Razumijevanje vektora kod učenika i studenata

Klemenčić, Damjan

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Damjan Klemenčić

Razumijevanje vektora kod učenika i studenata

Diplomski rad

Zagreb, 2017.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Damjan Klemenčić

Razumijevanje vektora kod učenika i studenata

Diplomski rad

Voditelj rada:

dr. sc. Ana Sušac

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ___________________________, predsjednik
2. ___________________________, član
3. ___________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ___________________________
2. ___________________________
3. ___________________________

Zahvaljujem se prije svega svojim roditeljima i obitelji koji su mi uvijek bili podrška.

Zahvaljujem se mentorici dr.sc. Ana Sušac koja mi je mnogo pomogla svojim savjetima i iskustvom, ali i pokazala mi kako rade oni ljudi koji vole svoj posao i iz dana u dan s osmijehom dolaze na posao.

Zahvaljujem se svojim dragim kolegama koji su mi također bili podrška u mom studiranju i na koje sam se uvijek mogao osloniti.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Dobro razumijevanje vektora jedan je od važnijih matematičkih alata koji su neophodni za kvalitetnu nastavu fizike. U Nacionalnom okvirnom kurikulumu iz matematike za osnovnu školu od učenika se očekuju sljedeći obrazovni ishodi: „Učenici će: prikazati vektore u ravnini, zbrajati ih, množiti skalarom te primijeniti vektore i operacije s njima za prikazivanje i istraživanje svojstava geometrijskih oblika“ [6] . Također u prijedlogu predmetnog kurikula za matematiku spominju se i sljedeći ishodi: „Crta i opisuje vektor, njegov smjer, orijentaciju i duljinu“; “Crta vektor objašnjavajući njegova svojstva te vektor jednak i suprotan zadanomu.“; “ Sigurno i učinkovito zbraja i oduzima vektore“. [8] : Dakle, učenici se već u osnovnoj školi susreću s nekim osnovnim pojmovima vezanim uz vektore i uče određivati vektore istog smjera i iste orijentacije, zbrajati ih, oduzimati i množiti skalarom pa su već ovdje stekli dio znanja potreban za dobro razumijevanje vektora.

U srednjoj školi učenici nastavljaju učiti vektore. U obrazovnim ishodima 3. razreda srednje škole u području matematike za gimnazijske programe navode se razni ishodi, a za ovaj diplomski rad relevantni su „Rastavlja vektore koristeći linearnu kombinaciju vektora (računski ili grafički)“; „Računa duljinu vektora, skalarni umnožak vektora, kut između vektora…“[8] . U fizici se s vektorima radi kroz cijelu srednju školu. Operacije s vektorima obrađuju se u matematici, ali je primjena tih koncepata dio programa fizike. U predmetnom kurikulu fizike za srednju školu, između ostalog, navode se sljedeći obrazovni ishodi: „Opisuje sile kao vektorske veličine, zbraja ih i rastavlja na komponente te određuje rezultantu silu“; „Skicira vektor magnetskog polja u bilo kojoj točki prostora oko magneta.“; „Crtežom prikazuje Amperovu silu i primjenjuje pravilo desne ruke“ [7] . Dodajmo da se u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama radi i vektorski produkt u 3. razredu srednje škole [7] .Iz ovog je vidljivo da bi učenici tijekom srednje škole trebali biti dobro upoznati s pojmom vektora u matematici i fizici.

Učenici vektore u matematici i fizici uče na donekle različite načine. U matematici je vektor klasa ekvivalencija skupa usmjerenih dužina takva da su dvije usmjerene dužine ekvivalentne ako dijagonale, koje povezuju „početak“ jednog i „kraj“ drugog vektora, imaju zajedničko polovište. Odnosno $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju zajedničko polovište. U fizici se vektor ne uvodi ovako strogo, a često ni u matematici jer je „prava“ definicija vektora suviše kompleksna za učenike. Matematičari vektor definiraju: duljinom (modulom, iznosom, veličinom), smjerom (vektori su istog smjera ako pripadaju paralelnim pravcima) i orijentacijom („kamo je okrenuta strelica“). U fizici se orijentacija obično ne spominje nego se kaže da sile djeluju u suprotnom smjeru ili da su vektori sila suprotni što će se, kao uobičajena terminologija, koristiti i u ovom radu. U matematici su ti vektori istog smjera, ali suprotne orijentacije.

U ovom radu želi se istražiti kako dio učenika i studenata u Hrvatskoj, iz određenih škola i fakulteta na području grada Zagreba, razumije vektore. Slična testiranja provedena su u nekim drugim zemljama i nakon mnogo različitih istraživanja došlo se do dva testa koja obuhvaćaju zadatke u kojima se ispituje razumijevanje vektora koje je potrebno u nastavi fizike, te su ti testovi korišteni u ovom radu. Jedan test ispituje konceptualno i proceduralno razumijevanje vektora, sastoji se od dvadeset pitanja i proveden je isključivo na studentima. Cilj tog testa je saznati koje poteškoće imaju studenti u razumijevanju vektora. Na temelju toga mogu se provoditi daljnja istraživanja u svrhu traženja što boljih načina podučavanja o vektorima da bi se studentima olakšalo usvajanje potrebnih znanja o vektorima. Drugi test istražuje kako učenici i studenti rješavaju određene zadatke u kontekstu fizike i u kontekstu matematike. Taj test sastoji se od dvanaest pitanja iz fizike i dvanaest pitanja iz matematike koja su paralelna (izomorfna), tj. gotovo su identična, ali su stavljena u predmetno različiti kontekst. Cilj drugog testa je vidjeti postoji li razlika između rješavanja testa u kontekstu matematike i fizike, te ako razlika postoji saznati koji su zadaci bolje riješeni u kontekstu matematike nego u kontekstu fizike i obratno. Dodatno će ovaj test pokazati kako učenici srednje škole rješavaju proceduralna i konceptualna pitanja iz vektora. Ovo istraživanje može pomoći nastavnicima da bolje razumiju učeničke poteškoće s vektorima u matematici i fizici, a to im može pomoći da bolje planiraju i provode nastavu.

Test iz razumijevanja vektora, koji se sastoji od dvadeset pitanja, ukupno je riješio 381 ispitanik, a test s paralelnim pitanjima iz matematike i fizike 395 ispitanika. Testiranje je provedeno u razdoblju od ožujka do lipnja, a ispravljanje i obrada podataka produžili su se do rujna 2017. godine. Nadam se da će ovaj rad pridonijeti poboljšanju nastave osobito u vidu integriranja matematike i fizike i jače korelacije između ova dva predmeta.

Poglavlje 2

Pregled prijašnjih istraživanja

Jedno od prvih istraživanja vektora napravio je sveučilišni nastavnik fizike Randy Knight [4] . On je od 1989. bio zadužen za razvoj kurikula na temelju edukacijskih istraživanja u fizici. 1992. godine on je proveo Test poznavanja vektora (eng. „Vector Knowledge Test“) na 286 studenata fizike kako bi provjerio njihovo predznanje iz vektora. Iz testiranja je zaključio da je oko 35% studenata imalo dovoljno predznanja iz vektora i točno rješavaju tipične zadatke iz vektora. Oko 15% ispitanika imalo je neko korisno predznanje o vektorima, ali dosta loše rješavaju zadatke jer im nedostaje prakse. Ostalih 50% studenata nije imalo dovoljno znanja o vektorima koje im je potrebno u sveučilišnoj nastavi fizike.

Sljedeće istraživanje koje valja spomenuti proveli su Nguyen i Meltzer na uvodnim predavanjima iz opće fizike [9] . Testiranje je provedeno na 2031 studentu, a obuhvaćalo je konceptualna pitanja iz vektora. Uočeno je da oko 25% studenata drugog semestra kolegija opće fizike baziranog na infinitezimalnom računu i oko 50% studenata na sličnom kolegiju opće fizike koji nije zahtijevao infinitezimalni račun nije znalo zbrojiti vektore u dvije dimenzije. Iako su rezultati bili nešto bolji za studente na Općoj fizici 2 u odnosu na studente na Općoj fizici 1, uočeno je da studenti i dalje imaju značajnih poteškoća s konceptualnim i proceduralnim razumijevanjem osnovnih pojmova i operacija vezanih iz vektore koji se koriste tijekom svih kolegija iz fizike.

Istraživanje koje su proveli Shaffer i McDermott pokazuje da vektorske fizikalne veličine u kinematici ne predstavljaju probleme samo studentima prvih godina studija već i studentima koji su pred završetkom fakulteta [10] . Mnogi ispitanici nisu znali odrediti ukupnu brzinu ili akceleraciju. Autori su identificirali niz studentskih poteškoća u razumijevanju vektora i njihovoj primjeni u kinematici te razvili nastavne materijale koji bi trebali pomoći u nadvladavanju tih poteškoća. Nadalje, Kustusch je pokazala da je jedna od najvećih studentskih poteškoća s vektorima razumijevanje vektorskog produkta, a posebno određivanje orijentacije vektorskog produkta [5] .

Na temelju ovih i ostalih istraživanjima o vektorima u nastavi fizike, Pablo Barniol i Genaro Zavala sa Sveučilišta Monterrey u Meksiku sastavili su Test razumijevanja vektora TUV (eng. “Test of understanding of vectors“) - konceptualni test sa zadacima višestrukog izbora [2]. Autori su u više navrata koristili testove otvorenog tipa sa zadacima koji su ispitivali razumijevanje vektora. Rezultati tih testova su im pomogli u konstrukciji TUV-a tj. odabiru odgovarajućih distraktora u pitanjima višestrukog izbora. Konačna verzija TUV-a sadrži 20 pitanja od kojih svako ima pet ponuđenih odgovora (jedan točan i četiri distraktora). TUV (Prilog 1) ima 11 zadataka koji provjeravaju konceptualno razumijevanje (zadaci 1-5, 9-13, 19) zadano grafički, 7 zadataka računanja određenih vektorskih koncepata (6, 8, 14, 15, 17, 20) i 2 zadatka koji traže i grafički i računski aspekt razumijevanja vektora (7 i 16). Prvi ispitanici na testu (N = 423*)* bili su studenti Sveučilišta Monterrey u Meksiku koji su završili kolegij „Fizika" u kojem su se redovito služili konceptima koji su ispitivani u Testu razumijevanja vektora. Testiranje je provedeno 2014. godine. Manje od 60% ispitanika odgovorilo je točno na 7 zadataka. To su zadaci 2, 3, 8, 12, 13, 17, 18. Zanimljivo je da čak četiri od ovih sedam zadataka ispituje samo konceptualno razumijevanje vektora. Najčešće poteškoće su da ispitanici misle kako je vektor jediničan (zadatak 2) ako su mu obje komponente jedinične (33% ispitanika). 30% ispitanika krivo je odredilo orijentaciju (suprotan smjer) vektorskog produkta (zadatak 12), a 27% misli da je skalarni produkt vektora $\vec{\boldsymbol{C}}$ i $\vec{\boldsymbol{D}}$ duljina vektora između $\vec{\boldsymbol{C}}$ i $\vec{\boldsymbol{D}}$ koji pokazuje desno gore (zadatak 3). U zadatku 2 trebalo je odabrati grafički prikaz jediničnog vektora u smjeru zadanog vektora, u zadatku 3 opisati skalarni produkt vektora kao duljinu projekcija jednog vektora na drugi vektor pomnoženog duljinom drugog vektora. U zadatku 12 trebalo je opisati vektorski produkt kao vektor okomit na oba vektora koji ima orijentaciju u papir (vektori su bili zadani u ravnini papira), a u zadatku 13 odabrati sliku koja prikazuje razliku dva nekolinearna vektora. Ta četiri zadatka čine skupinu najzahtjevnijih konceptualnih zadataka na testu. U preostala tri slabije riješena zadataka trebalo je izračunati skalarni produkt vektora zadanih u ortonormiranoj bazi (zadatak 8), odrediti kut koji vektor zadan u ortnormiranoj bazi (2D) zatvara s pozitivnim dijelom horizontalne x-osi (zadatak 17), a u zadatku 18 trebalo je odrediti izraz za vektorski produkt dva vektora grafički zadana u ravnini papira i s zadanim kutom između njih kao $|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|sin\,\theta$.

Nakon Testa iz razumijevanja vektora, isti autori su odlučili napraviti novi test koji ima 12 paralelnih (izomorfnih) zadataka tako da je svaki zadatak zadan u kontekstu matematike i u kontekstu fizike pa test ukupno ima 24 zadatka. [1] Testiranje je provedeno na studentima Sveučilišta Monterrey u Meksiku koji su odslušali kolegij „Mehanika". Uočene su bitne razlike u postotku točnih odgovora s obzirom na kontekst zadatka. Tako je 52% studenata znalo interpretirati skalarni produkt vektora u fizici (rad), a samo 27% u matematici. Slično, 81% ispitanika znalo je izračunati skalarni produkt u fizici, a u matematici njih 60%. Također, uočeno je da je kod nekih zadataka postotak točnih odgovora isti u kontekstu matematike i fizike, ali su se ispitanici odlučili za druge netočne odgovore. Iako istraživanje ukupno nije dalo statistički značajne razlike između postotka točnih odgovora u matematici i fizici, pronađene su statistički značajne razlike u pojedinim zadacima. Zaključak istraživanja je da postoji razlika u konceptualnom razumijevanju vektora s obzirom na kontekst u kojem je zadatak zadan. Primijećeno je da studenti lakše razumiju skalarni produkt i povezuju ga s $|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|cos\ \theta$ kada se skalarni produkt stavi u kontekst fizike (kao rad). Također, uočeno je da su studenti imali manji postotak točnih odgovora kada se vektore trebali oduzeti u kontekstu fizike. Razlog tome mogao bi biti što je zadatak u kontekstu mehanike zadan kao oduzimanje vektora brzine, pa su neki studenti brzine oduzimali kao skalare ostavljajući pri tome smjer „dominantnog“ vektora (vektor koji je veći po iznosu).

