

# Disipativna Burgersova jednađba

---

**Karmelić, Ivona**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:475748>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-06-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Ivona Karmelić

**DISIPATIVNA BURGERSOVA**  
**JEDNADŽBA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
Prof. dr. sc. Siniša Slijepčević

Zagreb, Srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Onima koji su tu u mojim usponima i padovima - majci, tajci i Maroju*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Prostori funkcija</b>	<b>3</b>
1.1 Banachovi i Hilbertovi prostori . . . . .	3
1.2 $L^p$ prostori . . . . .	6
1.3 Prostori Soboljeva . . . . .	7
1.4 Banachov teorem o fiksnoj točki . . . . .	9
<b>2 Sektorijalni operatori</b>	<b>10</b>
2.1 Osnovni pojmovi i svojstva . . . . .	11
<b>3 Egzistencija i jedinstvenost</b>	<b>17</b>
3.1 Linearni problem . . . . .	17
3.2 Nelinearni problem . . . . .	21
<b>4 Disipativna Burgersova jednadžba</b>	<b>27</b>
4.1 Fizikalna interpretacija . . . . .	27
4.2 Lokalna egzistencija i jedinstvenost rješenja . . . . .	29
4.3 Cole - Hopf transformacija . . . . .	34
<b>Bibliografija</b>	<b>36</b>

# Uvod

U ovom radu ćemo promatrati nelinearnu disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (1)$$

uz određene početne uvjete. Konstanta  $\varepsilon > 0$  se naziva koeficijent viskoznosti, pa se gornja jednadžba ponekad naziva viskozna Burgersova jednadžba. Uz viskoznu Burgersovu jednadžbu od interesa je i neviskozna Burgersova jednadžba

$$u_t + uu_x = 0 \quad (2)$$

koja predstavlja skalarni zakon sačuvanja. Pokaže se ([4]) da za  $\varepsilon \rightarrow 0$  rješenje od (1), uz neke dodatne uvjete, konvergira prema rješenju od (2).

Burgersova jednadžba ima široku primjenu u mehanici fluida, kod modeliranja vode u nezasićenom ulju, dinamike tla u vodi, turbulentne difuzije, kozmologije i seizmologije. Prvi ju je uveo engleski matematičar H. Bateman. Nizozemski matematičar J. M. Burgers ju je predložio kao matematički model za turbulenciju ([3]). Hopf i Cole su je proučavali u kontekstu dinamike plinova.

U Poglavlju 1 definirat ćemo važne pojmove iz funkcionalne analize i pokazati neke rezultate. Od posebnog interesa će nam biti Hilbertovi i Banachovi prostori, koje ćemo definirati i navesti važne primjere tih prostora i njihova svojstva.

U Poglavlju 2 definirat ćemo posebnu klasu linearnih operatora na Banachovim prostorima, takozvane sektorijalne operatore, i pokazati neka njihova korisna svojstva.

U Poglavlju 3 promatrat ćemo nelinearni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t, u), \quad t > t_0 \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

pri čemu ćemo pretpostavljati da je  $A$  sektorijalan operator i  $f$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ . Navest ćemo i dokazati nužne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja gornjeg problema.

U Poglavlju 4 ćemo promatrati inicijalni problem za Burgersovu jednadžbu

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= \varepsilon u_{xx}, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega, \quad \varepsilon > 0, \\u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega.\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je operator  $A = \varepsilon u_{xx}$  sektorijalan i funkcija  $f = uu_x$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ , što će nam omogućiti da pokažemo da disipativna Burgersova jednadžba ima jedinstveno rješenje. Jednadžbu (1) ćemo linearizirati Hopf - Cole transformacijom kako bi dobili eksplicitnu formulu za rješenje.

# Poglavlje 1

## Prostori funkcija

### 1.1 Banachovi i Hilbertovi prostori

U ovom poglavlju ćemo definirati neke pojmove iz funkcionalne analize i iskazat ćemo Banachov teorem o fiksnoj točki. Osnovne reference su [1], [2], [7], [8], [10] i [11]. Od posebnog interesa će nam biti potpuni unitarni prostori, takozvani Hilbertovi prostori, čiju definiciju i važne primjere navodimo u nastavku.

**Definicija 1.1.1.** *Kažemo da niz vektora  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  u normiranom prostoru  $X$  konvergira prema vektoru  $x \in X$  ako*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

*Kažemo da je niz  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchyjev ako*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tako da } n_0 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

**Definicija 1.1.2.** *Kažemo da je normiran prostor  $X$  potpun ili Banachov prostor ako svaki Cauchyjev niz u  $X$  konvergira u  $X$ . Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

**Definicija 1.1.3.** *Neka je  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  niz u normiranom prostoru  $X$ . Kažemo da red  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  konvergira prema vektoru  $x \in X$  ako je  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , pri čemu je  $(s_n)$  niz parcijalnih suma;  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ .*

*Kažemo da red konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ .*

**Propozicija 1.1.4.** *Neka je  $(x_n)$  Cauchyjev niz u normiranom prostoru  $X$ . Tada vrijedi*

1. *Skup  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  je ograničen.*



2. Za svaki niz pozitivnih brojeva  $(\varepsilon_n)$  postoji podniz  $(x_{p(n)})$  niza  $(x_n)$  sa svojstvom

$$\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \varepsilon_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Dokaz.* 1. Za  $\varepsilon = 1$  postoji  $n_0$  takav da

$$n_0 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Posebno, za svaki  $n \geq n_0$  imamo

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| < 1 + \|x_{n_0}\|.$$

2. Neka je zadan niz  $(\varepsilon_n)$ . Nađimo  $n_1$  takav da

$$n_1 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon_1.$$

Stavimo  $p(1) = n_1$ . Nadalje, postoji  $n_2 > n_1$  takav da

$$n_2 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon_2.$$

Stavimo  $p(2) = n_2$ . Sada matematičkom indukcijom dolazimo do niza  $(x_{p(n)})$  za koji vrijedi tvrdnja. □

**Propozicija 1.1.5.** *Neka Cauchyjev niz  $(x_n)$  u normiranom prostoru  $X$  ima podniz  $(x_{p(n)})$  koji konvergira prema  $x \in X$ . Tada je  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .*

*Dokaz.* Za zadani  $\varepsilon$  možemo naći  $n_1$  takav da

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i možemo naći  $n_2$  takav da

$$n, m \geq n_2 \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ . Za  $n \geq n_0$  je  $p(n) \geq n \geq n_0$ . Sada za  $n \geq n_0$  imamo

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{p(n)}\| + \|x_{p(n)} - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

**Teorem 1.1.6.** *Normiran prostor  $X$  je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  iz  $X$  konvergira u  $X$ .*

*Dokaz.* Neka je  $X$  potpun i  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$ . Tada je niz parcijalnih suma tog reda Cauchyjev pa za  $\varepsilon > 0$  postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  takav da

$$m > n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=1}^m \|x_k\| - \sum_{k=1}^n \|x_k\| = \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon.$$

Također, za  $m > n \geq n_0$  vrijedi

$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| < \varepsilon.$$

Dakle, niz  $(s_n)$  je Cauchyjev. Kako je prostor  $X$  potpun, red  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  konvergira u  $X$ .

Obratno, neka svaki apsolutno konvergentan red iz  $X$  konvergira u  $X$ . Neka je  $(x_n)$  proizvoljan Cauchyjev niz u  $X$ . Na temelju Propozicije 1.1.4 možemo naći podniz  $(x_{p(n)})$  niza  $(x_n)$  takav da vrijedi

$$\|x_{p(n+1)} - x_{p(n)}\| < \frac{1}{n^2}.$$

Očito red  $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{p(k+1)} - x_{p(k)}\|$  konvergira.

Po pretpostavci, konvergira i red  $\sum_{k=1}^{\infty} [x_{p(k+1)} - x_{p(k)}]$  pa, po definiciji, konvergira i njegov niz parcijalnih suma  $(t_n)$ ;  $t_n = \sum_{k=1}^n [x_{p(k+1)} - x_{p(k)}] = x_{p(n+1)} - x_{p(1)}$ .

Dakle, postoji  $x \in X$  takav da  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{p(n+1)} - x_{p(1)}$ , to jest  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p(n)} = x + x_{p(1)}$ . Iz Propozicije 1.1.5 slijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x + x_{p(1)}$  pa zaključujemo da je prostor  $X$  potpun.  $\square$

## 1.2 $L^p$ prostori

Neka je  $(\Omega, M, \mu)$  prostor mjere i  $f$  kompleksna funkcija na  $\Omega$ , izmjeriva u odnosu na  $\sigma$ -algebru  $M$  (u  $\mathbb{C}$  promatramo  $\sigma$ -algebru generiranu svim otvorenim skupovima).

