Allen-Cahn jednadžba

Čičak, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Čičak

ALLEN CAHN JEDNADŽBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, rujan, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bit će predstavljena Allen-Cahnova jednadžba. Nelinearna parcijalno diferencijalna jednadžba oblika: $u_t = u_{xx} + u - u^3$.
Navedenu jednadžbu izvorno su uveli Allen i Cahn kako bi opisali kretanje antifaznih barijera u kristalnoj krutini.
Na početku rada bavimo se osnovnim pojmovima koje ćemo koristiti u daljnjem radu. Tako definiramo sektorski operator te njegova svojstva i razlomačko potenciranje.
U sljedećem Poglavlju iznosimo bitne činjenice proučavanja paraboličkih diferencijalnih jednadžbi. Rezuktate egzistencije i jedinstvenisti neliearne jednadžbe, primjenjujemo na Allen-Cahn jednadžbu. U zadnjem poglavlju opisana je primjena navedene jednadžbe. Bavimo se proučavanjem spore kretnje rješenja Allen-Cahnove jednadžbe, po modelu Carr i Pega. To su funkcije koje uzimaju naizmjenično pozitivne ili negativne vrijednosti u velikim razmacima. U tom dijelu je opisana i bitna fizikalna pojava 'okrupnjavanja'.

Poglavlje 1

Osnovne činjenice

1.1 Gronwallova nejednakost

Neka su a, b nenegativne konstante, $u : [0, T) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Ako za svaki $t \in [0, T)$ vrijedi :

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s)ds,$$

tada vrijedi $u(t) \leq ae^{bt}$ za $0 \leq t \leq T$.

U nastavku će nam biti potrebna jednakost u drugačijoj formi.
Neka su a, b, α, β nenegativne konstante, $\alpha < 1, \beta < 1$ i $0 < T < \infty$, tada postoji konstanta $M = M(b, \alpha, \beta, T) < \infty$ takva da za integrabilnu funkciju $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ vrijedi:

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t - s)^{-\beta} u(s)\, ds$$

tada je: $0 \leq u(t) \leq aMt^{-\alpha}$, za svaki $t \in [0, T]$.

1.2 Banachov teorem o fiksnoj točki

Kažemo da je $a \in S$ fiksna točka za preslikavanje $T : S \to S$ ako vrijedi $T(a) = a$.

Definicija 1.2.1. *Neka je (S, d) metrički prostor. Za preslikavanje $T : S \to S$ kažemo da je kontrakcija s koeficijentom $\theta \in [0, 1\rangle$ ako za svaki $x, y \in S$ vrijedi :*

$$d(T(x), T(y)) \leq \theta d(x, y).$$

Teorem 1.2.2. *Neka je (S, d) potpun metrički prostor i $T : S \to S$ kontrakcija. Tada postoji jedinstvena fiksna točka $a \in S$ od T.*
Štoviše, za bilo koju točku $b \in S$, ako je n-ta kompozicija definirana $T^n(b) = T(T^{n-1}(b))$ tada $T^n(b) \to a$ za $n \to \infty$ i vrijedi:

$$d(T^n(b), a) \leq \theta^n d(b, a)$$

Definicija 1.2.3. *Neka su (S, d) i (Λ, l) potpuni metrički prostori.*
Preslikavanje $T : S \times \Lambda \to S$ je uniformna kontrakcija ako postoji $\Lambda \in [0, 1)$ takav da za $x, y \in S$ i svaki $\lambda \in \theta$ vrijedi:

$$d(T(x, \lambda), T(y, \lambda)) \leq \theta d(x, y).$$

Za svaki λ postoji fiksna točka $g(\lambda) \in S$.

1.3 Sektorski operator

Definicija 1.3.1. *Linearni operator A na Banachovom prostoru X je sektorski operator , ako je zatvoren i gust te zadovoljava:*

(i) *sektor $S_{a,\phi} = \{\lambda \mid \phi \leq \mid arg(\lambda - a) \mid \leq \pi , \lambda \neq a\}$ je sadržan u rezolventnom skupu od A, pri čemu je $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $a \in \mathbb{R}$;*

(ii) $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$, *za svaki* $\lambda \in S_{a,\phi}$, $M \geq 1$.

Teorem 1.3.2. *Pretpostavimo da je A sektorski operator i vrijedi $\| A(\lambda - A)^{-1} \| \leq C$, za $\mid arg\lambda \mid \geq \phi_0$, $\mid \lambda \mid \geq R_0$, pri čemu su R_0, C pozitivne konstante i $\phi_0 < \dfrac{\pi}{2}$. Neka je B linearni operator za koji vrijedi $D(B) \supset D(A)$ i $\| Bx \| \leq \varepsilon \| Ax \| + K \| x \|$, za svaki $x \in D(A)$ i ε, K su pozitivne konstantne i $\varepsilon C < 1$. Tada je $A + B$ sektorski.*

Dokaz. $\| B(\lambda - A)^{-1} \| \leq \varepsilon \| A(\lambda - A)^{-1} \| + K \| (\lambda - A)^{-1} \| \leq \varepsilon C + \dfrac{K(1 + C)}{\mid \lambda \mid}$,
za $\mid arg\lambda \mid \geq \phi_0$, $\mid \lambda \mid \geq R_0$, pa vrijedi

$$\| \{\lambda - (A - B)\}^{-1} \| = \| (\lambda - A)^{-1} \{I - B(\lambda - A)^{-1}\}^{-1} \| \leq \frac{1 + C}{\mid \lambda \mid} \{1 - \varepsilon C - \frac{K(1 + C)}{\mid \lambda \mid}\}^{-1} \leq \frac{const.}{\mid \lambda \mid}$$

za $\mid arg\lambda \mid \geq \phi_0$ i $\mid \lambda \mid$ dovoljno veliku. Iz ovog slijedi da je $A + B$ sektorski. □

Definicija 1.3.3. *Analitička polugrupa na Banachovom prostoru X je familija neprekidnih linearnih operatora na X, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ zadovoljava:*

(i) $T(0) = I$, $T(t)T(s) = T(t + s)$ *za* $t \geq 0$, $s \geq 0$;

(ii) $T(t)x \to x$ *kada* $t \to 0^+$*,za svaki* $x \in X$*;*

(iii) $t \to T(t)x$ *je analitička, za svaki* $x \in X$*,* $t \in (0, \infty)$*.*

Infinitezimalan operator L *ove polugrupe je definiran sa* $Lx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x)$*, njegova domena* $D(L)$ *se sastoji od svih* $x \in X$ *za koje ovaj limes postoji. Obično pišemo* $T(t) = e^{Lt}$*.*

Teorem 1.3.4. *Ako je* A *sektorski operator, tada je* $-A$ *infinitezimalan generator analitičke polugrupe* $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ *pri čemu je :*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$$

Γ *je krivulja u* $\rho(-A)$ *sa* $arg\lambda \to \pm\theta$ *kada* $|\lambda| \to \infty$ *za* $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$*.*
Osim toga, e^{-At} *se može analitički proširiti na sektor* $\{t \neq 0 : | \; arg t \; | < \varepsilon\}$ *koji sadrži pozitivnu realnu os. Ako* $Re\sigma(A) > a$*, tj.* $Re\lambda > a$ *kad god je* $\lambda \in \sigma(A)$*, tada za svaki* $t > 0$ *vrijedi:*
$\| e^{-At} \| \leq Ce^{-at}$ *,* $\| Ae^{-At} \| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$*, za neku konstantu* C*.*
Konačno $\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At}$*, za* $t > 0$*.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a = 0$ i
$\| (\lambda + A)^{-1} \| \leq \frac{M}{|\lambda| + \delta}$ za $| \pi - arg\lambda | \geq \phi$, za konstante $\delta > 0, M > 0$ i $\phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, inače zamijenimo A s $A - aI$.
Izaberimo $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi - \phi \rangle$. Neka je e^{-At} definiran kao u teoremu, primjetimo da integral apsolutno konvergira ako je $t > 0$. Prema Cauchy-jevom teoremu, integral ostaje nepromijenjen kada se krivulja Γ pomakne za malu udaljenost u desno , označimo pomaknutu krivulju sa Γ'. Tada za $t > 0, s > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned} e^{-At} e^{-As} &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} e^{\mu s} (\mu I + A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)_{-1} \{(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1}\} d\mu d\lambda \end{aligned}$$

koristeći rezolventnu jednakost. Ali za $\lambda \in \Gamma, \mu \in \Gamma'$ vrijedi
$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = 0$ i $\int_{\Gamma'} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 2\pi i \; e^{\lambda s}$ tako da

$$e^{-At}e^{-As} = (2\pi i)^{-2}\int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda = e^{-A(t+s)}$$

i $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ je polugrupa.
Zapravo, za $\varepsilon \in \langle 0, \theta - \frac{\pi}{2}\rangle$, integral uniformno konvergira na svakom kompaktnom skupu $\{\mid arg t \mid < \varepsilon\}$, tako da je polugrupa analitička.
Stavimo $\mu = \lambda t$, $t > 0$

$$\| e^{-At} \| = \| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\mu}\Big(\frac{\mu}{t} + A\Big)^{-1}\frac{d\mu}{t} \| \leq \frac{M}{2\pi}\int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid \mu \mid}$$

i

$$\| Ae^{-At} \| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\delta}\int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid \mu \mid}\cdot\frac{1}{t} = \frac{const.}{t}$$

Dokazat ćemo da $e^{-At}x \to x$ kada $t \to 0^{+}$ za svaki $x \in X$. Dovoljno je dokazati za $x \in D(A)$(gust skup), kako je $\| e^{-At} \| \leq C$ za svaki $t \geq 0$. Ako je $x \in D(A)$ i $t > 0$

$$e^{-At}x - x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}[(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}]x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^{-1}e^{\lambda t}A(\lambda I + A)^{-1}x d\lambda$$

pa je $\| e^{-At}x - x \| \leq const. \| Ax \| t$.
Prema tome, $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ je strogo neprekidna polugrupa koja se proširuje na analitičku polugrupu za $\mid arg\, t \mid < \varepsilon$. Ako je $x \in D(A)$ i $t > 0$, tada je

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\lambda t}(\lambda + A)(\lambda + A)^{-1}x d\lambda = 0.$$

Za $x \in D(A)$ kada $t \to 0^{+}$ vrijedi

$$\frac{1}{t}(e^{-At}x - x) = -\frac{1}{t}\int_{0}^{t} e^{-As}Ax\, ds \to -Ax,$$

pa je $-A$ sadržan u generatoru G od polugrupe.
Da vidimo da je $-A$ uistinu generator, za $\lambda \geq 0$ definiramo :

$$R(\lambda) = \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t}e^{-At}x\, dt.$$

Za $t > 0, \delta > 0$ i $e^{-At}x \in D(A)$ vrijedi

$$A \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x \, dt = e^{-\lambda\delta} e^{-A\delta} x - \lambda \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x \, dt.$$

Zbog zatvorenosti od A slijedi da je $R(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$ za svaki $\lambda \geq 0, x \in X$. Ali, ako je $x \in D(G)$ tada je $e^{-At}x \in D(G)$ za svaki $t \geq 0$ i $Ge^{-At}x = \dfrac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}Gx$. Sličnim argumentom se pokazuje
$R(\lambda)(\lambda - G)x = x$, za $x \in D(G)$.
Prema tome, $D(G) \subset$ slika od $R(\lambda) \subset D(A)$, pa je $-A = G$ kao što smo i tvrdili. □

1.4 Razlomačka potencija operatora

Definicija 1.4.1. *Pretpostavimo da je A sektorski operator i Re* $\sigma(A) > 0$, *tada za* $\alpha > 0$ *definiramo:*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Teorem 1.4.2. *Ako je A sektorski operator i Re* $\sigma(A) > 0$, *tada za* $\alpha > 0$, A^{-1} *je ograničen linearan operator na X koji je injekcija i zadovoljava* $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$, $\alpha > 0, \beta > 0$. *Za* $0 < \alpha < 1$, *vrijedi:*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_{0}^{\infty} \lambda^{\alpha} (\lambda + A)^{-1} \, d\lambda.$$

Dokaz. Za $\delta > 0$, *Re* $\sigma(A) > \delta$ tako da primjenom teorema 1.3.4 slijedi $\| e^{-At} \| \leq Ce^{-\delta t}$, za $t > 0$. Prema $\| A^{-\alpha}x \| \leq \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1} Ce^{-\delta)} dt \, \| x \|$, $A^{-\alpha}$ je ograničen kada je $\alpha > 0$. Za

$\alpha > 0, \beta > 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-A(t+s)}dsdt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty du\int_0^t t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}e^{-Au}dt \\
&= A^{-(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

koristeći $\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Ako je $A^{-\alpha}x = 0$, za $\alpha > 0$, tada za cijeli broj $n > \alpha$ vrijedi $A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0$, kako je A^{-1} injekcija, tada je i A^{-n} = n-ta potencija od A^{-1} također injekcija, pa je $x = 0$. Konačno $(\lambda + A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-At}e^{-\lambda t}dt$, za $\lambda \geq 0$, pa slijedi da je :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda + A)^{-1}d\lambda &= \int_0^\infty e^{-At}\Big(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda t}d\lambda\Big)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-At}t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}A^{-\alpha},
\end{aligned}$$

koristeći činjenicu da je $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, za $0 < \alpha < 1$.

