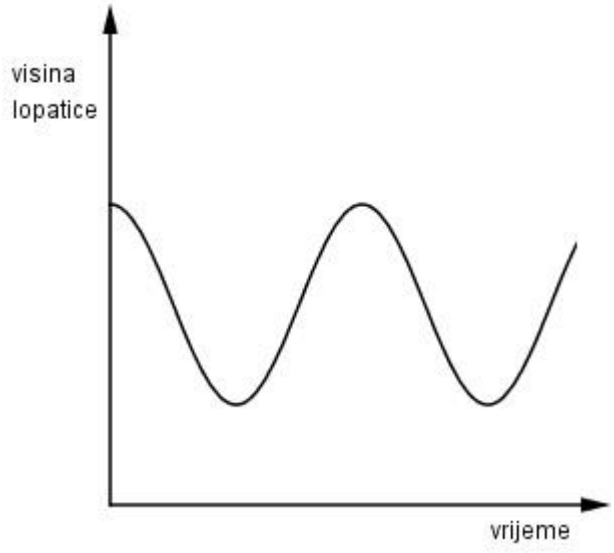
b) Koliko iznosi najmanja visina od tla do vrha lopatice (u metrima) tijekom vrtnje? Zašto?

Lopatica vjetrenjače postiže najmanju vrijednost na 36 m, zato što se središte vjetrenjače nalazi na 50 m, a duljina lopatice je 24 m. Stoga, dok će lopatica biti u najnižem položaju (okomito na tlo) visina će iznositi 50 m - 24 m = 36 m.

c) Koliko je vremena potrebno da lopatica vjetrenjače napravi jedan krug? Zašto?

Kako je jednoj lopatici potrebno 4 sekunde da dođe od najviše do najniže visine, i to čini dva puta tijekom jednog kruga, tada je ukupno lopatici potrebno 8 sekundi da napravi jedan krug.

d) Nacrtajte graf ovisnosti (funkcije) visine vrha lopatice u ovisnosti o vremenu.

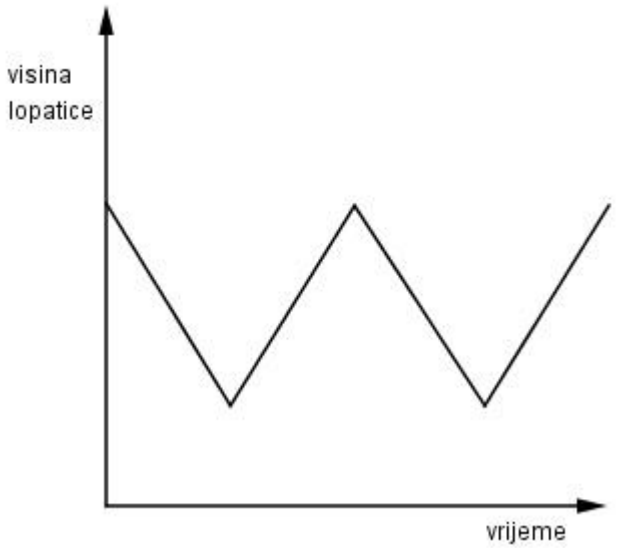


Diskusija:

Ova aktivnost dolazi nakon aktivnosti staza za trčanje u kojoj se prikazuje ovisnost udaljenosti staze i brzine. Stoga bi do pogreške u skiciranju grafa moglo doći, ako učenici nisu pažljivo pročitali koje vrijednosti se nalaze na koordinatnim osima ovog zadatka.

Nastavnik treba prodiskutirati s učenicima o maksimalnoj i minimalnoj vrijednosti, odnosno što je to najveća i najkraća udaljenost točke od dane ravnine (u svakodnevnom životu : ravnina = tlo).