Za  $1 \leq p < \infty$  definiramo

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Poistovjećujući funkcije koje se razlikuju na skupu mjere 0, definiramo

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ izmjeriva, } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Promatramo prostor

$$L^2(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ izmjeriva, } \int_{\Omega} |f|^2 d\mu < \infty\}, \quad (1.1)$$

na kojem je definiran skalarni produkt

$$(f|g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$$

i iz njega izvedena norma

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza koji se može pronaći u [1].

**Teorem 1.2.1.**  $L^2(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa normom  $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ .

Više o svojstvima  $L^p$  prostora i o prostorima mjere može se pronaći u [1] i [7].

### 1.3 Prostori Soboljeva

Prostori Soboljeva ([2], [10]) su bitna klasa beskonačnodimenzionalnih Banachovih prostora koji u svojoj definiciji sadrže slabu derivaciju (Definicija 1.3.3). U posebnom slučaju (Definicija 1.3.6) prostori Soboljeva su unitarni, dakle Hilbertovi prostori.

#### $W^{k,p}$ prostori

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup.

**Definicija 1.3.1.** Nosač funkcije  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo kao

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Definiramo prostor test funkcija kao

$$D(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \subset \Omega\}.$$

**Definicija 1.3.2.** Kažemo da je linearan funkcional  $f$  na  $C_c^\infty(\Omega)$  distribucija ako za svaki kompaktni skup  $K \subset \Omega$  postoji konstanta  $C < \infty$  i  $k \in \mathbb{N}$  tako da vrijedi

$$|f(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_{k,\infty}, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \text{ supp } \varphi \subset K.$$

Za  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  distribuciju definiramo kao

$$f_u(\varphi) = \int_{\Omega} u\varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Skup svih distribucija označavamo s  $D'(\Omega)$ .

**Definicija 1.3.3.** Neka je  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  i  $\alpha$  multiindeks. Kažemo da  $u$  ima slabu derivaciju ako postoji  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  tako da vrijedi

$$(-1)^\alpha \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi = \int_{\Omega} v \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Takav  $v$  je jedinstven ([10]) i pišemo  $D^\alpha u = v$ .

Sada smo u mogućnosti definirati takozvane prostore Soboljeva.

**Definicija 1.3.4.** Neka je  $k \in \mathbb{N}_0$  i  $p \in [1, +\infty]$ . Definiramo prostore

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \text{ postoji, } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ multiindex, } |\alpha| \leq k\}.$$

Na prostoru  $W^{k,p}(\Omega)$  definiramo normu na sljedeći način

- $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, p < \infty;$
- $\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$

**Teorem 1.3.5.** *Prostor  $W^{k,p}(\Omega)$  je Banachov prostor sa normom  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ .*

## $H^k$ prostori

**Definicija 1.3.6.** *Za  $p = 2$  i  $k \in \mathbb{N}_0$  definiramo prostore*

$$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \quad (1.3)$$

sa normom

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Za  $u, v \in H^k(\Omega)$  definiramo unutarnji produkt sa

$$(u|v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} (D^\alpha u)(\overline{D^\alpha v}).$$

**Teorem 1.3.7.**  *$H^k(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa normom  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ .*

Od interesa će nam biti i sljedeći prostori

$$H_0^k(\Omega) = \{u \in H^k(\Omega) : u = 0 \text{ na } \partial\Omega\} \subset H^k(\Omega), \quad (1.5)$$

sa normom nasljeđenom iz  $H^k(\Omega)$ .

Više o svojstvima prostora Soboljeva, kao i dokaze gornjih teorema, može se pronaći u [10].

## 1.4 Banachov teorem o fiksnoj točki

**Definicija 1.4.1.** *Neka je  $X$  Banachov prostor i  $f : X \rightarrow X$  funkcija. Kažemo da je  $x \in X$  fiksna točka ako vrijedi  $f(x) = x$ .*

**Definicija 1.4.2.** *Neka je  $X$  Banachov prostor. Kažemo da je funkcija  $f : X \rightarrow X$  Lipschitzova ako postoji  $L > 0$  takav da*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

*Kažemo da je funkcija  $f$*

- *neekspanzivna ako je  $L = 1$ ,*
- *kontrakcija ako je  $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in X$ ,  $x \neq y$ ,*
- *$\kappa$ -kontrakcija ako je  $L = \kappa < 1$ .*

**Teorem 1.4.3.** (Banachov teorem o fiksnoj točki / Princip kontrakcije) *Neka je  $X$  Banachov prostor,  $Y \subseteq X$  zatvoren podskup i  $f : Y \rightarrow Y$   $\kappa$ -kontrakcija. Tada  $f$  ima točno jednu fiksnu točku  $x$ .*

Gornji teorem navodimo bez dokaza koji se može pronaći u [2] i [11]. Bit će nam važan za dokaz jedinstvenosti rješenja nelinearnog problema (3.3). Koristit ćemo ga u dokazu Teorema 3.2.3.

## Poglavlje 2

# Sektorijalni operatori

Poglavlje započinjemo primjerom, a kasnije ćemo generalizirati i dati definiciju sektorijalnih operatora i navesti neka njihova svojstva.

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  otvoren interval. Definiramo operator  $A$  na sljedeći način

$$Au(x) = -K \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad x \in \Omega \quad (2.1)$$

pri čemu je  $u$  glatka funkcija na  $\Omega$  takva da  $u(x) = 0$ , za  $x \in \partial\Omega$ .

Za glatke funkcije  $u$  i  $v$  vrijedi

$$(Au, u) = -K \int_{\Omega} u''(x)u(x) dx = K \int_{\Omega} (u'(x))^2 dx \geq 0,$$

i

$$(Au, v) = -K \int_{\Omega} u''(x)v(x) dx = (u, Av).$$

Koristeći Friedrichsov teorem ([6]), zaključujemo da je  $A$  proširenje hermitskog gusto definiranog linearnog operatora na  $L^2(\Omega)$ . Vrijedi

$$D(A) = \{u \in L^2(\Omega) : Au \in L^2(\Omega)\} = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega). \quad (2.2)$$

Spektar operatora  $A$  je

$$\sigma(A) = \{\lambda_n = \frac{k\pi^2}{|\Omega|^2} n^2 : n = 1, 2, \dots\}$$

s pripadnim svojstvenim funkcijama

$$u_n = \sqrt{\frac{2}{|\Omega|}} \sin\left(\frac{n\pi x}{|\Omega|}\right)$$

pri čemu je

$$(u_n | u_m) = \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

i

$$Au_n = \lambda_n u_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Projekcija na  $n$ -tu svojstvenu funkciju je dana s

$$E_n(v)(x) = u_n(x)(u_n | v)$$

Nadalje, imamo

$$A^\alpha u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^\alpha E_n(u)$$

i

$$(\lambda I - A)^{-1} u = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n)^{-1} E_n(u), \quad \lambda \neq \lambda_n, \quad \forall n.$$

Iskoristimo li činjenicu

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} u^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n | u)^2$$

slijedi da za svaki  $\alpha \geq 0$  vrijedi

$$D(A^\alpha) = \{v \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\alpha} (u_n | v)^2 < \infty\}.$$

Posebno ćemo promatrati operator  $A$ , definiran sa (2.1), na prostoru  $L^2(\Omega)$  i pokazat ćemo da je taj operator sektorijalan (Poglavlje 4.2).

Prije toga navodimo definiciju i neka posebna svojstva sektorijalnih operatora.

## 2.1 Osnovni pojmovi i svojstva

**Definicija 2.1.1.** *Neka su  $X$  i  $Y$  Banachovi prostori. Kažemo da je linearan operator  $A : X \rightarrow Y$  zatvoren ako*

$$x_n \rightarrow x \text{ u } X \text{ i } Ax_n \rightarrow y \text{ u } Y \Rightarrow Ax = y.$$



**Definicija 2.1.2.** Neka su  $X$  i  $Y$  Banachovi prostori i neka je  $A : X \rightarrow Y$  ograničen linearan operator. Rezolventni skup od  $A$  definiramo sa

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A),$$

gdje je sa

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ nije bijekcija}\}$$

definiran spektar linearnog operatora. Za  $\lambda \in \rho(A)$  definiramo rezolventni operator  $R_\lambda : X \rightarrow X$  sa

$$R_\lambda u = (\lambda I - A)^{-1}u.$$

**Teorem 2.1.3.** Za  $\lambda, \mu \in \rho(A)$  vrijedi

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu. \quad (2.3)$$

**Definicija 2.1.4.** Neka je  $X$  Banachov prostor i  $A$  linearan operator na  $X$ . Kažemo da je  $A$  sektorijalan operator ako je zatvoren gusto definiran operator takav da je za neke  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $M > 1$  i  $a$  realan, skup

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda : \varphi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$$

i

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \quad \forall \lambda \in S_{a,\varphi}.$$

**Definicija 2.1.5.** Analitička polugrupa na Banachovom prostoru  $X$  je familija  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$  neprekidnih linearnih operatora na  $X$  koja zadovoljava

- $T(0) = I$ ,  $T(t)T(s) = T(t + s)$  za  $t, s \geq 0$
- $T(t)x \rightarrow x$  kada  $t \rightarrow 0^+$ , za svaki  $x \in X$
- $t \rightarrow T(t)x$  je realna analitička za  $t \in (0, \infty)$ , za svaki  $x \in X$ .