□

Definicija 1.4.3. *Za operator A kao što je gore naveden, definiramo A^α = inverz od $A^{-\alpha}$, za $\alpha > 0$; $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$. A^0 je identiteta na X.*

Teorem 1.4.4. *Pretpostavimo da je A sektorski operator i $Re\,\sigma(A) > \delta > 0$. Za $\alpha \geq 0$ postoji $C_\alpha < \infty$ takav da*

$$\| A^\alpha e^{-At} \| \leq C_\alpha t^{-\alpha}e^{-\delta t}, \text{ za } t > 0,$$

i ako je $0 < \alpha \leq 1$, $x \in D(A^\alpha)$ tada vrijedi:

$$\| (e^{-At} - 1)x \| \leq \frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^\alpha \| A^\alpha x \|.$$

Također, C_α je ograničen za α iz kompaktnog skupa koji je sadržan u $\langle 0, \infty\rangle$.

Dokaz. Prema teoremu 1.3.4. imamo: $\| e^{-At} \| \leq Ce^{-\delta t}$, $\| Ae^{-At} \| \leq Ct^{-1}e^{-\delta t}$, za $t > 0$, stoga je za $m = 1, 2, 3, ...$

$$\| A^m e^{-At} \| = \| (Ae^{-At/m})^m \| \leq (Cm)^m t^{-m} e^{-\delta t}.$$

Ako je $0 < \alpha < 1$ i $t > 0$ tada je

$$\begin{aligned} \| A^\alpha e^{-At} \| &= \| Ae^{-At} \cdot A^{-(1-\alpha)} \| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \| Ae^{-A(t+s)} \| ds \\ &\leq Ct^{-\alpha} e^{-\delta t} \Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Konačno, $\| A^{\alpha+\beta} e^{-At} \| \leq \| A^\alpha e^{-At/2} \| \| A^\beta e^{-At/2} \| \leq C_\alpha C_\beta 2^{\alpha+\beta} t^{-(\alpha+\beta)} e^{-\delta t}$, navedeni slučajevi zajedno daju opći rezultat. Druga ocjena slijedi iz

$$(e^{-At} - I)x = -\int_0^t A^{1-\alpha} e^{-As} A^\alpha x \, ds.$$

$\square$

Teorem 1.4.5. *Ako je* $0 \leq \alpha \leq 1$ *i* $x \in D(A)$ *tada je* $\| A^\alpha x \| \leq C \| Ax \|^\alpha \| x \|^{1-\alpha}$ *,*
tj. $\| A^\alpha x \| \leq \varepsilon \| Ax \| + C' \varepsilon^{-\alpha(1-\alpha)} \| x \|$, *za svaki* $\varepsilon > 0$.
(Konstante C, C' *ne ovise o* α*.)*

Dokaz. Neka je $0 < \beta < 1$ i $\varepsilon > 0$ te za $t > 0$ vrijedi $\| e^{-At} \| \leq C$ tada je:

$$\begin{aligned} \| \Gamma(\beta) A^{-\beta} x \| &= \| (\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^\infty) t^{\beta-1} e^{-At} x \, dt \| \\ &\leq C \| x \| \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} + \| \varepsilon^{\beta-1} e^{-A\varepsilon} A^{-1} x + (\beta - 1) \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-2} e^{-At} A^{-1} x \| \\ &\leq C \| x \| \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} + 2C \| A^{-1} x \| \varepsilon^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Minimizirajmo desnu stranu s $\varepsilon > 0$ i zaključujemo :

$$\| A^{-\beta} x \| \leq \frac{2(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)} C \| x \|^{1-\beta} \| A^{-1} x \|^\beta.$$

Koeficijent je uniformno ograničen za $\beta \in (0, 1)$, stoga možemo zamijeniti x sa Ax i staviti $\alpha = 1 - \beta$ da bismo dobili traženi rezultat. $\square$

Napomena 1.4.6. *Ako je* $\| e^{-At} \| \leq C_0 e^{-\delta t}$, $\| Ae^{-At} \| \leq C_1 t^{-1} e^{-\delta t}$ *za* $t > 0$ *tada:*

$$\| A^{\alpha} e^{-At} \| \leq C C_0^{1-\alpha} C_1^{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t}$$

pokazuje da je C_α *iz teorema 1.4.3. ograničen kada* $\alpha \to 0^+$.
(Pri čemu je konstanta C iz teorema 1.4.4.)

Korolar 1.4.7. *Neka je A sektorski operator i* $Re\, \sigma(A) > 0$. *Ako je B linearan operator takav da je* $BA^{-\alpha}$ *ograničen na X za* $\alpha \in [0, 1\rangle$, *tada je* $A + B$ *sektorski.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz teorema 1.3.2 i 1.4.4. □

Teorem 1.4.8. *Pretpostavimo da su A i B sektorski operatori na X i neka je* $D(A) = D(B)$ *i* $Re\, \sigma(A) > 0$, $Re\, \sigma(B) > 0$. *Za* $\alpha \in [0, 1\rangle$ *operator* $(A - B)A^{-\alpha}$ *je ograničen na X. Tada za* $\beta \in [0, 1]$, $A^{\beta} B^{-\beta}$ *i* $B^{\beta} A^{-\beta}$ *su ograničeni na X.*

Dokaz. Prema teoremu 1.4.4. vrijedi $\| A^{\beta} (\lambda + A)^{-1} \| \leq C |\lambda|^{\beta - 1}$ za $0 \leq \beta \leq 1$, $|\pi - arg\, \lambda| \geq \phi$, $\phi < \pi/2$ i za pozitivne konstante C. Za slučaj $0 < \beta < 1$ imamo:

$$B^{-\beta} A^{-\beta} = \frac{1}{\pi} \sin \pi\beta \int_0^{langlety} \lambda^{-\beta} (\lambda + B)^{-1} (A - B)(\lambda + A)^{-1} d\lambda$$

što se lako ocjeni i pokaže da je $B^{\beta} A^{-\beta}$ ograničen.
Također vrijedi $\| A^{\alpha} (\lambda + B)^{-1} \| = 0(|\lambda|^{\alpha - 1})$, kada $\lambda \to +\infty$,i
$\{I + A^{\alpha} (\lambda + A)^{-1} (B - A) A^{-\alpha}\} A^{\alpha} (\lambda + B)^{-1} = A^{\alpha} (\lambda + A)^{-1}$, stoga zamijenom A i B u jednakosti iznad, pokazujemo da je i $A^{\alpha} B^{-\alpha}$ ograničen. Slučaj kada je $\beta = 0$, $\beta = 1$ slijedi direktno. □

Definicija 1.4.9. *Ako je A sektorski operator na Banachovom prostoru X, za svaki* $\alpha \geq 0$ *definiramo:*

$$X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha}) \text{ sa normom}$$
$$\| x \|_{\alpha} = \| A_1^{\alpha} x \|, \quad x \in X^{\alpha},$$

gdje je je $A_1 = A + aI$, *pri čemu a izaberemo tako da je* $Re\, \sigma(A_1) > 0$. *Prema prethodnom teoremu različitim izborom a, imamo ekivalentne norme na* X^{α},*dakle ne ovisi o izboru a*

Teorem 1.4.10. *Ako je A sektorski operator na Banachovom prostoru X, tada je* X^{α} *Banachov prostor sa normom* $\| \cdot \|_{\alpha}$ *za* $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$. *Za* $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^{α} *je gust potprostor od* X^{β} *sa neprekidnom inkluzijom.*
Ako A ima kompaktnu rezolventu, tada je inkluzija $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ *kompaktna kada je* $\alpha > \beta \geq 0$.

Ako za sektorske operatore A_1, A_2 *na* X *sa istom domenom vrijedi* $Re\,\sigma(A_j) > 0$ *za* $j = 1, 2$ *i ako je* $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ *ograničen operator za* $\alpha < 1$*, tada je* $X_1^\beta = X_2^\beta$ *sa ekvivalentnim normama za* $0 \leq \beta \leq 1$*, pri čemu je* $X_j^\beta = D(A_j^\beta)$*,* $j = 1, 2$ *.*

Poglavlje 2

Opća parabolička jednadžba

2.1 Linearna Cauchy-jeva zadaća

Prvo ćemo promatrati homogenu zadaću

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Ax = 0,\ t > 0 \\ x(0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

gdje je A sektorski operator na Banachovom prostoru X i $x_0 \in X$. Rješenje od (1) je neprekidna funkcija $x : [0, T] \to X$, koja je neprekidno diferencijabilna na otvorenom intervalu $(0, T)$. Prema teoremu 1.3.4. je jasno da je $x(t) = e^{-At} x_0$ rješenje od (1).
Pokazat ćemo da je to jedino rješenje.

Neka je $0 \leq s \leq t < T$ i

$$y(t, s) = e^{-A(t-s)} x(s),$$

gdje je $x(\cdot)$ neko rješenje od (1) na $(0, T)$. Tada je $s \to y(t, s)$ neprekidna za $s \in [0, t]$ i neprekidno diferencijabilna za $s \in (0, t)$, sa

$$\frac{\partial y(t, s)}{\partial s} = e^{-A(t-s)} \frac{dx(s)}{ds} + A e^{-A(t-s)} x(s) = 0$$

tada je za $s \in (0, t)$, $y(t, 0) = y(t, t)$
tj. $e^{-At} x_0 = x(t)$.

Sada promotrimo nehomogenu jednadžbu :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t),\ 0 < t < T \\ x(0) = x_0, \end{aligned}$$

Teorem 2.1.1. *Neka je $f : (0,T) \to X$ lokalno Hölder neprekidna i vrijedi $\int_0^\rho \| f(s) \| ds < \infty$, za $\rho > 0$. Za $0 \le t < T$ definiramo*

$$F(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Tada je $F(\cdot)$ neprekidna na $[0,T)$ i neprekidno diferencijabilna na $(0,T)$. Vrijedi $\frac{dF(t)}{dt} + AF(t) = f(t)$ za $t \in (0,T)$ i $F(t) \to 0$ kada $t \to 0^+$.

Dokaz. Za mali $\rho > 0$, definiramo :

$$F_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds, \rho \le t < T,$$

gdje je $F_\rho(t) = 0$ za $t \in [0, \rho]$.
Stavimo da je $f(s) = 0$ za $s < 0$. Tada vrijedi :

$$\| F(t) - F_\rho(t) \| \le \int_{t-\rho}^t \| e^{-A(t-s)} \| \| f(s) \| ds,$$

što teži u 0 kada $\rho \to 0^+$. F_ρ je neprekidna, pošto vrijedi :

$$F_\rho(t+h) - F_\rho(t) = (e^{-Ah} - I) \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-A(t+h-s)} f(s) ds$$

$(0 \le t \le t+h \le t_0)$,što teži nuli kada $h \to 0$. Dakle, F je neprekidna na $[0,T)$ i $\| F(t) \| \le \int_0^t \| e^{-A(t-s)} \| \| f(s) \| ds \ \to 0$, kada $t \to 0^+$.
Ako je $s \in [0,t)$, tada je $e^{-A(t-s)} f(s)$ iz $D(A)$, pa su i Riemannove sume za $F_\rho(t)$, $\sum_{t-s_j \geqslant \rho} e^{-A(t-s_j)} f(s_j) \Delta s_j$ iz $D(A)$ i vrijedi

$\lim_{\Delta s \to 0} A \sum_{s \le t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) \Delta s = \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} f(s) ds.$
Dakle, zbog zatvorenosti od A, $F_\rho(t) \in D(A)$ i
$AF_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} f(s) ds = \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} \{f(s) - f(t)\} ds + \{e^{-A\rho} - e^{-At}\} f(t).$
Sada vrijedi $\| Ae^{-A(t-s)} \| = O((t-s)^{-1})$ i $\| f(s) - f(t) \| = O(| \ t - s \ |^\theta)$, za $\theta > 0$ kada

