Ekonofizika-vrijede li fizički zakoni u svijetu financija

Gegić, Irena

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Irena Gegić

EKONOFIZIKA - VRIJEDE LI FIZIČKI ZAKONI U SVIJETU FINANCIJA?

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

Irena Gegić

Diplomski rad

Ekonofizika – vrijede li fizički zakoni u svijetu financija?

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Željko Skoko

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ______________________

Zagreb, 2017.

Zahvala

Zahvaljujem se svome mentoru doc. dr. sc. Željku Skoku na pomoći pri izradi ovog diplomskog rada i strpljenju za moje upite.

Zahvaljujem svojoj obitelji koja me podržavala tijekom studija i upućivala me na pravi put.

Posebnu zahvalnost iskazujem svojem mužu i roditeljima koji su uvijek bili TU, uz mene, bez obzira da li se radilo o teškim ili sretnim trenucima i bez kojih sve ovo što sam dosad postigla ne bi bilo moguće.

Hvala!!!

Sažetak

Rad započinje osnovnim pojmovima vezanim uz poslovanje vrijednosnim papirama na financijskom tržištu te mogućem riziku koji ih prati, s namjerom upoznavanja potrebnim terminima kao i glavnim problemom koji ćemo razmatrati. Zatim diskutiramo Brownovo gibanje za koje nam je potrebano razmatranje It$\hat{o}$ stohastičkih metoda. U svrhu određivanja cijena financijskih derivata upoznajemo Black – Scholes model i ostale modele poput martingali. Povezujemo efikasnost tržišta i tržišta bez arbitraže kroz modele „Simetrija efikasnosti“ i „ zakon sačuvanja“. Nakon upoznavanja sa efikasnim tržištem, uvodimo dva načina odstupanja od standardnog Black – Scholesovog modela gdje promatramo raspodjele koje se razlikuju od Gaussove te uvodimo odgovarajuće popravke za realna tržišta.

Econophysics – are the physics laws valid in the world of finance?

Abstract

The present diploma thesis starts with some basic notions of finance markets and possible risk that goes with it, intended to introduce the terminology as well as the main problem. Further more, I discuss the Brownian motion for which we then develop It$\hat{o}$ stochastic calculus. For pricing financial derivatives we need Black – Scholes model and other approaches as martingale. I associate the market efficiency and no- arbitrage with “symmetry principle” and “conservation law”. After getting to know efficiency of markets I discuss two possible ways of deviation from the standard Black – Scholes model considering non – Gaussian distributions with suitable corrections for real markets.

Sadržaj

1. Uvod

U radu ćemo se upoznati s osnovama ekonofizike, te izvršiti provjeru primjenjivosti fizikalnih modela u financijama. Cilj je osigurati kratko upoznavanje osnova financijskog tržišta, upoznati osnovne modele procjenjivanja financijskih derivata i diskutirati o problemima u financijama kojima su fizičari, svojim doprinosom, pomogli tijekom prošlog stoljeća. Najnoviji radovi fizičara obuhvaćaju pronalazak prikladnih modela za područje koje Standardni model financija ne opisuje, poput realnih tržišta i u radu ćemo se ograničiti na modele potrebne za određivanje cijena derivata.

2. Financijska tržišta [1]

U svrhu stvaranja zarade, zainteresirani korisnici posredstvom brokera trguju vrijednosnim papirima. Vrijednosni papiri, poput dionica, obveznica ili derivata, se kupuju te moguću zaradu donose na temelju dividenda i kamata ili njihovom prodajom. Uz poslovanje vrijednosnim papirima dolazi određena količina rizika, uz mogućnost njegove procjene te uklanjanja.

2.1. Dionice

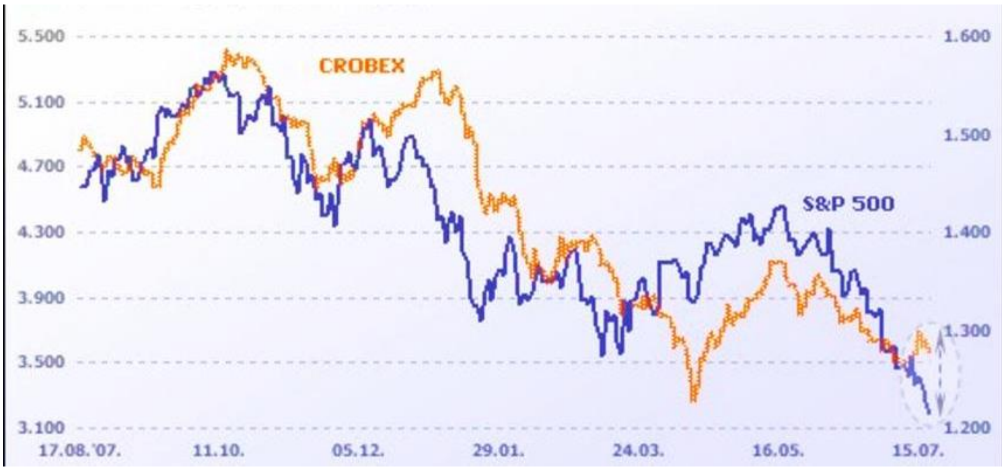
Dionice predstavljaju udio u vlasništvu poduzeća. Prilikom posjedovanja određenih dionica, dioničar ima određena prava poput glasanja na sastancima dioničara. Jakost glas dioničara ovisi o količini dionica koje vlasnik posjeduje. Vlasnici dionica također ostvaruju moguću zaradu nakon što ju poduzeće ostvari i odluči ju isplatiti u obliku dividende vlasnicima dionica. Visina iznosa dividende ovisi o broju dionica koje dioničar posjeduje.

Kompanije izdaju dionice s ciljem ostvarivanja radnog kapitala za daljnji razvoj. Ovaj postupak je bolji od posuđivanja od banke u obliku kredita jer se ostvaruje čisti profit bez dodatnih kamata. Izdavanjem dionica gubi se dotadašnji udio u vlasništvu.

Najpoznatije mjesto trgovanja dionicama je *New York Stock Exchange* koje se nalazi u SAD-u. Kao pokazatelj ponašanja tržišta dionica, poput NYSE, koristi se *Dow Jones Industrial Average index* temeljen na prosječnim cijenama dionica oko 30 kompanija. U Hrvatskoj se prati indeks Zagrebačke burze, *CROBEX*. Indeksi tržišta dionica daju informacije ulagačima o očekivanim tržišnim kretanjima čitavog tržišta. Još neki od poznatih indexa su Standard and Poor's 500 indeks i NASDAQ indeks.

Cijena dionica ovisi o omjeru vrijednosti kompanije i broju izdanih dionica. Tako primjerice za kompaniju, čija je vrijednost 2 000 000€ a broj izdanih dionica je 100 000, vrijednost jedne dionice iznosi 20.00 €. Isto tako ona se mijenja ovisno o njihovoj ponudi i potražnji. Ako je u vremenu t, broj ljudi koji kupuju određene dionice veći od broja ljudi koji ih prodaju, cijena dionice se povećava. U obrnutom slučaju, cijena se smanjuje.

Vrijednost kompanije, osim što se odnosi na trenutno ekonomsko stanje, ovisi i o budućem poslovanju kompanije. Cijena dionice određuje se prema "predviđanju" budućnosti na temelju sadašnjih informacija. Ako posjedujemo informaciju za koju postoji mogućnost da utječe na buduće stanje kompanije, cijena dionice se mijenja ovisno o tome. To nam pokazuje kako se cijena dionica može mijenjati kao funkcija vremena. Prikaz promjene cijena dionica kao funkcije vremena nalazi se na sl. 1 u slučaju Crobex i S&P 500 indeksa.



Slika 1. Prikaz vrijednosti Crobex i S&P 500 indexa u vremenskom razdoblju [preuzeto iz ezadar-zadarski internetski portal]

Iako se cijena dionica mijenja u vremenu, koristeći prikladne modele, možemo opisati te fluktuacije u vremenu kako bi predvidjeli cijenu dionica. Ako cijenu dionica označimo sa S, cijena dionica nakon vremena t rast će u skladu sa:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = [\mu + \varepsilon(t)] \cdot \tag{1}$$

gdje μ predstavlja očekivanu stopu povrata, dok $\varepsilon(t)$ označava fluktuirajući dio cijena.

2.2. *Derivati*

Primjer derivata koje ćemo promatrati u radu su opcije. Opcijama, kao i dionicama, ulagači trguju na financijskim tržištima. Najpoznatije tržište za opcije nalazi se u Chicagu CBOE, engl. Chicago Bord Options Exchange. Osobe prisutne pri trgovanju opcijama su prodavatelj (izdavatelj opcije) i kupac (vlasnik opcije).

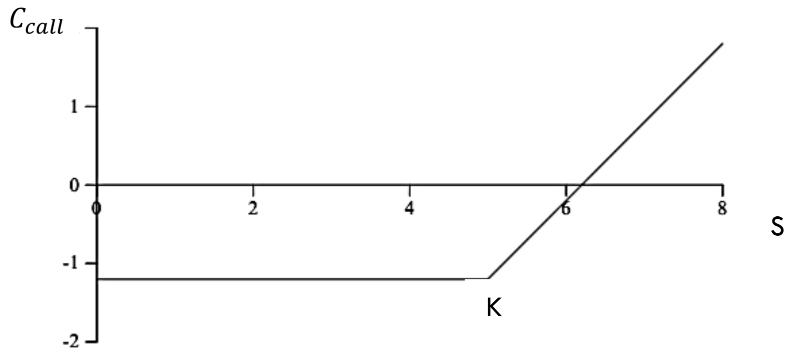
Opcija je ugovor koji daje vlasniku pravo ali ne i obvezu, da kupi ili proda određenu imovinu (dionicu) po unaprijed određenom iznosu (izvršna cijena) i tijekom propisanog vremena. Ovisno o vremenu koje je određeno, razlikujemo američku i europsku opciju. Američka daje pravo vlasniku upotrebu opcije do datuma prispijeća dok europsku, vlasnik može iskoristiti na dan prispijeća.

Razlikujemo *opciju poziva (eng. call option) i ponude(eng. put option).*

Opcija poziva daje kupcu pravo da *kupi* određenu imovinu od prodavatelja opcije uz unaprijed dogovoreni iznos tijekom određenog vremena. Prilikom izdavanja opcije kupac plaća prodavatelju premiju. Ako na datum dospijeća imovina vrijedi više od dogovorenog iznosa, tada kupac kupuje imovinu (dionicu) po dogovorenoj cijeni i odmah je prodaje po sadašnjoj vrijednost čime ostvaruje dobit. Vlasnik nije obvezan kupiti imovinu i to neće učiniti ako na datum dospijeća imovina vrijedi manje od dogovorene cijene jer time bi bio u gubitku većem od iznosa premije. Mogući gubitak je iznos premije a dobitak temeljen na opciji poziva nije ograničen već raste kao linearna funkcija cijene imovine. Prikaz jednog takvog rasta nalazi se na sl. 2. Na slici se opaža da ne postoji ograničenje rasta profita opcije poziva kao i to da profit može biti negativan. Takav slučaj odnosi se kada je profit jednak gubitku premije ukoliko vlasnik opcije ne realizira istu. (gubitak = negativan predznak).

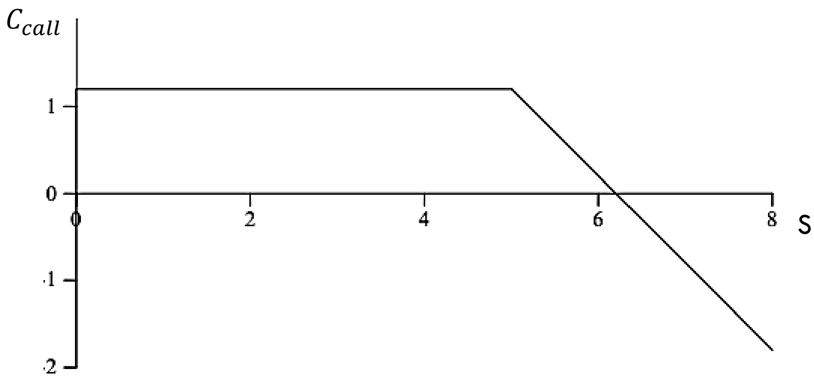
Nakon kupnje opcije poziva za premiju C_0 s izvršnom cijenom K tijekom određenog vremena t cijena dionice je S te profit C_{call} koji možemo ostvariti je:

$$C_{call} = (S - K) - C_0 \tag{2}$$



Slika 2 – Mogući rastući profit kupnjom opcije poziva.

U slučaju prodaje opcije poziva, prodavatelj nakon izdavanja opcije prima iznos premije ali tijekom vremena t mora biti spreman prodati imovinu za dogovoreni iznos. Tada je profit koji ostvaruje prodavatelj jednak negativnom profitu koji ostvaruje kupac realizacijom opcije. Nalazimo se u obrnutoj situaciji, sada je ograničen profit a gubitak raste linearno, što se vidi i na slici 3.



Slika 3 – Mogući padajući profit prodajom opcije poziva.

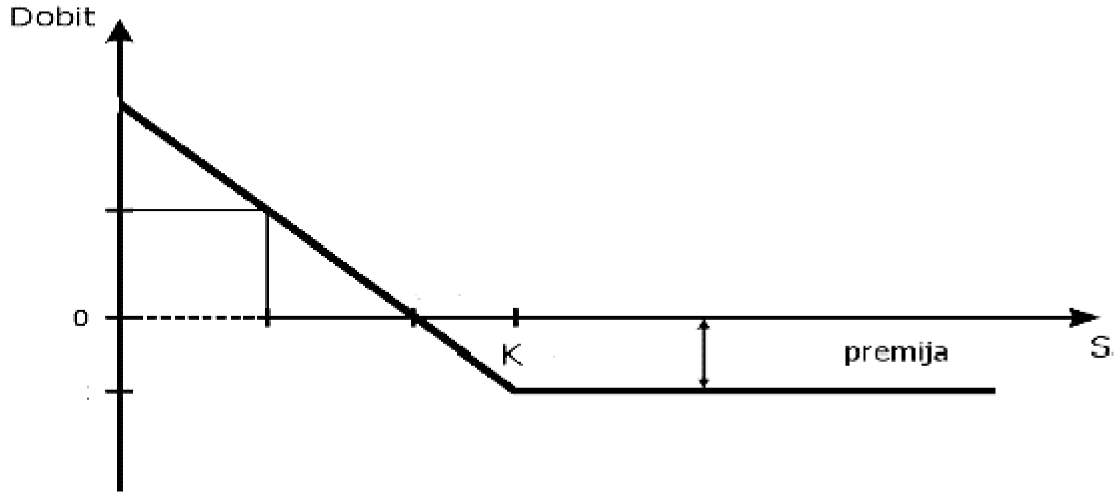
$$profit\ (prodaja\ opcije\ poziva) = -profit\ (kupnja\ opcije\ poziva)$$

Kupnjom *opcije ponude*, vlasnik ima pravo ali ne i obvezu *prodaje* imovine prodavatelju opcije za dogovoreni iznos. I u ovom slučaju kupac plaća prodavatelju iznos premije te na datum dospijeća, imovina će imati tržišnu vrijednost. Ako tada tržišna vrijednost bude veća od izvršne cijene, kupac opcije ponude nije obvezan prodati imovinu, jer je u slučaju realizacije opcije, kupac u gubitku.

Ako tržišna vrijednost bude manja od izvršne i kupac iskoristi put opciju te proda imovinu za dogovoreni iznos, mogući je dobitak. Dobitak ovisi i o visini iznosa premije. Ukoliko je razlika između tržišne i izvršne cijene veća od iznosa premije tada kupac opcije ponude može reći da je ostvario profit. Izraz prema kojem profit raste je:

$$P_{put} = (K - S) - C_0 \tag{3}$$

Funkcija profita ostvarenog opcijom ponude prikazana je na sl. 4.



Slika 4. Graf ostvarenog profita opcijom ponude.

Prodajom opcije ponude prodavatelj ima obvezu prodati imovinu kupcu opcije za izvršnu cijenu. Prodavatelj ostvaruje profit ukoliko tržišna vrijednost prelazi vrijednost izvršne cijene a trpi gubitak ukoliko je obrnuto. Slično kao i kod opcije poziva, profit zarađen prodajom opcije ponude je negativan profitu kupnje opcije ponude.

$$profit\ (prodaja\ opcije\ ponude) = -profit\ (kupnja\ opcije\ ponude)$$

Vidimo da je gubitak zapravo jednak iznosu premije u slučaju opcija ponude i opcija poziva. Zbog toga je bitno kako odrediti iznos premije. Način određivanja visine iznosa premije propisan je Black-Scholes modelom. Model ćemo detaljno upoznati u nastavku rada.