Infinitesimalni generator  $L$  gornje polugrupe je definiran sa

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (T(t)x - x),$$

čija je domena dana sa

$$D(L) = \{x \in X : Lx \text{ postoji}\}$$

i pišemo  $T(t) = e^{Lt}$ .

**Teorem 2.1.6.** *Ako je  $A$  sektorijalan operator, tada je  $-A$  infinitezimalni generator analitičke polugrupe  $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ , pri čemu je*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda$$

gdje je  $\Gamma$  kontura u  $\rho(-A)$ , pri čemu  $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$  kada  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , za neki  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Nadalje,  $e^{-At}$  može biti analitički nastavljen u sektor  $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$  koji sadrži pozitivnu realnu os, i ako je  $\operatorname{Re} \lambda > a$  za  $\lambda \in \sigma(A)$ , tada za  $t > 0$  vrijedi

$$\|e^{-At}\| \leq C e^{-at}$$

i

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{-at}$$

za neku konstantu  $C$ . Konačno,  $\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At}$  za  $t > 0$ .

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti  $a = 0$  i  $\|(\lambda + A)^{-1}\| \leq \frac{M}{\lambda + |\delta|}$  za  $|\pi - \arg \lambda| \geq \phi$  za neke konstante  $\delta$ ,  $M > 0$  i  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Inače, zamijenimo  $A$  sa  $A + aI$ .

Odaberimo  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$  i definirajmo  $e^{-At}$  gornjim integralom. Uočimo da gornji integral konvergira apsolutno ako je  $t > 0$ . Po Cauchyjevom teoremu vrijedi da integral ostaje nepromijenjen ako konturu  $\Gamma$  pomaknemo u desno za malu udaljenost. Označimo pomaknutu konturu sa  $\Gamma'$ . Tada za  $t, s > 0$  imamo

$$\begin{aligned} e^{-At} e^{-As} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t} (\lambda I + A)^{-1} e^{\mu s} (\mu I + A)^{-1} d\mu d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s} (\mu - \lambda)^{-1} [(\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1}] d\mu d\lambda \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili rezolventni identitet (2.3). No, za  $\lambda \in \Gamma$ ,  $\mu \in \Gamma'$  vrijedi

$$\int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\mu - \lambda)^{-1} d\lambda = 0,$$

i

$$\int_{\Gamma'} e^{\mu s} (\mu - \lambda)^{-1} d\mu = 2\pi i e^{\lambda s}$$

pa je

$$e^{-At} e^{-As} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda(t+s)} (\lambda I + A)^{-1} d\lambda = e^{-A(t+s)}.$$

Dakle,  $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$  je polugrupa. Uočimo da za  $\varepsilon \in (0, \theta - \frac{\pi}{2})$  integral konvergira uniformno u svakom kompaktnom skupu u  $\{|\arg \lambda| < \varepsilon\}$  pa je tu polugrupa analitička.

Stavimo li  $\mu = \lambda t$  uz  $t > 0$  imamo

$$\|e^{-At}\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\mu} \left( \frac{\mu}{t} I + A \right)^{-1} \frac{d\mu}{t} \right\| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{\mu}| \frac{|d\mu|}{|\mu|},$$

i

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\delta} \int_{\Gamma} |e^{\mu}| \frac{|d\mu|}{|\mu|} \cdot \frac{1}{t} = \frac{C}{t}.$$

Pokažimo da vrijedi  $e^{-At}x \rightarrow x$  kad  $t \rightarrow 0^+$  za svaki  $x \in X$ .

Kako je  $\|e^{-At}\| \leq C$  za svaki  $t \geq 0$  i  $D(A)$  je gust skup u  $X$ , dovoljno je pokazati tvrdnju za  $x \in D(A)$ .

Neka je  $x \in D(A)$  i  $t > 0$ . Imamo sljedeće

$$e^{-At}x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} [(\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}] x d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{-1} e^{\lambda t} A(\lambda I + A)^{-1} x d\lambda,$$

pa je

$$\|e^{-At}x - x\| \leq C \|Ax\| t.$$

Dakle,  $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$  je jako neprekidna polugrupa koja se proširuje u analitičku polugrupu u  $|\arg t| < \varepsilon$ .

Nadalje, za  $x \in D(A)$  i  $t > 0$  vrijedi

$$\frac{d}{dt} e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (\lambda I + A) (\lambda I + A)^{-1} x d\lambda = 0.$$

Za  $x \in D(A)$  i  $t \rightarrow 0^+$  slijedi

$$\frac{1}{t} (e^{-At}x - x) = -\frac{1}{t} \int_0^t e^{-As} Ax ds \rightarrow -Ax.$$

Dakle,  $-A$  je sadržan u generatoru  $G$  polugrupe.

Pokažimo da je  $-A$  zaista generator. Za  $\lambda \geq 0$  definiramo

$$R(\lambda)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x dt.$$

Za svaki  $x$  je  $e^{-At}x \in D(A)$  za  $t > 0$  i za  $\delta > 0$  vrijedi

$$A \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x dt = e^{-\lambda \delta} e^{-A\delta} x - \lambda \int_{\delta}^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} x dt.$$

Kako je  $A$  zatvoren,  $R(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$  za svaki  $\lambda \geq 0$ ,  $x \in X$ . No, ako je  $x \in D(G)$  onda je  $e^{-At}x \in D(G)$  za svaki  $t \geq 0$  i  $Ge^{-At}x = \frac{d}{dt}e^{-At}x = e^{-At}Gx$ . Sličan argument pokazuje da vrijedi

$$R(\lambda)(\lambda - G)x = x, \quad x \in D(G).$$

Dakle,  $D(G) \subset R(R(\lambda)) \subset D(A)$  pa je  $-A = G$ . □

Vrijedi i obrat gornjeg teorema, to jest ako  $-A$  generira analitičku polugrupu, onda je  $A$  sektorijalan operator ([6]). Više o teoriji polugrupa može se pronaći u [4].

**Definicija 2.1.7.** *Neka je  $A$  sektorijalan operator takav da  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ . Tada za svaki  $\alpha > 0$  definiramo*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \quad (2.4)$$

Nadalje, sa  $A^{\alpha}$  definiramo inverz od  $A^{-\alpha}$  i  $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ . Za  $\alpha = 0$  imamo identitetu na  $X$ .

U nastavku navodimo neka svojstva operatora  $A^{\alpha}$  bez dokaza. Osnovne reference su [6], [9] i [10].

**Teorem 2.1.8.** *Ako je  $A$  sektorijalan operator na  $X$  sa svojstvom  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ , tada je za svaki  $\alpha > 0$  operator  $A^{-\alpha}$  ograničen linearan operator koji je injektivan na  $X$  koji zadovoljava  $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$  za  $\alpha, \beta > 0$ . Nadalje, za  $0 < \alpha < 1$  vrijedi*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

**Teorem 2.1.9.** *Neka je  $A$  sektorijalan operator i  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$ . Tada za  $\alpha \geq 0$  postoji  $C_{\alpha} < \infty$  takva da*

$$\|A^{\alpha} e^{-At}\| \leq C_{\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t}, \quad \text{za } t > 0.$$

*Ako je  $0 < \alpha \leq 1$  i  $x \in D(A^{\alpha})$ , tada vrijedi*

$$\|(e^{-At} - 1)x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^{\alpha} \|A^{\alpha} x\|.$$

*Nadalje,  $C_{\alpha}$  je ograničena za svaki  $\alpha$  iz nekog kompaktnog intervala u  $(0, \infty)$ . Štoviše,  $C_{\alpha}$  je ograničena i za  $\alpha \rightarrow 0^{+}$ .*

**Definicija 2.1.10.** Neka je  $A$  sektorijalan operator na Banachovom prostoru  $X$ . Za svaki  $\alpha \geq 0$  definiramo

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha)$$

sa normom

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \quad x \in X^\alpha,$$

pri čemu je  $A_1 = A + aI$  i  $a$  odabran tako da  $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$ . Nadalje, različiti izbori broja  $a$  daju ekvivalentne norme na  $X^\alpha$ .