$s \to t^-$,stoga kada $\rho \to 0^+$ imamo
$AF_\rho(t) \to \int_0^t Ae^{-A(t-s)}\{f(s) - f(t)\}ds + \{I - e^{-At}\}f(t)$.
Ponovno zbog zatvorenosti od A slijedi $F(t) \in D(A)$ za $t \in (0, T)$.
Promatramo strogi interior intervala $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1 < T$, tada $AF_\rho(t) \to AF(t)$ uniformno za $t \in [t_0, t_1]$. Kako je $\| f(t) - f(s) \| \leq K \mid t - s \mid^\theta$, za $t, s \in [t_0, t_1]$ i $\theta > 0$, pa slijedi:

$$\| AF_\rho(t) - AF(t) \| = \| \{-I + e^{-A\rho}\}f(t) + \int_{t-\rho}^{t} Ae^{-A(t-s)}\{f(s) - f(t)\}ds \|$$
$$\leq \| \{e^{-A\rho} - I\}f(t) \| + C \int_{t-\rho}^{t} (t-s)^{-1+\theta} ds \to 0,$$

što uniformno konvergira kada $\rho \to 0^+$, $t \in [t_0, t_1]$.
Konačno $F_\rho(t)$ je diferencijabilna kada $t > \rho$ i vrijedi
$\dfrac{dF_\rho(t)}{dt} = -AF_\rho(t) + e^{-A\rho}f(t - \rho),\ \ \rho < t < T.$
Desna strana uniformno konvergira k $AF(t) + f(t)$ za $t \in [t_0, t_1]$, kada $\rho \to 0^+$. Dakle, F je neprekidno diferencijabilna na otvorenom intervalu $(0, T)$ i vrijedi $\dfrac{dF}{dt} + AF = f(t)$. □

Teorem 2.1.2. *Pretpostavimo da je A sektorski operator na X i $x_0 \in X$. Neka je $f : (0, T) \to X$ lokalno Hölder neprekidna i $\int_0^\rho \| f(t) \| dt < \infty$, za $\rho > 0$. Tada postoji jedinstveno rješenje $x(\cdot)$ od :*

$$\frac{dx}{dt} + Ax = f(t),\ \ 0 < t < T$$
$$x(0) = x_0,$$

koje je oblika

$$x(t) = e^{-At}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

2.2 Lokalna egzistencija rješenja i jedinstvenost

Sada ćemo promatrati nelinearnu jedndžbu:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Ax &= f(t, x), \ t > t_0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

pretpostavimo da je A sektorski operator takav da su razlomačke potencije operatora $A_1 \equiv A+aI$ dobro definirane. Prostor $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$ sa normom $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$ je definiran za $\alpha \geq 0$. Pretpostavimo da je f preslikavanje sa otvorenog skupa $U \subseteq R \times X^\alpha$ u X, za $\alpha \in [0, 1)$. Funckija f je lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitzova po x. Preciznije, ako je $(t_1, x_1) \in U$, tada postoji okolina $V \subset U$ od točke (t_1, x_1) takva da za $(t, x) \in V, (s, y) \in V$ vrijedi:

$$\|f(t, x) - f(s, y)\| \leq L(| \ t - s \ |^\theta + \|x - y\|_\alpha),$$

za konstante $L > 0$ i $\theta > 0$

Definicija 2.2.1. *Rješenje Cauchyjeve zadaće na* (t_0, t_1) *je neprekidna funkcija* $x : [t_0, t_1) \to X$ *takva da* $x(t_0) = x_0$ *.Imamo da je*$(t, x(t)) \in U, x(t) \in D(A)$ *i postoji* $\frac{dx}{dt}(t)$ *. Preslikavanje* $t \to f(t, x(t))$ *je lokalno Hölder neprekidno. Vrijedi* $\int\limits_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(t, x(t))\|dt < \infty$ *za* $\rho < 0$*. Uz navedene uvjete diferencijalna jednadžba* (2) *je zadovoljena na* (t_0, t_1).

Lema 2.2.2. *Ako je x rješenje od* (2) *na* (t_0, t_1) *tada vrijedi:*

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds \tag{3}$$

Obratno, ako je $x : (t_0, t_1) \to X^\alpha$ *neprekidna funkcija i vrijedi* $\int\limits_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(t, x(t))\|dt < \infty$ *za* $\rho < 0$ *te je zadovoljena jednadžba* (3)*,za* $t \in (t_0, t_1)$*, tada je* $x(\cdot)$ *rješenje diferencijalne jednadžbe* (2).

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz definicije rješenja i teorema 2.1.2. Pretpostavimo da je x rješenje jednadžbe (3) i $x \in C((t_0, t_1); X^\alpha)$. Prvo ćemo pokazati da je funkcija $x : (t_0, t_1) \to X^\alpha$ lokalno Hölderova neprekidna. Ako je $t_0 < t < t + h < t_1$, tada

$$x(t+h)-x(t) = (e^{-Ah}-I)e^{-A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}(e^{-Ah}-I)e^{-A(t-s)}f(s, x(s))ds+\int_{t}^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, x(s))ds.$$

Za $0 < \delta < 1 - \alpha$ i svaki $z \in X$ vrijedi:

$$\|(e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}z\|_\alpha \leq C(t-s)^{-(\alpha+\delta)}h^\delta e^{a(t-s)}\|z\|$$

Iz teorema 1.4.3 vidimo da za $t \in [t_0^*, t_1^*] \subset (t_0, t_1)$ vrijedi

$$\|x(t+h) - x(t)\|_\alpha \leq const\ h^\delta.$$

Dakle $t \to f(t, x(t))$ je lokalno neprekidno na (t_0, t_1). Prema teoremu 2.1.2 x rješava linearnu jednadžbu:

$$\frac{dv}{dt} + Ay = f(t, x(t)),\ t_0 < t < t_1$$
$$y(t_0) = x_0$$

Dakle x je rješenje od (2). □

Teorem 2.2.3. *Neka je A sektorski operator i $f : U \to X$,pri čemu je U otvoren podskup od $\mathbb{R} \times X^\alpha$, $0 \leq \alpha < 1$. Preslikavanje $f(t, x)$ je lokalno Hölder neprekidno po t i lokalno Lipschitzovo po x. Tada za svaki $(t_0, x_0) \in U$ postoji $T = T(t_0, x_0) > 0$ takav da (2) ima jedinstveno rješenje x na $(t_0, t_0 + T)$ sa početnim uvjetom $x(t_0) = x_0$.*

Dokaz. Prethodna lema je dovoljna za pokazati odgovarajući rezultat za integrabilnu jednadžbu (3).Izaberimo $\delta > 0, \tau > 0$ takve da je skup

$$V = \{\ (t, x)\ \mid\ t_0 \leq t \leq t_0 + \tau,\ \|x - x_0\|_\alpha \leq \delta\ \}$$

sadržan u U. Za svaki $(t, x_1), (t, x_2) \in V$ vrijedi

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\|_\alpha.$$

Stavimo $B = \max_{[t_0, t_0+\tau]} \|f(t, x_0)\|$ i izaberimo T takav da $0 < T \leq \tau$ i:

$$\|(e^{-Ah} - I)x_0\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2}\ \text{ za} 0 \leq h \leq T$$

$$M(B + L\delta)\int_0^T u^{-\alpha}e^{au}du \leq \frac{\delta}{2}$$

gdje je $\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq Mt^{-\alpha}e^{at}$, za $t > 0$.
Označimo sa S skup neprekidnih funkcija $y : [t_0, t_0 + T] \to X^\alpha$ takvih da $\|y(t) - x_0\|_\alpha \leq \delta$,za $t \in [t_0, t_0 + T]$, uz uobičajenu sup- normu

$$\|\,y\,\|^T = \sup\{\ \|\,y(t)\,\|_\alpha,\ t_0 \leq t \leq t_0 + T\ \},$$

tada je S potpuni metrički prostor.
Za $y \in S$ definiramo $G(y) : [t_0, t_0 + T] \to X$ sa:

$$G(y)(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s, y(s))ds.$$

Pokazat ćemo da je preslikavanje G iz skupa S u S stroga kontrakcija. Primjetimo,

$$\begin{aligned}
\| G(y)(t) - x_0 \|_\alpha &\leq \| (e^{-A(t-t_0)} - I)x_0 \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \| (B + L\delta)\, ds \\
&\leq \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \leq \delta
\end{aligned}$$

za $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.
Lako se pokaže da je $G(y)$ neprekidna sa $[t_0, t_0 + T]$ u X^α, pa je G preslikavanje sa skupa S u skup S.
Ako su $y, z \in S$ tada za $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\| G(y)(t) - G(z)(t) \|_\alpha &\leq \int_{t_0}^{t} \| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \| \| f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \| y - z \|^T
\end{aligned}$$

Dakle, $\| G(y) - G(z) \|^T \leq \frac{1}{2} \| y - z \|^T$, za svaki $y, z \in S$.
Prema teoremu o kotrakciji, G ima jedinstvenu fiksnu točku $x \in S$ koja je rješenje integralne jednadžbe (3) i ograničenu funckiju $f(t, x(t))$ (kada $t \to t_0^+$).Prema prethodnoj lemi x je jedinstveno rješenje od (2) na $(t_0, t_0 + T)$ sa početnim uvjetom $x(t_0) = x_0$. □

Teorem 2.2.4. *Neka za A i f vrijede pretpostavke prethodnog teorema. Također pretpostavimo da je za svaki zatvoren ograničen skup $B \subset U$, slika $f(B)$ ograničena u X. Ako je x rješenje od* (2) *na (t_0, t_1), a t_1 maksimalan. Ukoliko je $t_2 > t_1$, tada nema rješenja od* (2).

Dokaz. Pretpostavimo da je $t_1 < +\infty$, ali $(t, x(t))$ ne pripada okolini N od ∂U, za $t \in [t_2, t_1)$. Možemo izabrati $N = U \setminus B$, gdje je B zatvoren ograničen podskup od U i $(t, x(t)) \in B$,za $t \in [t_2, t_1)$. Pokazujemo da postoji $x_1 \in B$ takav da $x(t) \to x_1$, kada $t \to t_1$, što znači da se rješenje može produžiti nakon vremena t_1 , a prema prethodnom teoremu , to je u suprotnosti sa maksimalnom vrijednošću od t_1.

Neka je $C = \sup\{\| f(t,x) \|,\ (t,x) \in B\}$. Prvo ćemo pokazati da $\| x(t) \|_\beta$ ostaje omedjen kada $t \to t_1$,za $\beta < 1$.
Promatrajući kada je $\alpha \leqslant \beta < 1$, $t_2 \leq t < t_1$,imamo:

$$\| x(t) \|_\beta \leq \| A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)} \| \| x(t_0) \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} \| A_1^{\beta} e^{-A(t-s)} \| \| f(s, x(s)) \| ds$$

$$\leq Const.\{(t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} \| x(t_0) \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\beta} ds\}$$

što je omeđeno za $t \to t_1$.
Sada pretpostavimo $t_2 \leqslant \tau < t < t_1$, pa:

$$x(t) - x(\tau) = \{e^{-A(t-\tau)} - I\} x(\tau) + \int_{\tau}^{t} e^{-A(t-s)} f(s, x(s)) ds$$

$$\| x(t) - x(\tau) \|_\alpha \leq C_1 (t-\tau)^{\beta-\alpha} \| x(\tau) \|_\beta + C_2 \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} ds$$
$$\leq C_3 (t-\tau)^{\beta-\alpha}, \quad (\alpha < \beta < 1)$$

Prema tome, $\lim_{t \to t_1} x(t)$ postoji uX^α , i tvrdnja je dokazana. □

Korolar 2.2.5. *Pretpostavimo da je A sektorski operator i $U = (\tau, \infty) \times X^\alpha$. Neka je funkcija f lokalno Hölder neprekidna po t i lokalno Lipschitzova po x za $(t, x) \in U$ i vrijedi:*

$$\| f(t, x) \| \leq K(t)(1 + \| x \|_\alpha)$$

za svaki $(t, x) \in U$, pri čemu je $K(\cdot)$ neprekidna na (τ, ∞). Ako je $t_0 > \tau$, $x_0 \in X^\alpha$, postoji jedinstveno rješenje od (2) za svaki $t \geq t_0$.

Dokaz. Vrijedi teorem 2.2.4, a korolar vrijedi ako postoji $t_n \to t_1 < \infty$ takav da $\| x(t_n) \|_\alpha \to +\infty$. Međutim imamo

$$\| x(t) \|_\alpha \leq \| e^{-A(t-t_0)} x_0 \| + \int_{t_0}^{t} \| A_1^\alpha e^{-A(t-s)} \| \cdot K(s)(1 + \| x(s) \|_\alpha) ds,$$

što po Gronwallovoj nejednakosti slijedi da je $\| x(t) \|_\alpha$ omeđen kada $t \to t_1$. □

Teorem 2.2.6. *Neka za A i f vrijede pretpostavke iz teorema 2.2.3., pretpostavimo još da A ima kompaktnu rezolventu i f je preslikavanje sa skupa* $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ *u ograničen skup X, pri čemu je B zatvoren i ograničen. Ako je* $x(t; t_0, x_0)$ *rješenje od* (2) *na* (t_0, ∞) *sa ograničenom normom* $\| x(t; t_0, x_0) \|_\alpha$ *kada* $t \to +\infty$, *tada je* $\{x(t; t_0, x_0)\}_{t > t_0}$ *u kompaktnom skupu u* X^α.