Oba istraživanja Barniola i Zavale objavljena su nedavno (2014. godine) pa možemo reći da je ovo područje sada vrlo zanimljivo istraživačima u području edukacijske fizike. Validaciju TUV-a napravili su Rakkapao i suradnici na uzorku od 2392 ispitanika, te zaključili da je TUV jako dobar za ispitanike čije je znanje razumijevanja vektora osrednje ili bolje i da su distraktori za tu skupinu ispitanika dobro odabrani [11] . Razlog tome je što je sam TUV sastavljan uzimajući u obzir odgovore koje su davali učenici i studenti na zadacima otvorenog tipa, a u tim testiranjima sudjelovalo je više od 2000 ispitanika.

Osim što su provedena mnoga istraživanja koja utvrđuju poteškoće koje učenici i studenti imaju s vektorima, nedavno je napravljen i testiran Radni list za poboljšavanje razumijevanja vektorskih koncepata (eng. „A Worksheet for the Recovery of Students’ Vector Understanding“) [13] . Radni list sastavili su Wutchana i suradnici. U istraživanju provedenom na 103 učenika u tri razreda srednje škole prosječni g-faktor ili faktor prirasta (eng. „gain“) pojedinih razreda bio je 0,70, 0,76 i 0,69 iz čega možemo zaključiti da je radni list koristan za poboljšanje razumijevanja vektora. Osim ovog radnog lista koji može pomoći u poboljšanju razumijevanja vektora, zanimljivo je i istraživanje koje su proveli Heckler i Scaife na preko 1000 učenika i studenata u kojem su zaključili da učenicima i studentima u razumijevanju vektora može pomoći zapis u ortonormiranoj bazi [3]. Autori predlažu da se više radi na različitim zapisima vektora (u grafičkom obliku i zapisu u ortnormiranoj bazi) jer se na taj način može smanjiti problem učeničkog slabog razumijevanja vektora.

U Hrvatskoj još nisu provedena istraživanja o razumijevanju vektora kod učenika i studenata, a sudeći po istraživanjima u svijetu i po iskustvima nastavnika zasigurno i u Hrvatskoj postoje poteškoće u razumijevanju vektora kod učenika i studenata. U ovom radu korišten je Test razumijevanja vektora i Test razumijevanja vektora s paralelnim zadacima.

TUV je dobar temelj za daljnja istraživanja i usporedbe razumijevanja vektora kod studenata iz različitih zemalja na koja potiču i sami autori testova.

Poglavlje 3

Istraživanje na studentima

3.1. Metode

3.1.1. Ispitanici

Testiranje je provedeno u periodu od ožujka do svibnja 2017. godine na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu gdje je test rješavalo više skupina studenata prve godine (N = 200) te na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu gdje su test rješavali studenti nastavničkog smjera matematike pete godine (N = 59), nastavničkog smjera fizike prve godine (N = 52), te istraživačkog smjera fizike prve godine (N = 70). Ukupno je testiran 381 student.

Ispitanici su se prvi put susreli s vektorima u osmom razredu osnovne škole u matematici gdje su učili zbrajanje i oduzimanje vektora. Koristili su ih i u fizici u prvom razredu srednje škole kada su računali rezultantnu silu, ali i rastavljali silu na komponente kada su proučavali gibanje tijela na kosini. U fizici ima puno vektorskih veličina, pa su se ispitanici susretali s vektorima u svim razredima srednje škole. Skalarni produkt vektora ispitanici su učili prvi put u 3. razredu srednje škole kada su iz matematike ponovno učili vektore. U fizici su kod elektromagnetizma ispitanici radili i pravilo desne ruke kod određivanja sile između vodiča i sile na naboj koji se giba u magnetskom polju. Pravilom desne ruke određuje se smjer i orijentacija vektorskog produkta. Nakon toga studenti FER-a su vektorski i skalarni produkt učili na kolegiju „Matematika 2“ na početku drugog semestra. Studenti nastavničkog i inženjerskog smjera fizike ponovno su učili vektore na kolegiju „Linearna algebra 1“ dok su studenti nastavničkog smjera matematike vektore ponovno učili na kolegiju „Analitička geometrija“. Na tim kolegijima studenti su trebali steći sve potrebne vještine za rješavanje ovog testa. Osim toga, studenti fizike na kolegijima „Opća fizika 1“ i „Osnove fizike 1“ također su radili vektore i to upravo one koncepte koji se ispituju u ovom istraživanju.

3.1.2. Materijali

U ovom diplomskom radu korišten je Test razumijevanja vektora (eng. „Test of understanding of vectors“), kojeg su razvili Pablo Barniol i Genaro Zavala, sa Sveučilišta Monterrey u Meksiku [2]. Test se sastoji od dvadeset pitanja. Svako pitanje ima pet ponuđenih odgovora, a samo jedan odgovor je točan. Test je preveden na hrvatski jezik. Prosječno vrijeme rješavanja testa bilo je 20-30 minuta.

3.1.3. Analiza podataka

Nakon što su svi testovi skupljeni, svi podaci su uneseni u Excel tablice iz kojih su se lako mogli odrediti podaci o točnosti odgovora te razni statistički podaci poput prosjeka i standardne devijacije, a u Excelu su crtani i grafovi. Interval pouzdanosti izračunat je iz podataka o broju ispitanika i standardne devijacije. Da bi se odredilo postoji li statički značajna razlika između grupa ispitanika napravljena je jednosmjerna analiza varijance i pripadni Tukeyev test. [12]

3.2. Rezultati

3.2.1. Usporedba po grupama ispitanika

Možemo reći da je test vrlo dobro riješen. To nam pokazuje tablica 4.1 u kojoj možemo vidjeti da su studenti ukupno test riješili s (80 ± 15) % točnih odgovora Test su u prosjeku najbolje riješili studenti prve godine istraživačkog smjera fizike s (86 ± 15) % točnih odgovora, a slijede ih studenti elektrotehnike i računarstva s (82 ± 14) %. Nešto lošiji rezultat imaju studenti nastavničkog smjera fizike i nastavničkog smjera matematike.

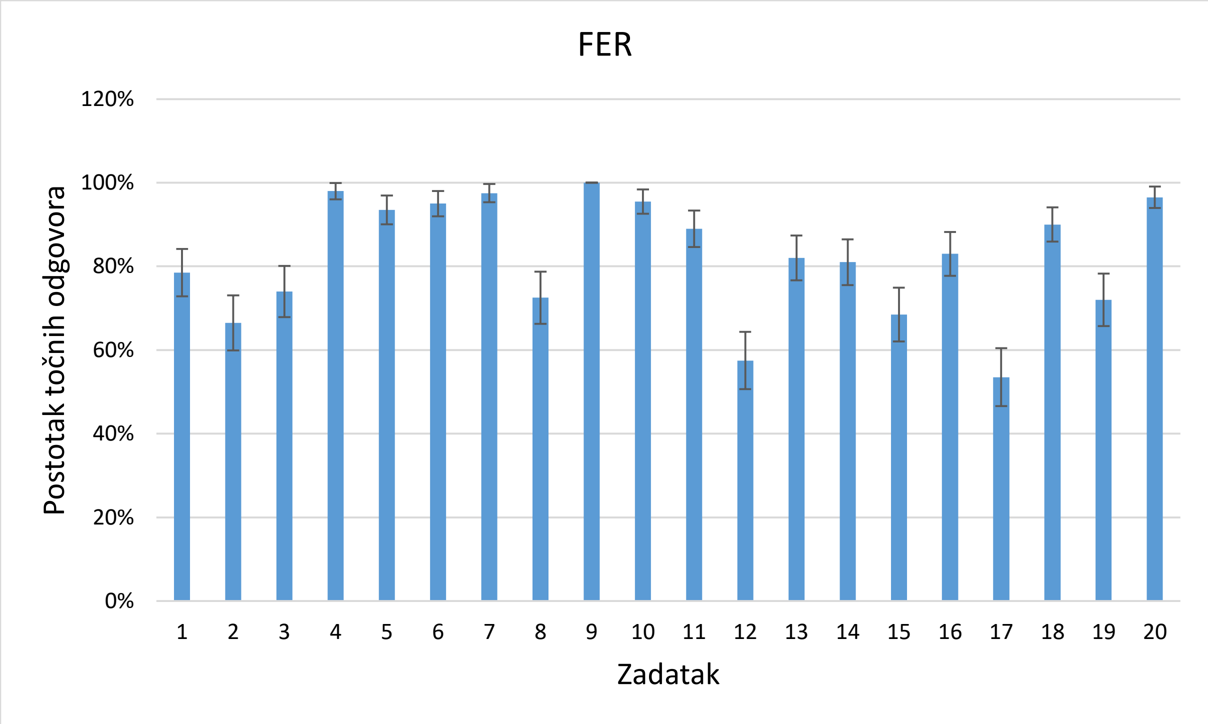
Grupa	Postotak točnih odgovora
FER	(82 ± 14) %
FIZIKA (ISTRAŽIVAČI)	(86 ± 15) %
MATEMATIKA (NASTAVNICI)	(72 ± 16) %
FIZIKA (NASTAVNICI)	(74 ± 14) %
UKUPNO	(80 ± 15) %

Tablica 3.1: Postotak točnih odgovora na Testu razumijevanja vektora po skupinama ispitanika. Prikazane su srednje vrijednosti i standardne devijacije.

Da bismo odredili jesu li različite skupine ispitanika različito riješile test, proveli smo jednosmjernu analizu varijance s faktorom *grupa*. Rezultati pokazuju da postoji statistički vrlo značajna razlika među skupinama ispitanika (p < 0,0001), što je bilo i za očekivati. Tukeyev test je pokazao da nema statistički značajne razlike između grupe 1 (studenti FER-a) i grupe 2 (studenti istraživačkog smjera fizike). Također, ne postoji statistički značajna razlika u rezultatima na testu između grupe 3 (studenti nastavničkog smjera matematike) i grupe 4 (studenti nastavničkog smjera fizike). Ipak sve ostale usporedbe pokazuju statistički značajnu razliku (p < 0,01) što nas dovodi do zaključka da imamo dvije skupine. U jednoj su studenti FER-a i studenti istraživačkog smjera fizike koji su bolje riješili ovaj test, a u drugoj studenti nastavničkog smjera matematike i studenti nastavničkog smjera fizike koji su statistički značajno lošije riješili ovaj test.

3.2.2. Usporedba po zadacima

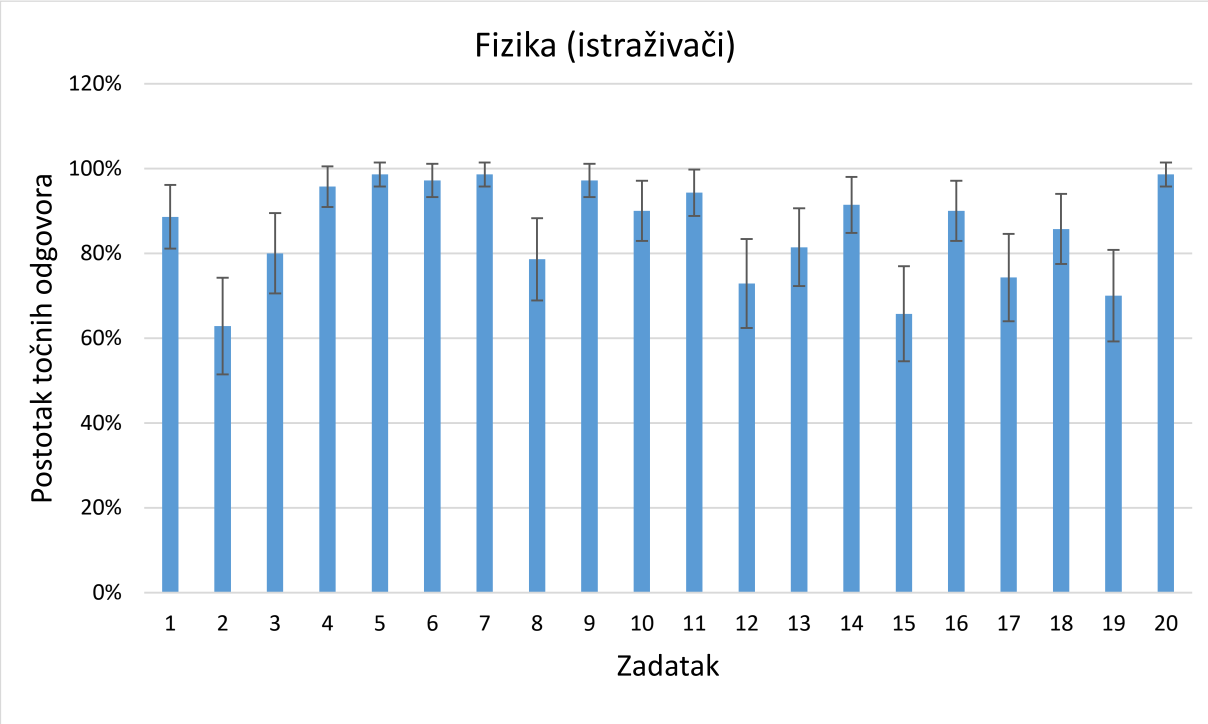
U nastavku smo analizirali kako je svaka od skupina ispitanika riješila pojedini zadatak. Na slici 3.1 tako uočavamo da su studenti FER-a 9. zadatak riješili sa 100% točnih odgovora, tj. svih 200 studenata točno je odgovorilo na to pitanje. Riječ je o zadatku u kojem je trebalo grafički odrediti horizontalnu (x) komponentu vektora. Osim tog zadatka, studenti su s više od 95% točnih odgovora odgovorili i na pitanja 4, 7, 10 i 20. U četvrtom zadatku trebalo je grafički odrediti y-komponentu zadanog vektora, a u sedmom je za zadane vektore trebalo odrediti modul vektora koji će se dobiti kao njihov zbroj. U desetom zadatku trebalo je odabrati sliku koja prikazuje vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = -2\hat{\mathbf{\imath}} + 3\hat{\mathbf{\jmath}}$, a u dvadesetom zadatku odrediti iznos (modul) vektora $\vec{\boldsymbol{A}} = 2\hat{\mathbf{\imath}} + 2\hat{\mathbf{\jmath}}$. Studenti FER-a su najlošije, s manje od 60% točnih odgovora, riješili zadatke 12 i 17. U zadatku 12 trebalo je odrediti smjer vektorskog produkta dva vektora. Čak 39% studenata zaokružilo je odgovor da vektorski produkt treba gledati iz papira što je suprotna orijentacija (suprotan smjer) s obzirom na točan odgovor da vektorski produkt treba gledati u papir. U 17. zadatku trebalo je za zadani vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = -3\hat{\mathbf{\imath}} + 4\hat{\mathbf{\jmath}}$ odrediti koji kut zatvara s pozitivnom dijelom x-osi. Ovaj zadatak specifičan je po tome što se ne može riješiti samo korištenjem džepnog računala već je nužan i dodatni račun. Računanje inverzne funkcije tangensa dat će nam kao rezultat negativni kut jer je inverzna funkcija tangensa arkus tangens definiran na intervalu od <-90°,90°> pa je nužno, nakon što izračunamo kut pomoću kalkulatora, pribrojiti 180° kako bi dobili točan rezultat.