**Teorem 2.1.11.** Vrijedi sljedeće

1. Ako je  $A$  sektorijalan operator na Banachovom prostoru  $X$ , onda je  $X^\alpha$  Banachov prostor s normom  $\|\cdot\|_\alpha$  za  $\alpha \geq 0$  i  $X^0 = X$ .
2. Za  $\alpha \geq \beta \geq 0$  prostor  $X^\alpha$  je gust potprostor od  $X^\beta$  s neprekidnim ulaganjem.
3. Ako  $A$  ima kompaktni rezolventni skup, ulaganje  $X^\alpha \subset X^\beta$  je kompaktno za  $\alpha > \beta \geq 0$ .

Sve tvrdnje navedene u ovom poglavlju, kao i njihovi dokazi, mogu se pronaći u [6].

# Poglavlje 3

## Egzistencija i jedinstvenost

U ovom poglavlju promatramo inicijalni problem najprije za linearnu, a zatim i za nelinearnu jednadžbu. Navest ćemo nužne uvjete za egzistenciju rješenja koje ćemo iskoristiti da bismo pokazali egzistenciju rješenja nelinearne disipativne Burgersove jednadžbe (Poglavlje 4.2). Osnovne reference su nam [6], [9] i [10].

### 3.1 Linearni problem

Promatramo homogeni linearni Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= 0, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

pri čemu je  $A$  sektorijalan operator na Banachovom prostoru  $X$  i  $u_0$  zadan.

**Definicija 3.1.1.** *Rješenje problema (3.1) na  $(0, T)$  je neprekidna funkcija  $u : [0, T) \rightarrow X$  za koju vrijedi*

- $u$  je neprekidno diferencijabilna na  $(0, T)$ ,
- $u(t) \in D(A)$  za  $t \in (0, T)$ ,
- $u$  zadovoljava (3.1) na  $(0, T)$ , uz  $u(t) \rightarrow u_0$  na  $X$  kad  $t \rightarrow 0^+$

Iz Teorema 2.1.6 slijedi da je  $u(t) = e^{-At}u_0$  rješenje problema (3.1). Pokažimo da je to jedinstveno rješenje.

Neka je  $0 \leq s \leq t < T$  i  $v(t, s) = e^{-A(t-s)}u(s)$ , pri čemu je  $u(\cdot)$  proizvoljno rješenje od

(3.1) na  $(0, T)$ . Tada je preslikavanje  $s \rightarrow v(t, s)$  neprekidno na  $0 \leq s \leq t$  i neprekidno diferencijabilno na  $0 < s < t$  i vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial s} v(t, s) = e^{-A(t-s)} \frac{d}{ds} u(s) + A e^{-A(t-s)} u(s) = 0,$$

za  $0 < s < t$  pa je  $v(t, 0) = v(t, t)$ , to jest  $e^{-At} u_0 = u(t)$ .

Promotrimo nehomogeni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t), \quad t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

**Lema 3.1.2.** *Neka je  $f : (0, T) \rightarrow X$  lokalno Hölder neprekidna i  $\int_0^\rho \|f(s)\| ds < \infty$  za neki  $\rho > 0$ . Definirajmo*

$$F(t) = \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Tada je  $F(\cdot)$  neprekidna na  $[0, T]$ , neprekidno diferencijabilna na  $(0, T)$ , uz  $F(t) \in D(A)$  za  $t \in (0, T)$  i vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) + AF(t) &= f(t), \quad t \in (0, T), \\ F(t) &\rightarrow 0 \text{ u } X, \text{ kad } t \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

*Dokaz.* Za mali  $\rho > 0$  definiramo

$$\begin{aligned} F_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds, \quad \rho \leq t < T, \\ F_\rho(t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq \rho. \end{aligned}$$

Neka je  $f(s) = 0$  za  $s < 0$ . Tada vrijedi

$$\|F(t) - F_\rho(t)\| \leq \int_{t-\rho}^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds,$$

što teži u 0 kad  $\rho \rightarrow 0^+$ , uniformno na  $0 \leq t \leq t_0$ , za svaki  $t_0 < T$ .

Kako za  $0 \leq t \leq t+h \leq t_0$  vrijedi

$$F_\rho(t+h) - F_\rho(t) = (e^{-Ah} - I) \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-A(t+h-s)} f(s) ds,$$

što teži k 0 kad  $\rho \rightarrow 0^+$ , zaključujemo da je  $F_\rho$  neprekidna.

Dakle,  $F$  je neprekidna s  $[0, T)$  u  $X$  i

$$\|F(t)\| \leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+.$$

Za  $0 \leq s \leq t$  vrijedi  $e^{-A(t-s)} f(s) \in D(A)$  pa su Riemannove sume

$$\sum_{t-s_j \geq \rho} e^{-A(t-s_j)} f(s_j) \in D(A)$$

i

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} A \sum_{s \leq t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) \Delta s = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Operator  $A$  je zatvoren pa je  $F_\rho(t) \in D(A)$  i vrijedi

$$AF_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (e^{-A\rho} - e^{-At}) f(t).$$

Sada je

$$\|A e^{-A(t-s)}\| = o(|t-s|^{-1})$$

i

$$\|f(s) - f(t)\| = o(|t-s|^\theta),$$

za neki  $\theta > 0$  i  $s \rightarrow t^-$ . Stoga vrijedi

$$AF_\rho(t) \rightarrow \int_0^t A e^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (I - e^{-At}) f(t), \rho \rightarrow 0^+.$$

Dakle,  $F(t) \in D(A)$  za  $0 < t < T$ .

Neka je  $[t_0, t_1] \subset (0, T)$ . Kako je

$$\|f(t) - f(s)\| \leq K|t-s|^\theta, t, s \in [t_0, t_1], \theta > 0,$$



to vrijedi  $AF_\rho(t) \rightarrow AF(t)$  za  $t \in [t_0, t_1]$ , pa je

$$\begin{aligned} \|AF_\rho(t) - AF(t)\| &= \left\| (e^{-At} - I)f(t) + \int_{t-\rho}^t Ae^{-A(t-s)}(f(s) - f(t)) ds \right\| \\ &\leq \|(e^{-At} - I)f(t)\| + C \int_{t-\rho}^t (t-s)^\theta ds \rightarrow 0, \end{aligned}$$

za  $\rho \rightarrow 0^+$  uniformno po  $t \in [t_0, t_1]$ .

Konačno,  $F_\rho(t)$  je diferencijabilna za  $t > \rho$  i vrijedi

$$\frac{d}{dt}F_\rho(t) = -AF_\rho(t) + e^{-A\rho}f(t-\rho), \quad \rho < t < T. \quad (3.2)$$

Desna strana u (3.2) konvergira uniformno prema  $-AF(t) + f(t)$  na  $t \in [t_0, t_1] \subset (0, T)$ , za  $\rho \rightarrow 0^+$ , pa je  $F$  neprekidno diferencijabilna na  $(0, T)$  i vrijedi

$$\frac{d}{dt}F + AF = f(t).$$

□

**Teorem 3.1.3.** *Neka je  $A$  sektorijalan operator na  $X$ ,  $x_0 \in X$ ,  $f : (0, T) \rightarrow X$  lokalno Hölder neprekidna i  $\int_0^\rho \|f(t)\| dt < \infty$  za neki  $\rho > 0$ . Tada postoji jedinstveno (jako) rješenje  $u(\cdot)$  problema*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t), \quad t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

i dano je sa

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s) ds.$$

## 3.2 Nelinearni problem

Promatramo nelinearni problem

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u), \quad t > t_0, \quad u(t_0) = u_0. \quad (3.3)$$

pri čemu pretpostavljamo da je  $A$  sektorijalan operator takav da su razlomačke potencije (Definicija 2.4) operatora  $A_1 = A + aI$  dobro definirane i prostori  $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$  sa normom  $\|u\|_\alpha = \|A_1^\alpha u\|$  su definirani za  $\alpha \geq 0$ .

Nadalje, neka je  $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 1$  otvoren i  $f : U \rightarrow X$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ , to jest ako je  $(t_1, u_1) \in U$ , tada postoji okolina  $V \subset U$  od  $(t_1, u_1)$  takva da za  $(t, u), (s, v) \in V$  vrijedi

$$\|f(t, u) - f(s, v)\|_X \leq L(|t - s|^\theta + \|u - v\|_\alpha),$$

za neke konstante  $L, \theta > 0$ .

**Definicija 3.2.1.** *Rješenje Cauchyjevog problema (3.3) na  $(t_0, t_1)$  je neprekidna funkcija  $u : [t_0, t_1) \rightarrow X$  takva da vrijedi*

- $u(t_0) = u_0$  na  $(t_0, t_1)$
- $(t, u(t)) \in U$ ,  $u(t) \in D(A)$ , i  $u_t(t)$  postoji
- $t \mapsto f(t, u(t))$  je lokalno Hölder neprekidna
- $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s, u(s))\| ds < \infty$  za neki  $\rho > 0$
- $\frac{du}{dt} + Au = f(t, u)$  na  $(t_0, t_1)$ .