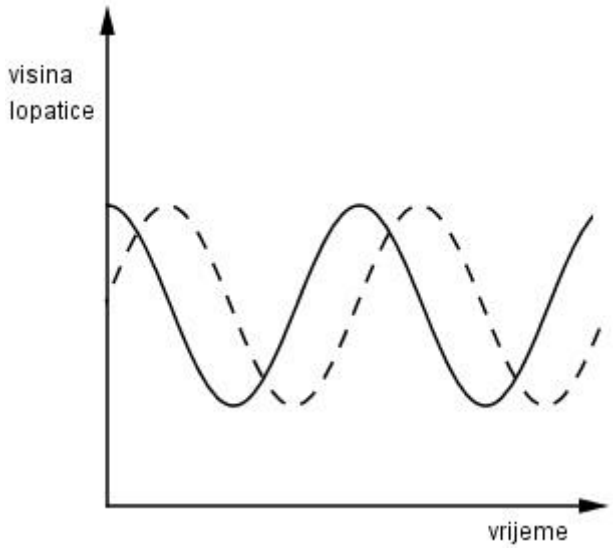
Također, moglo bi se pojaviti rješenje poput prikazanog na slici ispod:



Ukoliko se pojavi takvo rješenje, nastavnik s učenicima raspravlja o preciznosti ovog grafa, te osim maksimalne i minimalne visine koju postiže lopatica, učenici mogu diskusijom zaključiti da li se visina smanjuje/povećava linearno.

Varijacije ovog zadatka mogu osim u promjeni vrijednosti visine vjetrenjače biti u promjeni početnog položaja početne lopatice. Učenici mogu na istom grafu prikazati kretanje druge lopatice te zaključiti da li će graf biti isti.

Moguće rješenje:



6. Skiciranje grafova situacije prikazane tablicom

Ovo poglavlje sadrži aktivnost koja daje učenicima priliku da otkriju i istraže modele i funkcije koji proizlaze iz svakodnevnih životnih situacija, a zatim ih povežu s grafičkim prikazom.

Aktivnost je osmišljena tako da uključuje učenike u izravno prevođenje između tablice podataka i grafova. Cilj te aktivnosti je da se učenici oslobode od iščitavanja podataka iz tablice i ucrtavanja točaka u koordinatni sustav, već se potiče učenike da tablice promatraju na globalniji i kvalitativniji način bez ucrtavanja točaka.

6.1. AKTIVNOST RAST STABLA

Napomena nastavniku: Ova aktivnost može biti povezana s gradivom iz predmeta biologija ili priroda i društvo, pri čemu učenici prije ili nakon aktivnosti mogu istražiti detalje o vrstama i karakteristikama stabala i izmjeriti visinu nekog stabla u okolici škole, ili okolici svoje kuće (ukoliko će takav zadatak dobiti za domaću zadaću).

Cilj aktivnosti: učenici će, radom u paru, grafom prikazati situaciju prikazanu tablicom

Oblik rada: diferencirana nastava u obliku rada u četveročlanim skupinama

Potreban materijal: nastavni listić za svakog učenika

Tijek aktivnosti:

Nastavnik raspoređuje učenike u četveročlan skupine i daje im nastavne listiće. Govori učenicima da za rješavanje nastavnog listića imaju 10 minuta.

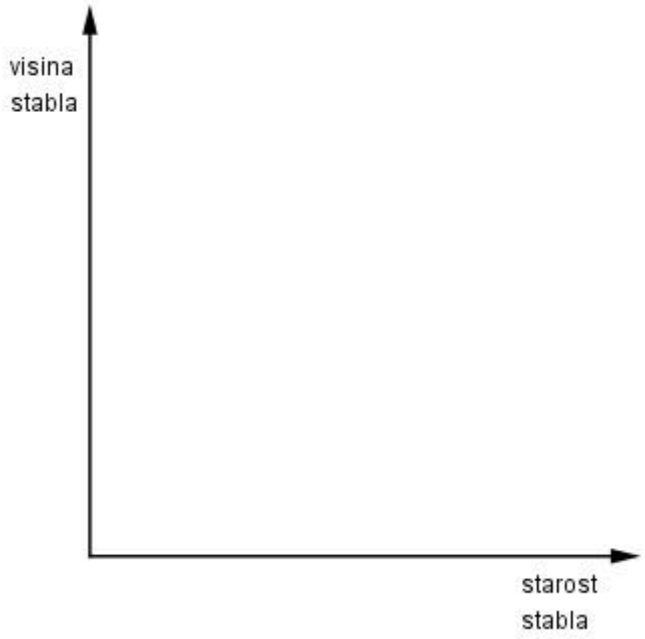
Primjer nastavnog listića

Zadatak: Pažljivo proučite danu tablicu. Dani tablični prikaz prikazuje rast stabla.