Dokaz. Ako je $\alpha < \beta < 1$ tada je $X^\beta \subset X^\alpha$ je kompaktno uložen, (teorem 1.4.9.) te je dovoljno pokazati da je $\| x(t; t_0, x_0) \|_\beta$ ograničen za $t \geq t_0 + 1$. Bez smanjena općenosti možemo pretpostaviti da je $Re\, \sigma(A) > \delta > 0$ i $\| f(t, x(t; t_0, x_0)) \| \leq C$, za svaki $t \geq t_0$, stoga imamo:

$$\| x(t; t_0, x_0)) \|_\beta \leqslant M(t - t_0)^{-(\beta - \alpha)} e^{-\delta(t - t_0)} \| x_0 \|_\alpha + MC \int_{t_0}^{t} (t - s)^{-\beta} e^{-\delta(t - s)} ds$$

što je ograničeno za $t \geq t_0 + 1$. □

Napomena 2.2.7. *Gornji argument pokazuje stupanj izglađivanja, bez pretpostavke kompaktnosti rezolvente: ako je rješenje ograničeno u* X^α *tada je ograničeno i u* X^β, *pri čemu je* $\alpha < \beta < 1$.

2.3 Allen-Cahnova jednadžba

U nastavku ćemo iskoristiti prethodne rezultate iz ovog Poglavlja, kako bismo pokazali egzistenciju i jedinstvenost lokalnog rješenja Cauchy-jevog problema za Allen-Cahnovu jednadžbu:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - u^3, \quad t > 0, \ a < x < b \\ u(a, t) = 0, \ u(b, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

Definirajmo linearni operator $A\varphi(x) = \frac{-d^2\varphi}{dx^2}(x)$, gdje je φ glatka funkcija na $[a, b]$ sa $\varphi(a) = 0$ i $\varphi(b) = 0$.

$(A\varphi, \varphi) = -\int_a^b \varphi''(x)\varphi(x)dx = \int_a^b (\varphi'(x))^2 dx \geq 0$

$(A\varphi, \psi) = -\int_a^b \varphi''(x)\psi(x)dx = (\varphi, A\psi)$

A je linearni hermitski operator na $L^2(a, b)$.

Operator $A = \frac{-d^2}{dx^2}$ je sektorski sa domenom $H^2(a, b) \cap H^1_0(a, b)$ i $D(A^{1/2}) = X^{1/2} = H^1_0(a, b)$

Neka je $f(u) = u - u^3$.

Sada navedenu jednadžbu možemo zapisati :

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u), \quad t > 0 \\ u(a) = u(b) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

gdje je $f : \mathbb{R}^+ \times H_0^1(a, b) \to X$.
Definirajmo prostor $X = \{u \in L^2(a, b) : \ u(a) = u(b) = 0\}$.
Za gore navedene uvjete, ispunjenji su uvjeti Teorema 2.2.3., te primjenom tog Teorema navedena jednadžba ima jedinstveno rješenje.

Poglavlje 3

Primjena

3.1 Uvod

Carr i Pego su proučavali razvoj početnih podataka više 'nakupina' Allen-Cahnove jednadžbe:

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + u - u^3 = \partial_x^2 u + U'(u), \tag{4}$$

gdje je $u(x,t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$
Ovi podaci su za većinu x vrlo blizu stacionarnim vrijednostima $v = \pm 1$ sa prijelazima od ± 1 do ∓ 1 u određenim točkama. Te točke zovemo 'nakupine'
Naši rezultati vrijede za jednadžbe koje su općenitije od Allen-Cahnove jednadžbe, koje proizlaze iz potencijala V.

Ako uvedemo oznaku:

$$U(z) = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}, \tag{5}$$

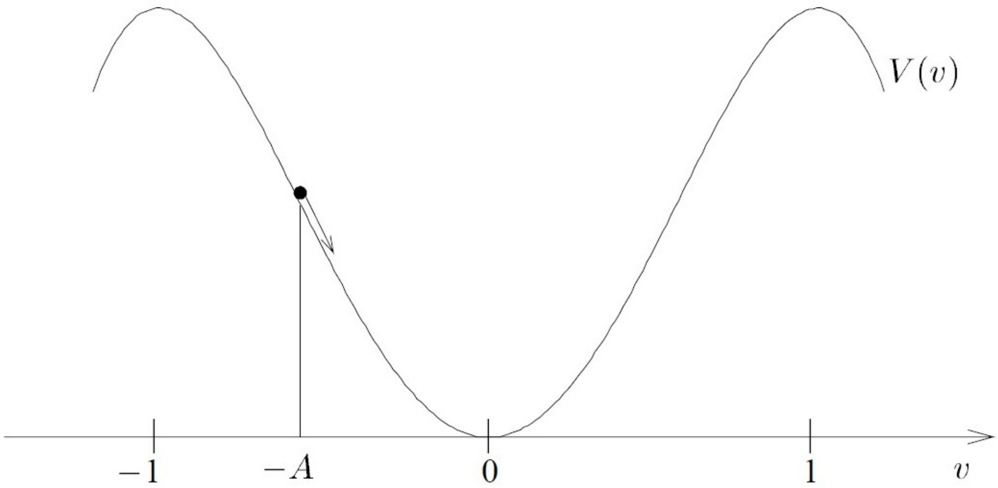
tada je desna strana od jednadžbe (4):

$$\mathcal{L}(u) = \partial_x^2 u + V'(u). \tag{6}$$

Možemo proširiti naše rezultate na sve $U \in C^3$ koji zadovoljavaju:

$$U'(\pm 1) = U'(0) = 0,$$
$$U(+x) = U(-x),$$
$$U''(\pm 1) < 0, \;\; U''(0) \geq 1,$$
$$U'(x) \neq 0 \text{ za } x \notin \{\pm 1, 0\}.$$

Počet ćemo sa ograničenim stacionarnim,tj. vremenski neovisnim rješenjima od (4). Mogu se protumačiti kao trajektorije slobodne točke čestica koja se bez trenja giba u potencijalu U, pri čemu x predstavlja vremensku varijablu. (Slika 1)
Imajmo na umu da je ovo integrabilni Hamiltonov sustav.



Slika 1: Interpretacija jednadžbe $\mathcal{L}(v) = 0$

Stacionarna rješenja su:

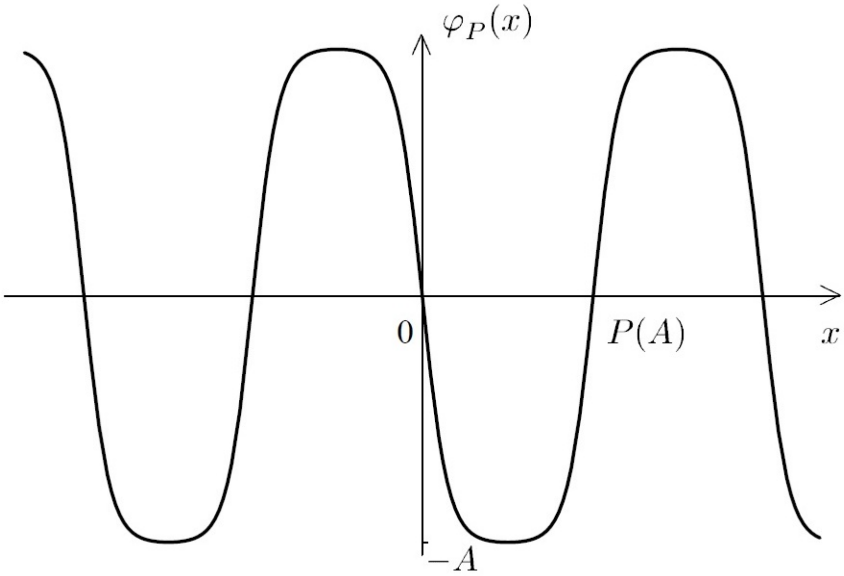
- tri konstantna rješenja $u_{\pm}(x) = \pm 1,\ u_0(x) = 0$;
- dva heteroklinička rješenja koja ćemo označiti sa $\psi(x)$ i $\psi(-x)$. Za V koji je dan jednadžbom (5), takvo rješenje je :

$$\psi(x) = -\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

- periodička rješenja, koja će biti objašnjena u nastavku. (Slika 2)

Propozicija 3.1.1. *Za svaki V koji je gore definiran te za svaki $P \in (P_0, \infty)$, gdje je $P_0 > 0$, postoji periodično stacionarno rješenje $\varphi_P(x)$ od* (4) *sa periodom $2P$ i amplitudom A, i $\varphi_P(x)$ ima točno jedan maksimum i jedan minimum po periodu. Nadalje, $\varphi_P \in C^\infty$ i postoji bijekcija između amplitude $A \in (0, 1)$ i $P = P(A)$. Pretpostavljamo $\varphi_P(0) = \varphi_P(P) = 0$ i $\varphi_P(x) < 0$ za $x \in (0, P)$.*

Dokaz. Dokaz pogledati u [2]. □



Slika 2: Periodičko rješenje $\varphi_P(x)$

Napomena 3.1.2. *Početni položaj $-A$ čestice mora zadovoljavati $A \in [0, 1]$ kako bi orbita ostala ograničena. Ali za takvo početno stanje, pokazali smo rješenje jednadžbe $\mathcal{L}(v) = 0$. Dakle nema drugih ograničenih rješenja od* (4)

Periodička rješenja će imati bitnu ulogu u nastavku. Cilj nam je pokazati postojanje 'mestabilnih' stanja, tj. nestabilna su, ali 'puzaju' vrlo dugo. (Slika 3)
Uobičajeno je da su rješenja $u_\pm$ stabilna, da je ψ stabilno do svojstvene vrijednosti 0 i da su sva ostala stacionarna rješenja nestabilna. Želimo proučiti razvoj početnih uvjeta $v(t = 0)$ koja su kao 'kruništa'. Definiramo Z, skup nula od $v(t = 0)$ kao:

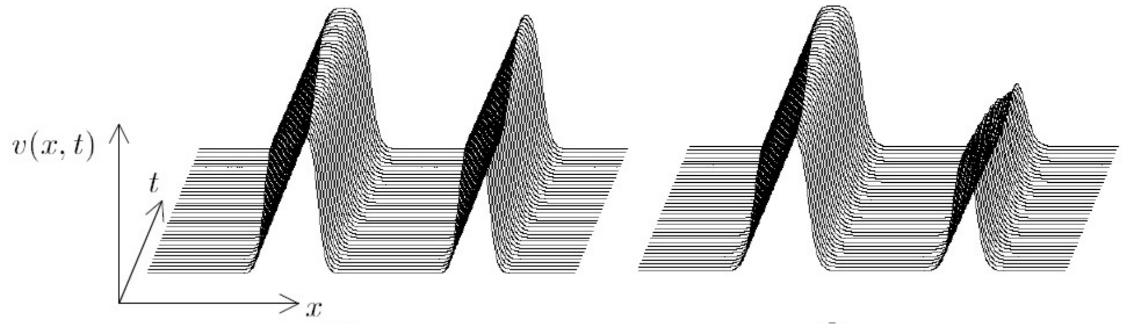
$$Z = \{z_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}, z_j < z_{j+1} \text{ i } v(x = z_j, t = 0) = 0 \text{ za svaki} j\}.$$

Pretpostavimo da je $v(x, t = 0)$ pozitivan za $z_{2j} < x < z_{2j+1}$ i negativan za $z_{2j-1} < x < z_{2j}$. Uvodimo i duljinu intervala ℓ_j, definirana sa :

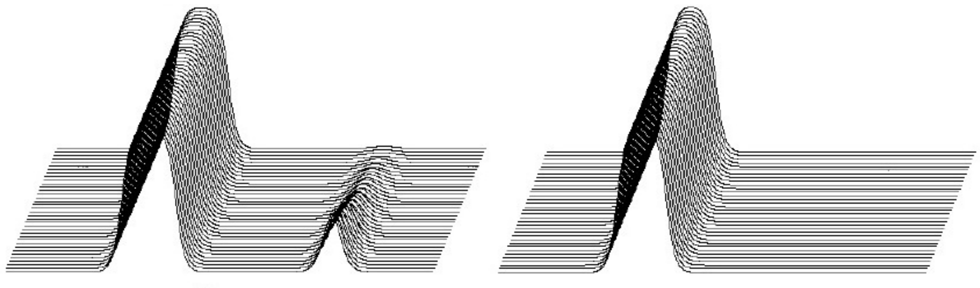
$$\ell_i = z_i - z_{i-1}.$$

Definicija 3.1.3. *Funkcije za koje vrijedi gore navedena forma, nazivamo dopustiva, označit ćemo ju sa u_Z.*