**Lema 3.2.2.** *Ako je  $u$  rješenje problema (3.3) na  $(t_0, t_1)$ , tada vrijedi*

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, u(s)) ds. \quad (3.4)$$

*Obratno, ako je  $u : (t_0, t_1) \rightarrow X^\alpha$  neprekidna funkcija i  $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \|f(s, u(s))\| ds < \infty$  za neki  $\rho > 0$  te vrijedi integralna jednadžba (3.4) za  $t_0 < t < t_1$ , tada je  $u(\cdot)$  rješenje diferencijalne jednadžbe (3.3) na  $(t_0, t_1)$ .*

*Dokaz.* Prva tvrdnja slijedi iz Definicije 3.2.1 i Teorema 3.1.3

Za dokaz obrata, pretpostavimo da je  $u \in C((t_0, t_1); X^\alpha)$  rješenje integralne jednadžbe (3.4). Pokažimo da je  $u$  lokalno Hölder neprekidna. Ako je  $t_0 < t < t + h < t_1$  onda vrijedi

$$u(t+h) - u(t) = (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}f(s, u(s)) ds + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, u(s)) ds.$$

Ako je  $0 < \delta < 1 - \alpha$ , tada po teoremu 2.1.9 za svaki  $z \in X$  vrijedi

$$\left\| (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}z \right\|_\alpha \leq C(t-s)^{-(\alpha+\delta)}h^\delta e^{a(t-s)}\|z\|$$

pa za  $t \in [t_0^*, t_1^*] \subset (t_0, t_1)$  imamo

$$\|u(t+h) - u(t)\|_\alpha \leq Ch^\delta.$$

Slijedi da je preslikavanje  $t \rightarrow f(t, u(t))$  lokalno Hölder neprekidno na  $(t_0, t_1)$  pa, po Teoremu 2.1.9,  $u$  rješava linearni problem

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + Av &= f(t, u(t)), \quad t \in (t_0, t_1), \\ v(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dakle,  $u$  je rješenje problema (3.3) na  $(t_0, t_1)$ . □

Ako nije drugačije naznačeno, od sada pa nadalje pretpostavljamo da vrijedi

- $A$  je sektorijalan operator,
- $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  otvoren,  $0 \leq \alpha < 1$ ,
- $f : U \rightarrow X$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ .

**Teorem 3.2.3.** *Za svaki  $(t_0, u_0) \in U$  postoji  $T = T(t_0, u_0) > 0$  tako da problem (3.3) ima jedinstveno rješenje na  $(t_0, t_0 + T)$ .*

*Dokaz.* Po Lemi 3.2.2, dovoljno je pokazati odgovarajući rezultat za integralnu formulu (3.4). Neka su  $\delta, \tau > 0$  takvi da je skup

$$V = \{(t, u) : t \in (t_0, t_0 + \tau), \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\} \subset U$$

i neka za  $(t, u_1), (t, u_2) \in V$  vrijedi

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq L\|u_1 - u_2\|_\alpha.$$

Označimo

$$B = \max_{[t_0, t_0+\tau]} \|f(t, u_0)\|$$

i odaberimo  $T \in (0, \tau]$  takav da vrijedi

$$\|(e^{-Ah} - I)u_0\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2}, \quad h \in [0, T]$$

i

$$M(B + L\delta) \int_0^T s^{-\alpha} e^{as} ds \leq \frac{\delta}{2},$$

pri čemu je

$$\|A_1^\alpha e^{-At}\| \leq Mt^{-\alpha} e^{at}, \quad t > 0.$$

Definiramo sljedeći skup

$$S = \{v : [t_0, t_0 + T] \rightarrow X^\alpha : v \text{ neprekidna}, \|v(t) - u_0\|_\alpha \leq \delta, t \in [t_0, t_0 + T]\}.$$

Tada je  $S$  potpun metrički prostor sa normom

$$\|v\|_S = \sup_{t \in [t_0, t_0+T]} \|v(t)\|.$$

Za  $v \in S$  definiramo preslikavanje  $G(v) : [t_0, t_0 + T] \rightarrow X$  formulom

$$G(v)(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, v(s)) ds.$$

Pokažimo da  $G$  preslikava skup  $S$  u njega samoga i da je  $G$  stroga kontrakcija.

Najprije uočimo da za  $t \in [t_0, t_0 + T]$  vrijedi

$$\begin{aligned} \|G(v)(t) - u_0\|_\alpha &\leq \|(e^{-A(t-t_0)} - I)u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\| (B + L\delta) ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + M(B + L\delta) \int_{t_0}^{t_0+T} (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds \leq \delta. \end{aligned}$$

Nadalje,  $G(v)$  je neprekidna sa  $[t_0, t_0 + T]$  u  $X^\alpha$  pa  $G$  preslikava  $S$  u samog sebe.

Neka su  $v, w \in S$  i  $t \in [t_0, t_0 + T]$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \|G(v)(t) - G(w)(t)\|_\alpha &\leq \int_{t_0}^t \|A_1^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| ds \\ &\leq ML\|v - w\|_S \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} ds, \end{aligned}$$

pa je

$$\|G(v) - G(w)\|_S \leq \frac{1}{2}\|v - w\|_S, \quad \forall v, w \in S.$$

Po Banachovom teoremu o fiksnoj točki (Teorem 1.4.3),  $G$  ima jedinstvenu fiksnu točku  $u$  u  $S$  koja je jedinstveno neprekidno rješenje integralne formule (3.4) i  $f(t, u(t))$  je ograničena za  $t \rightarrow t_0^+$ . Po Lemi 3.2.2  $u$  je jedinstveno rješenje problema (3.3) na  $(t_0, t_0 + T)$ .  $\square$

**Teorem 3.2.4.** (Maksimalni interval egzistencije) *Neka za svaki zatvoren i ograničen skup  $B \subset U$  vrijedi da je slika  $f(B)$  ograničen skup u  $X$ . Neka je  $u$  rješenje problema (3.3) na  $(t_0, t_1)$  i  $t_1$  je maksimalan, to jest rješenje ne postoji na  $(t_0, t_2)$  ako  $t_2 > t_1$ . Tada je ili  $t_1 = +\infty$  ili postoji niz  $(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow t_1$  kad  $n \rightarrow +\infty$  takav da  $(t_n, u(t_n)) \rightarrow \partial U$ . (Ako je  $U$  neograničen, točka u beskonačnosti je  $u \in \partial U$ .)*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $t_1 < +\infty$  ali da  $(t, u(t))$  nije u okolini  $\partial U$  za  $t \in [t_2, t_1]$ . Označimo tu okolinu sa  $N$  i uočimo da možemo uzeti  $N = U \setminus B$  i  $(t, u(t)) \in B$  za  $t \in [t_2, t_1]$ .

Pokažimo da postoji  $u_1 \in B$  takav da  $u(t) \rightarrow u_1$  u  $X^\alpha$  kad  $t \rightarrow t_1^-$ . Tada po Teoremu 3.2.3, uz  $u(t_1) = u_1$ , možemo proširiti rješenje van vremena  $t_1$ , što je kontradikcija s maksimalnošću od  $t_1$ .

Neka je  $C = \sup_{(t, u) \in B} \|f(t, u)\|$ . Pokažimo da je  $\|u(t)\|_\beta$  ograničena kad  $t \rightarrow t_1^-$  i  $\beta < 1$  proizvoljan. Uočimo da za  $\alpha \leq \beta < 1$  i  $t_2 \leq t < t_1$  vrijedi

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\beta &\leq \|A_1^{\beta-\alpha} e^{-A(t-t_0)}\| \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A_1^\beta e^{-A(t-s)}\| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \tilde{C} \left( (t-t_0)^{-(\beta-\alpha)} \|u(t_0)\|_\alpha + \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} ds \right), \end{aligned}$$

što je ograničeno kad  $t \rightarrow t_1^-$ .

Neka je  $t_2 \leq \tau < t < t_1$  pa imamo

$$u(t) - u(\tau) = \left( e^{-A(t-\tau)} - I \right) u(\tau) + \int_{\tau}^t e^{-A(t-s)} f(s, u(s)) ds.$$

Za  $\alpha < \beta < 1$  imamo

$$\|u(t) - u(\tau)\|_{\alpha} \leq C_1(t - \tau)^{\beta - \alpha} \|u(\tau)\|_{\beta} + C_2 \int_{\tau}^t (t - s)^{-\alpha} ds \leq C_3(t - \tau)^{\beta - \alpha}.$$

Dakle,  $\lim_{t \rightarrow t_1} u(t)$  postoji u  $X^{\alpha}$ . □

Prije iskaza i dokaza sljedećeg korolara navodimo pomoćnu tvrdnju. Tvrdnja se može naći u [6] kao poseban oblik Teorema 7.1.1.