starost stabla (mj)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
visina stabla (cm)	50	150	339	420	477	520	558	588	618	638	661

Bez preciznog označavanja točaka, pokušajte skicirati graf koji opisuje odnos između starosti i visine stabla.

Detaljno objasnite svoju metodu kako ste došli do rješenja.



Tijek aktivnosti:

Tijekom rješavanja nastavnog listića nastavnik sluša i potiče diskusiju učenika u skupinama.

Unatoč uputama na nastavnom listiću, nekoliko učenika moglo bi ipak pokušati označiti zadane točke u koordinatnom sustavu. Kako su vrijednosti na ordinati velike, učenici koji bi pokušali označiti točke imat će problema s ucrtavanjem tako da će se takva skupina učenika brzo istaknuti pa će nastavnik lako uočiti problem i pomoći im u daljnjem rješavanju.

Nastavnik takve skupine učenika potiče da pokušaju riječima opisati kako se brojevi mijenjaju i da taj opis riječima pokušaju predočiti skicom, odnosno grafom.

Nakon isteka dogovorenog vremena za rješavanje nastavnog listića kreće diskusija.

Diskusija:

Svaka skupina izlaže svoje rješenje, nakon čega učenici otkrivaju nova i različita razmišljanja.

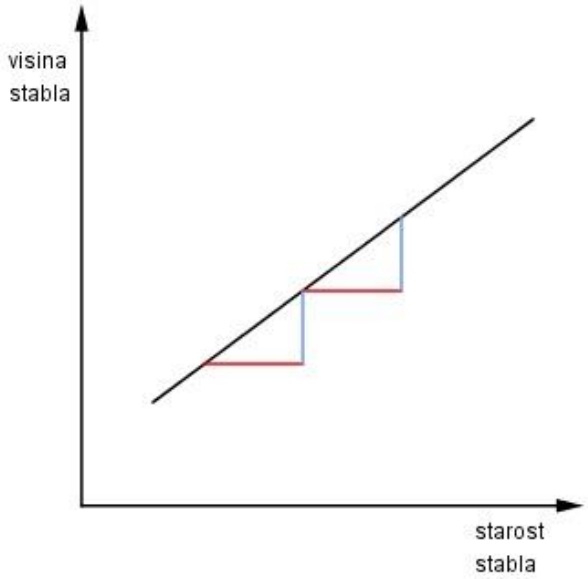
Tijekom diskusije nastavnik postavlja učenicima podpitanja:

Što se događa sa starošću stabla? Povećava se ili smanjuje? Kako, na koji način? Uočavate li pravilnost?

Time nastavnik potiče učenike da uoče da se starost stabla povećava u jednakim razmacima (jedan mjesec).

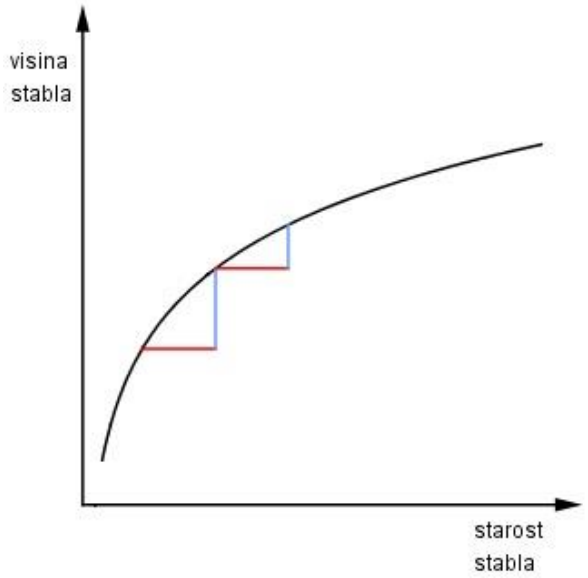
Što se događa s visinom stabla? Povećava se ili smanjuje? Kako, na koji način? Uočavate li pravilnost kao kod primjene starosti stabla?