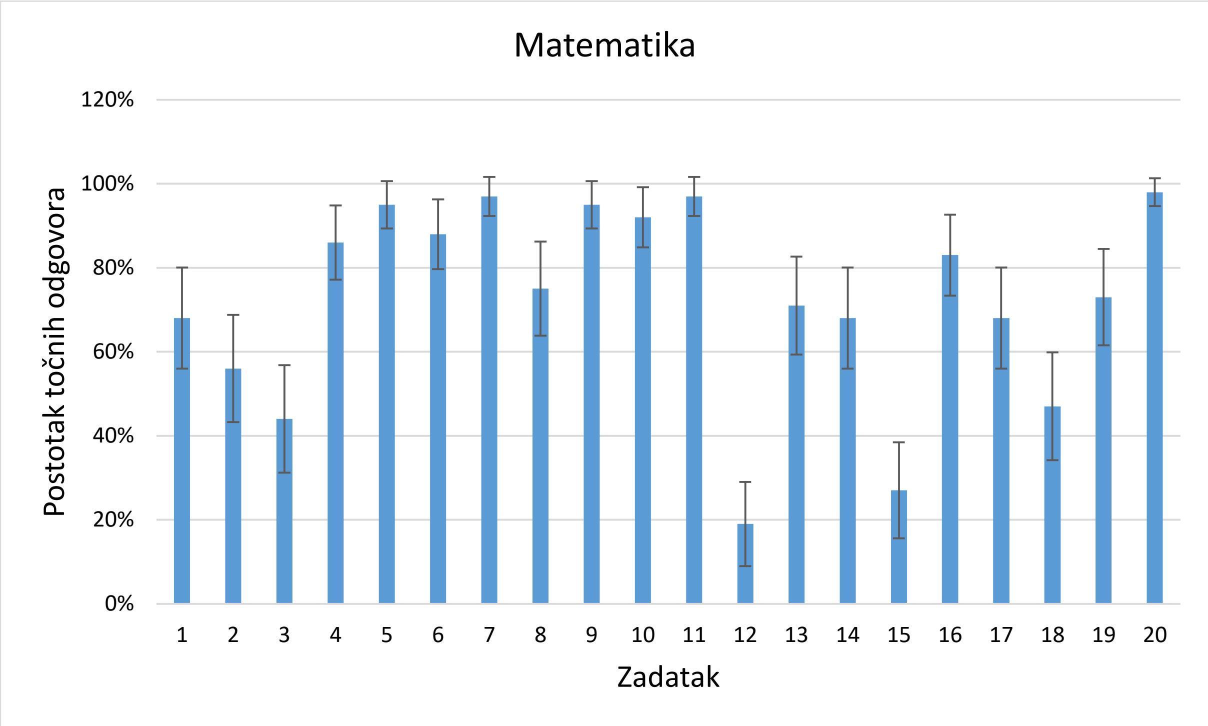
Slika 3.1: Postotak točnih odgovora studenata FER-a iz testa o razumijevanju vektora po pojedinim zadacima; crna vertikala crtica označava interval pouzdanosti.

Studenti istraživačkog smjera fizike imaju šest zadataka riješenih s više od 95% točnih odgovora (slika 3.2). Riječ je o zadacima 4, 5, 6, 7, 9 i 20. Zadaci 4, 7, 9 i 20 već su komentirani u prethodnoj skupini ispitanika. U petom zadatku trebalo je odrediti vektore, odnosno vektor koji ima isti smjer kao i zadani vektor, a u šestom zadatku trebalo je definirati skalarni produkt vektora kao $|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|Cos\ \theta$. Najslabije riješeni zadaci u ovoj skupini ispitanika su zadaci 2 i 15 (63 % i 66%). U drugom zadatku trebalo je odrediti jedinični vektor u smjeru zadanog vektora, a u petnaestom zadatku računski odrediti vektorski produkt.

Studenti matematike pet su zadataka riješili s više od 95%. To su zadaci 7, 9, 11 i 20 (Slika 3.3). Zadaci 7, 9 i 20 su već komentirani u prethodnim skupinama ispitanika. Studenti matematike su jedini zadatak 11 riješili s više od 95% točnih odgovora. U tom zadatku trebalo je za zadani vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ izabrati sliku koja prikazuje vektor $-3\vec{\boldsymbol{A}}$.



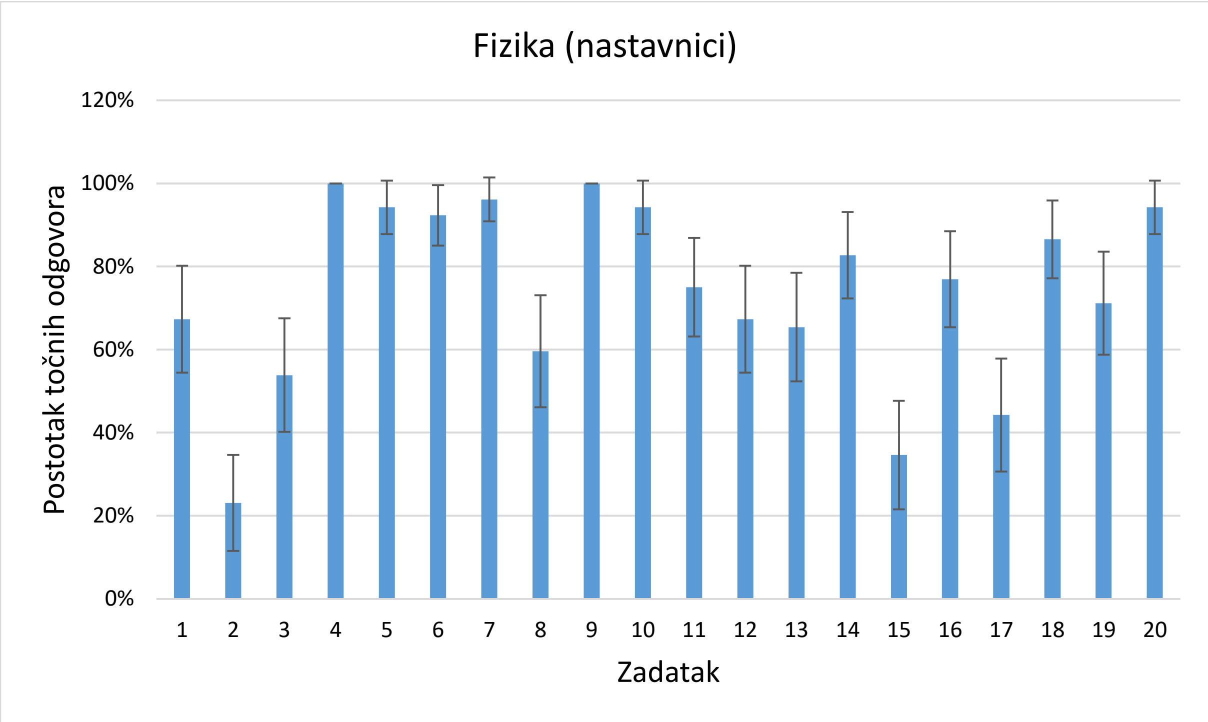
Slika 3.2: Postotak točnih odgovora studenata istraživačkog smjera fizike iz testa o razumijevanju vektora po pojedinim zadacima; crna vertikala crtica označava interval pouzdanosti.



Slika 3.3: Postotak točnih odgovora studenata nastavničkog smjera matematike iz testa o razumijevanju vektora po pojedinim zadacima; crna vertikala crtica označava interval pouzdanosti.

Studenti matematike najlošije su riješili zadatke 3, 12, 15 i 18, i to s manje od 50% točnih odgovora. U zadatku 12 trebalo je odrediti smjer vektora vektorskog produkta dva vektora što smo već komentirali u prethodnim skupinama ispitanika. Zadatak 3 lošije je riješen samo kod studenata matematike. U tom zadatku je trebalo odrediti značenje skalarnog produkta dvaju vektora kao "duljinu projekcije vektora $\vec{\boldsymbol{C}}$ na vektor $\vec{\boldsymbol{D}}$ pomnoženu iznosom vektora $\vec{\boldsymbol{D}}$". Testirani studenti su studenti pete godine te su, čini se, već dio gradiva o skalarnom i vektorskom produktu zaboravili. Na to ukazuje i činjenica da je 12. zadatak u kojem je trebalo opisati smjer i orijentaciju vektorskog produkta najlošije riješen kod studenata matematike s manje od 20% točnih odgovora. U zadatku 18 trebalo je odrediti izraz za vektorski produkt vektora kao $|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|sin\,\theta$.

Slika 3.4 prikazuje kako su test riješili nastavnici fizike. Čak dva zadatka (4. i 9. zadatak) svi su ispitanici točno riješili, dok je osim ta dva zadatka i 7. zadatak riješen s više od 95% točnih odgovora. Podsjetimo se da je u četvrtom zadatku trebalo grafički odrediti y-komponentu zadanog vektora, a u sedmom je za zadane vektore trebalo odrediti modul vektora koji će se dobiti kao njihov zbroj. U devetom je zadatku trebalo grafički odrediti horizontalnu (x) komponentu vektora.



Slika 3.4: Postotak točnih odgovora studenata nastavničkog smjera fizike iz testa o razumijevanju vektora po pojedinim zadacima; crna vertikala crtica označava interval pouzdanosti.

Uočavamo jako slabu riješenost drugog zadatka u kojem je trebalo odrediti jedinični vektor u smjeru zadanog vektora. Velik broj studenata (35%) zaokružilo je kao točan odgovor vektor kojem su obje komponente jedinične. Kod studenata nastavničkog smjera fizike s manje od 50% točnih odgovora riješeni su još 15. i 17. zadatak. U petnaestom zadatku trebalo je računski odrediti vektorski produkt, a u sedamnaestom zadatku trebalo je za zadani vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ odrediti koji kut zatvara s pozitivnom dijelom x-osi.

Možemo reći da su studenti dobro riješili test. To bismo i očekivali budući da su im svi pojmovi trebali biti dobro poznati iz srednje, a dio čak i iz osnovne škole. Također, test je bio na zaokruživanje te studenti nisu napamet morali znati definicije već su samo trebali odrediti koja je od ponuđenih definicija točna. No, uočene su i neke studentske poteškoće u razumijevanju vektora.

Najviše poteškoća studenti imaju s jediničnim vektorom u zadanom smjeru (zadatak 2). Nijedna skupna ispitanika nije ovaj zadatak riješila s više od 70% točnih odgovora. Pri tome, 23% studenata elektrotehnike i računarstva, 38% studenata istraživačkog smjera fizike, 40% studenata matematike te 35% nastavničkog smjera fizike smatra da je jedinični vektor onaj kojemu su obje komponente jedinične. Studenti fizike trebaju jedinični vektor u računu koristiti jako često osobito na kolegijima viših godina poput klasične mehanike, elektrodinamike i sl. te bi bilo dobro da se ovaj pojam bolje razjasni.

Nadalje, svi ispitanici imaju poteškoća s vektorskim produktom, tj. sve skupine ispitanika imaju barem jedan lošije riješen zadatak u skupini zadatka s vektorskim produktom (zadaci 12, 15, 18). U svim skupinama ispitanika preko 20% ih je krivo odredilo smjer vektorskog produkta (umjesto u papir odgovorili su da orijentacija ide iz papira) u 12. zadatku. To se posebno vidi kod studenata nastavničkog smjera matematike kod kojih je orijentaciju vektorskog produkta krivo odredilo čak 43% studenata.

Studenti imaju poteškoća i sa skalarnim produktom. U toj skupini su zadaci 3 i 6. U zadatku 3 trebalo je prepoznati značenje skalarnog produkta vektora, a u zadatku 6 odrediti skalarni produkt preko formule. Dok je zadatak 6 u svim skupinama riješen s više od 80%, a u nekima čak i blizu 100%, zadatak 3 ni u jednoj skupini nije riješen s više od 80% točnih odgovora. Najčešći netočan odgovor bio je da je skalarni produkt vektora $\vec{\boldsymbol{C}}$ i $\vec{\boldsymbol{D}}$ duljina vektora između $\vec{\boldsymbol{C}}$ i $\vec{\boldsymbol{D}}$ koji pokazuje desno gore. Taj odgovor je izabralo čak 37% studenata nastavničkog smjera fizike, te 32% nastavničkog smjera matematike. Čini se da studenti dobro znaju formulu, ali slabo razumiju što ona znači. Slične su rezultate imali i ispitanici u Meksiku na kojima je provedeno prvo testiranje sa TUV testom.

Oni su podsjetimo osim, ovog zadatka s manje od 60% riješili i zadatke 2, 8, 12, 13, 17 i 18. Studenti elektrotehnike i računarstva samo su u 2 zadatka imali manji postotak točnih odgovora od 60% (zadaci 12 i 17) pa možemo reći da su poteškoće u razumijevanju vektora kod tih studenata uočeni na manjem broju zadataka. Studenti istraživačkog smjera fizike nemaju n ijedan zadatak riješen ispod 60%, ali zadaci na kojima imaju najmanji postotak riješenosti većinom se preklapaju s rezultatima meksičkih studenata. Studenti nastavničkog smjera fizike riješili su drugi zadatak s 23%, treći s 54%, a 17 s 44% točnih odgovora. U preostalim zadacima (8,12,13,18) imali su više ili točno 60% točnih odgovora, ali su sa manje od 60% riješili i petnaesti zadatak (35% točnih odgovora). U tom zadatku trebalo je računski vektorski produkt dva vektora zapisanih u ortonormiranoj bazi. Taj zadatak loše su riješili i studenti nastavničkog smjera matematike (27% točnih odgovora). Osim tog zadatka studenti nastavničkog smjera matematike su sa manje od 60% točnih odgovora riješili zadatke 2,3,12 i 18. Možemo zaključiti da su naši ispitanici bolje riješili TUV, osobito to vrijedi za studente elektrotehnike i računarstva i studente istraživačkog smjera fizike. Kod skupine nastavničkog smjera matematike i fizike pokazuje se lošija riješenost, ali ipak bolja od studenata u Meksiku.