**Lema 3.2.5.** (Gronwall) *Neka su  $a, b, \alpha, \beta$  nenegativne konstante takve da  $\alpha, \beta > 0$  i  $T \in (0, \infty)$ . Neka je  $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna funkcija takva da vrijedi*

$$0 \leq u(t) \leq at^{-\alpha} + b \int_0^t (t - s)^{-\beta} u(s) ds, \quad s.s. t \in [0, T].$$

Tada postoji konstanta  $M = M(b, \alpha, \beta, T) < \infty$  takva da vrijedi

$$0 \leq u(t) \leq aMt^{-\alpha}, \quad s.s. t \in (0, T].$$

**Korolar 3.2.6.** *Neka je  $U = (t, \infty) \times X^{\alpha}$  i  $\|f(t, u)\| < K(t)(1 + \|u\|_{\alpha})$ ,  $\forall (t, u) \in U$  pri čemu je  $K(\cdot)$  neprekidna na  $(t, \infty)$ . Ako je  $t > \tau$ ,  $u_0 \in X^{\alpha}$ , tada postoji jedinstveno rješenje problema (3.3) u  $(t_0, u_0)$  za sve  $t > t_0$ .*

*Dokaz.* Pretpostavimo da postoji  $t_n \rightarrow t_1 < \infty$  takav da  $\|u(t_n)\|_{\alpha} \rightarrow +\infty$ . Tada vrijedi

$$\|u(t)\|_{\alpha} \leq \|e^{-A(t-t_0)}\|_{\alpha} + \int_{t_0}^t \|A_1^{\alpha} e^{-A(t-s)}\| \cdot K(s)(1 + \|u(s)\|_{\alpha}) ds.$$

Iz Gronwallove nejednakosti (Lema 3.2.5) slijedi da  $\|u(t)\|_{\alpha}$  ostaje ograničena kad  $t \rightarrow t_1$ . □

**Teorem 3.2.7.** *Neka operator  $A$  ima kompaktan rezolventni skup, neka je  $B$  zatvoren i ograničen skup takav da  $\mathbb{R}^+ \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^{\alpha}$  te neka  $f$  preslikava sve ograničene skupove  $U$  u ograničene skupove u  $X$ . Ako je  $u(t; t_0, u_0)$  rješenje problema (3.3) na  $(t_0, \infty)$  i  $\|u(t; t_0, u_0)\|_{\alpha} < \infty$  kad  $t \rightarrow +\infty$ , onda je  $\{u(t; t_0, u_0)\}_{t > t_0}$  u kompaktnom skupu u  $X^{\alpha}$ .*

*Dokaz.* Ako je  $\alpha < \beta < 1$ , onda je, po Teoremu 2.1.11,  $X^\beta \subset X^\alpha$  kompaktno ulaganje i dovoljno je pokazati da je  $\|u(t; t_0, u_0)\|_\beta < \infty$  za  $t \geq t_0 + 1$ .

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$  i  $\|f(t, u(t; t_0, u_0))\| \leq C$  za svaki  $t \geq t_0$ . Imamo sljedeće

$$\|u(t; t_0, u_0)\|_\beta \leq M(t - t_0)^{-(\beta - \alpha)} e^{-\delta(t - t_0)} \|u_0\|_\alpha + MC \int_{t_0}^t (t - s)^{-\beta} e^{-\delta(t - s)} ds,$$

što je ograničeno za  $t \geq t_0 + 1$ .

□

## Poglavlje 4

# Disipativna Burgersova jednađba

U ovom poglavlju promatramo jednađbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (4.1)$$

gdje je  $\varepsilon > 0$  koeficijent viskoznosti. Jednađba je nelinearna parabolička i nazivamo je disipativna ili viskozna Burgersova jednađba.

Na temelju Poglavlja 3.2 pokazat ćemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja jednađbe (4.1). Opisat ćemo Hopf - Cole transformaciju, to jest metodu koja će nam dati eksplicitnu formulu za rješenje (Poglavlje 4.3).

### 4.1 Fizikalna interpretacija

Burgersova jednađba ima široku primjenu u mehanici fluida, kod modeliranja vode u nezasićenom ulju, dinamike tla u vodi, turbulentne difuzije, kozmologije i seizmologije. Prvi ju je uveo engleski matematičar H. Bateman. Nizozemski matematičar J. M. Burgers ju je predložio kao matematički model za turbulenciju ([3]). Hopf i Cole su je proučavali u kontekstu dinamike plinova.

#### Tok prometa

Promatramo tok automobila na cesti. Neka je  $\rho(t, x)$  gustoća automobila i  $f(t, x)$  tok prometa. Sa  $\bar{\rho}$  označimo restrikciju od  $\rho$  tako da  $0 \leq \bar{\rho} \leq \rho_{\max}$ , pri čemu je  $\rho_{\max}$  vrijednost kada je razmak između automobila najmanji mogući. Jednađba kontinuiteta daje

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (4.2)$$



Očekujemo da je  $f = v\bar{\rho}$ , pri čemu je  $v$  brzina, no vozači usporavaju kada se dovoljno približe drugom autu, što smanjuje gustoću pa tok ovisi o gradijentu gustoće

$$f(\bar{\rho}) = \bar{\rho} v(\bar{\rho}) - D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{x}}, \quad D = \text{const.} \quad (4.3)$$

Možemo pretpostaviti da vozači voze nekom konstantnom ograničenom brzinom  $v_{\max}$ , no povećanjem gustoće prometa vozači usporavaju pa imamo

$$v(\bar{\rho}) = \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} (\rho_{\max} - \bar{\rho}). \quad (4.4)$$

Ubacivanjem (4.3) i (4.4) u (4.2) slijedi

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \frac{d}{d\bar{x}} \left[ \frac{v_{\max}}{\rho_{\max}} (\rho_{\max} - \bar{\rho}) \bar{\rho} \right] = D \frac{\partial^2 \bar{\rho}}{\partial \bar{x}^2}.$$

Označimo li  $v_{\max} = \frac{x_0}{t_0}$ ,  $\rho = \rho_{\max} \bar{\rho}$ ,  $x = x_0 \bar{x}$  i  $t = t_0 \bar{t}$ , slijedi

$$\rho_t + [(1 - \rho)\rho]_x = \varepsilon \rho_{xx}, \quad \varepsilon = \frac{D}{v_{\max} x_0}, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Konačno, transformacija  $u = 2\rho - 1$  daje

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad -1 \leq u \leq 1,$$

što je upravo jednačba (4.1).

## 4.2 Lokalna egzistencija i jedinstvenost rješenja

U ovom poglavlju promatramo inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t(t, x) + uu_x(t, x) = \varepsilon u_{xx}(t, x), \quad (t, x) \in (t_0, \infty) \times \Omega, \quad (4.5)$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.6)$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti  $t_0 = 0$ . Pokazat ćemo da za gornji problem vrijede uvjeti iz Poglavlja 3.2. Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  i  $U \subset \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega)$  otvoren skup. Tvrdimo

- $A = \varepsilon u_{xx}$  je sektorijalan operator na  $L^2(\Omega)$ ,
- $F : U \rightarrow L^2(\Omega)$ ,  $F = uu_x$  je lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ .

Promatrat ćemo dva slučaja,  $\Omega = \mathbb{R}$  i  $\Omega = (0, 1)$ , i pokazat ćemo da u oba slučaja vrijede gornje tvrdnje za operator  $A$  i funkciju  $F$ .

$\Omega = \mathbb{R}$

U Poglavlju 2 naveli neka korisna svojstva operatora  $Au = u_{xx}$ , a sada ćemo pokazati da je taj operator sektorijalan. Promatramo operator  $A$  na  $L^p(\mathbb{R})$  za  $1 \leq p < \infty$ , odnosno na  $C_b(\mathbb{R})$

$$D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}), \quad p < \infty,$$

$$D(A_\infty) = C_b^2(\mathbb{R}),$$

sa normama

$$\|u\|_{W^{2,p}(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_x\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u_{xx}\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad p < \infty,$$

$$\|u\|_{C_b^2(\mathbb{R})} = \|u\|_\infty + \|u_x\|_\infty + \|u_{xx}\|_\infty.$$

U slučaju  $p < \infty$  derivaciju shvaćamo u slabom smislu.