2.3. *Obveznice*

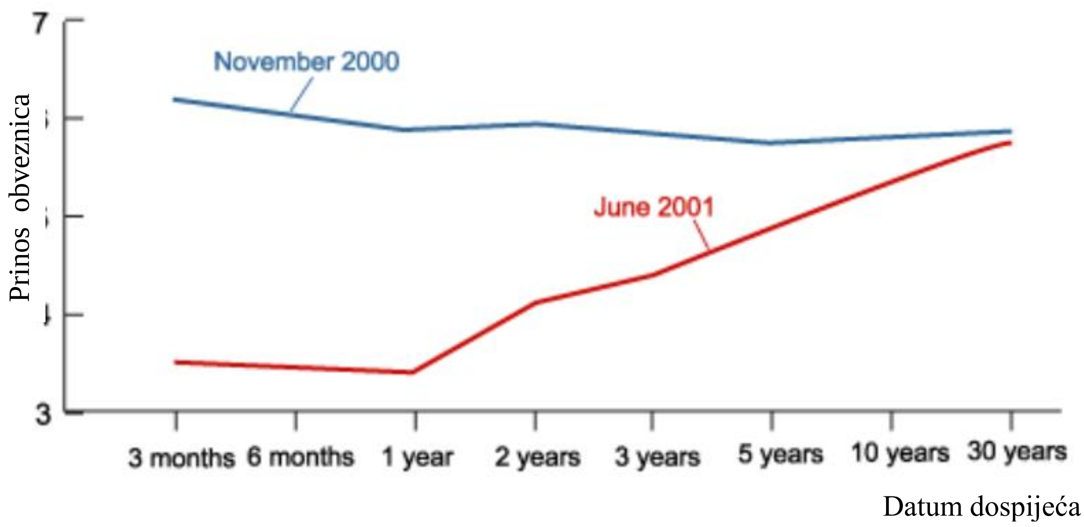
U svrhu stvaranja većeg kapitala, tvrtke, poduzeća čak i države mogu izdati dužničke vrijednosne papire nazvane obveznice. Obveznica je dokument kojim se izdavatelj obvezuje na isplatu vlasniku obveznice nominalnu vrijednost (vrijednost obveznice) zbrojenu s kamatama u određenom vremenu. Kamatna stopa određena je u obveznici isto kao i određeno vrijeme.

Vrijeme dospijeća može se razlikovati, te je mogući izbor između isplate u određenim vremenskim periodima i isplate na datum dospijeća. Ovisno o vremenu dospijeća razlikujemo dvije vrste obveznica; dugoročne i kratkoročne. One s rokom dospijeća od 10-30 godina nazivamo dugoročne, a ostale nazivamo kratkoročne.

Kako bi bili sigurni u sposobnost poduzeća čiju obveznicu kupujemo, posebne stručne agencije poput Standard and Poor′s, ocjenjuju njihovu sposobnost. Izdavatelj obveznica može imati najbolju ocjenu AAA ili najgoru D.

Ovisno o izdavatelju, obveznice dijelimo na korporacijske ili državne.

Za određeni vremenski period možemo grafički prikazati ovisnost prinosa obveznica o datumu dospijeća. Dobivena krivulja naziva se *krivulja prinosa*. Takav prikaz nalazi se na sl. 5 koja se odnosi na obveznice SAD-a.



Slika 5 – Krivulja prinosa [18]

Iz sl. 5 vidimo da krivulja prinosa većinom ima pozitivni nagib, te da dvije krivulje kreću u isto vrijeme sa različitim dospijećem.

Kada su kratkoročne kamatne stope znatno niže od dugoročnih, krivulja prinosa je pozitivnog nagiba, a kad su kratkoročne kamatne stope znatno više od dugoročnih ona ima negativan nagib.

2.4. *Rizik*

Tamo gdje postoji mogućnost velikog profita, postoji i veliki rizik. Rizik je znatno veći kod dionica nego kod drugih ulaganja, tj kupnje vrijednosnih papira. Njihova cijena, kao što smo vidjeli u prethodnom dijelu, podliježe nepredvidivim fluktuacijama, čime to predstavlja jako rizično ulaganje.

Ulaganje u obveznice je manje riskantno od dionica. Ukoliko se poduzeće koje je izdalo obveznicu, povlači iz posla, poduzeće koje ga preuzima će isplatiti vlasnike obveznica. U slučaju bankrota tvrtke ne postoji garancija isplaćivanja prihoda po datumu dospijeća, te u tom slučaju vlasnik obveznica trpi gubitak.

Ulaganje, bez rizika, putem vrijednosnih papira ne postoji. Koliko god malen rizik bio on i dalje postoji. Primjer ulaganja s profitom, bez rizika je štednja putem bankovnog računa. Uloženi iznos isplaćuje se s kamatama nakon dogovorenog vremena.

Investitori pri odabiru ulaganja u određenu investiciju žele što manji rizik. Zato se koriste određeni pristupi za analizu rizika i njegovu minimalizaciju. Neki od njih su standardna devijacija (varijanca) prinosa i vjerojatnost velikog rizika (eng. *value at risk*). Najpoznatiji model za opis rizika je *Markowitzov model portfelja.* Portfelj predstavlja skup svih vrijednosnih papira koje ulagač posjeduje.

Očekivani prinos portfelja vrijednosnica dobiva se prosjekom očekivanog prinosa pojedinih vrijednosnica portfelja. Ako se u portfelju nalazi *n* vrijednosnica tada za očekivani prinos vrijedi:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) \tag{4}$$

gdje je $E(R_p)$ očekivani prinos portfelja, w_i udio ulaganja *i* u portfelju, R_i mogući prinosi ulaganja *i* te $E(R_i)$ očekivani prinos ulaganja *i*.

Očekivani prinos pojedine vrijednosnice dobivamo kao aritmetičku sredinu prethodnih vrijednosti za uočenih N podataka:

$$E(R_i) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} R_{i,t} \tag{5}$$

gdje $R_{i,t}$ označava vrijednost vrijednosnice u određenom vremenu t.

Za opisani portfelj, rizičnost je dana sa:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i,j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}^2 \tag{6}$$

gdje σ_{ij}^2 predstavlja kvadrat varijance između prinosa vrijednosnica.

Rizičnost, odnosno standardna devijacija, dobiva se korjenovanjem kvadrata varijance.

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} \tag{7}$$

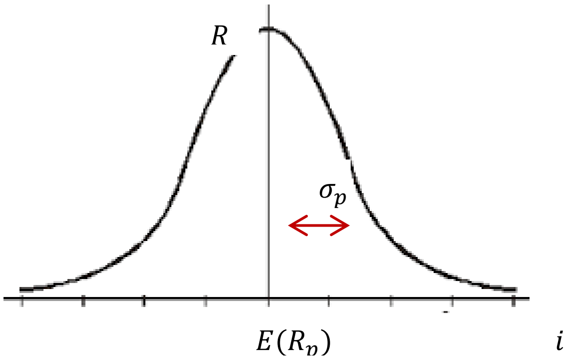
Također, za pojedinu vrijednosnicu mogući je izračun rizičnosti na dani način:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} \left[R_{i,t} - E(R_i)\right]^2 \tag{8}$$

Odnosno, ona je jednaka aritmetičkoj sredinu kvadrata razlike stvarne vrijednosti pojedine vrijednosnice u vremenu t i očekivane vrijednosti iste.

S obzirom da su očekivani prinosi slučajne varijable, raspodjela prinosa slijedi Gaussovu raspodjelu.

Rizičnost, odnosno varijanca, predstavlja odstupanje od očekivanje vrijednosti kao što je prikazano na raspodjeli sa sl. 6.



Slika 6 – Raspodjela očekivanih prinosa

3. Određivanje cijena premije opcija

3.1. *Arbitraža*

Investitore u derivate možemo podijeliti prema načinu ulaganja na špekulante, arbitražere i živičare.

Živičari *(eng. hegders)* koriste derivate kako bi se ogradili od rizika s kojim su suočeni u vlastitom portfelju. Ako, npr. posjeduju dionicu čija bi cijena mogla pasti unutar nekoliko mjeseci, imaju dvije mogućnosti kako bi smanjili rizik. Jedna od mogućnosti je prodaja dionice te novac od prodaje ulažu na bankovni račun pri čemu dobivaju kamate na glavnicu. Loša strana je mogućnost porasta cijene dionice, te u tom slučaju neće ostvariti očekivani profit. Druga mogućnost, koja je bolja strategija, je kupnja opcije ponude na dionicu. Time su omogućili prodaju dionice u slučaju pada cijene ispod određene cijene, kao i zadržavanje dionice u slučaju rasta cijene. Strategija takve vrste pruža određenu vrstu osiguranja, te cijena osiguranja iznosi u visini premije opcije ponude.

Špekulanti, za razliku od živičara, svoj profit ostvaruju riskiranjem. Oni kupuju ili prodaju dionice u nadi da će ih prodati po većoj cijeni ili kupiti po manjoj i tako ostvariti profit.

Arbitražeri svoj profit žele ostvariti bez rizika upotrebom simulacijskih transakcija na različitim tržištima bez početne obveze novcem. Sposobnost ostvarivanja bezrizičnog profita, bez početnog ulaganja naziva se *arbitraža*.

Prije proučavanja arbitraže u detalje, važno je definirati pojam *prodavati sa kratkoročnom pozicijom (short sell*), što znači prodavati imovinu koju nemate. Npr. ako zadamo našem brokeru "to short" dionicu, tada će on posuditi dionicu s tuđeg računa te ju prodati na tržištu i profit proslijediti na naš račun. Nakon odluke zatvaranja kratkoročne pozicije, broker s novcem koji se nalazi na našem računu, kupuju dionicu koju smo uzeli na tržištu te vraća prvobitnom vlasniku. Ukoliko se cijena dionice smanji, kratkoročnom pozicijom se ostvario profit te u protivnom se nalazi u gubitku. Suprotno pojmu prodavanja s kratkoročnom pozicijom je *kupovati s dugoročnom pozicijom*.

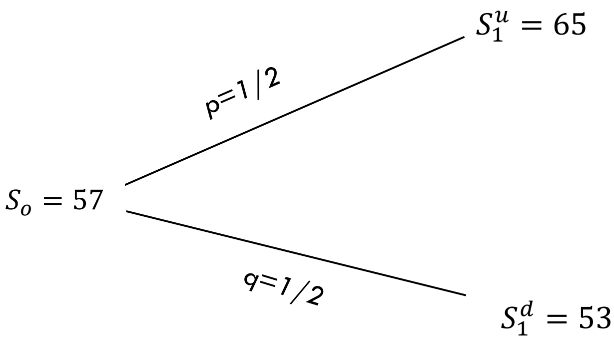
Primjer arbitraže

Veliki broj hrvatskih kompanija trguju dionicama na burzi u New Yorku u obliku American Depository Receipt (ADR), kao i na zagrebačkoj burzi. Neka je cijena dionice u Zagrebu 200 kn a u New Yorku 31 USD (uz tečaj 1 USD = 6.20 kn). Arbitražer bi tako mogao prodati *N* dionica u Zagrebu i dobiveni profit iskoristiti za kupovinu *N* dionica u New Yorku (i nakon toga ih ponovo prebaciti u zagrebačku burzu). Ukupna zarada u tom slučaju bi bila HRK $(200 - 31 \times 6.2)N =$ HRK 7.8 N. (U praksi, cijena transakcije bi eliminirala sav profit za sve investitore osim velikih institucija).

Zabluda o cijeni ne traje dugo. Kupnjom na NYSE prisilit će ADR cijenu da se povisi dok će prodaja na Zagrebačkoj burzi imati suprotan efekt na cijenu dionica tako da se ravnotežna cijena i za ADR i dionicu uskoro uspostavlja gdje arbitraža više nije moguća. Zbog velike populacije koja teži zaradi na opisani način, tržište bi trebalo biti bez arbitraže. To je glavna ideja na kojoj se temelji princip efikasnog tržišta, gdje nema arbitraže.

3.2. Princip tržišta bez arbitraže

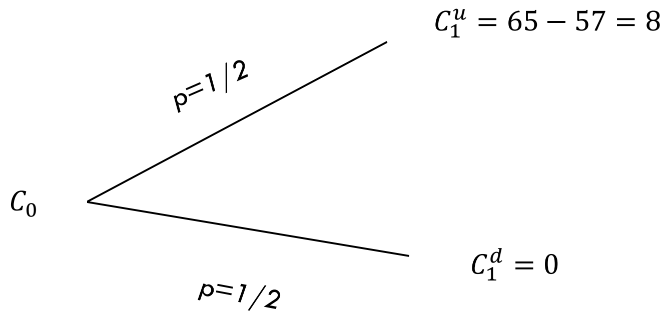
Kako bi prikazali navedeni princip, tržišta bez arbitraže, koristit ćemo binomni jednokračni model pri procjenjivanju cijene derivata. Pretpostavimo da današnja cijena Petrobras dionice iznosi $S_o = 57$ BRL te nakon vremenskog perioda od mjesec dana, cijena te ista dionica može porasti i iznositi $S_1^u = 65$ sa vjerojatnošću p ili će joj cijena pasti na $S_1^d = 53$ sa vjerojatnošću q. Vjerojatnost porasta i pada cijene je jednaka (radi jednostavnosti) i iznosi *p*=*q*= ½. Binomni model koji primjenjujemo prikazan je na sl. 7.



Slika 7- Binomni model za cijenu dionica

U ovom slučaju povratna stopa μ dana je sa $(1+\mu)S_o = E[S_1]$, gdje je $E[S_1]$ očekivana vrijednost od S. Koristeći navedene vrijednosti na sl. 7, za povratnu stopu dobivamo $\mu = 0.035$, tj. 3.5%. Pretpostavimo bezrizičnu kamatnu stopa $r = 0.6\%$ mjesečno.

Recimo da posjedujemo call opciju na dionicu PETR3 sa izvršnom cijenom *K=57* i vremenom dospijeća *T=1.* Uvrštavanjem u (2) i pomoću sl. 7 dobivamo moguće iznose profita opcije za postavljeni binomni model na slici 7. Prikaz profita opcija nalazi se na sl. 8. i iznosi $C_1^u = 8$ ili $C_1^d = 0$ sa istom vjerojatnošću.



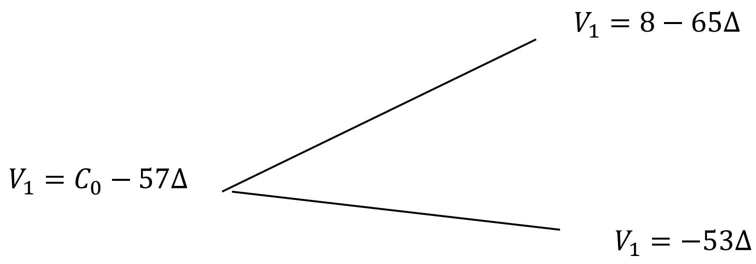
Slika 8 – Vrijednost opcija u binomnom modelu.

Koristeći binomni model možemo odrediti i prikazati profit ostvaren pomoću opcija. Ono što nas zanima je kako odrediti iznos C_0, tj iznos premije koju plaćamo za opciju.

Prvo je potrebno opisati argument delta zaštite (eng. *delta-hedging*). Pretpostavimo portfelj koji se sastoji od opcije C i kratkoročne pozicije na Δ dionice, V_t je vrijednost portfelja u određenom vremenu *t* i treba odrediti Δ. Za takav portfelj vrijedi:

$$V_t = C_t - \Delta S_t$$

gdje minus označava da se radi o kratkoročnoj prodaji Δ dionica. Iz slika 7 i 8 možemo vidjeti moguće vrijednosti portfelja u našem modelu čiji se iznosi nalaze na sl. 9.