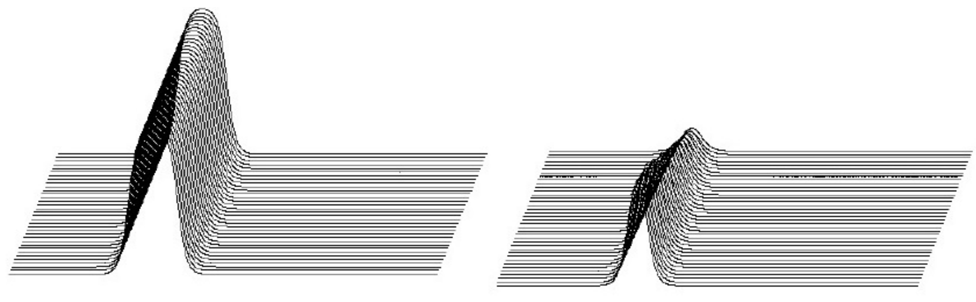
Ako promatramo samo nule od rješenja (4),onda imamo smanjeni sustav jednadžbi,za pozicije nula. Tako *Z* postaje funkcija vremena. Jedna od poteškoća u beskonačnoj domeni, je pokazati da postoje ’zanimljivi’ dopustivi početni uvjeti, koji ostaju dopustivi za sva vremena.



vrijeme: 1 do 2.7 vrijeme: 25 do 29.2



vrijeme: 29.2 do 31.3 vrijeme: 3668 do 3675

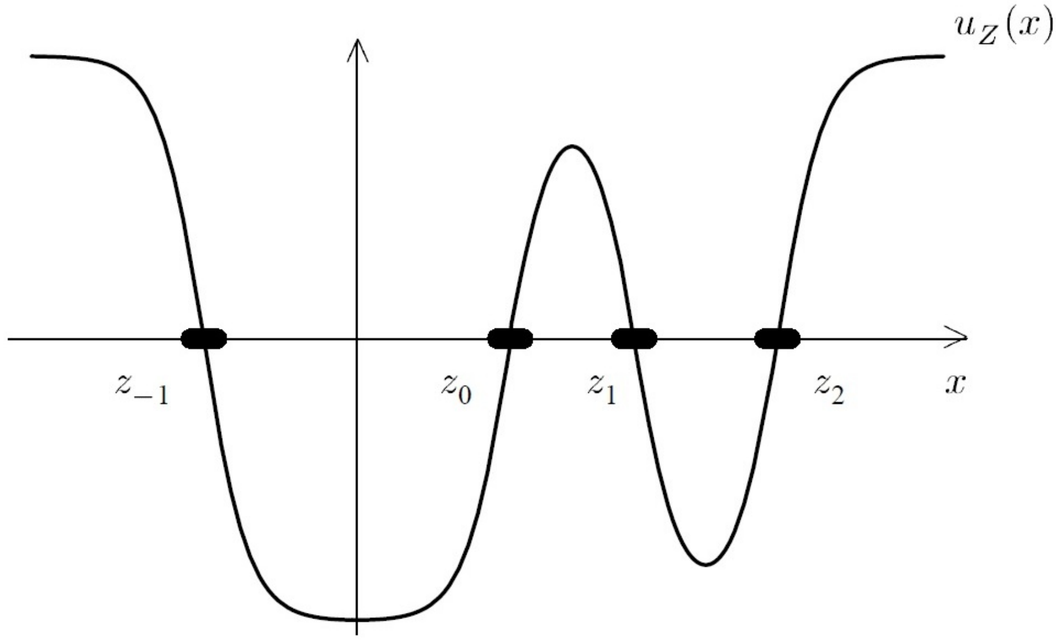


vrijeme: 5043 do 5050 vrijeme: 5266 do 5269

Slika 3: Numerička simulacija

Razvoj ovih početnih uvjeta izgledat će ovako. Prvo, pozitivan (negativan) dio od u brzo se približava +1(-1), u međuvremenu se formiraju barijere domene, koji (lokalno) izgledaju kao $\pm\tanh(\frac{x}{\sqrt{2}})$ (općenito heterokliničko rješenje). Intuitivno, ± 1 su stabilne točke, ali će se barijere domene pomaknuti. Budući da nema razloga da se $+1$ preferira ili obratno -1, brzina kretanja barijere domene će ovisiti samo o veličini ℓ_i, ℓ_{i+1} od dvije domene pored ove barijere. Carr i Pego su pokazali (u konačnoj domeni) da je brzina kretanja $i-$ te 'nakupine' približno $e^{-\ell_{i+1}} - e^{-\ell_i}$.

Slijedit ćemo njihovu metodu kako bi smo pokazali sličan rezultat u bekonačnoj domeni: skupu Z pridružujemo funkciju $u_Z^{(0)}$ koja ima Z kao skup nula. U svakom smo intervalu (z_i, z_{i+1}), postavili $u_Z^{(0)}(x)$ jednaku translaciji od φ_P sa $P = z_{i+1} - z_i$, tako da je $u_Z(0)$ neprekidna funkcija. Kako bismo dobili glatku funkciju u_Z, malo smo izmjenili nediferencijabilnu funkciju (u blizini svake nule).



Slika 4: Funkcija u_Z

Funkcija u_Z je po konstrukciji jednaka stacionarnom rješenju od (4), osim u blizini skupa Z. Na slici 4, nule su označene sa z_i, a podebljane linije pokazuju područja lijepljenja. Sljedeći korak je proučiti stabilnost ovih 'skoro stabilnih' funkcija.

3.2 Dinamika u razrijeđenom stanju

Definicija 3.2.1. *Neka je $Z = \{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ niz pozitivnih realnih brojeva, te:*

$$\ell_j = z_j - z_{j-1}\,,$$

$$|Z| = \inf_{j\in\mathbb{Z}} \ell_j\,,$$

$$c_j = \frac{1}{2}(z_j + z_{j-1})\,.$$

Neka $\Gamma > P_0$ i pretpostavimo da je $\mid Z \mid > \Gamma$. Posebno vrijedi $z_{j+1} > z_j$ za svaki $j \in \mathbb{Z}$. Sa Ω_Γ označimo skup takvih Z:

$$\Omega_\Gamma = \Big\{Z = \{..., z_{-1}, z_0, z_1, ...\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : z_{j+1} - z_j > \Gamma, j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Definicija 3.2.2. *Neka je $\{l_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiranih slučajnih varijabli s gustoćom vjerojatnosti $\rho_\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, za koju vrijedi $\rho_\Gamma(x) > 0$ za $x > \Gamma$ i $\rho_\Gamma(x) = 0$ za $x \leq \Gamma$. Mjera vjerojatnosti P skupa Ω_Γ je potaknuta odabirom,*

$$z_0 = 0, \quad z_j - z_{j-1} = \ell_j, \quad za\ Z \in \Omega_\Gamma,$$

Za $Z \in \Omega_\Gamma$, konstruiramo funkciju $u_Z(x)$ kao što je opisano na početku ovog poglavlja:

$$u^{(j)}(x) = \begin{cases} (1 - \Delta(x - z_j))\varphi_{l_j}(x - z_{j-1}) + \Delta(x - z_j))\varphi_{l_{j+1}}(x - z_{j+1}) & \text{ako je j paran broj} \\ (1 - \Delta(x - z_j))\varphi_{l_j}(x - z_j) + \Delta(x - z_j))\varphi_{l_{j+1}}(x - z_j) & \text{ako je j neparan broj} \end{cases}$$

gdje je $\Delta(x) \in C^\infty$ monotona 'odrezana' funkcija za koju vrijedi:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Tada je $u_Z(x)$ dana formulom:

$$u_Z(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u^{(j)}(x)\mathbf{1}_j(x),$$

gdje je $\mathbf{1}_j$ karakteristična funkcija na intervalu $I_j \equiv [c_j, c_{j+1}]$. Imamo $u_Z \in C^\infty$. Proširivanjem (6) sa u_Z uz $v = w + u_Z$ dobijemo:

$$\mathcal{L}(w + u_Z) = \mathcal{L}(u_Z) - L_Z w + w^2 r(w, u_Z)$$

pri čemu je linearan operator:

$$L_Z w = \partial_x^2 w - V''(u_Z)w, \tag{7}$$

i nealinearan ostatak je dan sa:

$$r(f,g) = \int_0^1 ds\ (1-s)V'''(sf+g).$$

Sada ćemo navesti neka svojstva linearnog operatora L_Z koji je dan sa (7).

Definicija 3.2.3. *Neka je Λ kompaktan interval u $\mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$. Neka je μ apsolutno neprekidna mjera na $\mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

$$\mu(\Lambda) = 1 - \varepsilon,$$
$$\mu(\mathbb{R} \setminus \Lambda) = \varepsilon,$$
$$\exists C > 0 : \left| \frac{d\mu(x)}{dx} - C \right| \leq \varepsilon, \quad za\ x \in \Lambda.$$

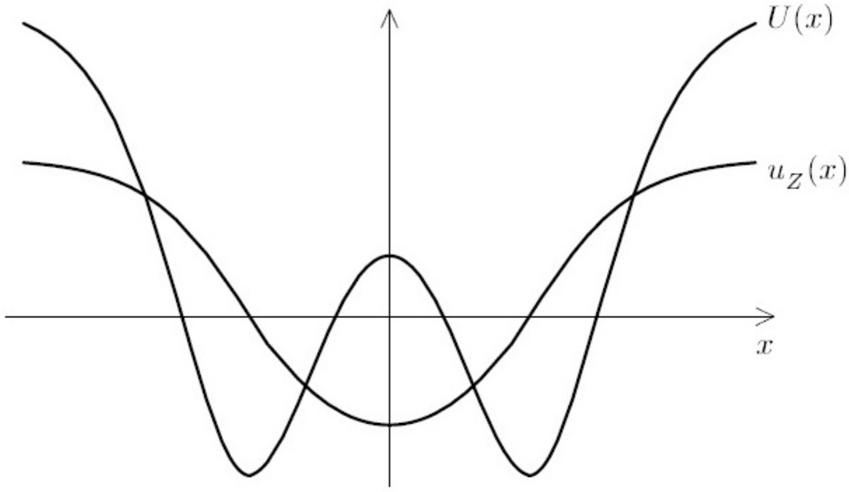
Odgovarajuća $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$-norma označena je sa $\|\cdot\|_\Lambda$ i skalarni produkt sa $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Lambda$.

Prvo ćemo opisati spektar od L_Z:

Teorem 3.2.4. *Neka postoje konstante $c_1 < \infty$, $M > 0$ i skup $\Omega^* \subset \Omega_{|Z|}$ takav da za dovoljno velik $|Z|$, vrijedi:*

- *$P(\Omega^*)$;*
- *za svaki $Z \in \Omega^*$, $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$-spektar od $L_Z \equiv \partial_x^2 - V''(u_Z)$ je iz $(-\alpha, \alpha)$, gdje je $\alpha = \mathcal{O}(e^{-c_1|Z|})$, točka sa eksponencijalno propadajućim svojstvenim funkcijama $e_j, j \in \mathbb{N}$. Ostatak spektra je sadržan u $[M, \infty)$.*

Dokaz. Dokaz navednog teorema pogledati u [4]. □



Slika 5: Potencijal $U(x)$ zajedno sa funkcijom $u_Z(x)$

Korolar 3.2.5. *Neka je $\varepsilon > 0$ i $\Lambda \subset \mathbb{R}$ kompaktan interval. Tada postoji $N_\varepsilon < \infty$ takav da za svaki $w \in L^2(\mathbb{R}, d\mu) \cap L^\infty$ vrijedi:*

$$\sum_{j>N_\varepsilon} |\langle e_j(x), w\rangle_\Lambda| \leq \varepsilon. \tag{8}$$

Dokaz. Lijeva strana nejednakosti je projekcija w na prostor funkcija koje imaju eksponencijalno malene početne točke iz Λ. Osim toga, $w \in L^\infty$, dakle imamo $\|\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\Lambda} w\|_\Lambda \leq \varepsilon$, gdje je $\mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\Lambda}$ karakteristična funkcija komplementa od Λ. □

Sada ćemo definirate vektore iz $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ koji generiraju translacije od $j-$te 'nakupine':

$$\tau_{z_j} = (-1)^j \Theta_j(x) \partial_x u_Z(x), \tag{9}$$

gdje je $\Theta_j \in C^\infty$ karakteristična funkcija na intervalu I_j :

$$\Theta_j(x) = \begin{cases} 0, & d(x, I_j) > 1, \\ 1, & x \in I_j. \end{cases}$$

takva da su sve njezine derivacije uniformno ograničene .