**Propozicija 4.2.1.** *Vrijedi sljedeće*

1.  $\sigma(A_p) = (-\infty, 0]$  za svaki  $1 \leq p \leq \infty$ ,
2. Ako je  $|\lambda| = e^{i\varphi}$  za  $|\varphi| < \pi$ , tada je

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})}.$$

Gornju propoziciju ostavljamo bez dokaza i u nastavku navodimo neke tvrdnje koje se pokažu u dokazu. Dokaz se može pronaći u [9].

Pokaže se da je rješenje oblika

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left[ \int_{-\infty}^x e^{-\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y) dy + \int_x^{+\infty} e^{\sqrt{\lambda}(x-y)} f(y) dy \right],$$

te da vrijedi

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{1}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})} \|f\|_{\infty}.$$

Očito je  $A_{\infty}$  sektorijalan operator uz  $a = 0$  i  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

U slučaju  $p < \infty$  je bitna činjenica da je  $W^{2,p}(\mathbb{R})$  gust u prostoru glatkih funkcija  $C^{\infty}(\mathbb{R})$ . Koristeći Youngovu nejednakost ([7]) dobije se da vrijedi  $u \in D(A_p) = W^{2,p}(\mathbb{R})$ . (Detalji dokaza mogu se pronaći u [9].)

Već smo spomenuli da nam je od posebnog interesa operator  $A = \varepsilon u_{xx}$  na prostoru  $L^2(\mathbb{R})$  sa domenom  $D(A) = H^2(\mathbb{R})$ . Prema gore dokazanom, taj operator je sektorijalan uz  $a = 0$  i  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Neka je je  $F : [0, \infty) \times H_0^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  definirana sa

$$F(t, x, u) = u(t, x)u_x(t, x).$$

Uočimo da  $F$  ne ovisi eksplicitno o  $(t, x)$  pa za  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$  postoji okolina  $V \subset [0, \infty) \times H_0^1(\mathbb{R})$  takva da za  $(t, x, u), (s, x, u) \in V$  vrijedi

$$\|F(t, x, u) - F(s, x, u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |t - s|^{\theta}$$

za neki  $\theta > 0$ . Dakle,  $F$  je lokalno Hölder neprekidna po  $t$ .

Nadalje, fiksirajmo  $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ . Tvrdimo da postoji  $L > 0$  takav da za  $u, v \in H_0^1(\mathbb{R})$  vrijedi

$$\|F(t, x, u) - F(t, x, v)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq L\|u - v\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

to jest

$$\left( \int_{\mathbb{R}} [u(t, x)u_x(t, x) - v(t, x)v_x(t, x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq L \left( \int_{\mathbb{R}} [u(t, x) - v(t, x)]^2 + [u_x(t, x) - v_x(t, x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tvrđnju je dovoljno pokazati na prostoru  $X = H_0^1(\mathbb{R}) \cap \{\|u\|_\infty, \|u_x\|_\infty \leq A\}$ . Zbog principa maximuma vrijedi da ako je  $u_0 \in X$ , te rješenje postoji na  $[0, t)$ , tada je  $u(t) \in X$ . Vrijedi

$$\begin{aligned} \|F(u) - F(v)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} [uu_x - vv_x]^2 dx = \int_{\mathbb{R}} [uu_x - vu_x + vu_x - vv_x]^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} [(u-v)u_x + v(u_x - v_x)]^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}} [(u-v)^2 u_x^2 + v^2 (u_x - v_x)^2] dx \\ &\leq 2A^2 \int_{\mathbb{R}} [(u-v)^2 + (u_x - v_x)^2] dx \\ &= 2A^2 \|u - v\|_{H^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Dakle,  $F$  je Lipschitzova po  $u$ .

### Ograničeni interval uz Dirichletov rubni uvjet

Bez smanjenja općenitosti, možemo uzeti interval  $\Omega = (0, 1)$ . Promotrimo operator  $Au = u_{xx}$  uz homogene Dirichletove rubne uvjete. Imamo dva slučaja

$$\begin{aligned} D(A_p) &= \{u \in W^{2,p}(\Omega) : u(0) = u(1) = 0\} \subset L^p(\Omega), \quad p < \infty, \\ D(A_\infty) &= \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u(0) = u(1) = 0\}, \quad p = \infty, \end{aligned}$$

s normama kao i u prethodnoj sekciji.

**Propozicija 4.2.2.** *Operatori  $A_p : D(A_p) \rightarrow L^p(\Omega)$ ,  $p < \infty$  i  $A_\infty : D(A_\infty) \rightarrow C(\overline{\Omega})$  su sektorijalni operatori uz  $a = 0$  i  $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  proizvoljan.*

*Dokaz.* Neka je  $\mu = \sqrt{\lambda}$  za  $\lambda \notin (-\infty, 0]$  takav da  $\operatorname{Re} \mu > 0$ . Označimo s  $X$  prostor  $L^p(\Omega)$ , odnosno prostor  $C(\overline{\Omega})$ . Svaku funkciju  $f \in X$  proširimo do funkcije  $\tilde{f}$  na  $L^p(\mathbb{R})$ , odnosno  $C_b(\mathbb{R})$  tako da  $\|f\| = \|\tilde{f}\|$ . Definiramo

$$\tilde{u}(x) = \frac{1}{2\mu} \left( \int_{-\infty}^x e^{-\mu(x-y)} \tilde{f}(y) dy + \int_x^{+\infty} e^{\mu(x-y)} \tilde{f}(y) dy \right)$$

Iz prethodne sekcije znamo da  $\tilde{u}|_{[0,1]}$  zadovoljava jednadžbu  $\lambda u - u'' = f$  i vrijedi  $\|u\|_{L^p} \leq \frac{\|f\|_{L^p}}{|\lambda| \cos(\frac{\varphi}{2})}$ . No,  $\tilde{u}|_{[0,1]}$  nužno ne mora zadovoljavati rubne uvjete.

Definiramo

$$\gamma_0 = \frac{1}{2\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|s|} \tilde{f}(s) ds$$

i

$$\gamma_1 = \frac{1}{2\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu|1-s|} \tilde{f}(s) ds.$$

Tada su sva rješenja jednadžbe  $\lambda u - u'' = f$  koja pripadaju  $W^{2,p}(\Omega)$  ili  $C^2(\overline{\Omega})$  dana sa

$$u(x) = \tilde{u}(x) + c_1 e^{-\mu x} + c_2 e^{\mu x}$$

pri čemu su  $e^{-\mu x}$  i  $e^{\mu x}$  rješenja homogene jednadžbe  $\lambda u - u'' = 0$ . Konstante  $c_1$  i  $c_2$  možemo na jedinstven način odrediti iz rubnih uvjeta  $u(0) = u(1) = 0$ .

Kako je  $\operatorname{Re} \mu > 0$  vrijedi  $e^{\mu} - e^{-\mu} \neq 0$  i računom dobivamo

$$c_1 = \frac{1}{e^{\mu} - e^{-\mu}} [\gamma_1 - e^{\mu} \gamma_0],$$

$$c_2 = \frac{1}{e^{\mu} - e^{-\mu}} [-\gamma_1 - e^{-\mu} \gamma_0].$$

Za  $1 \leq p \leq \infty$  dobivamo

$$\|e^{-\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{1}{(p \operatorname{Re} \mu)^{\frac{1}{p}}}, \quad \|e^{-\mu x}\|_{\infty} = e^{\operatorname{Re} \mu}$$

i

$$\|e^{\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{e^{\operatorname{Re} \mu}}{(p \operatorname{Re} \mu)^{\frac{1}{p}}}, \quad \|e^{\mu x}\|_{\infty} = 1.$$

Za  $1 < p < \infty$  Hölderova nejednakost daje

$$|\gamma_0| \leq \frac{1}{2|\mu|(p \operatorname{Re} \mu)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p},$$

$$|\gamma_1| \leq \frac{1}{2|\mu|(p \operatorname{Re} \mu)^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L^p}.$$

Također

$$|\gamma_0|, |\gamma_1| \leq \frac{1}{2|\mu|} \|f\|_{L^1}, \quad f \in L^1(\Omega),$$

te

$$|\gamma_0|, |\gamma_1| \leq \frac{1}{|\mu| \operatorname{Re} \mu} \|f\|_{\infty}, \quad f \in C(\overline{\Omega}).$$

Štoviše, vrijedi  $|e^\mu - e^{-\mu}| \approx e^{\operatorname{Re} \mu}$  za  $|\mu| \rightarrow \infty$ .

Ako je  $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}$  za  $|\varphi| \leq |\varphi_0| < \pi$ , tada je  $\operatorname{Re} \mu \geq |\mu| \cos(\frac{\varphi_0}{2})$  pa dobivamo

$$\|c_1 e^{-\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p}$$

i

$$\|c_2 e^{\mu x}\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p},$$

za  $C > 0$  i  $|\lambda|$  dovoljno velik. Konačno,

$$\|u\|_{L^p} \leq \frac{C}{|\lambda|} \|f\|_{L^p},$$

za  $|\lambda|$  velik, recimo  $|\lambda| \geq R$ , i  $|\arg \lambda| \leq \varphi_0$ .