Učenici uočavaju da se visina ne povećava u jednakim razmaci. Stoga nastavnik na ploči skicira graf koji prikazuje ovisnost dviju veličina koje se povećavaju u jednakim razmacima (ti jednaki razmaci su na osi apscisi prikazani crvenim dužinama, a na osi ordinata plavim dužinama).



Učenici zaključuju da traženi graf ne odgovara grafu skiciranom na ploči.

Diskusija se nastavlja, te učenici uočavaju da se u jednakim razmacima visina sve manje povećava. Zatim svaka skupina ponovo skicira graf za koji su se svi složili da je rješenje danog zadatka. Nastavnik proziva jednu skupinu učenika da graf skiciraju na ploču.



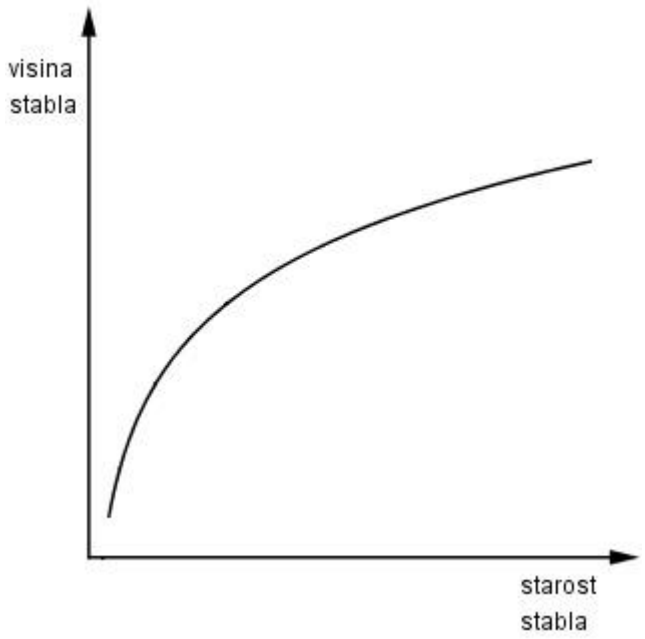
Primjer **rješenja** nastavnog listića

Zadatak: Pažljivo proučite danu tablicu. Dani tablični prikaz prikazuje rast stabla.

starost stabla (mj)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
visina stabla (cm)	50	150	339	420	477	520	558	588	618	638	661

Bez preciznog označavanja točaka, pokušajte skicirati graf koji opisuje odnos između starosti i visine stabla.

Detaljno objasnite svoju metodu kako ste došli do rješenja.