Slika 10 - "delta-hedging" portfelj prikazan binomnim modelom

Kako bi vrijednosti portfelja odgovarale vrijednostima V_1, u oba slučaja prikazana binomnim modelom, potrebno je odabrati odgovarajući Δ. Prema sl. 10 dobivamo:

$$V_1^u = V_1^d = 8 - \Delta \cdot 65 = -\Delta \cdot 53$$

Iz čega slijedi:

$$\Delta = \frac{2}{3}$$

Odabirom $\Delta = \frac{2}{3}$ potpuno smo eliminirali rizik iz portfelja, jer u oba slučaja vrijednost portfelja je jednaka. S obzirom da je portfelj bez rizika, njegova stopa povrata mora biti jednaka bezrizičnoj kamatnoj stopi *r*, jer bi inače postojala mogućnost arbitraže.

Označimo stopu povrata portfelja sa r',odnosno r' predstavlja rješenje izraza:

$$(1 + r')V_0 = V_1 \tag{9}$$

U slučaju $r' < r$, arbitražer bi trebao zauzeti dugoročnu poziciju (kupnju) na opciju i kratkoročnu poziciju na Δ dionica. U ovom slučaju imamo arbitražu. U vremenskom periodu $t = 0$ protok novca bi bio $B_0 = |V_0| = \Delta \cdot S_0 - C_0$, koji bi arbitražer trebao staviti u banku kako bi u sljedećem vremenu imao $B_1 = (1 + r)|V_0|$. U vremenu $t = 1$ on bi trebao završiti svoju kratkoročnu poziciju na Δ dionica ili izvršiti opciju ili kupiti Δ dionica direktno sa tržišta. U oba slučaja iznos koji arbitražer treba platiti je $|V_1| = (1 + r')|V_0| < B_1$ i profit koji će ostvariti je $B_1 - |V_0|$.

U slučaju $r' > r$, arbitražer treba zauzeti suprotnu poziciju. Kratkoročna pozicija na opcije (kao prodavatelj) i dugoročno na Δ dionica (posuđujući novac od banke).

Kako bi izbjegli mogućnost arbitraže mora vrijediti $r' = r$. Za tržište oslobođeno arbitraže svaki portfelj smanjenog rizika mora odgovarati bezrizičnoj kamatnoj stopi. Ovakav princip je temelj teorije procjenjivanja derivata.

Pretpostavimo da vrijedi $r' = r$ u (10) i zamijenimo vrijednosti V_0 i V_1 onima danim na slici 10, te dobivamo:

$$(1 + r)[C_0 - \Delta S_0] = -\Delta S_1^d \tag{10}$$

Koristeći vrijednosti *r=0.006*, S_0=57, $S_1^d = 53$ i $\Delta= \frac{2}{3}$ dobivamo cijenu premije opcija

$$C_0 = 2.88. \tag{11}$$

Poželjno je odrediti cijenu premije opcije koristeći drugu metodu, tzv. sistem martingali ili "risk neutral" procjena. Iz sl. 9, očekivana vrijednost opcije na datum dospijeća je :

$E[C_1] = \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 4$. Pretpostavljeni izračun cijene premije bi bio omjer očekivane vrijednosti opcije u određeno vrijeme i bezrizične kamatne stope

$$C_0' = \frac{E[C_1]}{1 + r} = 3.98. \tag{12}$$

Vidimo da se dobivena cijena opcije C_0' razlikuje od C_0. Pogreška u računu nalazi se pri korištenju bez rizične kamatne stope pri umanjivanju očekivane vrijednosti opcija, a pri izračunu očekivane vrijednosti $E[C_1]$ smo uključili dionice povratne stope μ. Posljedica je progrešna vijednost premije opcija koja vodi mogućnosti postojanja arbitraže.

U svrhu izbjegavanja arbitraže, pronalazimo fiktivne vjerojatnosti q_u i q_d ,te vrijedi $q_u + q_d = 1$, takve da očekivani profit ostvaren od dionica izračunat preko novih vjerojatnosti mora biti jednak bez rizičnoj kamatnoj stopi r, tj:

$$S_0(1 + r) = E^Q[S_1] \equiv q_u \cdot S_1^u + q_d \cdot S_1^d \tag{13}$$

gdje $E^Q[x]$ označava očekivanu vrijednost s obzirom na nove vjerojatnosti $q_u \ i \ q_d$. Korištenjem iznosa za $S_1^u \ i \ S_1^d$ sa slike 8 dobivamo:

$$q_u = 0.3618 \quad , \quad q_d = 0.6382$$

Sa navedenim vjerojatnostima, očekivana vrijednost $E^Q[C_1]$ opcije na datum dospijeća postaje $E^Q[C_1] = 0.3618 \cdot 8 + 0.6382 \cdot 0$, iz koje slijedi

$$C_0 = \frac{E^Q[C_1]}{1 + r} = \frac{2.894}{1.006} = 2.88$$

gdje dobivamo isti iznos kao i za delta zaštite model.

Za svu financijsku imovinu, koja se nalazi unutar intervala fiktivne vjerojatnosti $q_u \ i \ q_d$, binomni model donosi istu bezrizičnu stopu r. Vjerojatnosti koje posjeduju svojstvo transformacije rizičnih ulaganja u naizgled bezrizične, nazivaju se *ekvivalentne martingalne mjere*. Martigalne mjere su ključne u financijama te ćemo ih detaljnije obraditi kasnije u radu.

3.3. Ponuda – poziv paritet

U prijašnjem poglavlju obrađeno je procjenjivanje opcije poziva, te nam sada preostaje proučiti postupak za opciju ponude. Cijena premije opcije poziva koristi se za određivanje cijene premije opcije ponude, pri čemu se koristi poznata cijena premije za jednu od opcija te se pomoću nje određuje cijena premije druge opcije.

Pretpostavljamo portfelj u kojem kupujemo jednu dionicu *S* i jednu opciju ponude *P* na tu dionicu sa izvršnom cijenom *K* i vremenom dospijeća *T*. Također postoji, kratkoročna pozicija na kupnju jedne opcije *C* sa istom izvršnom cijenom i vremenom dospijeća. Vrijednost takvog portfelja tada iznosi:

$$V = S + P - C \tag{14}$$

te iz (2) i (3) vidimo da na dan dospijeća vrijedi $P - C = K - S$ pa vrijednost gore navedenog portfelja iznosi

$$V_T = K \tag{15}$$

S obzirom da portfelj ima poznatu vrijednost u $t = T$ slijedi, iz činjenice da se radi o portfelju bez arbitraže, da njegova vrijednost, za bilo koje vrijeme u intervalu $0 \leq t \leq T$, mora biti

$$V = Ke^{-r(T-t)} \tag{16}$$

gdje je r bezrizična kamatna stopa. Upotrebom prethodnih izraza (16) u (14) dobivamo ponuda – poziv paritet relaciju:

$$P = C - S + Ke^{-r(T-t)} \tag{17}$$

4. Model Brownovog gibanja u financijama

4.1. Slučajna šetnja

Najbolji prikaz Brownovog gibanja je pomoću primjera slučajne šetnje osobe, pri hodu po liniji, pri čemu napravi korak duljine l u vremenskom intervalu Δt. [3] Vjerojatnost koraka ulijevo je jednaka vjerojatnosti koraka udesno. Položaj *X(t)* osobe, nakon vremena $t = N\Delta t$, gdje je N broj prijeđenih koraka i predstavlja stohastički proces. Vjerojatnost *P(X(t) = x)* pronalaženja osobe na određenom položaju $x = nl$, gdje je n cijeli broj, u danom vremenu t, opisan je binomnom raspodjelom. [3]

Brownovo gibanje je stohastički proces čiji rezultat dobivamo promatranjem slučajne šetnje u kontinuiranom limesu; $\Delta t \to 0, l \to 0, N \to \infty, n \to \infty$ tako da $t = N\Delta t$ i $x = nl$ ostaju konačni. U primjeru slučajne šetnje treba biti oprezan sa granicama jer gustoća vjerojatnosti $p(x, t)$ mora ostati konačna. Mora biti $\Delta t \to 0, l \to 0$ takvi da vrijedi $l^2 = \sigma\Delta t$, gdje σ označava konstantu. U ovom slučaju, gustoća vjerojatnosti $p(x, t)$ je dana Gaussovom raspodjelom [3]:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{\left(\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right)} \tag{18}$$

Pretpostavimo da je X slučajna varijabla čija je funkcija gustoće vjerojatnosti dana sa $p(x)$ a njena očekivana vrijednost je

$$E[f(X)] \equiv \langle f(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx \tag{19}$$

gdje $f(x)$ predstavlja proizvoljnu funkciju.

Gaussova ili normalna raspodjela sa srednjom vrijednošću m i standardnom devijacijom σ, označena je sa $N(m, \sigma)$ i zadovoljava funkciju gustoće vjerojatnosti:

$$p_N(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)} \tag{20}$$

Bitno za naglasiti je kako u određenom trenutku vrijedi sljedeće:

$$E[X] = m, \; E[X^2] = \sigma^2. \tag{21}$$

4.2. Brownovo gibanje i bijeli šum

U prethodnom potpoglavlju razmatrali smo Brownovo gibanje u granicama kao slučajnu šetnju nakon beskonačnog broja infinitezimalnih koraka. Formulacija Brownovog gibanja, kao slučajne šetnje prvi je postavio Bachelier (1900), te također povezao Brownovo gibanje i difuzijski izraz.

Matematičku teoriju Brownovog gibanja konstruirao je Wiener, te ono postaje poznato kao Wienerov proces.

Brownovo gibanje ili Wienerov proces $\{W(t), t \geq 0\}$ je stohastički proces sa određenim svojstvima:

1. $W(0) = 0$.
2. Put $W(t) - W(s)$ je stacionaran i neovisan.
3. U slučaju $t > s$, $W(t) - W(s)$ zadovoljava normalnu distrubiciju $N\left(0, \sqrt{t-s}\right)$
4. Putanja je kontinuirana.

Uvjet stacionarnosti vodi na zaključak da je funkcija gustoće vjerojatnosti od $W(t) - W(s)$, ovisna samo o vremenskoj razlici $t - s$. Uvjeti 2 i 3 impliciraju da je $W(t)$ raspodijeljen u ovisnosti o $N(0,\sqrt{t})$ za $t > 0$. Posebno u našem slučaju, vrijedi $E[W(t)] = 0$ za svaki $t \geq 0$. Nadalje, kovarijanca Brownovog gibanja dana je sa $E[W(t)W(s)] = s$, za $t > s$.

Isto tako, Brownovo gibanje je ujedno i Gaussov proces. Gaussov proces je karakteriziran kovarijancom i očekivanom vrijednosti pa to mora vrijediti i za Brownovo gibanje, tako za Brownovo gibanje vrijedi $E[W(t)] = 0$ i $E[W(t)W(s)] = \min(s,t)$.

Brownovo gibanje ima važno svojstvo posjedovanja ograničene kvadratne varijacije. Pretpostavimo podjelu $\{t_i\}_i^n = 0$ intervala $[0,t]$, gdje je $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$. Jednostavnije, imamo jednake vremenske intervale $t_i - t_{i-1} = \Delta t = \frac{t}{n}$. Kvadratna varijacija od $W(t)$unutar $[0,t]$ definirana je sa:

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} \Delta W_i^2 , \tag{22}$$

gdje $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$. S obzirom da je ΔW_i raspodijeljen prema $N(0,\sqrt{\Delta t})$, $E[\Delta W^2] = \Delta t$, iz čega proizlazi :

$$E[Q_n] = t \tag{23}$$

Koristeći činjenicu da su povećavanja ΔW_i neovisna, kao i da je varijacija zbroja neovisnih varijabla, zbroj varijacija, varijacija od Q_n iznosi:

$$var \quad [Q_n] = \sum_{i=0}^{n} var[\Delta W_i^2] = \sum_{i=0}^{n}\{E[\Delta W_i^4 - (E[\Delta W_i^2])^2]\} = \sum_{i=0}^{n}[3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2] = \frac{2t^2}{n}$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je ΔW_i raspodijeljen prema $N(0,\sqrt{\Delta t})$.

U slučaju

$$n \to \infty, var\ [Q_n] \to 0. \tag{24}$$

Isto tako upotrebom (23) dobivamo:

$$var\ [Q_n] = E[(Q_n - E[Q_n])^2] = E[(Q_n - t)^2], \tag{25}$$

Usporedbom zadnja dva izraza (24) i (25) proizlazi:

$$\lim_{n\to\infty} E[(Q_n - t)^2] = 0 \tag{26}$$

Prema prethodnim izrazima, ΔW^2 se može promatrati u ovisnosti o Δt, tj. u slučaju $\Delta t \to 0$, vrijednost ΔW^2 predstavlja deteminističku vrijednost Δt. Pomoću diferencijala taj izraz izgleda kao:

$$[dW]^2 = dt. \tag{27}$$

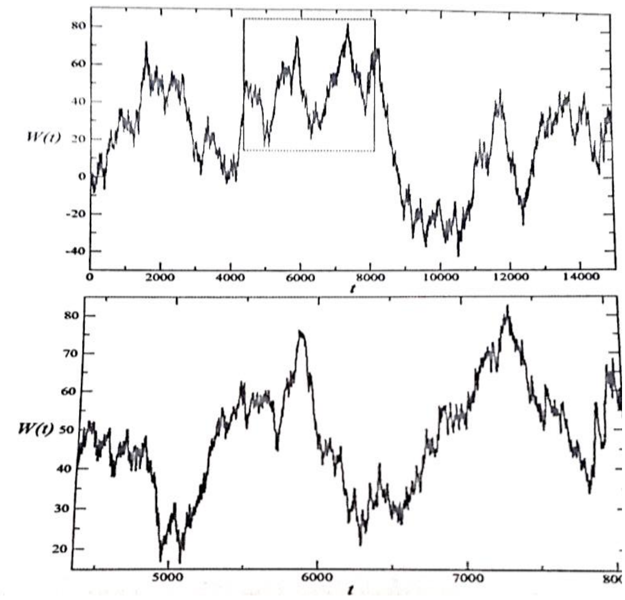
Ili u slučaju ovisnosti o $\sqrt{dt}$:

$$dW = 0\left(\sqrt{dt}\right). \tag{28}$$

Osim navedenih, važno svojstvo Brownovog gibanja $W(t)$ je samosličnost:

$$W(at) =^{d} a^{1/2} W(t), \tag{29}$$

Za svaki a > 0. $=^{d}$ označava jednakost s obzirom na raspodjelu vjerojatnosti, tj. proces $W(at)$ i proces $a^{1/2}W(t)$ imaju iste konačno dimenzionalne raspodjele $p(x_1, t_1; \ldots x_n, t_n)$ bez obzira na izbor $t_i, i = 1, \ldots, n$ pri čemu je $n \geq 1$. Samosličnost znači da se svaki konačan dio puta Brownovog gibanja, nakon ispravnog povećanja, ne razlikuje od ostatka puta. Npr. ako zumiramo određeni dio puta Brownovog gibanja, povećavanjem vremenske osi za faktor a i vertikalne osi za faktor $\sqrt{a}$, dobivamo krivulju sličnu (statistički) originalnom putu. Primjer samosličnosti nalazi se na sl. 11.



Slika 11 – Samosličnost puta Brownovog gibanja.[1]

U terminima fraktala, možemo reći da je putanja Brownovog gibanja fraktalna struktura, tj, krivulja dimenzije *D=2*. Svojstvo samosličnosti povlači činjenicu da put Brownovog gibanja nije diferencijabilan. Pokušajmo derivirati $W(t)$ tako da:

$$\frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t}.$$

S obzirom da ΔW ovisi o $\sqrt{\Delta t}$ proizlazi :

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right), \quad (30)$$

a u slučaju $\Delta t \to 0, \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = 0.$

Iako derivacija od $W(t)$ nije moguća u stohastičkom procesu, moguće je matematički opisati $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ kao poseban proces. U ovom slučaju, proces koji se sastoji od derivacije $W(t)$ nazivamo bijeli šum $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}. \quad (31)$$

Vidjeli smo da derivacija $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$ divergira kao $\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$, što povlači da će intergral definiran kao:

$$I(t) = \int_0^t g(t')\varepsilon(t')dt' \;, \tag{32}$$

konvergirati. Bijeli šum je definiran kao brzo flukturirajuća funkcija koja zadovoljava sljedeće uvjete:

$$\langle \varepsilon(t) \rangle = 0 \tag{33}$$

$$\langle \varepsilon(t)\varepsilon(t') \rangle = \delta(t - t'). \tag{34}$$

Te relacije definiraju operacijska pravila pomoću kojih mogu biti dobivene veličine, poput očekivane vrijednosti ili varijacije integrala I(t).