Za  $|\lambda|$  mali se pokaže da je  $0 \in \rho(A_p)$ . Nadalje, kako je  $\lambda \mapsto (A_p - \lambda I)^{-1}$  holomorfna na rezolventnom skupu, onda je i neprekidna pa i ograničena na kompaktnom skupu  $\{|\lambda| \leq R, |\arg \lambda| \leq \varphi_0\}$ .

Dakle,  $A_p$  je sektorijalan operator. □

Analogno, kao u slučaju  $\Omega = \mathbb{R}$ , pokaže se da je  $F(t, x, u) = u(t, x)u_x(t, x)$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ , to jest za  $(t, x, u) \in [0, \infty) \times H_0^1(\Omega)$  postoji okolina  $V \subset [0, \infty) \times H_0^1(\Omega)$  takva da za  $(t, x, u), (s, x, v) \in V$  vrijedi

$$\|F(t, x, u) - F(s, x, v)\|_{L^2(\Omega)} \leq L(|t - s|^\theta + \|u - v\|_{H^1(\Omega)}),$$

za neke konstante  $L, \theta > 0$ .

Time smo pokazali da su zadovoljene pretpostavke iz Poglavlja 3.2.

Po Teoremu 3.2.3 za svaki  $(t_0, u_0) \in U$  postoji  $T = T(t_0, u_0)$  takav da problem (4.5) - (4.6) ima jedinstveno rješenje na  $(t_0, t_0 + T)$ .

Teorem 3.2.4 nam je dao maksimalni interval egzistencije rješenja. Po Definiciji 3.2.1 rješenje  $u$  je neprekidna funkcija.

### 4.3 Cole - Hopf transformacija

Cole - Hopf transformacija je metoda za rješavanje viskozne Burgersove jednadžbe. Metodom se jednadžba linearizira i svodi na jednadžbu provođenja, te se dobiva formula za egzaktno rješenje. Postoje i druge metode za rješavanje viskozne Burgersove jednadžbe. Na primjer, u [5] je, kao efikasnija metoda za rješavanje, predložena takozvana Adomianova dekompozicija. U nastavku navodimo Cole - Hopf transformaciju opisanu u [4].

Promatramo inicijalni problem za kvazilinearnu parboličku jednadžbu

$$\begin{aligned} u_t - a\Delta u + b|Du|^2 &= 0, \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad a > 0, \\ u &= g, \quad \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Pretpostavimo da je  $u$  glatko rješenje gornje jednadžbe i označimo  $w = \Phi(u)$ , gdje je  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija. Cilj je odabrati  $\Phi$  takav da  $w$  rješava linearnu jednadžbu. Ubacimo li  $w$  u jednadžbu (4.7), slijedi

$$\begin{aligned} w_t &= \Phi'(u)u_t = \Phi'(u)(a\Delta u - b|Du|^2) \\ &= a\Delta w - (a\Phi''(u) + b\Phi'(u))|Du|^2. \end{aligned}$$

Uz odabir  $a\Phi''(u) + b\Phi'(u) = 0$  (ovu jednadžbu znamo riješiti i njeno rješenje je dano sa  $\Phi(z) = e^{-\frac{b}{a}z}$ ) slijedi

$$w_t = a\Delta w.$$

Sada slijedi da ako  $u$  rješava jednadžbu (4.7), onda  $w = e^{-\frac{b}{a}u}$  rješava inicijalni problem

$$\begin{aligned} w_t - a\Delta w &= 0, \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad a > 0, \\ w &= e^{-\frac{b}{a}g}, \quad \{t = 0\} \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Formula  $w = e^{-\frac{b}{a}u}$  naziva se Cole - Hopf transformacija. Gornji problem je inicijalni problem za jednadžbu provođenja, čije je rješenje dano formulom ([4]):

$$w(t, x) = \frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Iz  $u = -\frac{a}{b} \ln w$  dobivamo eksplicitnu formulu za rješenje problema (4.7)

$$u(t, x) = -\frac{a}{b} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{b}{a}g(y)} dy \right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.8)$$

Promotrimo sada problem (4.7) za  $n = 1$  i  $b = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} u_t - au_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_x &= 0, \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ u &= g, \quad \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

To je upravo disipativna Burgersova jednadžba. Uvedimo sljedeće oznake

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \int_{-\infty}^x u(t, y) dy, \\ h(x) &= \int_{-\infty}^x g(y) dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} w_t - aw_{xx} + ww_x &= 0, \quad (0, \infty) \times \mathbb{R}, \\ w &= h, \quad \{t = 0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Iz (4.8) dobivamo eksplicitnu formulu za rješenje

$$w(t, x) = -2a \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(4a\pi t)^n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)} dy \right), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Iz (4.9) slijedi  $u(t, x) = w_x(t, x)$  pa iz gornje formule za  $w$  dobivamo

$$u(t, x) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4at}} e^{-\frac{1}{2a}h(y)} dy}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.10)$$



# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Normirani prostori. Bilješke s predavanja*, 2016.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.
- [3] J. M. Burgers, *A Mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Advanced Applied Mechanics, 1948.
- [4] L. C. Evans, *Partial differential equations. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19.*, American Mathematical Society, 2010.
- [5] A. Gorguis, *A comparison between Cole–Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers’ equations*, 2006, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300305003140>.
- [6] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1981.
- [7] I. Krijan, *Mjera i integral. Bilješke s predavanja (Prof. dr. sc. Hrvoje Šikić)*, 2012.
- [8] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska Knjiga, 1981.
- [9] A. Lunardi, *Linear and nonlinear diffusion problems. S.M.I. Summer Course on Evolution Equations and Applications*, 2004, <http://people.dmi.unipr.it/alessandra.lunardi/LectureNotes/Cortona2004.pdf>.
- [10] M. Miklavčić, *Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations*, World Scientific, 1998.
- [11] P. Mlinarić, *Nelinearna analiza i primjene. Bilješke s predavanja prof. dr. sc. Zvonimira Tuteka u akademskoj godini 2012./2013.*, 2013.

# Sažetak

U ovom radu smo promatrali nelinearnu disipativnu Burgersovu jednadžbu

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}.$$

U Poglavlju 1 promatrali smo prostore funkcija. Definirali smo Banachove i Hilbertove prostore i naveli važne primjere tih prostora.

U Poglavlju 2 definirali smo posebnu klasu linearnih operatora na Banachovim prostorima, takozvane sektorijalne operatore, i pokazali neka njihova korisna svojstva.

U Poglavlju 3 promatrali smo nelinearni problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t, u), \quad t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

pri čemu je  $A$  bio sektorijalan operator i  $f$  lokalno Hölder neprekidna po  $t$  i lokalno Lipschitz neprekidna po  $u$ . Naveli smo i dokazali nužne uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja gornjeg problema.

U Poglavlju 4 smo promatrali inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu. Pokazali smo da za operator  $A = \varepsilon u_{xx}$  i funkciju  $f = uu_x$  vrijede pretpostavke iz Poglavlja 3 i time dokazali da inicijalni problem za disipativnu Burgersovu jednadžbu ima jedinstveno rješenje. Jednadžbu smo linearizirali Hopf - Cole transformacijom kako bi dobili eksplicitnu formulu za rješenje.

# Summary

In this diploma thesis we analysed nonlinear dissipative Burgers' equation

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}.$$

In Chapter 1 we discussed function spaces. We defined Banach and Hilbert spaces and gave examples of those spaces. In Chapter 2 we defined a special class of linear operators on Banach spaces, so-called sectorial operators, and showed some of their properties.

In Chapter 3 we considered a nonlinear problem

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + Au &= f(t, u), \quad t > t_0, \\ u(t_0) &= u_0, \end{aligned}$$

where  $A$  was a sectorial operator and  $f$  locally Hölder continuous in  $t$  and locally Lipschitz in  $u$ . We showed necessary conditions for existence and uniqueness of the solution.

In Chapter 4 we considered the initial problem for dissipative Burgers' equation. We showed that operator  $A = u_{xx}$  and function  $f = uu_x$  satisfy presumptions from chapter 3 and proved that initial problem for dissipative Burgers' equation has a unique solution. We linearized the equation using the Hopf - Cole transform to get an explicit formula for the solution.

# Životopis

Ivona Karmelić rođena je u Splitu gdje je završila osnovnu i srednju školu. Školovanje je nastavila u Zagrebu na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu, na preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika, a zatim na diplomskom sveučilišnom studiju Primijenjena matematika.