Poglavlje 4

Usporedba razumijevanja vektora u matematici i fizici

4.1. Metode

4.1.1. Ispitanici

U periodu od ožujka do svibnja 2017. godine provedena su testiranja za ovaj diplomski rad u jednoj prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji na 166 učenika, te u dvije opće gimnazije na 139 učenika. Paralelno s tim provedeno je i testiranje na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu na 90 studenata. Svi testirani učenici pohađali su 3. razred srednje škole. Studenti su bili testirani na jednom obaveznom kolegiju s prve godine te jednom izbornom kolegiju koji se može izabrati redovno na drugoj ili trećoj godini. Ipak veći dio testiranih studenata (86%) bili su studenti nastavničkog smjera matematike. Dio studenata bili su i studenti integriranog nastavničkog studija matematike i fizike koji također slušaju navedene kolegije.

Učenici i studenti vektore su najprije učili u 8.razrede osnovne škole u kojem su određivali vektore istog smjera te vektore iste i vektore suprotne orijentacije. Tada su još i zbrajali i oduzimali vektore te množili vektore skalarom. Učenici su nedugo prije testiranja učili vektore u 3. razredu te su tada radili i skalarni produkt vektora, a u prirodoslovno-matematičkoj gimnaziji i vektorski produkt. Studenti su vektore učili na prvoj godini fakulteta u kolegiju „Analitička geometrija“ te bi svi ispitanici trebali imati potrebne vještine za rješavanje testa.

4.1.2. Materijali

U testiranju je korišten test kojeg su pripremili autori Testa razumijevanja vektora. Oni su izabrali dvanaest zadataka iz Testa razumijevanja vektora i pripremili dvanaest paralelnih (izomorfnih) zadataka u kontekstu fizike, odnosno mehanike [1].Test je iz fizike obuhvaćao pojmove sile, brzine i rada, a trebalo je rastavljati vektore na komponente, zbrajati i oduzimati vektore, određivati vektore istog smjera, te definirati skalarni produkt (test se nalazi u Prilogu 2). To su ishodi koji bi trebali biti ostvareni već nakon nastave matematike i fizike u srednjoj školi, pa smo zato ovaj test dali uglavnom srednjoškolcima.

Nakon što je test preveden, napravljene su dvije grupe testova tako da su u jednoj grupi prvo bili zadani zadaci iz fizike, a zatim iz matematike, a u drugoj grupi obrnuto. Testiranje je trajalo 20-30 minuta. Ispitanici nisu imali vremenskog ograničenja i smjeli su ispravljati odgovore, no trebali su zadatke rješavati po redu, tj. nakon što su okrenuli stranicu više se nisu smjeli vraćati na nju.

4.1.3. Analiza podataka

Nakon što su svi testovi skupljeni podaci su uneseni u Excel tablice iz kojih su se lako mogli odrediti podaci o točnosti odgovora te razni statistički podaci poput prosjeka i standardne devijacije, a u Excelu su crtani i grafovi. Interval pouzdanosti računat je iz podataka o broju ispitanika i standardne devijacije također u Excelu. Nakon toga provedena je dvosmjerna analiza varijance s ponovljenim mjerenjem na jednom faktoru prvo za cjelokupni test, a zatim i za svaki zadatak posebno. [12]

4.2 Rezultati i diskusija

4.2.1. Ukupni rezultati po skupinama ispitanika

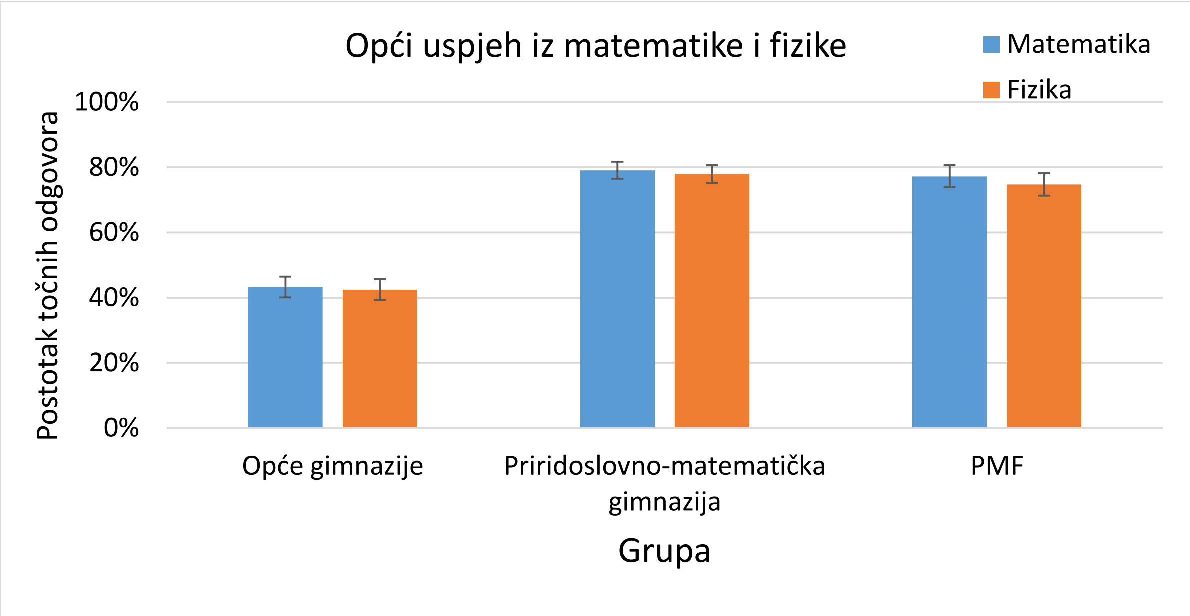
Ukupni rezultat svih ispitanika na testu bio je (66 ± 24) %. Rezultati pojedinih skupina ispitanika su dani u tablici 4.1.

Grupa	Postotak točnih odgovora
Opće gimnazije	(43 ± 18) %
Prirodoslovno-matematička gimnazija	(79 ± 17) %
PMF	(76 ± 16) %
Svi ispitanici zajedno	(66 ± 24) %

Tablica 4.1: Postotak točnih odgovora po skupinama ispitanika. Prikazane su srednje vrijednosti i standardne devijacije.

Test nije bio zahtjevan za učenike prirodoslovno-matematičke gimnazije i studente PMF-a, no može se reći da je test bio dosta težak za učenike općih gimnazija. Razlog tome zasigurno je veći broj sati matematike i fizike kod prirodoslovno-matematičkih gimnazija što olakšava nastavnicima kvalitetniju provedbu nastave.

Pomoću ovog testa s paralelnim zadacima iz matematike i fizike htjeli smo vidjeti kako kontekst utječe na rješavanje zadataka s vektorima. Slika 4.2 prikazuje postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim skupinama ispitanika.



Slika 4.1: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikala crtica označava interval pouzdanosti.

Proveo sam analizu varijance s dva faktora – *grupa* (opće gimnazije, prirodoslovno-matematička gimnazija, PMF) i *kontekst* (matematika, fizika), s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst*. Rezultati su prikazani u tablici 4.2.

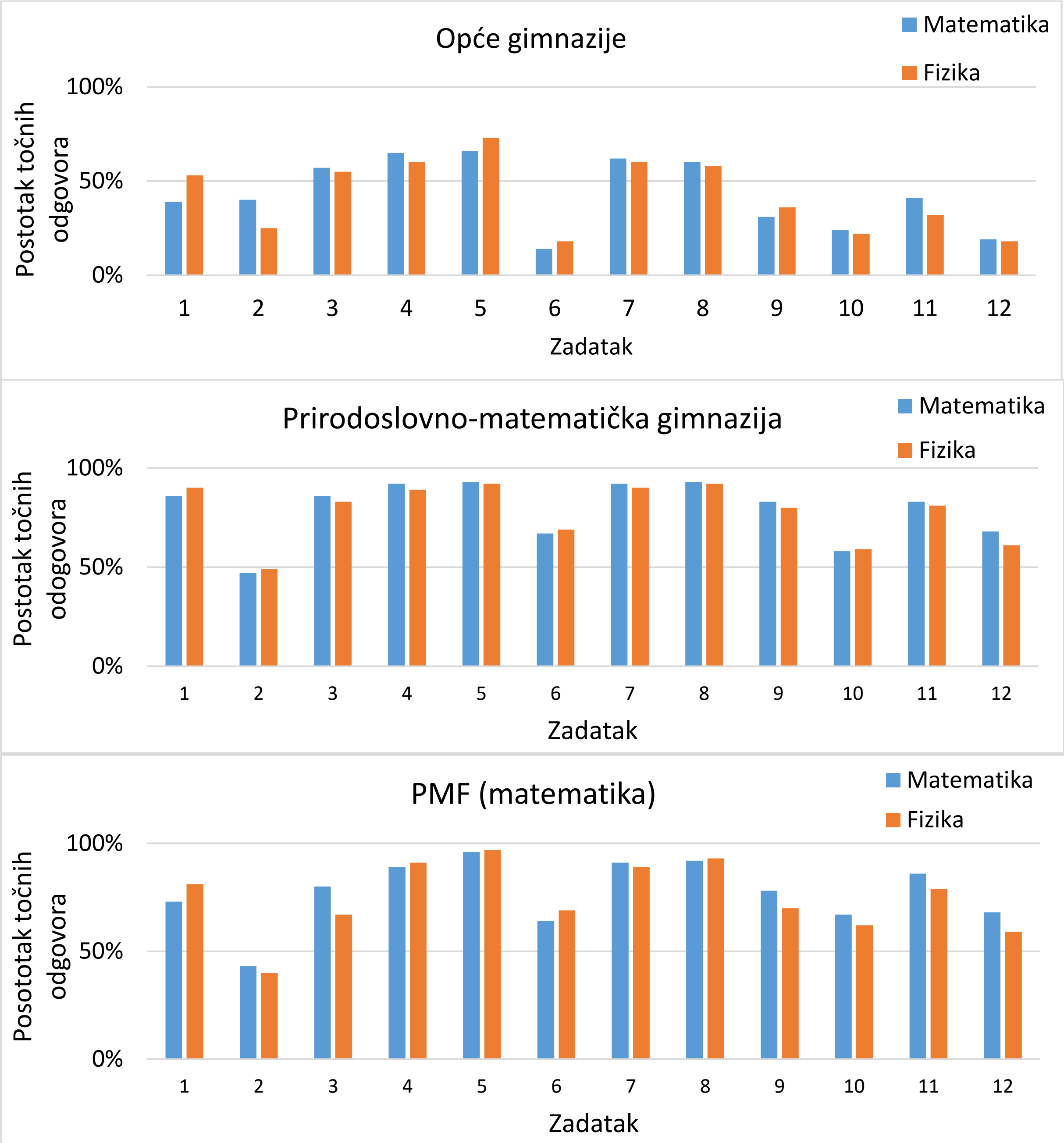
FAKTOR	F	*p*
Grupa	186,55	<0,0001
Kontekst	5,69	0,02
grupa × kontekst	0,64	0,53

Tablica 4.2: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Rezultati analize varijance pokazuju da postoji statistički značajna razlika između grupa. Iz intervala pouzdanosti u tablici 4.3 se vidi da su učenici općih gimnazija statistički značajno lošije riješili test od učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenata PMF-a. Razlika između učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenata PMF-a vjerojatno nije statistički značajna, ali to se ne može se sa sigurnošću zaključiti iz intervala pouzdanosti na slici 4.1.

Rezultati analize varijance pokazuju i da postoji statistički značajna razlika između postotka točnih odgovora iz matematike i fizike. U prosjeku su ispitanici bolje riješili matematiku nego fiziku. Ovaj rezultat bio je očekivan jer iskustva pokazuju kako je učenicima i studentima često teže riješiti zadatak iz matematike koji ima neki dodatni kontekst (npr. iz fizike ili svakodnevnog života). Interakcija *grupa* × *kontekst* nije bila statistički značajna.

Slika 4.2 prikazuje kako su učenici i studenti rješavali pojedine zadatke. Uočavamo da je najlošije riješen 6. zadatak u općim gimnazijama u kojem su ispitanici trebali odrediti skalarni produkt vektora u dvije dimenzije zapisanih u ortonormiranoj bazi u kontekstu matematike odnosno izračunati rad u kontekstu fizike. U skupini općih gimnazija taj je zadatak riješen s manje od 20% točnih odgovora i u matematici i u fizici. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti PMF-a su taj zadatak riješili s više od 60% točnih odgovora. U prosijeku je najlošije riješen 2. zadatak u kojem je trebalo odrediti definiciju skalarnog produkta kao produkt iznosa projekcije jednog vektora na drugi vektor s iznosom drugog vektora, odnosno u fizici definirati rad kao produkt iznosa sile u smjeru puta s duljinom puta. Taj zadatak je bio najteži studentima i učenicima prirodoslovno-matematičke gimnazije. Razlog tome vjerojatno je što se računanje skalarnog produkta često svede na korištenje formule za produkt vektora u ortonormiranoj bazi pa učenici i studenti lako zaboravljaju kako se došlo do te formule.



Slika 4.2: Postotak točnih odgovora po pojedinim zadatcima iz matematike i fizike

Uočavamo da su, općenito, osim 2. i 6. zadatka, lošije riješeni i 10. i 12. zadatak. Razlog tome je što je u 10. zadatku trebalo koristiti trigonometrijske funkcije kako bi se izrazila vertikalna komponenta vektora u matematici odnosno sile u fizici. U 12. zadatku trebalo je oduzeti dva kolinearna vektora.