Opis definicije stohastičkog integrala u terminima stohastičkog procesa dao je japanski matematičar It$\hat{o}$.

4.3. It$\hat{o}$ stohastički integrali

Koristeći (31) kako bi iz integrala (32) dobili integral po Wienerovom procesu $W(t)$*:*

$$I(t) = \int_0^t g(t')dW(t'). \tag{35}$$

Nadalje, zanima nas prikaz integrala kao Reimann-Stieltjes integral. Koristimo podjelu $\{t_i\}_i^n = 0$ intervala $[0, t]$ i parcijalne sume

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})\Delta W(t_i) \equiv \sum_{i=1}^{n} g(t_{i-1})[W(t_i - W(t_{i-1})] \tag{36}$$

Funkcija $g(t)$ mora biti ne anticipativna funkcija i zadovoljavati određena svojstva. Ne-anticipativna funkcija je ona kod koje su vrijednosti $g(t)$ određene „prošlim“ događajima.[7] Vrijednost $g(t_{i-1})$ u prethodnom izrazu je neovisna o povećanju $\Delta W(t_i)$ Brownovog gibanja.

Parcijalna suma I_n postaje kvadrat očekivane vrijednosti, tj. postoji proces $I(t)$ takav da vrijedi:

$$E[(I_n - I(t))^2] \to 0, \text{ u slučaju } n \to \infty. \tag{37}$$

Iz činjenice da funkcija $g(t)$ nije anticipativna i $E[W(t)] = 0$, iz (36) proizlazi da očekivana vrijednost $I(t)$ iznosi nula:

$$E[I(t)\ ] = E\left[\int_0^t g(t')dW(t')\right] = 0, \tag{38}$$

Isto tako stohastički integral slijedi izometrijsko svojstvo:

$$E[\ \{I(t)\}^2] = E\left[\left(\int_0^t g(t')dW(t')\right)^2\right] = \int_0^t E[g^2(t')dt'], \tag{39}$$

gdje je $g(t)$ deterministička funkcija (ona koja je strogo definirana, bez ikakvih neodređenosti).

Itô integral ne koristi uobičajna pravila integriranja za determinističke funkcije, već koristi različite metode izračuna stohastičke diferencijalne jednadžbe.

4.4. Stohastičke diferencijalne jednadžbe

Pomak čestice koja slijedi Brownovo gibanja u viskoznoj tekućini dan je diferencijalnom jednadžbom koja uključuje stohastičke termine, te se naziva Langevinova jednadžba:

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \sigma\varepsilon(t). \tag{40}$$

γ prestavlja viskoznost fluida dok σ opisuje amplitudu fluktuirajuće sile koja djeluje na Brownovu česticu. [3]

Iz (40) slijedi:

$$dv = -\gamma v dt + \sigma dW, \tag{41}$$

te nakon integriranja:

$$v(t) = v(0) - \int_0^t \gamma v(t')dt' + \int_0^t \sigma dW(t'). \tag{42}$$

Rješenje jednadžbe dano je eksplicitno.

Općenita stohastička diferencijalna jednadžba (SDE) dana je relacijom:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW, \tag{43}$$

gdje su $a(X,t)$ i $b(X,t)$ poznate funkcije.

Integriranjem dobivamo:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X,t')dt' + \int_0^t b(X,t')dW(t'). \tag{44}$$

Unutar određenih uvjeta, koje zadovoljavaju funkcije $a(X,t)$ i $b(X,t)$, moguće je pokazati kako SDE (43) ima jedinstveno rješenje $X(t)$.

SDE za Brownovo gibanje sa driftnom brzinom dana je s:

$$dX = \mu dt + \sigma dW, \tag{45}$$

gdje je μ driftna brzina .

Integrirajući prethodnu relaciju dobivamo

$$X(t) = \mu t + W(t), \tag{46}$$

čija funkcija gustoće vjerojatnosti glasi:

$$p(x,t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 t} e^{\left(\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right)}. \tag{47}$$

Primjer SDE koja se također rješava eksplicitno naziva se *geometrijsko Brownovo gibanje*. Za promatranje takve vrste gibanja potrebno je savladati pojam Itô formule**.**

4.5. Itô formula

Pretpostavimo općeniti proces $X(t)$ opisan sa SDE (43), tada je novi stohastički proces Z definiran kao:

$$Z(t) = F(X(t), t), \tag{48}$$

za danu funkciju *F(x,t)*. Zanima nas SDE čija rješenja pripadaju navedenom procesu $Z(t)$. Kako bi ostvarili cilj koristimo It$\hat{o}$ formulu.

Najprije je potrebno napraviti Taylorov razvoj funkcije $F(X, t)$:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} (dt)^2 + \cdots \tag{49}$$

gdje je:

$$(dX)^2 = b^2 dW^2 + 2ab dt dW + a^2 (dt)^2 = b^2 dt + 0(dt)^{3/2}, \tag{50}$$

Te smo iskoristili činjenicu da je $dW^2 = dt$ i $dtdW = 0(dt)^{3/2}$.

Izraz (50) uvrstili smo u (49) te dobili :

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b \frac{\partial F}{\partial x} dX. \tag{51}$$

Dobivena relacija naziva se It$\hat{o}$ formula. Eksplicitniji izraz It$\hat{o}$ formule dobivamo uvrštavanjem (43) u prethodni izraz:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(X,t) \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2(X,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(X,t) \frac{\partial F}{\partial x} dW, \tag{52}$$

Fluktruirajući dio procesa X(t), koji pridonosi procesu Z(t), je $\frac{1}{2} b^2(X,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

4.6. Geometrijsko Brownovo gibanje

Bitan stohastički proces u financijama je geometrijsko Brownovo gibanje koje definiramo kao rješenje navedene SDE:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \tag{53}$$

gdje su μ i σ konstante te se odnose na početni uvjet $S(t_o) = S_o$. Uvodimo transformaciju $Z = \ln S$. Koristeći Itô formulu (52) sa $a = \mu S$, $b = \sigma S$ i $F(S) = \ln S$, dobivamo :

$$dZ = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW, \tag{54}$$

te integracijom dobivamo:

$$Z(t) = Z_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma[W(t) - W(t_0)], \tag{55}$$

gdje je $Z_0 = \ln S_0$.

Eksplicitno rješenje SDE (53) dobivamo uvrštavanjem varijable *S*:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - t_0) + \sigma[W(t) - W(t_0)]}. \tag{56}$$

Iz (55) proizlazi da je $Z(t) - Z_0$ raspodijeljeno prema $N(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau, \sigma\sqrt{\tau})$, gdje je

$\tau = (t - t_0)$. Zatim slijedi da geometrijsko gibanje sa početnim uvjetom $S(t_o) = S_o$ slijedi log-normalnu raspodjelu:

$$p(S, t; S_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 \tau S}} e^{\left\{-\frac{\left[\ln\left(\frac{S}{S_o} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right\}}. \tag{57}$$

Geometrijsko Brownovo gibanje je osnovni model korišten za određivanje dinamike cijena dionica u Black – Scholesovom modelu.

5. Standardni model financija

5.1. Dinamika portfelja

Pretpostavimo financijsko tržište sa dvije imovine: bezrizični bankovni račun B i dionicu *S*. Vektorski zapis cijene imovine u vremenu t možemo pisati kao $\vec{S}(t) = (B(t), S(t))$. Portfelj navedenog tržišta se sastoji od iznos x_0 na bankovnom računu i posjedovanja x_1 dionica. Vektor $\vec{x}(t) = (x_0(t), x_1(t))$ opisuje vremensku evoluciju portfelja u *(B,S)* prostoru. U slučaju $x_i < 0$, zauzimamo kratkoročnu poziciju na *i-tu* imovinu.

$V_{\vec{x}}(t)$ označava novčanu vrijednost portfelja $\vec{x}(t)$:

$$V_{\vec{x}} = \vec{x} \cdot \vec{S} = x_0 B + x_1 S, \qquad (58)$$

gdje smo vremensku ovisnost izostavili radi jednostavnosti.

Nadalje u radu, indeks u oznaci $V_{\vec{x}}(t)$ bit će izostavljen u slučajevima gdje ne postoje nejasnoće o kojem portfelju se radi.

Portfelj se naziva *samofinancirajući* u slučaju neuzimanja novca iz navedenog, radi potrošnje, te bez investiranja novca u njega tako da promjena vrijednosti portfelja proizlazi samo iz promjene vrijednosti imovine portfelja. Portfelj $\vec{x}(t)$ je samofinancirajući i njegova dinamika je dana sljedećim izrazom:

$$dV_{\vec{x}} = \vec{x}(t) \cdot d\vec{S}(t), \qquad t \geq 0. \qquad (59)$$

U slučaju diskretnog vremena, tj. $t = t_n, n = 0,1,2, \ldots$, povećanje iznosa vrijednosti, $\Delta V(t_n) = V(t_{n+1}) - V(t_n)$, samo financirajućeg porftelja u vremenskom intervalu

$(t_{n+1}) - (t_n)$ je dano sa:

$$\Delta V_{\vec{x}}(t_n) = \vec{x}(t_n) \cdot \Delta\vec{S}(t_n), \qquad (60)$$

gdje je $\Delta\vec{S}(t_n) \equiv S(t_{n+1}) - S(t_n)$. Unutar vremenskog intervala $(t_{n+1}) - (t_n)$, vrijednost portfelja se mijenja ovisno isključivo o promjeni cijene imovine, i u trenu t_{n+1} ponovo dodijeljujemo imovinu portfelju za sljedeći vremenski period. Izraz (59) generalizira ideju za kontinuirani vremenski period. Gledajući sadašnju vrijednost portfelja, ne uzimajući u obzir prijašnju vrijednost:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}\big(t, \vec{S}(t)\big), \tag{61}$$

dobivamo portfelj koji nazivamo *Markovijanov portfelj.* U daljenjem radu koristi ćemo isključivo Markovijanov portfelj. U prethodnim poglavljima upoznali smo pojam arbitraže kao vjerojatnost ostvarivanja bez rizičnog profita, bez ulaganja novca.

Portfelj čija vrijednost $V(t)$ zadovoljava uvjete:

i. $V(0) = 0$
ii. $V(t) \geq 0$ sa vjerojatnošću 1 za $t > 0$
iii. $V(T) > 0$ sa pozitivnom vjerojatnošću za određene $T > 0$,

nazivamo *arbitraža.* Iz drugog uvjeta možemo vidjeti kako ne postoji šansa gubitka novca, a treći uvjet pokazuje kako u vremenu *T* postoji vjerojatnost pozitivne vrijednosti portfelja. Ako zadržimo takav portfelj do arbitražnog vremena postoji šansa da ostvarimo bezrizični profit bez prethodnog ulaganja. Kao što smo prije napomenuli, prilike za arbitražu su jako rijetke i traju jako kratko. U sljedećem poglavlju, gdje ćemo detaljno opisatiBlack – Scholesov model, pretpostavit ćemo da nema arbitraže.

5.2. Black – Scholesov model

Dvije glavne pretpostavke Black – Scholesovog modela su:

i. Dvije imovine se nalaze na tržištu, bankovni račun B i dionica S, čije dinamike cijena zadovoljavaju sljedeće diferencijalne jednadžbe:

$$dB = rBdt \tag{62}$$

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{63}$$

gdje je r bezrizična kamatna stopa, $\mu > 0$ predstavlja povratnu stopu dionica, $\sigma > 0$ je nestabilnost i $W(t)$ je Brownovo gibanje ili Wienerov proces.

ii. Na tržištu nema arbitraže.

Osim navedenih glavnih pretpostavki, postoje i dodatne pretpostavke. Izraz (62) pokazuje određenu kamatnu stopu prema kojoj se odvija posudba i vraćanje novca.

Racionalno određivanje cijena derivativa opisano je Black – Scholeovim modelom. Pretpostavimo Europsku call opciju za koju se lako pronalazi formula. Označimo sa $C(S,t;K,T)$ sadašnju vrijednost Europske call opcije sa izvršnom cijenom K i vremenom dospijeća T za određenu dionicu S. Radi jednostavnosti u daljnjem razmatranju izostavit ćemo parametre K i T te vrijednost postaje $C(S,t)$. Prema Itô formuli (52) sa $a=\mu S$ i $b=\sigma S$, cijena opcije C slijedi sljedeću dinamiku:

$$dC=\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma S)^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dW. \tag{64}$$

Nadalje ćemo pronaći parcijalnu diferencijalnu jednadžu, Black – Scholovu jednadžbu (BSE), za cijenu opcije $C(S,t)$.

1. *Delta zaštite portfelj*

Pretpostavimo samofinancirajući delta zaštite portfelj sastavljen od dugoročne pozicije na opcije i kratkoročne pozicije na Δ dionica. Vrijednost $\Pi(t)$ navedenog portfelja iznosi:

$$\Pi(t)=C(S,t)-\Delta S.$$

S obzirom na svojstvo portfelja, samofinanciranje, iz (59) slijedi da za $\Pi(t)$ vrijedi dinamika:

$$d\Pi=dC-\Delta dS, \tag{65}$$

koja iz (63) i (64) postaje:

$$d\Pi=\left[\frac{\partial C}{\partial t}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}(\sigma S)^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S\left(\frac{\partial C}{\partial S}-\Delta\right)dW. \tag{66}$$

Kako bi eliminirali rizik iz portfelja (dW), izabiremo:

$$\Delta=\frac{\partial C}{\partial S}. \tag{67}$$

Nakon uvrštavanja u (66) dobivamo:

$$d\Pi = \left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right] dt. \tag{68}$$

S obzirom da sada imamo bezrizični portfelj, povratna stopa mora biti jednaka povratnoj stopi bankovnog računa:

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{69}$$

Usporedbom (68) i (69) te primjenom (65) i (66) dobivamo Black – Scholeovu jednadžbu:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{70}$$

Čije rješenje dobivamo uz uvjet:

$$C(S,T) = (S - K). \tag{71}$$

Rješenje jednadžbe ćemo pronaći nakon upoznavanja sa dodatnom vrstom portfelja.

2. *Kopirajući portfelj*

U ovom dijelu ćemo pokazati mogućnost stvaranja portfelja na (B, S)tržištu koji "kopira" opciju $C(S, t)$ i u tom procesu dobit ćemo BSE.

Pretpostavimo samofinancirajući portfelj $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ čija je vrijednost $Z(t)$ jednaka cijeni opcije $C(S, t)$, za sve $t \leq T$:

$$Z \equiv xB + yS = C, \tag{72}$$

gdje smo na kratko zanemarili vremenski parametar.

S obzirom da je portfelj samofinancirajući vrijedi:

$$dZ = xdB + ydS = (rxB + \mu yS)dt + \sigma ySdW. \tag{73}$$

Zbog pretpostavke da je $Z = C$, mora vrijediti da je $\mathrm{d}Z = \mathrm{d}C$.

Usporedbom (73) i (64) i izjednačavanjem koeficijenata odvojeno za dW i dt , proizlazi:

$$y = \frac{\partial C}{\partial S}, \tag{74}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} - rxB + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = 0. \tag{75}$$

Upotrebom (72) i (74) proizlazi:

$$x = \frac{1}{B}\left[C - S\frac{\partial C}{\partial S}\right]. \tag{76}$$

5.3. Black – Scholeova formula

Ovdje ćemo riješiti spomenutu Black –Scholeovu jednadžbu (70). Glavna ideja je supstitucija varijabli da bi iz BSE proizveli toplinsku jednadžbu, koju znamo riješiti. [9]

Koristimo :

$$\tau = \frac{T-t}{2/\sigma^2}, \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \tag{77}$$

$$u(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta^2 \tau}\frac{C(S,t)}{K} \tag{78}$$

gdje su

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} + 1\right). \tag{79}$$

Nove varijable BSE su:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{80}$$

Te se uvjet za BSE transformira u početne uvjete:

$$u(x,0) = u_0(x) = max\left(e^{\beta x} - e^{\alpha x}, 0\right). \tag{81}$$

Podsjetimo se Greenove funkcije za toplinsku jednadžbu:

$$G(x,x') = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-(x-x')^2/4\tau},$$

pa je rješenje za početne uvjete $u_{.}(x)$ dano sa:

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x')\, G(x,x')dx' = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x')\, e^{-(x-x')^2/4\tau} dx'. \tag{82}$$

Uvrštavanjem (81) u gore navedeni izraz dobivamo:

$$u(\tau,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} (\, e^{\beta x'} - e^{\alpha x'}) e^{-(x-x')^2/4\tau} dx' = I(\beta) - I(\alpha), \tag{83}$$

gdje je :

$$I(\alpha) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{0}^{\infty} (\, e^{\alpha x'}) e^{-(x-x')^2/4\tau} dx'. \tag{84}$$

Nakon uređivanja gornji izraz postaje:

$$I(\alpha) = e^{ax+a^2\tau} N(d_a), \tag{85}$$

gdje je:

$$d_a = \frac{x + 2a\tau}{\sqrt{2\tau}}, \tag{86}$$

$N(x)$ označava cijelokupnu funkciju raspodjele normalne varijable $N(0,1)$:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2} ds. \tag{87}$$

Uvrštavajući (85) u (83) i nakon vraćanja u originalne varijable, dobivamo Black – Scholesovu formulu za cijenu Europske opcije poziva:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{88}$$

gdje su:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{89}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{90}$$

Navedena formula se vrlo često koristi, pa se razvila i potreba za dodatnom mogućnosti, izračuna izravno. Zato se sada nalaze instalirane u mnogim softverskim paketima poput Excel, Matlab, itd; kao i u modernim kalkulatorima.