Lema 3.2.6. *Za dovoljno velik $|Z|$ i $\varepsilon > 0$, postoji D_τ, $0 < D_\tau < \infty$ takav da za svaki $k > D_\tau$,*

$$\|\tau_{z_k}\|_\Lambda \leq \varepsilon.$$

Dokaz. Tvrdnja neposredno slijedi iz definicije 3.2.3. i činjenice da τ_{z_j} ima kompaktan nosač i uniformno je ograničena. □

Označimo sa $P_{N_\varepsilon} : L^2(\mathbb{R}, d\mu) \to \bigoplus_{j \le N_\varepsilon} \mathcal{H}_{\lambda_j}$ spektralni projektor sa pridruženim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, ..., \lambda_{N_\varepsilon}$ od L_Z (i $\mathcal{H}_{\lambda_j} \subset L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, odgovarajući spektralni potprostori).
Ako $w \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ zadovoljava $\langle w, \tau_{z_j} \rangle_\Lambda = 0$ za svaki $|j| \le D_\tau$ tada je njegova projekcija na $\bigoplus_{j \le N_\varepsilon} \mathcal{H}_{\lambda_j}$ mala:

Propozicija 3.2.7. *Neka je $w \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Tada postoje konstante $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ i $D_\tau > 0$ takve da ako w zadovoljava $\langle w, \tau_{z_j} \rangle_\Lambda = 0$ za svaki $|j| \le D_\tau$, tada je*

$$||P_{N_\varepsilon} w||_\Lambda \le c_2 e^{-c_1 |Z|} ||w||_\Lambda.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [2]. □

Korolar 3.2.8. *Neka je $w \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ te za dovoljno velik $|Z|$ postoje konstante $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ i $M_3 > 0$. Ako w zadovoljava $\langle w, \tau_{z_j} \rangle_\Lambda = 0$ za $|j| \le D_\tau$, tada je :*

$$||L_Z w||^2_\Lambda \ge M_2 \langle w, L_Z w \rangle_\Lambda \ge M_1 M_2 ||w||^2_\Lambda \tag{10}$$

Za karakterističnu funkciju $\chi_\Lambda(x) = 1$, ako je $x \in \Lambda$ (koja ima kompaktan nosač i $|\partial_x \chi_\Lambda| < \frac{1}{2}$) imamo:

$$||\chi_\Lambda w||^2_\infty \le M_3 \langle w, L_Z w \rangle_\Lambda. \tag{11}$$

Sada možemo uvesti i sljedeću normu za perturbacije $w \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ koja je ortogonalna na span$\{\tau_{z_j}\}$, $j \in \mathbb{Z}$:

$$||w||^2_Z \equiv \langle w, L_Z w \rangle_\Lambda \tag{12}$$

gdje je $Z \in \Omega_\Gamma$.

U nastavku slijedi dekompozicija rješenja v_t od jednadžbe (1) kao $v_t = u_{Z_t} + w_t$, $Z_t \in \Omega_\Gamma$. Sada uvodimo prostor početnih uvjeta za dinamiku danu jednadžbom (4):

$$\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma} = \left\{ v \in L^\infty(\mathbb{R}) : ||v||_\infty \le 1, \inf_{Z \in \Omega_\Gamma} ||\chi_\Lambda (v - u_Z)||_\infty < \sigma, \inf_{Z \in \Omega_\Gamma} ||v - u_Z||_\Lambda < \infty \right\}, \tag{13}$$

gdje je χ_Λ kao u prethodnom Korolaru.

U nastavku ćemo koristiti uvjet 'za dovoljno malen $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ ' što znači 'za dovoljno velik $\Gamma < \infty$ i dovoljno malen $\sigma > 0$'.

Propozicija 3.2.9. *Za dovoljno malen $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ i $v \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$, postoji diferencijabilna funkcija $Z : \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma} \to \Omega_\Gamma$ takva da vrijedi $\langle v - u_{Z(v)}, \mathcal{T}_{z_j(v)} \rangle_\Lambda = 0$, za $|j| \le D_\tau + 1$.*
Nadalje, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $Z^* \in \Omega^*$ takav da vrijedi $||(L_{Z(v)} - L_{Z^*})w||_\Lambda < \varepsilon ||w||_\Lambda$.

Propozicija 3.2.10. *Postoji konstanta $B > 0$ takva da za dovoljno malen $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$, vrijedi sljedeće: Ako je $v_0 \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$, tada sve dok je $v_t \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ vrijedi:*

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}M_2\right)\left(\|v - u_{Z(v)}\|^2_{Z(v)} - Bg_1^2(Z(v))\right) \leq 0,$$

pri čemu je M_2 konstanta kao u Korolaru 3.2.8., $g_1^2(Z) = \sum_{|j|\leq D_\tau} |\langle \mathcal{L}(u_Z), \tau_{z_j}\rangle_\Lambda|^2$ i norma $\|\cdot\|^2_Z$ dana je sa (11)*. Štoviše, $g_1(Z) \to 0$ kada $|Z| \to \infty$.*

Dokaz. Dokaz možete vidjeti u [2]. □

Korištenjem prethodne Propozicije, Korolara 3.2.8. te primjenom Gronwallove leme slijedi:

$$\|w\|^2_{Z(v)} \leq Bg_1^2(Z(v)) + \left(\|w\|^2_{Z(v_0)} - Ag_1^2(Z(v_0))\right)e^{-M_2 t/2}. \tag{14}$$

Možemo definirati dva skupa, odabirom broja s iz skupa $\{s \in \mathbb{R}^+ : s^2 + B \sup_{Z\in\Omega_\Gamma} g_1^2(Z) < M_2\sigma^2\}$ koji nije prazan za dovoljno velik $|Z|$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{v = w + u_Z \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma} : \|w\|_Z < s\}, \\ \mathcal{Z} &= \{v \in \mathcal{A} : \|w\|_Z < Bg_1^2(Z)\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Iz Korolara 3.2.8. slijedi da je $\mathcal{A} \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$. Označimo sa $v_t \equiv v(\cdot, t)$ rješenje od (1). Vidimo da za $v_0 \in \mathcal{Z}$ sve dok je $|Z(v_t)| > \Gamma$, onda je $v_t \in \mathcal{Z}$. Dakle, jedini način za napustiti $\mathcal{Z}$ je dostići granicu $|Z| = \Gamma$.

U sljedećem dijelu izrazit ćemo eksplicitnu formulu za brzinu 'nakupina'. Sada želimo napisati jednadžbe za vremenski razvoj funkcije $Z(t) \equiv Z(v_t)$, gdje je v_t rješenje od (1) sa početnim uvjetom $v_0 \in \mathcal{Z}$ i za $t < \sup\{t : |Z(v_t)| > \Gamma\}$.
Napomenimo da je :

$$\partial_t u_{Z(v)} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\partial_{z_j} u_Z)\Big|_{Z=Z(v)} \dot{z}_j,$$

gdje je

$$\dot{z}_j = \partial_t z_j(v(t)).$$

Koristit ćemo ovu notaciju

$$\partial_t u_{Z(v)} = \mathbf{D}_Z u_Z \cdot \partial_t Z(v).$$

Sada imamo

$$\langle v - u_{Z(v)}, (\partial_{z_j} u_Z)\Big|_{Z=Z(v)}\rangle_\Lambda = 0, \quad \text{za } |j| \leq D_\tau + 1,$$

s obzirom na t, za $|j| \leq D_\tau + 1$ i $w = v - u_{Z(v)}$ dobijemo :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(v), \tau_{z_j(v)} \rangle_\Lambda &= \langle \mathbf{D}_Z u_Z \cdot \partial_t Z(v), \tau_{z_j(v)} \rangle_\Lambda - \langle v - u_{Z(v)}, \mathbf{D}_Z \tau_{z_j} \cdot \partial_t Z(v) \rangle_\Lambda \\ \partial_t w &= \mathcal{L}(v) - \mathbf{D}_Z u_Z \cdot \partial_t Z(v) \end{aligned} \tag{16}$$

Definirat ćemo matricu:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}} &= \Big(\tilde{\mathcal{S}}_{ij} \Big)_{-D_\tau - 1 \leq i,j \leq D_\tau + 1} \\ &= \Big(\langle \partial_{z_j} u_{Z(v)}, \tau_{z_i(v)} \rangle_\Lambda - \langle v - u_{Z(v)}, \partial_{z_j(v)} \tau_{z_i(v)} \rangle_\Lambda \Big)_{-D_\tau - 1 \leq i,j \leq D_\tau + 1} \end{aligned}$$

Zapisat ćemo jednadžbu (16) u matričnoj notaciji:

$$\tilde{\mathcal{S}} \cdot \dot{Z} = \langle \mathcal{L}(v), \tau_Z \rangle_\Lambda + \dot{Z} \delta_{|j|, D_\tau + 1} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

gdje je $\delta_{i,j}$ Kronecker-ova delta funkcija. Uvest ćmo zapis matrice $\mathcal{S}$ koja je invertibilna, što će kasnije biti pokazano.

$$\mathcal{S} = \tilde{\mathcal{S}} - \delta_{|j|, D_\tau + 1} + \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{17}$$

Stoga su jednadžbe (16) u ovom obliku:

$$\begin{aligned} \partial_t Z(v) &= \mathcal{S}^{-1} \cdot \langle \mathcal{L}(v), \tau_{Z(v)} \rangle_\Lambda \\ \partial_t w &= \mathcal{L}(w + u_{Z(v)}) - \mathbf{D}_Z u_Z \cdot \mathcal{S}^{-1} \cdot \mathcal{L}(v), \tau_{Z(v)} \rangle_\Lambda. \end{aligned}$$

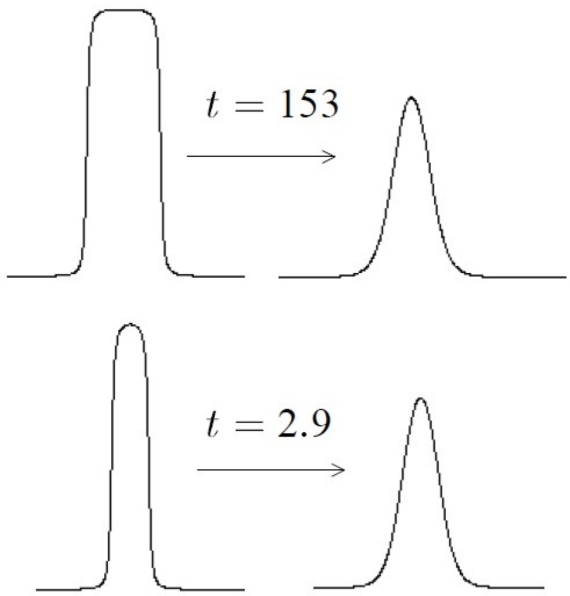
Teorem 3.2.11. *Postoje konstante $c_1 > 0$ i $E > 0$ takve da za $v_t \in \mathcal{Z}$, $Z = Z(v_t)$ i dovoljno malen $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ vrijedi:*

$$\partial_t z_j = E\Big(e^{-c_1 \ell_{j+1}} - e^{-c_1 \ell_j} \Big) + \mathcal{O}\Big(e^{-c_1 \inf_{j \in \mathbb{Z}} \ell_j} \sup_{j \in \mathbb{Z}} (e^{-c_1 \ell_{j+1})} - e^{-c_1 \ell_j}) \Big) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad z_j \in \Lambda. \tag{18}$$

Dokaz. Za dokaz ovog teorema pogledati [2]. □

3.3 Kolaps domene

Kako bismo preciznije opisali kolaps mehanizma, upotrijebit ćemo beskonačan pravac. To je moguće jer je svaka distribucija 'nakupina' dovoljno razrijeđena i ne zaglavi se unutar $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ za svako vrijeme (napusti $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ kroz iglu na kraju cijevi). To dovodi do gotovo općeg oblika rješenja na intervalu I_j koji ima duljinu Γ, pod pretpostavkom da je bilo dovoljno veliko na početku. Jednom kada se dostigne opći oblik, 'nakupine' će se srušiti u vremenu $T_p < \infty$. Numeričkom integracijom je prikazana ova situacija, dakle na Slici 5 prikazana su dva različita početna uvjeta koja vode do istog oblika neposredno prije kolapsa.