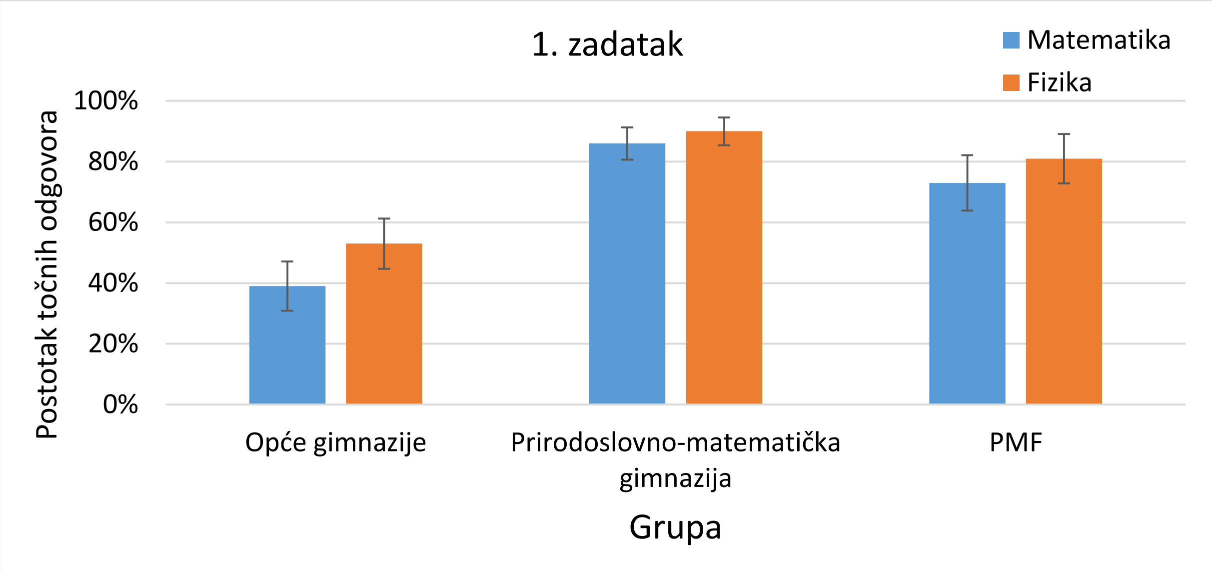
Najlakši zadatak i studentima i učenicima bio je 5. zadatak u kojem je trebalo odrediti koji od ponuđenih vektora, odnosno sila, imaju isti smjer kao i zadani vektor, odnosno sila.

Vektori su bili istog smjera i iste orijentacije pa ih nije bilo teško odrediti. U ovom zadatku učenici općih gimnazija imaju postotak točnih odgovora oko 70%, a studenti i učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije oko 90%. Razlog velikog postotka točnih odgovora vjerojatno je taj što vektori nisu bili suprotne orijentacije o čemu smo već pisali u uvodu. Studenti PMF-a i učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije općenito su bolje riješili test pa ne čudi da je postotak riješenosti tih ispitanika oko 90%. Osim 5. zadatka dobro su riješeni i 4., 7. i 8. zadatak u svim skupinama ispitanika. U 4. zadatku trebalo je odrediti definiciju skalarnog produkta danu formulom u matematici. U fizici je u 4. zadatku trebalo odrediti formulu za rad kada vektori sile i pomaka nisu usporedni već zatvaraju neki kut. U 7. zadatku trebalo je grafički odrediti horizontalnu („x“) komponentu vektora odnosno sile dok je u 8. zadatku trebalo za zadani vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ odnosno $\vec{\boldsymbol{F}}$ odrediti vektor $-3\vec{\boldsymbol{A}}$ odnosno $-3\vec{\boldsymbol{F}}$.

Razlike u postotku točnih odgovora u zadacima iz matematike i fizike nisu jako izražene iako su u većini slučajeva zadaci u kontekstu matematike nešto bolje riješeni. Valja uočiti i da su zadaci iz fizike kod svih grupa bolje riješeni u 1. i u 6. zadatku. Razlog tome u 1. zadatku mogao bi biti to što se u fizici dosta često koristi upravo zbrajanje vektora i to se ponavlja kroz više razreda srednje škole i na prvoj godini fakulteta pa su ispitanici češće zbrajali vektore u kontekstu fizike nego u kontekstu matematike. Za 6. zadatak dovoljno je bilo znati da rad nije vektor kako bi se eliminirale ostale opcije. Ipak, to što su 1. i 6. zadatak bolje riješeni u fizici je neočekivano ako u obzir uzmemo činjenicu da su naša treća grupa ispitanika upravo studenti matematike koji pretežno studiraju isključivo matematiku (86%), a tek rijetki matematiku i fiziku. Više o tim razlikama i o tome jesu li one statistički značajne vidjet ćemo u sljedećim poglavljima gdje su analizirani pojedini zadaci iz testa.

4.2.2. Prvi zadatak

Prvi zadatak (kao i svi ostali zadaci) nalazi se u Prilogu 2 na kraju rada, a u njemu su ispitanici trebali grafički odabrati rješenje koje prikazuje zbroj vektora u matematici, odnosno odrediti rezultantnu silu za koju je pisalo da je ekvivalentna zbroju vektora sile. Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim skupinama ispitanika prikazan je na slici 4.5. Rezultati analize varijance s dva faktora – *grupa* (opće gimnazije, prirodoslovno-matematička gimnazija, PMF) i *kontekst* (matematika, fizika), s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst*, prikazani su u tablici 4.3.



Slika 4.3: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

FAKTOR	F	*P*
Grupa	56,08	<0,0001
Kontekst	13,00	0,0004
grupa × kontekst	1,90	0,15

Tablica 4.3: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

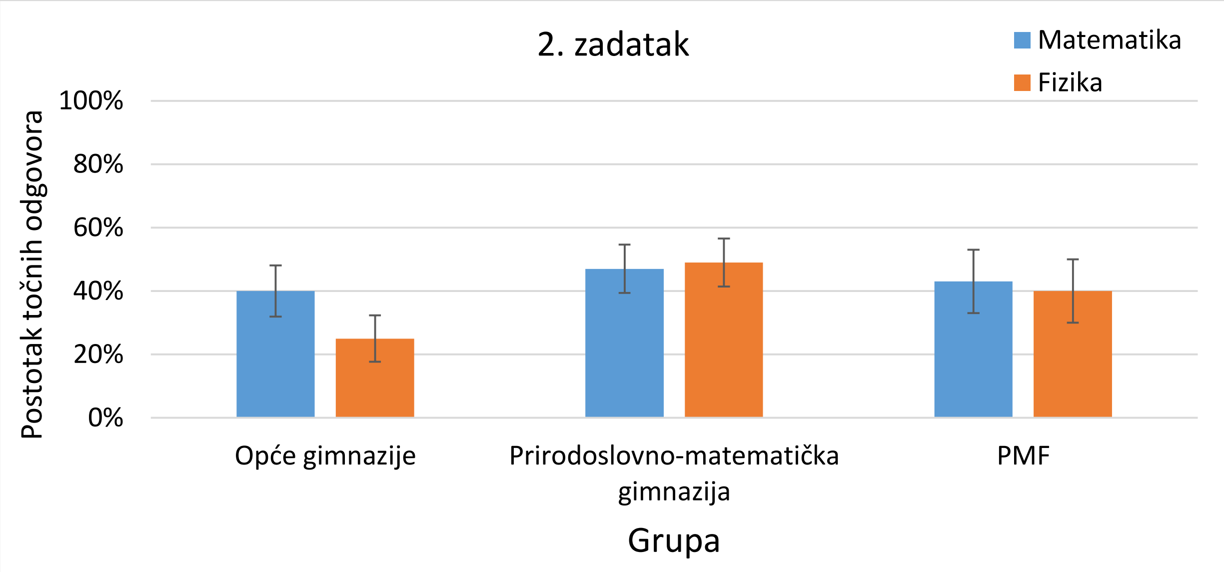
Analiza varijance pokazuje da postoji statistički značajna razlika između grupa ispitanika i na ovom pojedinačnom zadatku. Intervali pouzdanosti u grafu na slici 4.3 pokazuju da su učenici općih gimnazija statistički značajno lošije riješili test od učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenata PMF-a. Čini se da su učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije bolje riješili 1. zadatak od studenata PMF-a, ali to se ne može sa sigurnošću zaključiti iz intervala pouzdanosti na slici 4.5. Interakcija *grupa* × *kontekst* nije statistički značajna za ovaj zadatak.

Rezultati pokazuju da, u prosjeku, ispitanici bolje rješavaju 1. zadatak u kontekstu fizike, to jest bolje zbrajaju vektore kada ih poistovjete sa silama u fizici. Intervali pouzdanosti u grafu na slici 4.5 pokazuju da je razlika između postotka točnih odgovora iz matematike i fizike vjerojatno statistički značajna za učenike općih gimnazija i moguće je statistički značajna za učenike prirodoslovno-matematičke gimnazije i studente PMF-a. Učenici opće gimnazije koji su krivo zbrojili vektore najčešće su umjesto zbroja $\vec{\boldsymbol{A}}+\vec{\boldsymbol{B}}$ zapravo oduzeli vektore, tj. zaokružili odgovor koji bi odgovarao $\vec{\boldsymbol{A}}+(-\vec{\boldsymbol{B}})$. Taj odgovor je u kontekstu matematike zaokružilo 29% ispitanika, a u kontekstu fizike 17% ispitanika. Isti odgovor dalo je 19% studenata matematike u kontekstu matematike, te 11% u kontekstu fizike. Zanimljivo je da su učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije najčešće kao krivi odgovor izabrali vektor koji odgovara zbroju vektora $\vec{\boldsymbol{A}}$ i samo horizontalne komponente vektora $\vec{\boldsymbol{B}}$ (oko 5% ispitanika).

Kao što je već spomenuto, vektori se u fizici zbrajaju najprije u 1. razredu srednje škole dok se računaju rezultantne sile na tijelo i rješavaju zadatci s Newtonovim zakonima. Vektori se zbrajaju i u kinematici, npr. vektori brzina. Nakon toga vektori se ponovno koriste kod zbrajanja različitih vektorskih veličina npr. kod računanja ukupnog električnog odnosno magnetskog polja te je tako zbrajanje vektora neizbježno u nastavi fizike. S druge strane, u matematici vektori se obrađuju u okviru jedne velike cjeline, a zbrajanje je samo mali dio te cjeline. Nakon toga, vektori se u matematici više ne spominju pa ne čudi da se učenici bolje snalaze kada trebaju zbrojiti vektora u kontekstu fizike nego u kontekstu matematike. Ovaj rezultat može biti informativan za sve buduće nastavnike matematike jer je očito sila dobar uvodni problem kada se uvode vektori iz matematike u 3. razredu srednje škole. Tada su učenici već dobro upoznati s konceptom sile i moguće je da bi im to moglo pomoći kod zbrajanja vektora. Zbrajanje vektora radi se već i u 8. razredu osnovne škole nakon što su učenici radili sile u fizici, pa se i tu vektori sile mogu iskoristiti kao uvodni problem u nastavi matematike.

4.2.3. Drugi zadatak

U drugom zadatku uočavamo dosta nizak postotak točnih odgovora svih ispitanika (slika 4.4). U prosjeku to i je najlošije riješen zadatak u testu. U tom zadatku trebalo je od ponuđenih definicija izabrati onu koja opisuje skalarni produkt vektora kao duljinu projekcije jednog vektora na drugi pomnoženog s duljinom drugog vektora. U fizici je trebalo definirati rad kao iznos sile u smjeru puta pomnožene s duljinom puta. U tablici 4.4 u kojoj su prikazani rezultati analize varijance za ovaj zadatak možemo vidjeti da postoji statistički značajna razlika u postotku točnih odgovora u ovom zadatku u ovisnosti o kontekstu (p = 0,006) i u ovisnosti o grupi (p = 0,04). Gledajući preklapanje intervala pouzdanosti na slici 4.4 kod učenika opće gimnazije za različite kontekste možemo zaključiti da su ti učenici statistički značajno lošije riješili ovaj zadatak u kontekstu fizike te možemo pretpostaviti da upravo oni čine statističku razliku u postotku točnih odgovora u različitim kontekstima jer su učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti PMF-a podjednako riješili zadatke iz matematike i fizike. Na to nas upućuje i interakcija *grupa* × *kontekst* koja je ovaj put statistički značajna (p = 0,008). Nijedna skupina ispitanika nije riješila ovaj zadatak ni u jednom kontekstu s više od 50% što ukazuje na činjenicu da je skalarni produkt konceptualno težak i za učenike i za studente. U grupi učenika općih gimnazija točnih odgovora je u kontekstu matematike oko 40% kao i kod studenata PMF-a dok je postotak točnih odgovora kod učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije malo manji od 50%.