5.4. Potpunost Black – Scholesovog modela

U prethodnom potpoglavlju vidjeli smo mogućnost kopiranja Europske opcije poziva $C(S,t)$ koristeći odgovarajući samofinancirajući portfelj u (B,S) tržištu.

Prikazana derivacija BSE vrijedi za svaki potencijalni zahtjev a ne samo za opciju poziva.

Pretpostavimo da $F(S,t)$ predstavlja cijenu arbitražnog Europskog potencijalnog zahtjeva sa profitom $F(S,T) = \Phi(S)$, gdje je Φ poznata funkcija. Zaključujemo da je cijena $F(S,t)$ rješenje za problem:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + rS\frac{\partial F}{\partial S} - rF = 0, \tag{91}$$

$$F(S,T) = \Phi(S) \tag{92}$$

Ukoliko ponovimo postupak iz prethodnog potpoglavlja i transformiramo BSE (91) u toplinsku jednadžbu dobivamo:

$$F(S,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x')\, e^{-(x-x')^2/4\tau} dx', \tag{93}$$

gdje $\Phi(x')$ predstavlja funkciju isplate u terminima varijable x'. Izrazujući rezultat u terminima originalnih varijabli S i t , proizlazi generalizirana Black – Scholesova formula

$$F(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_0^{\infty} \Phi(S') e^{ln\left(\frac{S'}{S}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)^2} \frac{dS'}{S'}. \tag{94}$$

Gornji izraz nam prikazuje potpunost Black – Scholesovog modela. Kažemo da je tržište potpuno ukoliko svaki potencijalni zahtjev može biti kopiran sa samofinancirajućem portfljem na primarnu imovinu. To vrijedi u slučaju Europskih potencijalnih zahtjeva sa jednostavnom funkcijom isplate $\Phi(S)$. Moguće je dati službeni dokaz da su bezarbitražni modeli, poput Black – Scholesov model, potpuni.

Usporedbom generalne Black – Scholesove formule (94) i funkcijom gustoće vjerojatnosti geometrijskog Brownovog gibanja (57), vidimo mogućnost drugačijeg zapisa poput:

$$F(S,t) = e^{-r(T-t)} E_{t,S}^{Q}[\Phi(S_T)], \tag{95}$$

gdje $E_{t,S}^{Q}[\Phi(S_T)]$ predstavlja očekivanu vrijednost u odnosu na gustoću vjerojatnosti geometrijskog Brownovog gibanja sa $\mu = r$, početnim vremenom t, konačnim vremenom T i početnom vrijednosti S.

Sadašnja vrijednost potencijalnog zahtjeva računa se kao njena očekivana vrijednost na dan dospijeća s određenom mjerom vjerojatnosti.

6. Efikasna tržišta

6.1. Martingali

Koncept martingali je od velike važnosti za financije.[12] Kako bi se upoznali s njim, potrebno je poznavanje teorije mjere vjerojatnosti. Prostor vjerojatnosti određen je pomoću tri varijable Ω, Ƒ i $P.\Omega$ je prostor elementarnih događaja ishoda ω, Ƒ je pomno odabrana obitelj podskupova od Ω (σ −algebra na Ω), te P predstavlja mjeru vjerojatnosti Ƒ. [13]

U financijama, ishod ω predstavlja "tržišnu situaciju". Obitelj podskpova $\mathcal{F}$ određuje klasu događaja, te im dodjeljuje pripadnu vjerojatnost. U tu svrhu koristimo koncept σ −algebre. Mjera vjerojatnosti P na $\mathcal{F}$ odgovara funkciji $P{:}\,\mathcal{F} \rightarrow [0,1]$, pri čemu zadovoljava određene uvjete poput: $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ i $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ ako vrijedi $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Element A od $\mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$, naziva se "mjerivi set"ili "promatrani događaj", koji predstavlja mogućnost dodjele vjerojatnosti događaja, $P(A) \in [0,1]$, za određeni događaja. $\mathcal{F}$ predstavlja skup promatranih događaja.

Pretpostavimo slučajnu funkciju $X{:}\,\Omega \rightarrow R$. Ako podskupu od Ω forme $\{\omega{:}\, a \leq X(\omega) \leq b\}$ odgovara događaj $A \subset \mathcal{F}$, tada funkciju X proglašavamo mjerivom u odnosu na $\mathcal{F}$ ili jednostavnije $\mathcal{F}$ – mjeriva. To nam ukazuje na mogućnost "mjerenja" (dodjeljivanja pripadne vjerojatnosti) događaja u formi $\{a \leq X(\omega) \leq b\}$ kroz definiranje: P($\{\omega{:}\, a \leq X(\omega) \leq b\} \equiv p(A)$. $\mathcal{F}$ – mjerivu funkciju X nazivamo slučajna varijabla.

Pretpostavimo pojam " tok informacija". U apstraktnom pogledu prezentirat ćemo informaciju dostupnu opažaču u vremenu t kao σ −algebra, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. U financijama, set informacija $\mathcal{F}_t$, sadržavao bi povijest cijene do vremena t svih imovima u ekonomiji. Iz toga proizlazi činjenica da $\mathcal{F}_s \subset F_t$ za $s \leq t$, s obzirom da očekujemo prolaskom vremena dobivamo nove informacije. Takav skup σ −algebre predstavlja "tok informacija" ,tj. filtriranje. *Filtriranje ili tok informacija* predstavlja skup $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$od σ −algebre $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ takav da vrijedi

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \text{ za } 0 \leq s \leq t.$$

Pretpostavimo stohastički proces X_t definiran na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. (X_t predstavlja cijenu dionice) U slučaju mogućnosti potpune određenosti vrijednosti X_t pomoću informacija $\mathcal{F}_t$, za svaki $t \geq 0$, proces X_t kažemo da je prilagođen filtriranju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Proces X_t je prilagođen filtriranju $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ako je X_t $\mathcal{F}$ – mjeriv za svaki $t \geq 0$.

Stohastički proces X_t generira tok informacija, označen sa ${\mathcal{F}_t}^X$, što predstavlja "informacije sadržane u putanjama $X(t)$ u vremenu t". Proces $X(t)$ je prilagođen filtriranju ${\mathcal{F}_t}^X$. Preostali pojam je uvjetno očekivanje. Uvjetno očekivanje prikazuje način kako je informacija $\mathcal{F}_{t_0}$, poznata u trenutku t, utječe na buduće vrijednosti $X(t)$. Ukoliko $X(t)$ i $\mathcal{F}_{t_0}$ nisu nezavisne, razumno je očekivati da informacije trenutno dostupne smanjuju nesigurnost budućnih vrijednosti $X(t)$.

Potrebno je definirati novi stohastički proces:

$$Z(t) = E\left[X_t | \mathcal{F}_{t_0}\right], \qquad t > t_0,$$

gdje $E\left[X_t|\mathcal{F}_{t_0}\right]$ predstavlja očekivanu vrijednost X_t, zavisnu o informacijama nakupljenim do vremena t_0. Za drugu slučajna varijabla Y iz prostora vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$ i σ −algebre $\mathcal{F}_t{}' \subset \mathcal{F}$, moguće je definirati slučajnu varijablu $Z(t) = E[Y|\mathcal{F}']$ koja predstavlja očekivanu vrijednost od Y, danu informacijama sadržanim u $\mathcal{F}'$. Varijabla Z je grublja verzija originalne varijable Y, u smislu mogućnosti upotrebe informacije u $\mathcal{F}'$ radi smanjenja nesigurnosti u vezi sa Y.

Svojstva uvjetnog očekivanja dana su sa:

$$E[Y|\mathcal{F}_t] = Y, \text{ ako je } Y\ \mathcal{F} - \text{mjeriv} \tag{96}$$

$$E\left[E[Y|\mathcal{F}_t]\right] = E[Y]. \tag{97}$$

Prvo svojstvo daje nam informaciju ukoliko je $Y\,\mathcal{F}_t$– mjeriv, tada Y i $\mathcal{F}_t$ sadrže iste informacije. Drugo svojstvo nazivamo *zakon ponovljenog očekivanja* i predstavlja zakon ukupne vjerojatnosti. Nakon definiranja potrebnih matematičkih termina u mogućnosti smo definiranja martingale.

Stohastički proces M_t nazivamo matingale u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t\ \}_{t\geq 0}$ ukoliko su zadovoljena slijedeća svojstva:

i. M_t je prilagođena filtriranju $\{\mathcal{F}_t\ \}_{t\geq 0}$
ii. $E[|M_t|] < \infty\ \ za\ svaki\ t \geq 0$
iii. $E\left[M_t|\mathcal{F}_{t_0}\right] = M_{t_0}\ \ za\ svaki\ t \geq 0$

Uvjet i. govori nam o mogućnosti određivanja M_t iz informacija dostupnih u vremenu t. Uvjet iii. naziva se *uvjet martingali*. On govori da najbolji način predviđanja budućih vrijednosti $M(t)$, zavisnih o informacijama dostupnim u danom vremenu, upravo sadašnja vrijednost M_{t_0}. Zbog tog uvjeta, martingale su opisane kao "poštena igra". Pretpostavimo da M_n predstavlja sreću kockara u vremenu n. Razlika $h_n = M_n - M_{n-1}$ je iznos koji kockar ostvari u n-toj igri. Očekivana kockarova dobit u (n+1)-oj igri, dana informacijama do trenutka n iznosi:

$$E[h_n|\mathfrak{F}_n] = E[M_{n+1} - M_n|\mathfrak{F}_n] = E[M_{n+1}|\mathfrak{F}_n] - E[M_n|\mathfrak{F}_n] = M_n - M_n = 0 \quad (98)$$

gdje smo koristili pravila martingala i pravilo (96). Iz ovoga slijedi da je očekivana dobit za svaku igru jednaka nuli.

Brownovo gibanje $W(t)$ je martingala u odnosu na svoje prirodno filtriranje. Da bismo to dokazali radimo provjeru uvjeta martingale:

$$\begin{aligned} E\left[W(t)|\mathfrak{F}_{t_0}\right] &= E\left[W(t) - W(t_0) + W(t_0)|\mathfrak{F}_{t_0}\right] \quad (99) \\ &= E\left[W(t) - W(t_0)|\mathfrak{F}_{t_0}\right] + E\left[W(t_0)|\mathfrak{F}_{t_0}\right] = 0 + W(t_0) = W(t_0) \end{aligned}$$

Pri tome smo koristili činjenicu da je $W(t) - W(t_0)$ neovisno o $\mathfrak{F}_{t_0}$ kao i svojstvo (96).

Osim Brownovog gibanja, primjer martingali su Ito ̂stohastički integrali.

Važno svojstvo, osim prikazanih, je činjenica da očekivane vrijednosti ostaju konstantne u vremenu:

$$E[M_0] = E\left[E\left[M_t|\mathfrak{F}_{t_0}\right]\right] = E[M_t],$$

gdje smo koristili svojstva martingali i svojstvo (97).[6]

Potreban uvjet za martingali proces jest ne postojanje drifta. Stoga difuzijski proces u formi (43) nije martingali dok driftni termin ne izbacimo. Isto tako, geometrijsko Brownovo gibanije (53) nije martingali. Moguće je uvesti novu mjeru vjerojatnosti Q, s kojom geometrijsko Brownovo gibanje postaje standarno Brownovo gibanje, a time i martingali.

6.2. Ekvivalentne martingalne mjere

Prisjetimo se, mjera vjerojatnosti P u mjerivom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F})$ je funkcija $P: \mathfrak{F} \to [0,1]$ koja dodjeljuje svakom događaju $A! \mathfrak{F}$ realni broj $P(A) \in [0,1]$. Pretpostavimo novu mjeru vjerojatnosti Q definiranu na istom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F})$. Mjere vjerojatnosti P i Q su ekvivalentne ako zadovoljavaju sljedeći uvjet:

$$Q(A) = 0 \leftrightarrow P(A) = 0 \; za \; svaki \; A \in \mathfrak{F}. \quad (100)$$

Pretpostavimo slučajnu varijablu X na prostoru $(\Omega, \digamma, P)$. Ako je Q mjera vjerojatnosti ekvivalentna P, tada iz uvjeta (100) proizlazi postojanje funkcije $\rho(X)$, takve da očekivanje vrijednosti Q računamo prema izrazu:

$$E_Q[g(X)] = E_P[\rho(X)g(X)], \tag{101}$$

gdje $g(X)$ predstavlja arbitražnu funkciju. Navedeni izraz možemo zapisati u terminima vjerojatnosti gustoće kao:

$$f_Q(x) = \rho(x) f_P(x), \tag{102}$$

gdje je $f_P(x)$ vjerojatnost gustoće X mjere P.

Pretpostavimo Brownovo gibanje sa driftom

$$\widetilde{W}(t) = at + W(t), \quad 0 \leq t \leq T \tag{103}$$

gdje je a konstanta.

Kao što smo napomenuli prije, $\widetilde{W}(t)$ nije martingali, ali postoji ekvivalentna mjera vjerojatnosti Q, s obzirom na koju proces $\widetilde{W}(t)$ postaje standardno Brownovo gibanje, a time i martingali. Rezultat je zvan Girsanov teorem.

Girsanov teorem

Proces $\widetilde{W}(t)$ izražen zapisom (103) je standardno Brownovo gibanje s obzirom na mjeru vjerojatnosti Q definiran sa:

$$f_Q(\tilde{x}, t) = M_t(\tilde{x}) f_P(\tilde{x}, t), \tag{104}$$

gdje je:

$$M_t = e^{-\left\{-aW_t - \frac{1}{2}a^2 t\right\}} = e^{-\left\{-a\widetilde{W}(t) - \frac{1}{2}a^2 t\right\}}. \tag{105}$$

Glavna primjena promjene mjere je eliminacija drifta iz stohastički diferencijalnih jednadžbi, tako da je s obzirom na novu mjeru Q proces martingali. Mjera Q naziva se ekvivalentna martigalna mjera. [6]

[8] Pretpostavimo sad drugi slučaj, Brownovo gibanje:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW, \quad t < T \tag{106}$$

gdje su $\mu \ i \ \sigma$ pozitivne konstante. Izraz možemo zapisati kao:

$$dS = \sigma S \left(\frac{\mu}{\sigma} dt + dW\right) = \sigma S d\widetilde{W}, \tag{107}$$

gdje je

$$\widetilde{W}_t = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right) t + W_t, \qquad t < T \tag{108}$$

Prema Girsanovom teoremu, $\widetilde{W}_t$ je standardno Brownovo gibanje s obzirom na mjeru Q danu sa (104) sa $a = \frac{\mu}{\sigma}$, i kako SDE (107) nema drifta, njeno rješenje S_t je martingala.

6.3. Bez arbitražni uvjet: "Simetrija efikasnosti" i „zakon sačuvanja"

Pojam efikasnosti tržišta od velike je važnosti u financijama. U efikasnom tržištu svaka informacija uvijek se odrazi promjenom cijena. Time vidimo kako prošle cijene ne donose dodatne informacije koje već nisu sadržane u sadašnjoj cijeni. U efikasnom tržištu cijena se mijenja po dobitku nove informacije. S obzirom da sadržaj budućih informacija i njihov učinak na cijene nisu poznate, trebalo bi biti nemoguće predvidjeti budućnost cijene bazirane na informacijama poznati u sadašnjem vremenu. Najbolje predviđanje očekivane buduće cijene je sadašnja cijena, tj. smanjena cijena bi trebala biti martingala.