Slika 5:

U nastavku ćemo iznijeti precizan opis završne faze. Pretpostavimo da je $v_t \in \mathcal{Z}$ za svaki $t > T$ i neka $Z = Z(v_t)$ zadovoljava $|Z| = \Gamma$. Stavimo da je $w_t = v_t - u_{Z(v_t)}$. Tada prema Propoziciji 3.2.7. i Korolaru 3.2.5. imamo

$$\|w_T\|_\Lambda \leq \|P_{N_\varepsilon} w_T\|_\Lambda + \|(1 - P_{N_\varepsilon})w_T\|_\Lambda \leq c_2(e^{-c_1\Gamma} + \varepsilon + e^{-MT}\|w_0\|_\Lambda).$$

Iz definicije o $\mathcal{Z}$ i Propoziciji 3.2.10. slijedi $\|w_0\|_\Lambda \leq Bg_1(Z) \leq c_2 e^{-c_1\Gamma_0}$. Stoga vrijedi $\|w_T\|_\Lambda \leq \Lambda(\varepsilon + e^{-c_1\Gamma})$.

U sljedećem teoremu proučavamo ponašanje od $v_0 = u_Z$ gdje Z zadovoljava : Postoji $j \in \mathbb{Z}$ takav da $\ell_j = \Gamma$, $\ell_{j\pm1} > \Gamma_0$.

Teorem 3.3.1. *Za dovoljno malene $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ i $\mathcal{T}_{\Gamma_0,\sigma}$, pri čemu je $\Gamma_0 > \Gamma$ vrijedji $v_0 \in \mathcal{T}_{\Gamma_0,\sigma}$. Pretpostavimo da za $T > 0$ i $i \in \mathbb{Z}$ imamo $z_{i+1}(v_T) - z_i(v_T) = \Gamma$ i $z_{j+1}(v_T) - z_j(v_T) > \Gamma_0$. Tada postoji konačan T_p takav da $\lim_{t\uparrow T_p}\ z_{j+1}(v_{t+T})z_j(v_{t+T}) = 0$*

Napomena 3.3.2. *Za velike Γ_0 vrijeme kolapsa T_p je zapravo neovisan o v_0. Lokalni oblik od kolapsa dviju 'nakupina' je sveopći(neovisno o i).*

3.4 Egzistencija dinamike okrupnjavanja

U prošlom dijelu pronašli smo 'učinkovitu' jednadžbu (18) za koordinate $\{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ nula od rješenja Alen Cahn-ove jednadžbe (1). Oslobodivši se konstanti i zanemarujući uvjete višeg reda, imamo jednadžbu:

$$\dot{z}_j = e^{-(z_{j+1}-z_j)} - e^{-(z_j-z_{j-1})}, \quad \text{za } j \in \mathbb{Z}.$$

Prelaskom na varijable $\ell_j = z_j - z_{j-1}$ (duljine intervala), dobivamo:

$$\dot{\ell}_j = e^{-\ell_{j+1}} + e^{-\ell_{j-1}} - 2e^{-\ell_j}.$$

Stavimo $\beta_j = e^{-\ell_j}$, pa imamo:

$$\dot{\beta}_j = \beta_j(2\beta_j - \beta_{j+1} - \beta_{j-1}). \tag{19}$$

Nadalje, definirat ćemo i rubne uvjete: ako postoji indeks $j \in \mathbb{Z}$ i vrijeme $t > 0$ takvi da $\beta_j(t-0) = e^{-\Gamma}$ tada je $\beta_i(t),\ i \in \mathbb{Z}$ definiran sa:

$$\beta_i(t) = \begin{cases} \beta_i(t-0) & i < j-1, \\ \beta_{j-1}(t-0)e^{-\Gamma}\beta_{j+1}(t-0) & i = j-1, \\ \beta_{i+2}(t-0) & i > j-1. \end{cases} \tag{20}$$

Jednadžbe (19) i (20) određuju dinamiku na prostoru $\mathcal{E} = [0, e^{-\Gamma}]^{\mathbb{Z}}$.

Definicija 3.4.1. *Kolaps za $\beta(t)$ koji zadovoljava dinamiku okrupnjavanja je vrijeme τ takvo da je $\beta(t)$ diskontinuiran za $t = \tau$, tj. postoji cijeli broj j takav da $\beta_j(\tau - 0) = e^{-\Gamma}$.*

Uložit ćemo skup početnih uvjeta C u $\mathcal{E}$ tako da će se beskonačno često srušiti dinamika okrupnjavanja. U terminima varijabli z_j ovaj skup se može promatrati kao podskup od $\mathbb{R}$.

Definirajmo skup C:

$$C = \left\{\beta \in \mathcal{E} : \ \exists\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z} \text{ t.d. } \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_{j_n} \in (\frac{e^{-\Gamma}}{2n}, \frac{e^{-\Gamma}}{n}), \beta_{j_n\pm 1} \in (0, \frac{e^{-\Gamma}}{6n})\right\}$$

Teorem 3.4.2. *Neka je $t \to \beta(t) \in \mathcal{E}$ dinamika okrupnjavanja sa početnim uvjetom $\beta(0) \in C$. Tada postoji bekonačan niz brojeva $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < ...$, takav da $\tau_m \to \infty$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$, τ_n je kolaps za $\beta(t)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\beta_0(0) \in (\frac{e^{-\Gamma}}{2n}, \frac{e^{-\Gamma}}{n})$ i $\beta_{\pm 1}(0) < \frac{e^{-\Gamma}}{6n}$. Prema (19) imamo:

$$\dot{\beta_0}(0) \geq (\frac{2e^{-\Gamma}}{3n})\beta_0(0),$$

$$\dot{\beta_{\pm 1}}(0) \leq \beta_{\pm 1}(2\beta_{\pm 1} - \beta_0).$$

Zatim, označimo da je $\dot{\beta_0}(t) \leq 2\beta_0(t)$. Kako je $\beta_{\pm 1}(t) < \frac{e^{-\Gamma}}{6n}$, što povlači:

$$\frac{e^{-\Gamma}}{2n} e^{2e^{-\Gamma}t/(3n)} < \beta_0(t) < \frac{e^{-\Gamma}}{n} e^{2t},$$

za sva vremena $t < \sup\{t : \beta_0(t) < e^{-\Gamma}\}$. Iz čega slijedi da u intervalu $(\frac{1}{2}\log n, \frac{3}{2}ne^{\Gamma}\log(2n))$ postoji vrijeme τ_n takvo da $\beta_0(\tau_n) = e^{\Gamma}$. Dakle, postoji podniz τ_{n_j} koji zadovoljava tvrdnju. □

Za interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$ definiramo skup C^{Λ} kao restrikciju skupa C na Λ.

Propozicija 3.4.3. *Neka je Λ kompaktan interval u $\mathbb{R}$ i $|\Lambda|$ njegova duljina. Postoji $\delta = \delta(|\Lambda|) > 0$ takav da*

$$P(C^{\Lambda}) \geq \delta,$$

gdje je $P(\cdot)$ mjera vjerojatnosti definirana u Definiciji 3.2.2.

Dokaz. Neka je $\beta \in C$ i indeksi $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da $\beta_{j_n} \in (\frac{e^{-\Gamma}}{2n}, \frac{e^{-\Gamma}}{n})$ i $\beta_{j_n \pm 1} < \frac{e^{-\Gamma}}{n}$.

Stavimo $M^* = \sup\{M : \sum_{n=1}^{M} 3\Gamma + \log 2n + 2\log 6n < |\Lambda|\}$. Interval Γ ne može sadržavati više od intervala $\ell_{j_1}, ..., \ell_{j_{M^*}}$. Stoga

$$P(C^{\Lambda}) \geq \prod_{n=1}^{M^*} \int_{\Gamma+\log n}^{\Gamma+\log 2n} dx\, \rho_{\Gamma}(x) \Big(\int_{\Gamma+\log 6n}^{\infty} dy\, \rho_{\Gamma}(y) \Big)^2.$$

Budući da je Λ kompaktan i zbog $\rho(x) > 0$, $\forall x \in (\Gamma, \infty)$, M^* je konačan, dakle tvrdnja je dokazana. □

Definirajmo skup C^* gdje je C zapisan pomoću varijabli z_j:

$$C^* = \Big\{ Z \in \Omega_{\Gamma} : \{e^{z_j - z_{j+1}}\}_{j\in\mathbb{Z}} \in C \Big\}.$$

Također definirajmo $\mathcal{T}^*_{\Gamma,\sigma}$ zamjenom Ω_{Γ} sa C^* u definiciji od $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ (13). Podskup $\mathcal{Z}^*$ je definiran zamjenom $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ sa $\mathcal{T}^*_{\Gamma,\sigma}$ u (15). Označili smo sa $z_j(v)$ j-tu nulu od funkcije v, gdje je $z_j(v) < z_{j+1}(v)$.

Teorem 3.4.4. *Neka je $\mathcal{T}^*_{\Gamma,\sigma}$ dovoljno malen i $v_0 \in \mathcal{T}^*_{\Gamma,\sigma}$. Ako je v_t rješenje od JED!! zajedno sa početnim uvjetom v_0, tada postoji vremenski niz $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i niz indeksa $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takvi da vrijedi*

$$\lim_{t\to t_n} |z_{j_n}(v_t) - z_{j_n-1}(v_t)| = 0 \ i \ \lim_{n\to\infty} t_n = \infty.$$

Dokaz. Označimo sa $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indekse takve da

$$e^{-(z_{j_n} - z_{j_n-1})} \equiv e^{-\ell_{j_n}} \in (\frac{e^{-\Gamma}}{2n}, \frac{e^{-\Gamma}}{n})$$

$$e^{-(z_{j_n\pm1} - z_{j_n\pm1-1})} \equiv e^{-\ell_{j_n\pm1}} < \frac{e^{-\Gamma}}{n}$$

Izaberimo skup $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ disjunktnih kompaktnih intervala iz $\mathbb{R}$ takav da za svaki n postoji k takav da $[z_{j_{n-1}}, z_{j_n}] \subset \Lambda_k$. Prema Teoremu 3.2.11., dinamika nula z_{j_n} je dana jednadžbom (18) i njhov kolaps objašnjen je u Teoremu 3.3.1. I konačno, za dovoljno malen $\mathcal{T}^*_{\Gamma,\sigma}$ postoji niz vremena kolapsa. Time je tvrdnja dokazana. □

3.5 Različite granice

U ovom dijelu ćemo procjeniti ponašanje funkcije u_Z. Pokazat ćemo da blizu skupa $\mathbb{Z}$, funkcija u_Z je toliko blizu heterokliničkom rješenju ψ.

Lema 3.5.1. *Neka postoje pozitivne konstante K i c_1 takve da za dovoljno velik $|Z|$, vrijede sljedeće tvrdnje :*

(1) $|\psi((-1)^{j+1}(x - z_j)) - u_z(x)| \le Ke^{-c_1 min(l_j, l_{j+1})}$, *za* $|x - z_j| \le 1$ *i za* $j \in Z$.

(2) $||\mathcal{L}(u_z)||_\infty \le Ke^{-c_1|Z|}$.

Dokaz. Prvo uspoređujemo φ_P sa ψ za fiksni P. Neka je $g(x) = \psi(x) - \varphi_P(x)$, $\alpha = V(\varphi_P(P/2)) = V(-A(P))$(Slika 2),i pretpostavimo $x \in [-P/2, P/2]$. Ako je f stacionarno rješenje od (4), tada $f'' + V'(f) = 0$, prema tome $f''f' + V'(f)f' = 0$ tj. $\frac{1}{2}(f')^2 + V(f)$ je konstanta. Uzmimo x^* sa $f'(x^*) = 0$ i dobijemo :

$$\frac{1}{2}(f')^2 + V(f(x)) = V(f(x^*))$$

Derivacija od g zadovoljava:

$$
\begin{aligned}
|g'(x)| = {} & \sqrt{2}\left|\sqrt{V(\psi(\infty)) - V(\psi(x))} - \sqrt{\alpha - V(\varphi_P(x))}\right| \\
= {} & \sqrt{2}\left|\sqrt{V(\psi(\infty)) - V(\psi(x))} - \sqrt{-(V(\psi(\infty)) - \alpha) + V(\psi(\infty)) - V(\varphi_P(x))}\right| \\
\leq {} & \sqrt{2}\left|\sqrt{V(\psi(\infty)) - V(\psi(x))} - \sqrt{V(\psi(\infty)) - V(\varphi_P(x))}| + |\sqrt{V(\psi(\infty)) - \alpha q bigg}|\right. \\
& \leq C(|\psi(x) - \varphi_P(x)| + e^{-c_1 P}) = C(|g(x)| + e^{-c_1 P}).
\end{aligned}
$$