Slika 4.4: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

FAKTOR	F	*P*
Grupa	5,17	0,006
Kontekst	4,25	0,04
grupa × kontekst	4,92	0,008

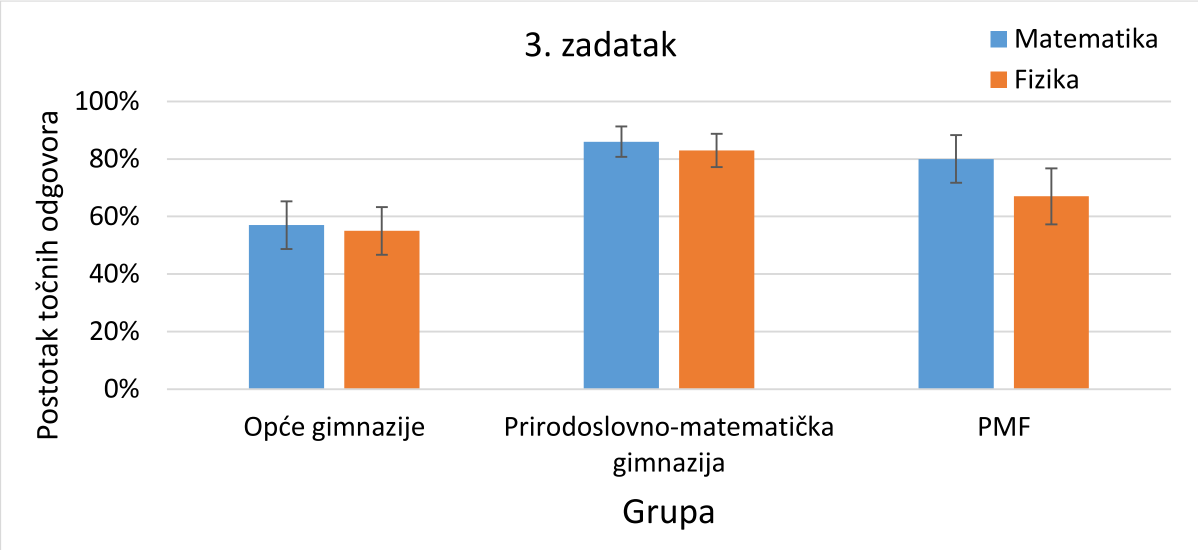
Tablica 4.4: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst*

Trebalo je odgovoriti da je skalarni produkt vektora $\vec{A}$ i $\vec{B}$, tj. $(\vec{A} \cdot \vec{B})$ duljina projekcije vektora $\vec{A}$ na vektor $\vec{B}$ pomnožena duljinom vektora $\vec{B}$. Ipak, u kontekstu matematike preko 40% učenika općih gimnazija odgovorilo je kako je to vektor u smjeru vektora $\vec{B}$, a čak 31% kako je to vektor okomit na oba vektora. Zanimljivo je da su u kontekstu fizike učenici općih gimnazija dali druge odgovore pa je tako njih 36% odgovorilo kako je rad „vektor između vektora sile i pomaka koji pokazuje desno gore“, a njih 33% kako je to „iznos vektora između vektora sile i pomaka koji pokazuje desno gore“. Ti odgovori pokazuju da učenici miješaju koncepte zbrajanja vektora i skalarnog produkta. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti matematike su u oba konteksta od krivih odgovora najčešće birali da je skalarni produkt vektora $\vec{\boldsymbol{A}}$ i $\vec{\boldsymbol{B}}$ “iznos vektora između $\vec{\boldsymbol{A}}$ i $\vec{\boldsymbol{B}}$ koji pokazuje desno gore”. Tako je odgovorilo 39% učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije u kontekstu matematike, a u kontekstu fizike njih 27%. Isto tako odgovorilo je 38% studenata PMF-a u kontekstu matematike, te 37% u kontekstu fizike.

Učenici općih gimnazija su statistički značajno lošije riješili ovaj zadatak u kontekstu fizike nego matematike. Razlog toga mogao bi biti što kada učenici uče rad iz fizike u prvom razredu srednje škole još nisu upoznati s pojmom skalarnog produkta, a kada ga rade na matematici često ga zbog manjka sati nastavnici ne povezuju s radom. Testirani učenici općih gimnazija bili su 3. razred srednje škole te nije prošlo dugo vremena otkad su radili skalarni produkt vektora, pa u kontekstu matematike sve grupe imaju približno isti postotak točnih odgovora.

4.2.4. Treći zadatak

U trećem zadatku trebalo je odrediti vertikalnu (y) komponentu vektora u matematici odnosno sile u fizici. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije ovaj su zadatak u kontekstu matematike riješili s oko 85% točnih odgovora, studenti PMF-a s oko 80%, a učenici općih gimnazija s oko 60% točnih odgovora (slika 4.5). U kontekstu fizike učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i općih gimnazija zadatak su riješili s otprilike podjednakim postotkom dok su studenti PMF-a zadatak u kontekstu fizike riješili s oko 65%. Rezultati analize varijance (tablica 4.5) ukazuju na to da je ovaj zadatak bolje riješen u kontekstu matematike. Postoji i vrlo značajna statistička razlika između grupa. Iz intervala pouzdanosti na slici 4.9 možemo zaključiti da postoji statistički značajna razlika između postotka točnih odgovora kod učenika općih gimnazija i učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije, te moguće statistički značajna razlika između učenika općih gimnazija i studenata matematike. Studenti PMF-a su u kontekstu matematike kao najčešći krivi odgovor birali horizontalnu komponentu umjesto vertikalne i taj odgovor dalo je 9% ispitanika. U kontekstu fizike najčešći krivi odgovor bio je vektor istog smjera, ali različitog modula (modul odgovara duljini cijelog vektora) i taj odgovor je izabralo 17% ispitanika. Taj isti odgovor najčešći je pogrešan odgovor i kod učenika opće, ali i prirodoslovno-matematičke gimnazije. U skupini učenika općih gimnazija tim je odgovorom u kontekstu matematike odgovorilo 20%, a u kontekstu fizike 24% ispitanika, dok je kod učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije u kontekstu matematike tim odgovorom odgovorilo 7% ispitanika, a u kontekstu fizike njih 11%. Ovaj zadatak sve su grupe ispitanika riješile s više od 50% točnih odgovora u svim kontekstima



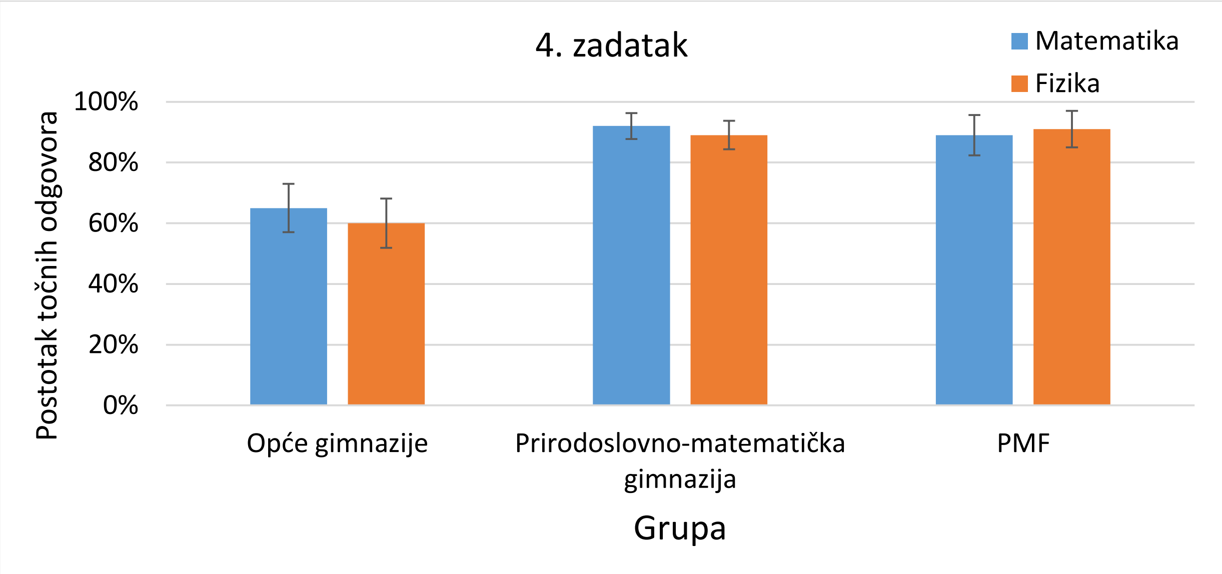
Slika 4.5: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

FAKTOR	F	*P*
grupa	22,64	<0,0001
kontekst	5,10	0,02
grupa × kontekst	2,00	0,14

Tablica 4.5: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

4.2.5. Četvrti zadatak

U četvrtom zadatku trebalo je odrediti izraz za skalarni produkt sa zadana dva vektora u dvije dimenzije i kutom između njih u kontekstu matematike kao $|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|cos\ \theta$, odnosno$|\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{d}}|cos\ \theta$ kao rad u kontekstu fizike. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti PMF-a oba su konteksta riješili s oko 90% točnih odgovora (slika 4.6). Dvosmjerna analiza varijance (tablica 4.6) pokazuje da ne postoji statistički značajna razlika u riješenosti matematike i fizike za ovaj zadatak (p = 0,20) i da je razlika u grupama statistički vrlo značajna što smo mogli uočiti i na slici 4.6 promatrajući intervale pouzdanosti. Oni pokazuju da je grupa učenika općih gimnazija statistički značajno lošije riješila test od druge dvije grupe. Učenici općih gimnazija kao pogrešne odgovore najčešće su odabrali da je skalarni produkt vektora jednak „$|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|$“ (12%), tj. „$|\vec{\boldsymbol{A}}||\vec{\boldsymbol{B}}|sin\,\theta$“ (12%). Tako je ova dva odgovora ukupno odabralo 24% ispitanika iz grupe općih gimnazija.



Slika 4.6: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

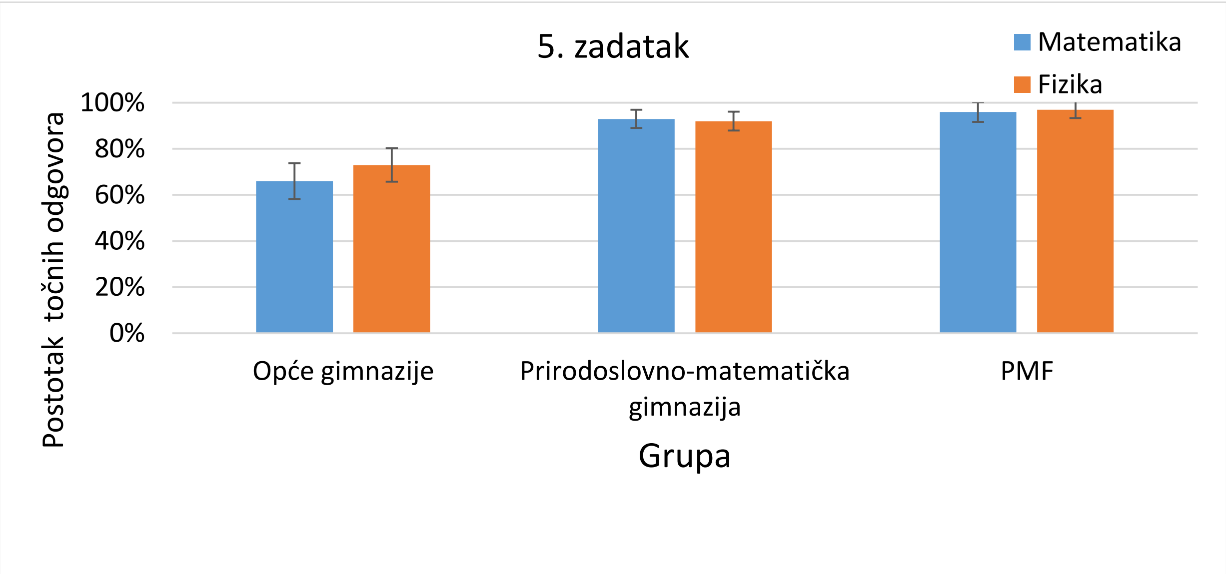
FAKTOR	F	*P*
grupa	30,50	<0,0001
kontekst	1,67	0,20
grupa × kontekst	1,17	0,31

Tablica 4.6: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Važno je uočiti da je ovaj zadatak znatno bolje riješen od zadatka pod rednim brojem 2 u kojem je trebalo napisati definiciju skalarnog produkta. Savjet nastavnicima fizike je da pokušaju rad povezati sa skalarnim produktom čim ga učenici nauče na matematici kako bi se kod učenika dogodila integracija matematike i fizike. Također, može se pomoću skalarnog produkta objasniti zašto je rad izvršen na tijelu nula kada se ono kružno giba.

4.2.6. Peti zadatak

U 5. zadatku trebalo je odrediti vektore koji imaju isti smjer kao zadani vektor, odnosno odrediti sile koje djeluju u istom smjeru kao zadana sila. Stoga ne čudi da su studenti PMF-a ovaj zadatak riješili s više od 95% točnih odgovora, a učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije s preko 90% točnih odgovora u oba konteksta (slika 4.7). Učenici općih gimnazija zadatak su riješili s oko 65% u kontekstu matematike odnosno oko 70% u kontekstu fizike Tablica 4.7 pokazuje da je razlika među grupama statistički vrlo značajna što smo mogli vidjeti i na slici 4.7 iz intervala pouzdanosti koji pokazuje da su učenici općih gimnazija statistički lošije riješili test od preostale dvije skupine. Također, slika 4.7 pokazuje da vjerojatno postoji statistički značajna razlika u kontekstu samo kod učenika općih gimnazija dok te razlike u rješavanju zadataka iz matematike i fizike nema kod učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenata. To potvrđuje statistički značajna interakcija između dva promatrana faktora (*grupa* × *kontekst*).



Slika 4.7: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

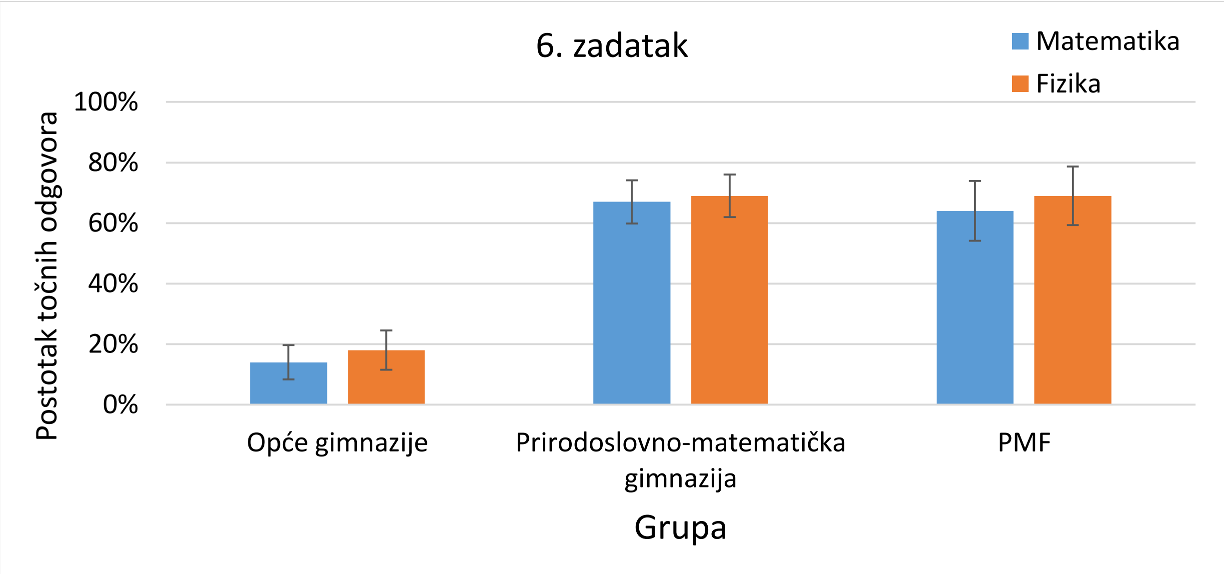
FAKTOR	F	*P*
grupa	27,63	<0,0001
kontekst	4,33	0,04
grupa × kontekst	4,00	0,02

Tablica 4.7: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Učenici općih gimnazija najčešće su od krivih odgovora izabirali onaj u kojem su bila ponuđena dva vektora koja oba imaju „smjer“ desno gore no jedan od njih nije paralelan s drugim vektorom. Ovaj odgovor izabralo je 14% ispitanika u kontekstu matematike, a 12% u kontekstu fizike. Mogli bi smo reći da postoji tendencija da učenici istim smjerom smatraju „desno gore“ ili „lijevo dolje“ pa bi i na to trebalo obratiti pažnju kada se uče vektori.