Pretpostavimo tržište formirano sa dvije imovine (B, S), gdje je B bezrizična imovina a S rizična. Isto tako $S(t)$ slijedi stohastičke procese na prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, te pripadna filtriranje je $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$.

Pretpostavljeno tržište djeluje u diskretnom vremenu $t_n, n = 1,2,3, \ldots$ Tržište je efikasno ako postoji mjera vjerojatnosti Q ekvivalentna mjeri P, takva da je "smanjena cijena"

$\frac{S(t)}{B(t)}$ martingala s obzirom na mjeru Q:

$$E^Q\left[\frac{S(t)}{B(t)} \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right] = \frac{S(t)}{B(t)}, \quad za\ t_0 \leq t \tag{109}$$

gdje E^Q predstavlja očekivanu vrijednosti mjere Q.

Potreba efikasnosti, gore definirana, podsjeća na princip simetrije u fizici. Možemo primijeniti definiciju (109) u efikasnim tržištima u kojima postoji posebna mjera Q s obzirom na koju su smanjene cijene invarijantne na vremenske translacije:

$$E^{Q}\left[\frac{S(t+T)}{B(t+T)}\middle|\mathrm{F}_{t_0}\right]=\frac{S(t)}{B(t)},\quad za\ svaki\ T>0. \tag{110}$$

U fizici, princip simetrije je povezan sa zakonom očuvanja. (Invarijantnost Newtonovih zakona na vremensku translaciju implicira zakon očuvanja energije.) Želimo provjeriti vodili li simetrija efikasnosti do zakona očuvanja.

Prvi Fundamentalni teorem procjenjivanja imovine

Pretpostavimo tržište (B,S) koje djeluje u diskretnom vremenu $t_n, n=1,2,3,\ldots$ takvo tržište je efikasno ako i samo ako je bez arbitraže.

Za tržište bez arbitraže vrijedi uvjet:

$$V(0)=0\ i\ V(t)\geq 0 \quad \leftrightarrow \quad V(t)=0 \tag{111}$$

Odsustvo arbitraže možemo interpretirati kao svojevrsni zakona očuvanja za „vakuumsko stanje“ tržišta: ukoliko započinjemo bez početnog uloga i ne preuzimamo nikakve rizike, tada cijelo vrijeme ostajemo u tom stanju. U tome vidimo povezanost uvjeta „ne postoji besplatan ručak“ sa zakonom očuvanja na razini simetrije efikasnosti.

Drugi Fundamentalni teorem procjenjivanja imovine

Tržište (B,S) bez arbitraže je kompletno ako i samo ako je ekvivalentna mjera Q jedinstvena.

Teorem povezuje kompletnost tržišta sa jedinstvenošću njene ekvivalentne martingale mjere.

Model koji zadovoljava uvjet kompletnosti je Black – Scholesov model. U nastavku ćemo pokazati njegovu ekvivalentnu martingalnu mjeru, te njihovu jedinstvenost.

6.4. Određivanje cijena derivata pomoću ekvivalentnih martingalnih mjera

Pojam ekvivalentnih martingalnih mjera koristimo radi izravnog određivanja cijena derivata bez nužnog rješavanja jednadžbe gustoće vjerojatnosti. Glavna zamisao u efikasnom tržištu proizlazi iz činjenice da su financijske martingale imovine s obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru Q. Preciznije, ukoliko je $F(S,t)$ potencijalni zahtjev s vremenom dospijeća T i iznos isplate prati funkciju $\Phi(S(T))$, tada izraz (109) možemo zapisati kao:

$$\frac{F(S,t)}{B(t)} = E^{Q}{}_{t,S}\left[\frac{\Phi(S(T))}{B(t)}\right], \tag{112}$$

gdje indeksi t, S označavaju očekivanu vrijednost uzetu u sadašnjem trenutku t i trenutnu cijenu S, tj uvjet za informaciju dostupnu u vremenu t.

U slučaju da cijena derivata F ne odgovara izrazu (110), postojala bi mogućnost arbitraže.

U Black – Scholesovom modelu, bezrizično ulaganje predstavlja bankovni račun fiksne kamatne stope r, $B(t) = e^{rt}$, tako da izraz (112) postaje:

$$F(S,t) = e^{-r(T-t)}E^{Q}{}_{t,S}\big[\Phi\big(S(T)\big)\big], \tag{113}$$

Ili

$$F(S,t) = e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \Phi(S')f_Q(S',T;S,t)dS', \tag{114}$$

gdje $f_Q(S',T;S_0,t_0)$ označava gustoću vjerojatnosti, sa ekvivalentnom martingalnom mjerom Q, proces $S(t)$ sa početnom vrijednosti $\mathrm{S}(t_0) = S_0$. Preostaje nam naći ekvivalentnu martingalnu mjeru Q za Black – Scholesov model.

Pretpostavimo proces

$$Z(t) = \frac{S(t)}{B(t)} = e^{-rt}S(t). \tag{115}$$

Tada proizlazi

$$dZ = -re^{-rt}Sdt + e^{-rt}dS = (\mu - r)Zdt + \sigma ZdW = \sigma Zd\widetilde{W},$$

gdje

$$\widetilde{W}(t) = [(\mu - r)/\sigma]t + W(t). \tag{116}$$

U Black – Scholesovom modelu, cijena dionica slijedi geometrijsko Brownovo gibanje:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{117}$$

koja u terminima procesa $\widetilde{W}(t)$ iz izraza (116) postaje:

$$dS = rSdt + \sigma Sd\widetilde{W}. \tag{118}$$

Iz Girsanovog teorema proizlazi mogućnost pronalaska ekvivalentne martingalne mjere Q pomoću koje $\widetilde{W}(t)$ postaje Brownovo gibanje. Izraz (118) prikazuje da pri mjeri Q cijena $S(t)$ prati geometrijsko Brownovo gibanje sa stopom jednakoj povratnoj stopi r. Gustoću vjerojatnosti $f_Q(S', T; S, t)$ možemo izravno dobiti iz (57) uz uvjete $\mu = r$ i $S_0 = S$.

Zatim dobivamo :

$$f_Q(S', T; S, t) = \frac{1}{S'\sqrt{2\sigma^2\tau}} e^{\left\{-\frac{\left[ln\left(\frac{S'}{S} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right)\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right\}}, \tag{119}$$

gdje $\tau = T - t$. Uvrštavajući (119) u (114) proizlazi:

$$F(S, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_0^\infty \Phi(S') e^{ln\left(\frac{S'}{S}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)^2} \frac{dS'}{S'}, \tag{120}$$

Što odgovara generaliziranom riješenju Black – Scholesove jednadžbe dane izrazom (94). U slučaju Europske opcije poziva $\Phi(S') = (S' - K)$, te nakon uvrštavanja u (120) i primjene algebre dobivamo Black – Sholesovu formulu (88).

Pod ekvivalentnom martingalnom mjerom Q cijena dionica u Black – Sholesovom modelu prati geometrijsko Brownovo gibanje s prosječnom stopom povrata jednakom bezrizičnoj kamatnoj stopi r. Čini se kao da su svi ulagači „oslobođeni rizika“, u smislu da su spremni investirati u rizične dionice premda je njihova očekivana zarada jednaka onome što bi dobili od bankovnog računa (kamate, bez rizika). Upravo zbog toga se metoda procjenjivanja dionica pomoću ekvivalentne martingalne mjere naziva se *vrednovanje bez rizika*. Naravno, stvarni ulagači nisu oslobođeni rizika. Ipak, na uspješnom tržištu postoji „poseban referentni sustav“ gdje na ulagače možemo gledati kao da uistinu posluju bez rizika.

7. Iznad standarndnog modela financija 1: Ne – Gaussova raspodjela

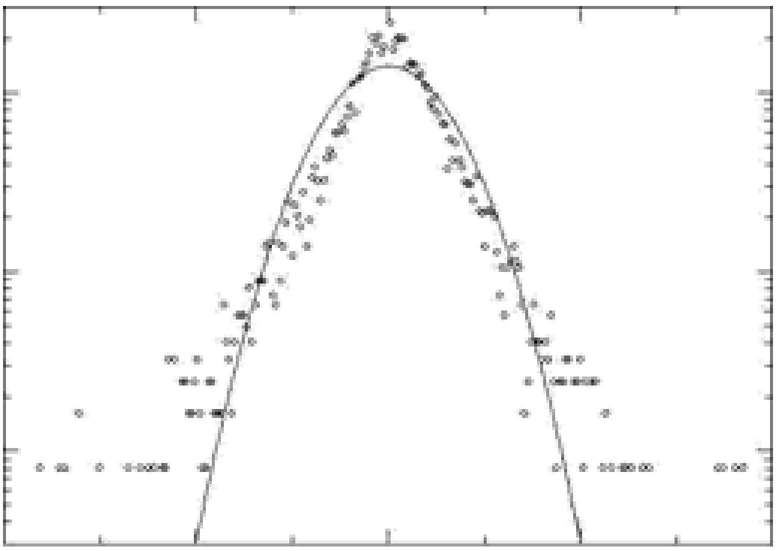
Vidjeli smo u prethodnom poglavlju kako je Black – Scholesov model snažan teorijski model: kompletan je, efikasan, bez arbitraže i Gaussovski (u smislu normalne raspodjele dionica). Bitno pitanje je pripadanje realnog tržišta takvom sustavu.

Postoje dva glavna načina odstupanja realnog tržišta od standarnog Black – Scholesovog modela:

i. Odstupanje profita od normalne raspodjele.
ii. Postojanje efekata dugoročne memorije na vremenske serije.

U poglavlju ćemo diskutirati o mogućnosti odstupanja cijena dionica od Gaussove raspodjele i da slijede Lévyev proces, a u sljedećem poglavlju o tome kako eleminirati drugi načina.

Mandelbrot je 1963. prvi pronašao odstupanja cijena dionica od Gaussove raspodjele. Analizirao je cijene pamuka na različitim razmjenama te pronašao da raspodjela profita pada puno sporije nego Gaussova. Na sl. 12 vidimo opisano ponašanje za S&P 500 index.



Slika 12 – Prikaz raspodjele dnevnog povrata S&P 500 indexa.[1]

Na slici je također prikazana i Gaussova raspodjela koja izgleda kao parabola. Iz slike vidimo odstupanje „repa“ u usporedbi s Gaussovom raspodjelom.

Gaussova raspodjela je posebna zbog dva razloga. Prvi je Teorem središnjeg teorema koji pokazuje da će zbroj beskonačno mnogo neovisnih slučajnih varijabli konvergirati Gaussovoj varijabli. Drugi razlog je stabilnost raspodjele, u smislu da zbroj dvije neovisne Gaussove slučajne varijable daje neovisnu Gaussian varijablu. Francuski matematičar Paul L$\acute{e}$vy odredio je novu stabilnu raspodjelu, tj. cijeli skup raspodjela kojima pripada i Gaussova.

U nastavku ćemo se upoznati s L$\acute{e}$vyevom stabilnom raspodjelom i njenom upotrebom u financijama.

7.1. Stabilna Lévyeva raspodjela

Pretpostavimo slučajnu varijablu X sa funkcijom gustoće vjerojatnosti $p(x)$. Prisjetimo se karakteristične funkcije $\varphi(z)$ slučajne varijable X, koja je Fourierov transformat njegove funkcije gustoće vjerojatnosti $p(x)$:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{izx} dx. \tag{121}$$

Neka su X_1 i X_2 dvije nezavisne slučajne varijable sa funkcijama gustoće vjerojatnosti $p_1(x_1)$ i $p_2(x_2)$. S obzirom da su X_1 i X_2 nezavisne, funkcija gustoće vjerojatnosti zbroja $X = X_1 + X_2$ je skup originalnih funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(s) p_2(x-s) ds.$$

Pretpostavimo da je funkciju $\varphi(z, 2)$ karakteristična funkciju od X. Teorem o konvoluciji navodi da je Fourierov transformat skupa umnožak Fourierovih transformatora iz čega slijedi:

$$\varphi(z, 2) = \varphi_1(z) \varphi_2(z). \tag{122}$$

Isto tako, pretpostavimo da X_1 i X_2 imaju jednake raspodjele,tj. :

$$X_1 =^d X_2, \tag{123}$$

ili

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = \varphi(z). \tag{124}$$

Iz (123) i (124) slijedi:

$$\varphi(z, 2) = [\varphi(z)]^2.$$

Općenito, ukoliko vrijedi $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, gdje su X_i nezavisne i identično raspodijeljeneslučajne varijable, tada:

$$\varphi(z, N) = [\varphi(z)]^N. \tag{125}$$

Funkcijama gustoća vjerojatnosti zbroja N jednako raspodijeljenih slučajnih varijabli razlikovat će se od funkcija gustoće vjerojatnosti individualnih varijabli. No, postoji posebna vrsta raspodjele, stabilna raspodjela, za koju vrijedi da je funkcija gustoće vjerojatnosti zbroja jednakog oblika kao i individialne funkcije gustoće vjerojatnosti.

Raspodjela vjerojatnosti $p(x)$ je stabilna ukoliko za svaki $N \geq 2$ postoje brojevi $a_N > 0 \ i \ b_N$ takvi da, ako su $X_1, \ldots, X_N$ identične raspodijeljene slučajne varijable sa raspodjelom $p(x)$, tada:

$$X_1 + \cdots + X_N =^d a_n X_i + b_N. \tag{126}$$

Raspodjela je stabilna ako je njena forma invarijantna na translaciju ili dilataciju. Ukoliko $p(x, N)$ označava gustoću vjerojatnosti od $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ te su X_i identično raspodijeljene varijable sa stabilnom raspodjelom $p(x)$, tada iz (126) proizlazi:

$$p(x, N) = \frac{1}{a_N} p\left(\frac{x - b_N}{a_N}\right). \tag{127}$$

Stabilnost raspodjele vjerojatnosti dobro je interpretirana s financijskog stajališta. Pretpostavimo da varijable X_i predstavljaju dnevni prirast dane financijske imovine. Stabilnost predstavlja očuvanje raspodjele unutar vremenskih promjena. Kao što smo već ranije spomenuli, Gaussov raspodjela je stabilna. Karakteristična funkcija normalne varijable N(0,σ) je $\varphi(z) = e^{-(\sigma^2/2)z^2}$, iz koje umjesto (125) proizlazi

$\varphi(z,N) = e^{-(N\sigma^2/2)z^2}$. Tada je zbroj N identično raspodijeljenih normalnih varijabli noramalno raspodijeljen sa standardnom devijacijom $\sqrt{N\sigma}$, tj. $X =^d N(0, \sqrt{N\sigma})$, koja implicira:

$$p(x,N) = \frac{1}{\sqrt{N}} p\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right). \tag{128}$$

U slučaju Gaussove raspodjele dobivamo $a_N = \frac{1}{\sqrt{N}}$ i $b_N = 0$.

Gledajući podklasu simetrijske raspodjele, karakteristična funkcija dana je sa:

$$\varphi_\alpha(z) = e^{-a|z|^\alpha}, \tag{129}$$

gdje vrijedi $0 < \alpha \leq 2$ i $a > 0$. Parametar α nazivamo eksponent stabilnosti dok a nazivamo faktor razmjera. Koristeći inverz Fourierovog transformata od $\varphi_\alpha(z)$ dobivamo pripadajuću funkciju gustoće vjerojatnosti $p_\alpha(x)$:

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(z) e^{-izx} dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-az^\alpha} \cos(zx) dz\,. \tag{130}$$

Možemo izračunati samo dvije vrijednosti α u gore navedenom integralu i tada vrijedi:

- $\alpha = 1$, Lorentzova ili Cauchyeva raspodjela:

$$p(x) = \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + 4a^2}.$$

- $\alpha = 2$, Gaussova raspodjela:

$$p(x) = \frac{1}{8\pi a} e^{-x^2/4a^2}.$$

Lévyeva raspodjela nije definirana za $\alpha > 2$, zbog toga jer funkcija može poprimiti oblik (130) gdje nije pozitivna u cijeloj domeni.