ZAKLJUČAK

Pojam funkcije se uvodi u sedmom razredu osnovne škole i to preko zapisa linearne funkcije. Tijekom osmišljavanja i pronalaženja ideja za aktivnosti koje se nalaze u ovom diplomskom radu naišla sam na primjere pomoću kojih bi učenici savladali pojam funkcije intuitivno, kao odnos dviju zavisnih veličina. Smatram da bi takav način prihvaćanja pojma funkcije bio primjeren uzrastu i olakšavao bi kasniji susret sa strogom matematičkom definicijom funkcije i njezinim zapisom. Dobro bi bilo krenuti od proučavanja jednostavnijih funkcija koji su često zadani na konačnim skupovima te kombinirani sa svakodnevnim primjerima koji su bliski i zanimljivi učenicima. Zatim se mogu proučavati proporcionalne ovisnosti među veličinama, odnosno obrnuto proporcionalne, što su najčešće (zapravo jedine, uz linearnu funkciju) funkcije u osnovnoj školi. Pri kraju ovog rada nalazi se primjer periodične pojave. Iako se opisi periodičnih pojava pomoću trigonometrijskih funkcija uče tek u srednjoškolskoj nastavi matematike, intuitivno, u malim koracima (primjerice, ucrtavajući točke u koordinatni sustav), takve se pojave mogu razmatrati i u osnovnoškolskoj nastavi matematike. Time se može zainteresirati učenike za daljnje učenje i otkrivanje, na njemu uvijek blizak i dostupan način. Na taj se način također kod učenika osnažuju veze među matematičkim pojmovima, a matematika postaje (bolje) povezana cjelina. Smatram da bi svaki nastavnik trebao poraditi na uvođenju ovakvih primjera u svakodnevnu nastavu uz suradnju s nastavnicima drugih predmeta. U primjerima se pojavljuje puno korelacija matematike i fizike, pa tako su u ovom radu razmatrane veze koje nisu uobičajene niti tipične, a potiču učenike na dublje razmišljanje i razumijevanje, što je zapravo cilj svakog učenja i napredovanja.

LITERATURA

[1] I. Kokić, N. Radović, T. Soucie, R. Svedrec, *Tajni zadatak 007: udžbenik sa zbirkom zadataka za sedmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] I. Kokić, N. Radović, T. Soucie, R. Svedrec, *Tajni zadatak 008: udžbenik sa zbirkom zadataka za osmi razred osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2007.

[3] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, *Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje,* Zagreb, 2010.

[4] Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, *Nastavni plan i program za osnovnu školu,* dostupno na: http://www.azoo.hr/images/AZOO/Ravnatelji/RM/Nastavni_plan_i_program_za_osnovnu_skolu_-_MZOS_2006_.pdf (srpanj 2017.)

[5] *Nrich project*, University of Cambridge, dostupno na: https://nrich.maths.org/ (srpanj 2017.)

[6] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 7: udžbenik iz matematike za sedmi razred – prvo polugodište*, Alfa, Zagreb, 2008.

[7] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, *Matematički izazovi 7: udžbenik iz matematike za sedmi razred – drugo polugodište*, Alfa, Zagreb, 2008.

[8] M. Swan i sur., *The Language of Functions and Graphs*, Shell Centre for Mathematical Education, Nottingham, UK, 1985.

SAŽETAK

U ovom je radu prikazano kako učenici u aktivnoj nastavi matematike otkrivanjem uče o pojmu funkcije i to najviše o njegovom grafičkom prikazu. Na početku rada su navedene prednosti takvog oblika nastave, a zatim u sljedećim poglavljima se nalaze učeničke aktivnosti kojima učenici smještaju točke u koordinatni sustav, otkrivaju jesu li grafovi samo slike, skiciraju grafove situacija koje su opisane riječima, prikazane slikom i tablicom. Uz aktivnosti dani su savjeti i napomene nastavniku za lakši i efikasniji rad.

SUMMARY

In this thesis, we show how students learn by discovery in active math teaching about the concept of function, mostly from its graphical representation. At the beginning of the paper, the advantages of such a form of teaching are listed, and in the following chapters there are pupil activities where students place points in a coordinate system, discover whether the graphs are just images, sketch the graphs of the situations described in words, depicted with picture and the table. Along with the activities, tips and remarks are given to the teacher for easier and more efficient work.

ŽIVOTOPIS

Rođena sam 20. srpnja 1992. godine u Čakovcu. Svoje obrazovanje započela sam 1999. u Osnovnoj školi Štrigova u mjestu Štrigova. Nakon toga 2007. godine upisujem opću gimnaziju u Čakovcu.

Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2011. godine upisujem Preddiplomski sveučilišno studij Matematika; smjer: nastavnički na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Završetkom preddiplomskog studija 2014. godine stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice te iste godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na već spomenutom fakultetu.