4.2.7. Šesti zadatak

Na slici 4.8 vidimo da su ovaj zadatak sve skupine riješile s manje od 70% točnih odgovora u oba kontekstu. Posebno značajno je da su ga učenici općih gimnazija riješili s manje od 20% točnih odgovora.



Slika 4.8: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

U zadatku je računski trebalo odrediti skalarni produkt dvaju nekolinearnih vektora u dvije dimenzije zadanih u ortnormiranoj bazi u kontekstu matematike. U kontekstu fizike trebalo je izračunati rad u džulima za kojeg je pisalo da je skalarni produkt vektora sile i pomaka. Vektor sile bio je zadan u njutnima, a pomak u metrima. Oba vektora bila su zapisana u ortonormiranoj bazi. Dvosmjerna analiza varijance (tablica 4.8) pokazuje da postoji značajna statistička razlika u riješenosti ovog zadatka s obzirom na kontekst te vrlo značajna statistička razlika s obzirom na grupu što je vidljivo i iz intervala pouzdanosti na slici 4.8.

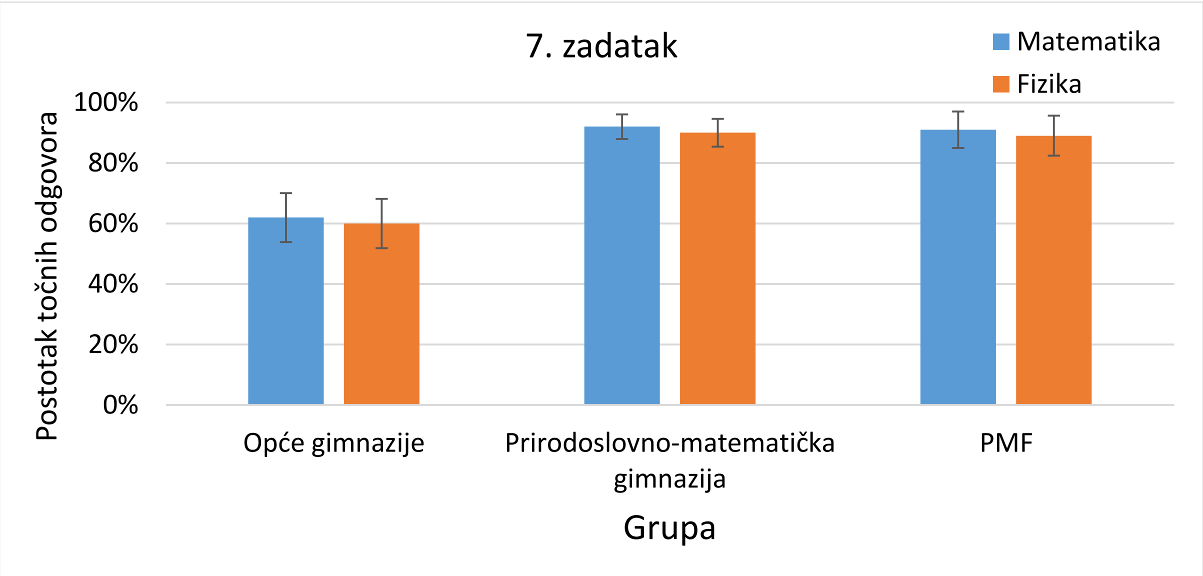
FAKTOR	**F**	***P***
grupa	71,56	<0,0001
kontekst	5,25	0,02
grupa × kontekst	0,50	0,61

Tablica 4.8: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Razlog tome što postoji statistički značajna razlika s obzirom na *kontekst* (i to bolje su riješeni zadaci u kontekstu fizike) mogao bi biti što su učenici i studenti vjerojatno znali da rad nije vektor već skalar. Samo je jedan od ponuđenih odgovora bio skalar (5 džula), dok su svi ostali odgovori bili vektori (npr. 5î džula). Ipak, iznenađuje nas da su učenici općih gimnazija i uz taj podatak ovaj zadatak u kontekstu fizike riješili s manje od 20% što ukazuje na to da zaboravljaju da je rad skalar. Najčešći krivi odgovori bili su da je skalarni umnožak vektora $\vec{\boldsymbol{A}} = 1\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ i vektora $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\mathbf{i}}$ jednak „$5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$“, tj. da je rad jednak „ $(5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$ džula“ kada je vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ bio zadan u njutnima i predstavljao silu, a vektor $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\mathbf{i}}$ pomak u metrima. U oba konteksta ovaj odgovor dalo je 44% ispitanika iz grupe općih gimnazija. Ovaj odgovor ukazuje na to da učenici „znaju“ da se komponente množe međusobno, ali zaboravljaju da je to skalar i zanemaruju činjenici da vektor $\vec{\mathbf{B}}$ nema vertikalnu komponentu.

4.2.8. Sedmi zadatak

U sedmom zadatku trebalo je grafički odrediti horizontalnu (x) komponentu vektora u kontekstu matematike, odnosno sile kao vektora u kontekstu fizike. Stoga smo očekivali dobru riješenost ovog zadatka. Postotak točnih odgovora (slika 4.9) je u oba konteksta oko 90% kod učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenata PMF-a. Kod učenika općih gimnazija riješenost je oko 60% za oba konteksta što je ipak dosta mali postotak budući da se radi o mogli bismo reći „laganom“ zadatku. Interval pouzdanosti na slici 4.8 kod skupine općih gimnazija pokazuje statistički značajno manje točnih odgovora u toj skupini s obzirom na ostale. Na to ukazuje i dvosmjerna analiza varijance (tablica 4.9). Analiza varijance pokazuje i da nema statistički značajne razlike na faktoru *kontekst* (p = 0,20), tj. ispitanici su podjednako rješavali zadatke iz matematike i fizike. Najčešći krivi odgovor kod učenika općih gimnazija (23% u kontekstu matematike i 19% u kontekstu fizike) je vektor koji je modulom (iznosom) jednak zadanom vektoru, ali ima smjer i orijentaciju kao i horizontalna koordinatna os.



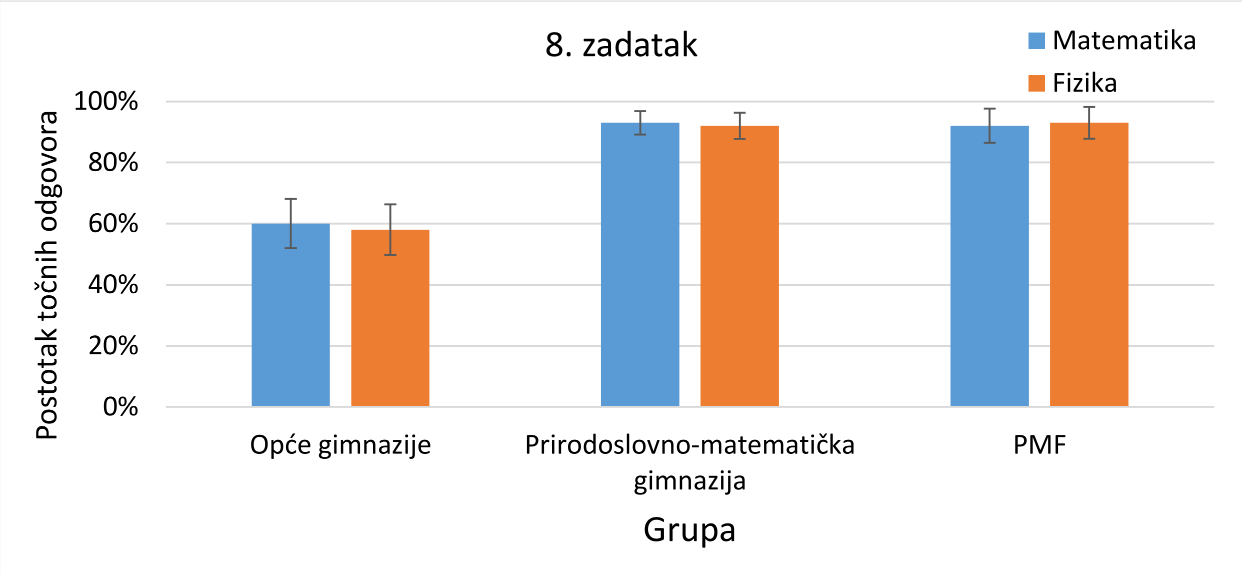
Slika 4.9: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

FAKTOR	F	*P*
grupa	35,59	<0,0001
kontekst	1,33	0,20
grupa × kontekst	0,00	1,00

Tablica 4.9: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

4.2.9. Osmi zadatak

U osmom zadatku trebalo je za zadani vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ odnosno $\vec{\boldsymbol{F}}$ odrediti vektor $-3\vec{\boldsymbol{A}}$ odnosno $-3\vec{\boldsymbol{F}}$. Vektori su bili zadani grafički pa je riješenost zadatka dosta dobra (slika 4.10). Statistička razlika u postotku točnih odgovora (tablica 4.10) s obzirom na kontekst nije značajna (p =0,19) no razlika u skupinama je statistički vrlo značajna i za ovaj zadatak (p<0,0001). Interakcija *grupa* × *kontekst* nije statistički značajna (p = 0,51).



Slika 4.10: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

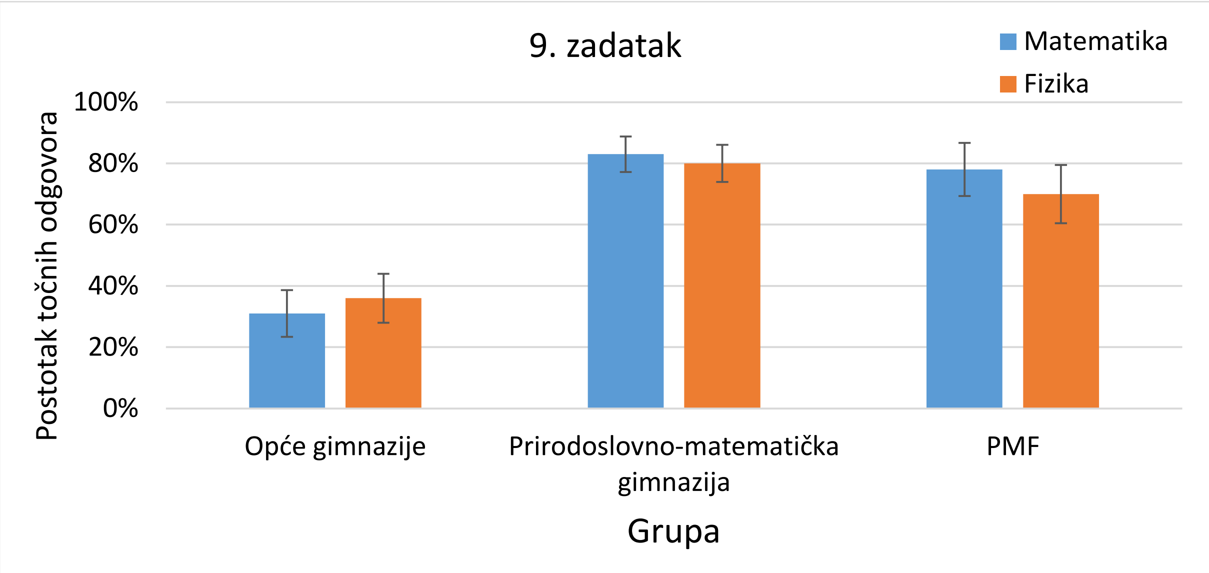
FAKTOR	F	*P*
grupa	44,17	<0,0001
kontekst	1,67	0,20
grupa × kontekst	0,67	0,51

Tablica 4.10: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Studenti PMF-a i učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije imaju riješenost preko 90% u oba konteksta za ovaj zadatak. Učenici općih gimnazija ovaj su zadatak u oba konteksta riješili s oko 60%. I u kontekstu matematike i u kontekstu fizike najčešća su im dva pogrešna odgovora. Jedan odgovor je vektor koji je s obzirom na zadani translatiran u horizontalnom smjeru za 3 jedinične duljine i drugi u kojem je nacrtan vektor suprotno orijentiran od zadanog koji je samo 1,5 puta dulji od zadanog, ali su mu obje komponente i u horizontalnom i u vertikalnom smjeru veličine 3 jedinične duljine. Na jedan od ova dva odgovora u kontekstu matematike odgovorilo je 32% učenika, a u kontekstu fizike 34% učenika.

4.2.10. Deveti zadatak

U devetom zadatku trebalo je oduzeti nekolinearne vektore zadane grafički u matematici, odnosno sile u fizici. Na slici 4.11 vidimo da je postotak točnih odgovora učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije oko 80%, kod studenta PMF-a je nešto manji, a najmanji je kod učenika općih gimnazija.



Slika 4.11: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

Za ovaj zadatak dvosmjerna analiza varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru kontekst (tablica 4.11) pokazuje da nema statistički značajne razlike u kontekstu. Statistički značajna nije ni interakcija *grupa* × *kontekst*, no razlika između grupa ponovno je statistički vrlo značajna. Učenici općih gimnazija zadatak najslabije su riješili ovaj zadatak, s oko 30% u kontekstu matematike, odnosno oko 35% u kontekstu fizike.