Za arbitražu α funkcija gustoća vjerojatnosti $p_\alpha(x)$ ne može se naći u zatvorenom obliku (izraz koji se može opisati konačnim brojem operacija), asimetrično ponašanje javlja se za velike x te se lako izračuna iz (130). [6] Dobivamo :

$$p_\alpha(x) \approx \frac{C_\alpha}{|x|^{1+\alpha}}, \qquad |x| \to \infty, \tag{131}$$

gdje

$$C_\alpha = \frac{a}{\pi}\Gamma(1+\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}. \tag{132}$$

Vidimo da Lévyieva raspodjela za $\alpha < 2$ ima svojstvo ponašanja skaliranja za velike x, tj. $p(x)$ pada s potencijom. Za simetričnu stabilnu raspodjelu vrijedi $b_N = 0$. Korištenjem (125) i (129) računamo faktor dilatacije a_N u (127) kao:

$$a_N = N^{1/\alpha}, \tag{133}$$

pa (127) postaje:

$$p_\alpha(x,N) = \frac{p_\alpha(N^{1/\alpha}x)}{N^{1/\alpha}}, \tag{134}$$

iz čega proizlazi:

$$p(0,N) = \frac{p(0)}{N^{1/\alpha}}. \tag{135}$$

Upotrebom navedene relacije procjenjuje se index α Lévyeve raspodjele.

7.2. Modelirana Lévyeva raspodjela

Kako bi zaobišli problem beskonačnih varijanci u Lévyevoj raspodjeli, predloženo je nekoliko različitih recepata u radu. Općenito možemo ih zapisati kao:

$$p(x) = p_\alpha(x)\Phi(x), \tag{136}$$

gdje $\Phi(x)$ predstavlja „cut-off“ funkciju pomno izabranu kako bi varijanca raspodjele bila konačna. Kao primjer, navedena su dva izbora korištena radi modeliranja raspodjela cijena financijske imovine:

- ATLD – koristimo heavisideovu step fukciju $\Theta(x)$ koja je karateristična po svom svojstvu rasta od 0-1, a ostale vrijednosti ne može poprimiti.
- ETLD – koristimo eksponencijalnu funkciju sa faktorom normalizacije.

S obzirom da modelirana Lévyeva raspodjela ima konačnu varijancu, tada po središnjem graničnom teoremu raspodjele zbroj $X = X_1 + \dots + X_N$ od N identično raspodijeljenih varijabli takva raspodjela konvergira Gaussovoj raspodjeli za veliki N. Konvergencija je jako spora, za financijske podatke je u redu od 10 dana.

7.3. Lévyeva raspodjela u financijama

L$\acute{e}$vyeva raspodjela primjenjuje se kod modeliranja. Npr. Mantegna & Stanley [4] ih koriste radi modeliranja raspodjela promjena indexa S&P 500 dionica American Stock Exchange. Analizirali su podatke visoke frekvencije tijekom vremenskog perioda od siječnja 1984 do prosinca 1989. Iz prvobitnog vremenskog niza $Y(t)$ vrijednosti indeksa, uzeti su vremenski nizovi odgovarajući promjenama indexa tijekom intervala od N minuta:

$$Z_N(t) \equiv Y(t+N) - Y(t) \tag{137}$$

Tada se računa empirijska funkcija gustoće vjerojatnosti $p(z,N)$i analizira skaliranje $p(0,N)$ sa N. Log-log grafom $P(0,N)$ pokazuje linearno ponašanje, kao što smo i predvidjeli sa (135), koeficijentom nagiba $\alpha = 1.4$ za $30 < N < 1000$ minuta. Za $N > 10^4$ nagib $p(0,N)$ se približava -0.5, što pokazuje svojstvo konvergencije Gaussovoj raspodjeli. U L$\acute{e}$vyevom režimu (za mali N), ipak rep empririjske funkcije gustoće vjerojatnosti pada sporije nego u slučaju Gaussa, ali brže od čiste L$\acute{e}$vyeve raspodjele sa pripadnim eksponentom α, dobivenim iz gore navedenih argumenata skaliranja. Navedene činjenice predlažu upotrebu modeliranih L$\acute{e}$vyeve distibucije radi modeliranja raspodjela. Bouchaud i Potters [5] otkrili su da je vjerojatnost od 15 minuta promjene S&P 500 indeksa opisana pomoću ETLD sa $\alpha = 1.5$.

ETLD su koristili Miranda & Riera u proučavanju dnevnih prirasta Ibovesta indexa u periodu od 1986-2000. Iz dnevnih konačnih vrijednosti $Y(t)$ Ibovesta indeksa, dobiven je vremenski niz za prirast u intervalima od N dana:

$$r_N(t) = \log Y(t+N) - \log Y(t)\,, \tag{138}$$

Te su izračunali odgovarajuću funkciju gustoće vjerojatnosti za $p(r,N)$.

U upotrebi su i druge aplikacije L$\acute{e}$vyevog procesa u financijama. Model za određivanje cijena opcija diskutiran u prethodnim poglavljima gdje cijena imovine, na koju se opcija odnosi, prati modelirani L$\acute{e}$vyev proces.

8. Iznad standardnog modela financija 2

8.1. Fraktalno Brownovo gibanje

Fraktalno Brownovo gibanje (FBG) je Gaussov proces $\{W_H(t), t > 0\}$ sa srednjom vrijednosti jednakoj nuli te stacionarnim povećanjem, čija varijanca i kovarijanca su dane sa:

$$E[W_H^2(t)] = t^{2H} \quad (139)$$

$$E[W_H(s)W_H(t)] = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - |t-s|^{2H}), \quad (140)$$

Gdje $0 < H < 1$. FBG $W_H(t)$ je samosličan proces:

$$W_H(at) =^d a^H W_H(t), \quad (141)$$

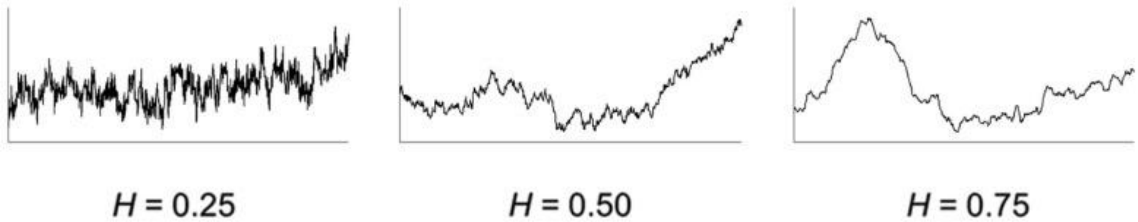
za svaki $a > 0$. Prema tome, putanja FBG je fraktalna krivulja sa fraktalnom dimezijom $D = {}^1/_H$. Parametar H nazivamo samoslični eksponent ili *Hurst-ov eksponent.* U slučaju $H = 1/2$, proces $W_H(t)$ odnosi se na uobičajno Brownovo gibanje gdje su povećanja $X_t = W_H(t+1) - W_H(t)$ statistički nezavisna, odgovarajući bijelom šumu.

U slučaju $H \neq 1/2$ povećanja X_t, poznata kao fraktalni bijeli šum, prikazuju dugoročnu korelaciju u smislu da:

$$E[X_{t+h}X_t] \approx 2H(2H-1)h^{2H-2} \qquad za\ h \to \infty, \quad (142)$$

što možemo vidjeti iz (139) i (140).

Ako $1/2 < H < 1$ povećanja FBG su pozitivno korelirana, kažemo da proces $W_H(t)$ pokazuje stabilnost, dok u slučaju $0 < H < 1/2$ povećanja su negativno korelirana i proces ne pokazuje dosljednost. Uzorak puta FBG sa H=0.25, H=0.50 i H=0.75 prikazan je na slici 12.



Slika 13- Uzorak puta fraktalnog Brownovog gibanja [1]

Metode koje koristimo za procjenu veličine *H* upoznat ćemo u sljedećem potpoglavlju.

8.2. Fluktuacijska analiza

Pretpostavimo vremenski $niz\, r(t), t = 1, \ldots, T,$ koji odgovara dnevnom prirastu financijske imovine. U cilju izvršavanja DFA najprije je potrebno integrirati originalni vremenski niz $r(t)$ radi dobivanja cjelokupnog vremenskog niza $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{t'=1}^{t} (r(t') - r), \quad t = 1, \ldots, T, \tag{143}$$

Gdje je:

$$r = \frac{1}{T} \sum_{t'=1}^{T} r(t'). \tag{144}$$

Zatim je potrebno podijeliti X(t) u N vremenskih intervala koji se ne preklapaju, I_n, jednake veličine τ, gdje $n = 0,1, \ldots N - 1$ i N odgovara cjelobrojnom djelu od T/τ. Potrebno je upoznati funkciju $Y_\tau(t)$ koja je definirana kao:

$$Y_\tau(t) = a_n + b_n t \quad \text{za} \quad t \in I_n, \tag{145}$$

Gdje su koeficijent $a_n\ i\ b_n$ najmanji kvadratni linaerni fit od $X(t)$ u intervalu I_n. Konačno dobivamo izraz za povećanu funkciju fluktacije $F(\tau)$ definiranu kao:

$$F(\tau) = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{1}{n\tau} \sum_{t=1}^{N\tau} [X(t) - Y_\tau(t)]^2}, \tag{146}$$

gdje S predstavlja standardnu devijaciju podataka

$$S = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t\ \ =1}^{T} (r_t - r)^2}. \tag{147}$$

Hrustov eksponent H dobivamo skaliranjem $F(\tau)$:

$$F(\tau) = C\tau^H, \tag{148}$$

gdje je C konstanta nezavisna o vremenskom kašnjenju τ. Iz odnosu u izrazu (148) proizlazi ravna linija čiji nagib odgovara eksponentu H, a linerarnom regresijom empirijske $F(\tau)$ dobivamo H. Vrijednosti H dobivene ovom metodom ovise o odabiru intervala u kojem primjenujemo linearnu prilagodbu. Kako bi to izbjegli, oslanjamo se na činjenicu da se za fraktcijsko Brownovo gibanje, fluktacijske funkcije se računaju prema:

$$F_H(\tau) = C_H\tau^H, \tag{149}$$

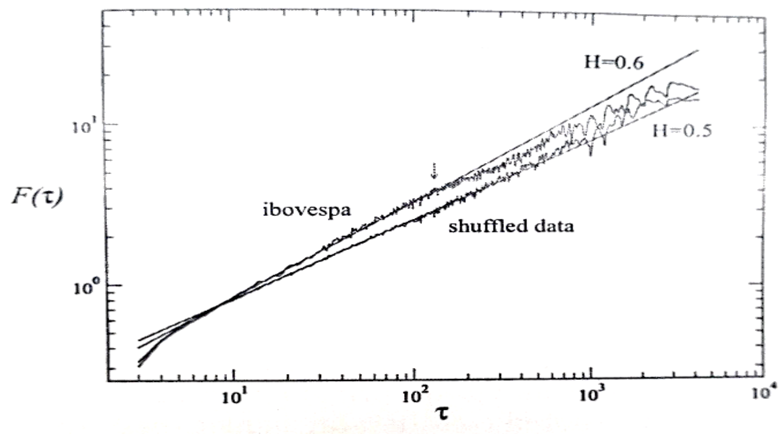
gdje je:

$$C_H = \left[\frac{2}{2H+1} + \frac{1}{H+2} - \frac{2}{H+1}\right]^{1/2}. \tag{150}$$

U izrazu (149) smo dodali indeks H funkciji da bi bilo jasno da se odnosi na $W_H(t)$. Relacije (149) i (150) omogućavaju izračun eksponenta H.

8.3.Fraktalno Brownovo gibanje u financijama

Hurstov eksponent tijekom vremena računao se koristeći razne alate i metode ali najpoznatiji način je DFA, ranije spomenut. Primjer DFA-a primijenjen na Ibovespov stock indeks povrata nalazi se na slici 13, te je prikazujan gornjom krivuljom. Na slici viši pravac odgovara teorijskoj krivulji $F_H(\tau)$ danoj sa (149) sa $H = 0.6$, gdje je $\tau \approx 130$ dana. S obzirom da je $H > 0.5$ Ibovespov indeks pokazuje dosljednost. Za $\tau > 130$ dana podaci odudaraju od početnog skaliranja te prelaze u režim nagiba bližem $1/2$ iz čega proizlazi gubitak "memorije" Ibovespovog indeksa nakon vremenskog perioda od 6 mjeseci.



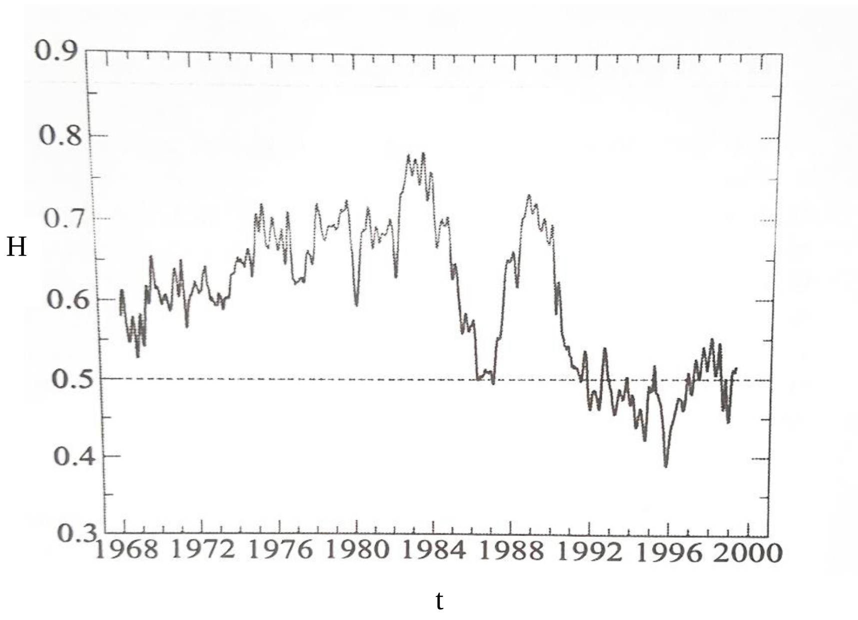
Slika 14 – Fluktacijska funkcija $F_H(\tau)$ u ovisnosti o τ.[1]

Isto tako, na slici se nalazi odgovarajuća $F_H(\tau)$ dobivena za podatke Ibovespog indeksa. U tom slučaju imamo gotovo savršeno skaliranje sa $H = {}^1\!/_2$.

Hurstov eksponent računa se za različite financijske vremenske nizove. U slučaju indeksa dionica, Hurstov eksponent za velika i razvijenija tržišta jednak je ${}^1\!/_2$ dok manja tržišta karakterizira $H > {}^1\!/_2$ što predstavlja efikasnost razvijenijeg tržišta.

Važno je napomenuti kako je znatna vremenska promjenjivost eksponenta H indeksa dionica pronađena te u tome slučaju ne postoji mogućnost modeliranja u terminima stacionarnog stohastičkog procesa. Stoga stacionarna pretpostavka samo gruba aproksimacija. Nadalje, vremenska ovisnost Hurstovog eksponeneta naznačuje da određeni proces posjeduje svojstvo multifraktalnosti više nego monofraktalnosti.

Vremenski ovisan Hurstov eksponenet promatran je za Brazilsko tržište dionica. Radi analize efekta inflacije i ekonomskih planova, Costa i Vasconcelos izračunali su vremenski varijajući Hurstovov eksponenet za Ibovespa povrate, za period od 1968-2001. Slična analiza prikazana je na slici 14. Vidimo iz slike da tijekom vremenskog perioda od 1970-1980 krivulja $H(t)$ nalazi se iznad ${}^1\!/_2$, gdje se izuzetak događa oko 1986 gdje H pada prema ${}^1\!/_2$. Efekt padanja je uzrokovan izdavanjem Cruzado ekonomski plan. Ranih 1990-tih, nakon izdavanja Collor Plans, primjećujemo drastičan pad krivulje $H(t)$ prema ${}^1\!/_2$ nakon čega se zadržava oko ${}^1\!/_2$.



Slika 15 – Hurstov eksponent za Ibovespu kao funkcija vremena[1]

Nakon izdavanja novih ekonomskih planova, H se smanjuje. Vladina intervencija u tržište sastavljena je radi upoznavanja „anti-dosljedan“ efekt koji rezultira redukcijom H. Nakon 1990 krivulja $H(t)$ pada ispod $1/2$. Ta činjenica potvrđuje opisanu razinu razvoja tržišta.