Primjenit ćemo Gronwallovu lemu (i $g(0) = 0$) te dobijemo

$$|g(x)| \leq K_1 e^{-c_1 P},$$

$$|g'(x)| \leq K_2 e^{-c_1 P}.$$

Sjetimo se definicije u_Z,pa imamo
$u_z(x) = (1 - \Delta(x - z_j))\varphi_{\ell_j}(x - z_{j-1}) + \Delta(x - z_j)\varphi_{\ell_{j+1}}(x - z_{j+1}), \quad \text{za } |x - z_j| < \inf(\ell_j, \ell_{j+1})/2$
Dakle,
$\min(\varphi_{\ell_j}(x - z_{j-1}), \varphi_{\ell_{j+1}}(x - z_{j+1})) \leq u_Z \leq \max(\varphi_{\ell_j}(x - z_{j-1}), \varphi_{\ell_{j+1}}(x - z_{j+1}))$.
Stoga,

$$
\begin{aligned}
\left|\psi((-1)^{j+1}(x - z_j) - u_Z(x)\right| &= \max\Big(\psi((-1)^{j+1}(x - z_j) - u_Z(x), u_Z - \psi((-1)^{j+1}(x - z_j)\Big) \\
&\leq \max\Big(\psi((-1)^{j+1}(x - z_j)) - \min(\varphi_{\ell_j}(x - z_{j-1}), \varphi_{\ell_{j+1}}(x - z_{j+1})), \\
&\max(\varphi_{\ell_j}(x - z_{j-1}), \varphi_{\ell_{j+1}}(x - z_{j+1})) - \psi((-1)^{j+1}(x - z_j) - u_Z(x)))\Big) \\
&\leq \max(K_1 e^{-c_1 \ell_j}, K_1 e^{-c_1 \ell_{j+1}})
\end{aligned}
$$

čime smo dokazali (1).
Za $x \in I_j$ imamo

$$\mathcal{L}(u_z) \equiv \Delta''(\varphi_{\ell_j} - \varphi_{\ell_{j+1}}) + 2\Delta'(\varphi'_{\ell_j} - \varphi'_{\ell_{j+1}}) - G.$$

Koristeći činjenicu da je φ_P rješenje od $\mathcal{L}(u) = 0$, tada imamo

$$G = (1 - \Delta)V'(\varphi_{\ell_j}) + \Delta V'(\varphi_{\ell_{j+1}}) - V'((1 - \Delta)\varphi_{\ell_j} + \Delta\varphi_{\ell_{j+1}}).$$

Proširimo G blizu nule i pogledajmo koeficijent od $V'''(0)/2$:

$$
\begin{aligned}
&(1 - \Delta)\varphi_{\ell_j}^2 + \Delta\varphi_{\ell_{j+1}}^2 - ((1 - \Delta)\varphi_{\ell_j} + \Delta\varphi_{\ell_{j+1}})^2 \\
&= (1 - \Delta)\varphi_{\ell_j}^2 + \Delta\varphi_{\ell_{j+1}}^2 - (1 - \Delta)^2\varphi_{\ell_j}^2 - \Delta^2\varphi_{\ell_{j+1}}^2 - 2(1 - \Delta)\Delta\varphi_{\ell_j}\varphi_{\ell_{j+1}}
\end{aligned}
$$

$$= (1-\Delta)\Delta(\varphi_{l_j}^2 + \varphi_{l_{j+1}}^2 - 2\varphi_{l_j}\varphi_{l_{j+1}})$$
$$\leq (\varphi_{l_{j+1}} - \varphi_{l_j})^2.$$

Posljedica $|G| \leq \aleph_3|\varpi_{\ell_{j+1}} - \varphi_{\ell_{j+1}}|$ i koristeći (1) doijemo:

$$|\mathcal{L}(u)| \leq \aleph_1|g(x)| + \aleph_2|g'(x)| + \aleph_3|g(x)|^2 \leq Ke^{-c_1(l_j,l_{j+1})},$$

Te smo dokazali obje tvrdnje.

□

Lema 3.5.2. *Neka je $Z \in \Omega_\Gamma$, $c_j = \frac{1}{2}(z_j + z_{j-1})$ i τ_{z_j} definiran kao u* (9). *Tada postoji $K > 0$, $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$ takvi da za dovoljno velik Γ vrijedi:*

$$\langle \mathcal{L}(u_Z), \tau_{z_j}\rangle_\Lambda = c_2(V(u_Z(c_j)) - V(u_Z(c_{j+1})) + O(\varepsilon), \quad za\ z_j \in \Lambda,$$

$$||L_Z\tau_{z_j}||_\Lambda \leq Ke^{-c_1 min(l_j,l_{j+1})}, \quad za\ |j| \leq D_r.$$

Dokaz. Koristeći definiciju 3.2.2.

$$\int_R d\mu\mathcal{L}(u_Z(x))\mathcal{T}_{z_j}(x) = C\int_{c_j+1}^{c_{j+1}-1} dx(\partial_x^2 u_Z + V'(u_Z))\partial_x u_Z + O(\varepsilon)$$

$$= C(\frac{1}{2}\partial_x u_Z)^2 + V(u_Z))(c_j+1)) - C(\frac{1}{2}(\partial_x u_Z)^2 + V(u_Z))(c_{j+1}-1) + O(\varepsilon$$
$$= C(V(u_z(c_{j+1}) - V(u_Z(c_j))) + O(\varepsilon).$$

Time smo pokazali prvu tvrdnju.
Koristit ćemo da τ_{z_j} ima kompaktan nosač i jednak je stacionarnom rješenju od (4) na intervalu $I_j \cap \{x : \ |x - z_j| > 1\}$:

$$||L_Z\tau_{z_j}||_\Lambda^2 = \int_{c_j-1}^{c_{j+1}+1} d\mu|\partial_x^2\tau_{z_j} + V'(u_Z)\tau_{z_j}|^2$$

$$\leq C\int_{z_j-1}^{z_j+1} dx|\partial_x^2\tau_{z_j} + V'(u_Z)\tau_{z_j}|^2$$
$$\leq (C\sup|\mathcal{L}(u_Z)|)^2,$$

Uz prethodnu lemu, tvrdnja slijedi. □

Korolar 3.5.3. *Neka je* $g_1^2(Z) = \sum_{|j|\leq D_\tau} |\langle \mathcal{L}(u_Z), \tau_{z_j}\rangle_\Lambda|$ *i*
$g_2(Z) = \sup\left\{\frac{\|L_Z\tau\|_\Lambda}{\|\tau\|\Lambda} : \tau \in span\{\tau_{z_j} : |j| \leq D_\tau\} \setminus \{0\}\right\}$. *Tada uz pretpostavku prethodne leme, postoji* $K_1 > 0, K_2 > 0$ *takav da:*

$$\|g_1(Z)| \leq K_1 e^{-c_1|Z|}\,, \quad \|g_2(Z)| \leq K_2 e^{-c_2|Z|}.$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz nejednadžbe $1 - A(P) \leq c_2 e^{-c_1 P}$. A druga iz sljedećih rezultata.
Neka je $\tau \equiv \sum_{|j|\leq D_\tau} t_j \tau_{z_j}$. Tada

$$\|L_Z\tau\|_\Lambda \leq \sum |t_j| \|L_Z\tau_{z_j}\|_\Lambda \leq \sum |t_j \sup \|L_Z\tau_{z_j}\|_\Lambda,$$
$$\|\tau\|_\lambda \geq \inf \|\tau_{z_j}\|_\Lambda \sum |t_j|.$$

Primijetimo da je $\tau_{z_j}(x)$ pozitivan na $[c_j + 1, c_{j+1} - 1]$. Sada primjenimo prethodnu Lemu i tvrdnja je dokazana. □

Lema 3.5.4. *Za dovoljno malen* $\mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$*, za* $v \in \mathcal{T}_{\Gamma,\sigma}$ *i za* $N < \infty$ *matrice :*

$$\tilde{\mathcal{S}} = \left(\tilde{\mathcal{S}}_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,N} = \left(\langle \partial_{z_j} u_Z, \tau_{z_i}\rangle_\Lambda - \langle v - u_Z, \partial_{z_j}\tau_{z_i}\rangle_\Lambda\right)_{i,j=1,\dots,N},$$
$$\mathcal{S}_1 = \left((\mathcal{S}_1)_{ij}\right)_{i,j=1,\dots N} = \left(\langle \partial_{z_j} u_Z, \tau_{z_i}\rangle_\Lambda\right)_{i,j=1,\dots,N},$$

imaju uniformno ograničen inverz.

Dokaz. Počet ćemo sa napomenom: Prema pretpostavci o V, imamo $\pi < P_0 < \Gamma$, vektori tangente τ_{z_j} i $\tau_{z_{j+2}}$ imaju disjunkti nosač. Stoga, matrica $\tilde{\mathcal{S}}$ je trodijagonalna i moramo kontrolirati preklapanje između τ_{z_j} i $\tau_{z_{j\pm1}}$.
Da bismo pokazali da je $\tilde{\mathcal{S}}$ invertibilna, trebamo pokazati da je dijagonalno dominanta, tj.

$$|\tilde{\mathcal{S}}_{ii}| > \sum_{j\neq i} |\tilde{\mathcal{S}}_{ij}|.$$

1) članovi na dijagonali je $\tilde{\mathcal{S}}_{ii} = \langle \partial_{z_i} u_Z, \tau_{z_i}\rangle_\Lambda - \langle w, \partial_{z_i}\tau_{z_i}\rangle_\Lambda$. Prvi član je uniformno ograničen. To je posljedica od :

$$|\langle \partial_{z_i}\varphi_{\ell_i}, \Delta_i \partial_x \varphi_{\ell_i}\rangle_\Lambda| \approx |\langle \partial_{z_i}\psi(\cdot - z_i), \partial_x\psi(\cdot - z_i)\rangle_\Lambda| = \|\partial_x\psi\|_\Lambda^2 > K.$$

Sljedeći član je $\tilde{\mathcal{S}}_{ii}$ je $O(\sigma)$, dakle za dovoljno mali $\mathcal{L}_{\Gamma,\sigma}$ cijeli je izraz ograničen odozdo.
2) Sada provjeravamo članove izvan dijagonale

$$\tilde{\mathcal{S}}_{ij} = \langle \partial_{z_j} u_Z, \tau_{z_i}\rangle_\Lambda - \langle w, \partial_{z_i}\tau_{z_j}\rangle_\Lambda.$$

Prvi član je ograničen konstantom koja ide u nulu kada Γ ide u beskonačnost. Drugi član se tretira kao i prije.
3)dokaz za $\mathcal{S}_\infty$ je poseban slučaj 1) i 2)

$\square$

Napomena 3.5.5. *Za dovoljno malen ε, matrica $\mathcal{S}$ definirana sa* (13) *također je invertibilna.*

Bibliografija

[1] Dan Henry, Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Springer-verlag, 1981.

[2] Coarsening by Ginzburg-Landau Dynamics, Eckmann,J.-P.,Rougemont, J., Communications in mathematical physics, Springer, 1998

[3] Carr,J.,Pego, R.L., Metastable Patterns in Solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f)$. Comm. Pure. Appl. Math., 1990.

[4] Spencer, T., The Schrodinger Equation with a Random Potential. In Critical Phenomena, Random Fields,Gauge Theories,1984.

[5] A.Carvalho, J. A. Langa, J. Robinson, Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems,2012.

Sažetak

U ovom smo radu proučavali Allen-Cahnovu jednadžbu, egzistenciju i jedinstvenost njezina rješenja te primjenu.
Na početku rada obrađeni su osnovni pojmovi i rezultati koji će se koristiti u nastavku. Definiran je sektorski operator i razlomačke potencije,iskazan teorem o kontrakciji te Gronwallovu nejdnakost.
U drugom poglavlju smo se bavili paraboličkim diferencijalnim jednadžbama. Dana je bitna teorija egzistencije i jedinstvenosti rješenja tih jednadžbi, čije smo rezultate primjenili na Allen-Cahnovoj jednadžbi.
U zadnjem poglavlju opisana je primjena Allen-Cahnove jednadžbe. Proučavali smo bitnu fizikalnu pojavu 'okrupnjavanja'.

Summary

In this diploma thesis we present Allen-Cahn equation, nonlinear partial differential equation.
At the beginning of this paper, we give the basic definitions and notation used throughout the paper. We define sectorial operators and fractional powers, introduce Gronwall's inequality and contraction mapping theorem.
In the Chapter 2 we study the initial-value problem for parabolic partial differential equations. We present theory about uniqueness and existence of the solution and that results apply to the Allen-Cahn equation.
In the last Chapter we describe the application of Allen-Cahn equation. We present the physical phenomenon 'coarsening'.

Životopis

Rođena sam 02.lipnja 1990. godine u Zagrebu. Nakon završene osnovne škole upisala sam 'X.gimnaziju-Ivan Supek'. Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisala sam 2009.godine. Nakon završenog preddiplomskog studija i stjecanja titule sveučilišne prvostupnice (baccalaureus) matematike, upisala sam Diplomski sveučilišni studij Primijenjene matematike na istom fakultetu.