8.4. Procjenjivanje opcija FBG modelom

U prethodnom potpoglavlju vidjeli smo da Hurstov eksponenet može poprimiti vrijednost različitu od $1/2$. U tom slučaju standarndni Black – Sholesov model nije upotrebljiv zbog pretpostavke H= 0.5 za povratke koji prate Brownovo gibanje. Prikladniji model bio bi fraktalno Brownovo gibanje (FBG). Tada cijena dionica S slijedi geometrijsko fraktalno Brownovo gibanje dano sa:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_H, \tag{151}$$

gdje je $W_H(t)$ standarndno FBG.

Rješenje fraktalne stohastičke diferencijalne jednadžbe dobivene koristeći fraktalne Itô integrale izgleda kao:

$$S(t) = S_0 e^{(\mu t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \sigma W_H}. \tag{152}$$

Kao i standardni Black – Scholesov model, fraktalni je potpun i bez arbitraže.

U fraktalnom Black – Scholesovom modelu, cijena opcije poziva sa izvršnom cijenom K i vremenom dospijeća T dana je sa:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{153}$$

gdje su:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}} \tag{154}$$

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{K}\right) + + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}}. \tag{155}$$

U ovom slučaju cijena opcija rezultira višim iznosom nego onom danim standardnom formulom.

9. Metodički dio [17]

U vrijeme kada se promjene na znanstvenoj razini odvijaju vrlo brzo, nastava u školama bi trebala odražavati te promjene i prilagoditi se novim očekivanjima. Nažalost, unatoč brojnim prijedlozima i mogućnostima pristupa učenicima i gradivu, velik broj profesora i dalje se drži tradicionalnog, predavačkog načina iznošenja gradiva. Takav pristup ima mnoge nedostatke poput jednosmjernosti predavanja, pasivnosti i nezainteresiranosti učenika. [16]

Interaktivna istraživački usmjerena nastava se temelji upravo na toj ideji. Pomoću istraživačkog oblika nastave razvija se i razumijevanje fizike, znanje o funkcioniranju znanosti te brojne važne sposobnosti, a ne samo činjenično znanje. Interaktivna nastava ima naglasak na razvijanju kognitivnih sposobnosti jer učenici nisu pasivni kao u tradicionalnom načinu predavanja nego aktivno sudjeluju u nastavi. Da bi se to postiglo, učenike je potrebno staviti u situacije u kojima im je omogućeno samostalno razmatranje problema koje će trebati analizirati, usporediti s prethodno poznatim situacijama i razmisliti o mogućim rješenjima. Nastavnik vodi učenike kroz razmišljenje i zaključivanje. Kroz razgovor s učenicima nastavnik može identificirati učeničke pretkoncepcije i pomoći im u ispravljanju krivih ideja i pojednostavljenog zaključivanja. Na taj način učenici sami mogu primijetiti pogreške, te ih shodno tome ispraviti umjesto da pokušavaju novo znanje prilagoditi svojim postojećim konceptima. Za uspješno održavanje interaktivne istraživački usmjerene nastave potrebno je zainteresirati i motivirati učenike za sudjelovanje u nastavi. To se može postići na više načina: usmjerenom raspravom, pomoću konceptualnih pitanja s karticama, kooperativnim rješavanjem zadataka u grupama, interaktivnim izvođenjem pokusa te uporabom računala u nastavi. [16]

Kako bismo ostvarili istraživački pristup nastavi, nastavni sat treba imati određenu strukturu koja se sastoji od uvoda, središnjeg dijela (istraživačkog) i završnog dijela.

Uvodni dio sata započinje otvaranjem problema uvodnim pitanjem ili opservacijskim pokusom, ako uvodimo novu pojavu, koji će motivirati učenike. Prikupljamo njihove ideje i usmjeravamo ih pravim pitanjima na potreban put kako bi došli do teme sate i naslova.

Središnji dio započinje postavljanjem istraživačkog pitanja. Cilj istraživačkog pitanja je istraživanje i analiziranje nove pojave koju smo uveli u uvodnom dijelu sata. Kroz vođeno istraživanje učenici istražuju svojstva nove pojave a moguće je da učenici sami predlažu pokuse kojima bi istražili novu pojavu. Prije izvođenja eksperimenta nastavnik treba zatražiti da predvide što će se dogoditi, a nakon izvođenja da opišu što su opazili. Nastavnik ih vodi u istraživanju postavljanjem pitanja. Nakon izvedenih zaključaka, dolazi do konstrukcije modela i matematičkog opisa.

Završni dio sata nastavnik koristi kako bi provjerio učeničko razumjevanje novih koncepata i radi povezivanja određenog dijela gradiva. Ostvaruje to različitim interaktivnim nastavnim metodama poput konceptualnih pitanja na koja učenici odgovaraju podizanjem kartica, rješavanjem zadataka, aplikacijskim pokusom i dr.

Priprema za nastavni sat: Brownovo gibanje

Promatrajući zrnca peludi u vodi, Brown je opazio da se zrnca peludi nesprestano gibaju mijenjajući smjer svog gibanja zbog sudaranja s molekulama gdje putanja nije pravocrtna nego cik – cak. U nastavi koristimo Brownovo gibanje u svrhu zaključivanja o nasumičnom gibanju molekula, kako bi izgradili čestični model tvari.

Ova se nastavna jedinica izvodi u drugom razredu srednje škole. Ovdje opisani tijek nastave je predviđen za jedan školski sat u gimnazijama.

Obrazovni ishodi:

Nakon održane nastave, učenici će moći

- Opisati Brownovo gibanje
- Objasniti Brownovo gibanje pomoću čestičnog modela tvari
- Objasniti povezanost nasumičnog gibanja molekula i temperature

Tijekom sata će razvijati sposobnosti:

- Logičkog razmišljanja i zaključivanja
- Promatranja i opažanja
- Usmenog i pismenog izražavanja

Odgojni ishodi:

Vrijednosti koje će učenici usvajati tijekom sata su:

- Izražavanje vlastitog mišljenja
- Razvijanje interesa za znanost
- Uvažavanje tuđeg mišljenja
- Aktivno sudjelovanje u raspravi.

Uvodni dio

UVODNI PROBLEM: **Botaničar Robert Brown je u 19. stoljeću pogledao pod mikroskopom pelud u vodi i otkrio da se pelud giba. Prvo je pomislio da je to znak da je pelud živa, no kad je ponovio pokus s čađom ustanovio je da se isto događa i s njom.**

Mi ćemo sada pogledati neke slične primjere.

Upoznavanje učenika s dimnom komorom kojom ćemo promatrati čestice dima u zraku.

Pomoću dimne komore može se promatrati Brownovo gibanje čestica dima u zraku. Dimna komora je smještena u crnoj plastičnoj kutiji, u kojoj se nalazi i žarulja te cilindrična leća koje nam služe za bolje promatranje čestica dima.

Kutiju ćemo pričvrstiti na stolić mikroskopa koji povećava 10 puta. Odvrnemo čep s plastične bočice za dim, na koji je pričvršćena dovodna cjevčica i fitilj. Pripalimo donji kraj fitilja i pustimo ga da gori nekoliko sekundi, zatim ugasimo plamen i vratimo cjevčicu i fitilj u bocu, a bocu dobro zatvorimo. Nakon što se bočica napuni sa dimom, lagano se pritisne kako bi se iz cjevčice pojavio oblak dima. Cjevčicu stavimo u dimnu komoru te pritisnemo bočicu. Nakon toga uklonimo cjevčicu te zatvorimo poklopac koji se nalazi na kutiji. Pozivamo učenike do mikroskopa kako bi pogledali čestice dima ili projiciramo sliku s mikroskopa na zastor.

Što uočavate?

Učenici iskazuju svoja opažanja i vodimo ih do ideje da su opažene svijetle točke čestice dima koje se gibaju u zraku.

Skicirajte putanju jedne od čestica? Kako se čestice gibaju?

Nakon skiciranja, učenici uočavaju da ne postoji pravilnosti u putanji čestice te se čestice gibaju nasumično.

Slika 16– putanja nasumičnog gibanja čestice[preuzeto sa simulacije http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/]

Sličan primjer ćemo pogledati na filmu koji prikazuje čestice mliječne masti u vodi. Promatrajte gibanje tih čestica.

https://www.youtube.com/watch?v=f4mp4TWYfBs

Što uočavate, kako se gibaju nakupine masti koje vidimo?

Učenici nakon filma uočavaju odsutstvo pravilnosti u putanji nakupina mliječne masti, te gibanje uspoređuju s gibanjem čestica dima u zraku.

Takvo gibanje naziva se nasumično gibanje. Robert Brown je prvi uočio takvo nasumično gibanje čestica, u pokusu s česticama peludi u vodi. Gibanje je dobilo naziv po njemu.

Uvodimo naslov i temu nastavnog sata : Brownovo gibanje.

Središnji dio

ISTRAŽIVAČKO PITANJE 1: Kako objasniti opaženo Brownovo gibanje čestica dima u zraku ili nakupina mliječne masti u vodi?

Pokus 1. Staviti u drveni okvir (30 cm* x 30*cm) čelične kuglice promjera 4mm i pluteni čep promjera 1 cm na grafoskop. Izvodimo kružno gibanje drvenog okvira pri čemu okvir udara čelične kuglice koje se sudaraju međusobno i sa plutenim čepom.

Što uočavate?

Učenici uočavaju sudaranje čeličnih kuglica s plutenim čepom te kao razlog gibanja plutenog čepa navode sudare s čeličnim kuglicama.

Zatim proučavamo broj sudara čeličnih kuglica sa suprotnih strana plutenog čepa te tražimo iznos i smjer ukupne sile koja djeluje na čep.

Učenici iznose svoje mišljenja te zaključuju da broj sudara sa suprotnih strana plutenog čepa nije jednak pa stoga iznos sile nije jednak nuli. Isto tako zbog stalne promjene smjera sudara, mijenja se i smjer ukupne sile na čep.

U kojem smjeru se čep giba?

U smjeru veće sile.

Što se događa prilikom sudara?

Vodimo raspravu kako bi se učenici prisjetili impulsa sile i njegovu povezanost s promjenom količine gibanja.

U kojem će se smjeru pluteni čep gibati prilikom sudaranja?

U smjeru većeg impulsa sile.

Što možete zaključiti na temelju pokusa o gibanju molekula zraka ili vode (koje ne vidite)?

Molekule zraka ili vode se gibaju nasumično i sudaraju međusobno i sa plutenim čepom. Tako mu predaju impuls sile te se pluteni čep giba u smjeru najvećeg impulsa.

ISTAŽIVAČKO PITANJE 2: Kako temperatura utječe na nasumično gibanje molekula?

Pokus 2: Stavljamo kocku šećera u dvije vode, toplu i hladnu te promatramo brzinu otapanja šećera bez miješanja.

Učenici svoja predviđanja zapisuju u bilježnicu te nakon izvođenja pokusa, iznose svoja opažanja.

Opazili su da se kocka puno brže otopila u toploj vodi.

Ukazujemo im na razliku u temperaturi te dvije vode.

Zatim povezujemo brzinu otapanja kocke šećera s brojem sudara čestica vode o kocku. Zbog čega se kocka otopila? Da li nam treba više ili manje sudara da bi se kocka brže otopila?

Učenici zaključuju da se čestice vode sudaraju s šećerom što vodi do otapanja šećera te nam je potrebno više sudara da se šećer brže otopi.

Prema viđenom, što možemo reći na kojoj temperaturi ćemo imati više sudara?

U toploj vodi, odnosno na većoj temperaturi.

U kojoj se vodi onda molekule brže gibaju?

U svrhu povezivanja broja sudara s brzinom čestice koristimo navedenu simulaciju. Na simulaciji su prikazane čestice, veće i manje, koje se sudaraju. Možemo mijenjati njihovu energiju i promatramo njihovo gibanje i broj sudara pri promjeni energije.

http://labs.minutelabs.io/Brownian-Motion/

Što uočavate da se događa povećanjem energije?

Učenici uočavaju da promjenom energije čestice mijenjaju svoju brzinu te zaključuju da mijenjamo kinetičku energiju.

Što se događa s brojem sudara povećanjem energije?

Učenici uočavaju da se broj sudara čestica povećao s povećanjem energije te povezuju povećanje broja sudara s povećanjem brzine čestica.

Što možemo zaključiti o brzini nasumičnog gibanja molekula iz dosad viđenog pokusa i simulacije?

Brzina nasumičnog gibanja molekula se povećava sa temperaturom.

Završni dio

U završnom dijelu koristimo konceptualno pitanje s karticama na primjeru primjene Brownovog gibanja.

Kapljicu prehrambene boje stavimo u čašu s hladnom vodom i u čašu sa toplom vodom. U kojem slučaju će kapljica doći prije do dna čase? Ponuđeni odgvori su:

A) Topla voda

B) Hladna voda

Rj: Hladna voda. U toploj vodi čestice vode će se više sudarati s kapljicom pa će je raspršiti po vodi. U hladnoj vodi, zbog manje sudara, kapljica će nesmetano proći do dna.

Zatim tražimo od učenika da smisle primjer u svakodnevnom životu gdje mogu naći primjenu koji mogu objasniti pomoću nasumičnog gibanja čestica.

Jedan od primjera je širenje mirisa kroz prostor.

10. Zaključak

U ovom diplomskom radu, prezentirala sam osnove interdisciplinarnog područja, *ekonofizike*. Na početku su navedeni osnovni pojmovi povezani sa financijskim derivatima te proces određivanja njihovih cijena pomoću binomnih modela. Nakon uvodnog dijela, opisano je Brownovo gibanje i stohastički izračuni, potrebni za određivanje cijena financijskih imovina u kontinuiranom vremenu. Nastavila sam diskutiranjem Standardnog modela financija (SMF), Black – Sholesov modela, korištenog za procjenjivanje financijskih derivata. Naravno, fundamentalni termini potrebni u modelu poput martingala, također su diskutirani. Na kraju sam se osvrnula na nedavni rad fizičara pri opisavanju realnih tržišta, gdje SMF nije potpuno primjenjiv te su dodane popravke Black – Sholesovog modela. Fizičari su predložili i druge metode rješavanja problema određivanja cijene derivata, metode prvobitno razvijene radi suočavanja sa fizičkim problemima.

11. Literatura

[1] Giovani L. Vasconcelos, A guided walk down Wall Street: an intoduction to econophysics, Brazil, 2004.

[2] J.C.Hull, Futures and other derivatives, Prentice-Hall, Upper Saddle River. 3rd ed NJ, 1997.

[3] F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, McGraw-Hill, Tokyo,1965.

[4] R. Mantegna and H. E. Stanley , An introduction to econophysics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[5] J. P. Bouchaud and M. Potters, Theory od financial risks: from statistical physics to risk management, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[6] A. N. Shiryaev, Essentials of stochastic finance: facts, models, theory, World Scientific, Singapore, 1999.

[7] T. Mikosch, Elementary stochastic calculus: with finance in view, World Scientific, 1998.

[8] B. Oksendal, Stochastic differential equations: an introduction with applications. 3th ed. Springer, Berlin, 1998.

[9] F. Black and M. Scholes, J. Polit. econ. 81, 637 (1973).

[10] R. C. Merton, Bell J. Econ. manag. Sci. 4, 144 (1973).

[11] Gardiner, C. W. Handbook of stochastic methods : for physics, chemistry, and the natural sciences. 2nd ed. Berlin : Springer, 1985

[12] A.G. Malliaris and W. A. Brock, Stochastic methods in economics and finance. North- Holland, Amsterdam, 1982.

[13] P. Billingsley, Probability and measure. 3rd ed. New York, Wiley, 1995.

[14] J. Voit, The statistical mechanics od financial markets, Springer, Berlin, 2003.

[15] H. M. Gupta and J. R. Campansha, Pysica A 268, 231 (1999).

[16] Hrastić, K. Helij neonski laser, Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2016.

[17] Maja Planinić, Prezentacija iz kolegija Metodika nastave fizike 1, Prirodoslovno - Matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, ak.godina 2016/2017.

[18] Marija Beg, Prezentacija iz kolegija Makroekeonomija, Ekonomski fakultet u Zagrebu, ak. Godina 2016/2017.