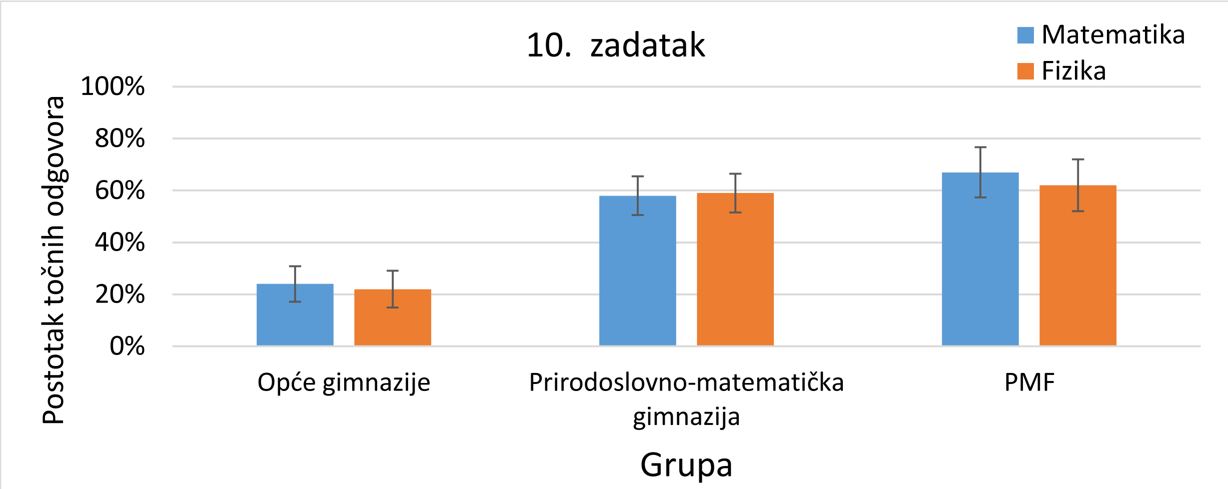
FAKTOR	**F**	***P***
grupa	67,81	<0,0001
kontekst	0,27	0,60
grupa × kontekst	2,27	0,10

Tablica 4.11: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

U svim skupinama najčešći pogrešan odgovor je vektor suprotno orijentiran od točnog odgovora. Vektorski produkt je dosta težak koncept za učenike pa je za vjerovati da je dio učenika znao da vektor mora biti okomit na preostala dva, ali nisu znali pravilo desne ruke. Moguće je da se dio učenika samo zabunio iako znaju točan odgovor. U skupini učenika općih gimnazija tim odgovorom odgovara oko 30% ispitanika, u skupini učenika prirodoslovno-matematičke gimnazije oko 10%, a u skupini studenata matematike PMF-a oko 15%. Zadatak je riješen u prosjeku za oko 20% lošije riješen nego zadatak sa zbrajanjem vektora (zadatak 2). Kod zbrajanja su rijetki kao točan odgovor zaokružili suprotan smjer i najčešći krivi odgovor bio je onaj u kojem su ispitanici umjesto vektorskog zbroja odabrali njihovu razliku dok u ovom zadatku većina učenika i studenata griješi samo u orijentaciji rezultantnog vektora.

4.2.11. Deseti zadatak

U 10. zadatku trebalo je računski (formulom) izraziti horizontalnu (x) komponentu vektora odnosno sile. Postotak točnih odgovora je oko 60% (slika 4.12) u oba konteksta za učenike prirodoslovno-matematičke gimnazije te se može uvrstiti u skupinu lošije riješenih zadataka za matematičku gimnaziju. Kod studenata riješenost je oko 70% u kontekstu matematike, a oko 60% u kontekstu fizike. Učenici općih gimnazija ovaj su zadatak riješili s oko 20% u oba konteksta. Rezultati analize varijance (tablica 4.12) pokazuju da postoji statistički značajna razlika na faktoru *grupa* (p<0,0001), te da razlika na faktoru *kontekst* nije statistički značajna, kao ni interakcija *grupa* × *kontekst*.



Slika 4.12: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

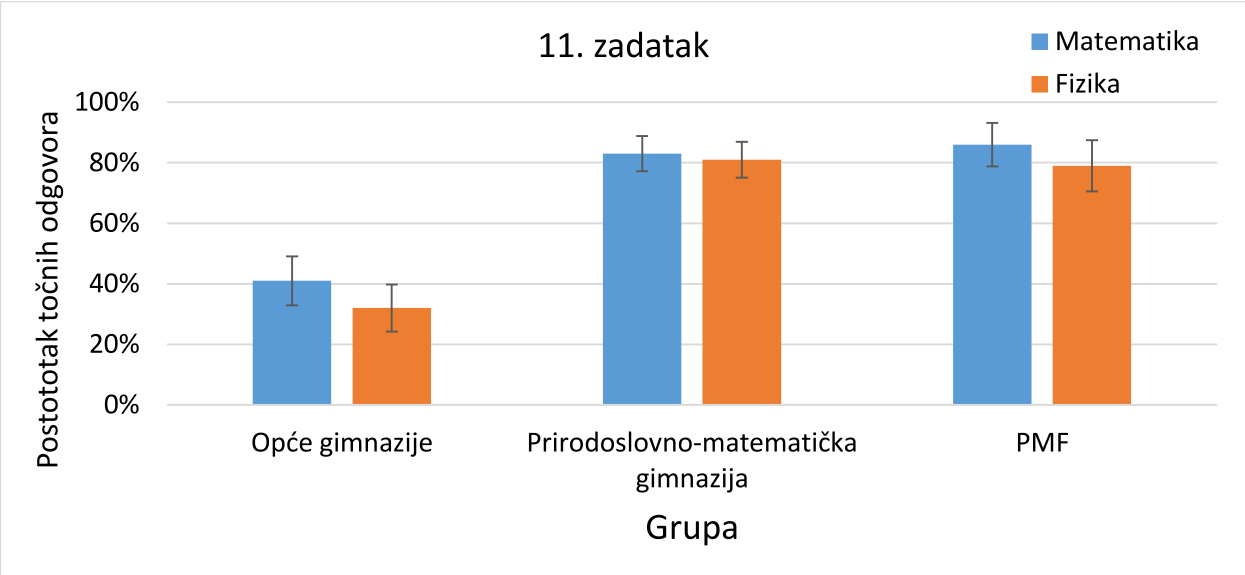
FAKTOR	F	*P*
Grupa	35,16	<0,0001
Kontekst	1,00	0,32
grupa × kontekst	0,67	0,51

Tablica 4.12: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

U svim grupama i u oba konteksta najčešći pogrešan odgovor je zamjena sinusa i kosinusa. Tako su ispitanici umjesto točnog odgovora $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, sin\,\phi$ odgovorili s $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, cos\,\phi$. Tako je odgovorilo čak 31% ispitanika iz skupine prirodoslovno-matematičke gimnazije u kontekstu fizike, te 30% ispitanika općih gimnazija u kontekstu matematike. Ispitanici tijekom testa nisu smjeli imati formule te su morali znati trigonometrijske omjere u pravokutnom trokutu što mnogi učenici ne znaju napamet.

4.2.12. Jedanaesti zadatak

U jedanaestom zadatku bio je zadan vektor (sila) i trebalo je izračunati njegov modul, odnosno u fizici iznos sile. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije oba su konteksta u ovom zadatku riješili s oko 80% točnih odgovora (slika 4.13). Oko 80% točnih odgovora imali su i studenti PMF-a u kontekstu fizike, a oko 85% imali su u kontekstu matematike. Učenici općih gimnazija imali su oko 40% točnih odgovora na ovaj zadatak u kontekstu matematike, a oko 30% u kontekstu fizike. Dvosmjerna analiza varijance (tablica 4.13) pokazuje da je i razlika u kontekstu za ovaj zadatak statistički vrlo značajna (p = 0,0001), odnosno možemo zaključiti da su učenici i studenti statistički značajno bolje riješili zadatak u kontekstu matematike. Statistički je vrlo značajna i razlika među grupama dok interakcija ta dva faktora (*grupa x kontekst*) statistički nije značajna.



Slika 4.13: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

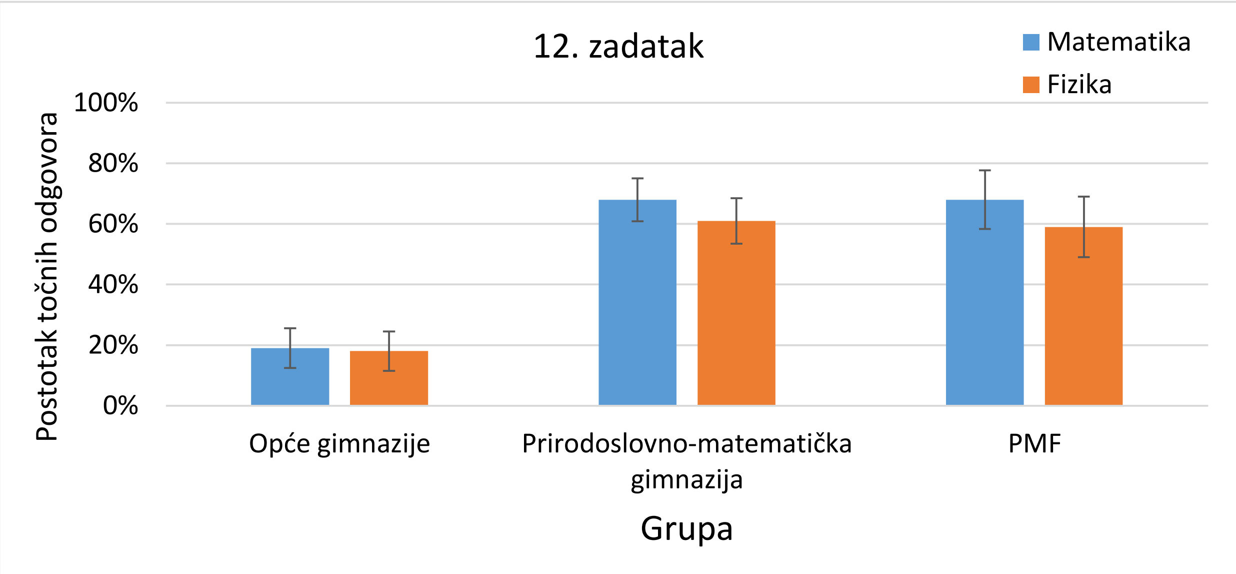
FAKTOR	F	*P*
grupa	59,31	<0,0001
kontekst	15,25	0,0001
grupa × kontekst	2,75	0,07

Tablica 4.13: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Od pogrešnih odgovora učenici su najčešće odgovarali da je modul vektora $2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ jednak „4“. Ovaj odgovor je izabralo je 20% učenika općih gimnazija u kontekstu matematike, a čak 29% u kontekstu fizike. Osim moguće greške u računu razlog zašto su učenici mislili da je modul „4“ mogao bi biti što učenici promatraju vektor $2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ kao 2 vektora te je zbroj njihovih modula jednak 4. Oko 15% učenika iste skupine u oba je konteksta s 15% odgovora odgovorilo kako je modul jednak „2“.

4.2.13. Dvanaesti zadatak

U dvanaestom zadatku trebalo je oduzeti dva kolinearna vektora. Dosta loša riješenost u postocima točnih odgovora s obzirom na ostale zadatke nije neočekivana. Sve su skupine bolje riješile zadatak u kontekstu matematike (slika 4.14). Dvosmjerna analiza varijance (tablica 4.14) pokazuje da je razlika u rješavanju ovog zadatka u kontekstu statistički značajna, odnosno možemo reći da su učenici statistički značajno bolje riješili ovaj zadatak u kontekstu matematike. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti PMF-a slično su riješili test s otprilike 70% točnih odgovora u kontekstu matematike i oko 60% u kontekstu fizike i značajno više od učenika općih gimnazija. Interakcija *grupa* × *kontekst* nije statistički značajna. Učenici prirodoslovno-matematičke gimnazije i studenti PMF-a slično su riješili test s otprilike 70% točnih odgovora u kontekstu matematike i oko 60% u kontekstu fizike.



Slika 4.14: Postotak točnih odgovora iz matematike i fizike po pojedinim grupama ispitanika; crna vertikalna crtica označava interval pouzdanosti.

FAKTOR	F	*p*
grupa	59,81	<0,0001
kontekst	6,78	0,01
grupa × kontekst	1,11	0,33

Tablica 4.14: Rezultati dvosmjerne analize varijance s ponovljenim mjerenjem na faktoru *kontekst.*

Učenici općih gimnazija oba su konteksta riješili s manje od 20% točnih odgovora pa ne čudi statistički vrlo značajna razlika s obzirom na faktor *grupa.* To smo mogli zaključiti i iz intervala pouzdanosti na slici 4.13 jer nema nikakvih podudaranja kod učenika općih gimnazija s obzirom na preostale dvije grupe. Čak 52% učenika je zbrojilo vektore umjesto oduzelo u kontekstu matematike, a 42% u kontekstu fizike. Razlog tome mogao bi biti što kod učenika postoji povezivanje da kad nešto oduzimamo mora postati manje. Ovo je vrlo važan podatak za nastavnike fizike jer se u fizici često oduzimaju upravo kolinearni vektori. Primjeri su djelovanje sile u suprotnom smjeru (suprotna orijentacija), ali i promjena brzine ili količine gibanja u kojima je najčešći baš slučaj s promjenom smjera vektora u suprotnu stranu (promjena orijentacije). Budući da su i učenici i studenti imali poteškoća s ovim zadatkom, bilo bi dobro posebnu pažnju posvetiti zbrajanju i oduzimanju kolinearnih vektora, i u nastavi matematike i u nastavi fizike.

Poglavlje 5

Implikacije za nastavu

U prethodnim poglavljima dobili smo podatke o raznim učeničkim poteškoćama i čestim krivim konceptima vezanim uz vektore. U ovom poglavlju važno je uvidjeti na koji način bi mogli poboljšati učeničko razumijevanje vektora. Prvo što možemo učiniti je upotrijebiti Radni list za poboljšavanje razumijevanja vektorskih koncepata koji smo već spominjali i koji se nalazi u referencama ovog rada, a koji traje 30 – 40 minuta te se lako može provesti i u nastavi [10] . Ipak, krenut ćemo od problema zbrajanja i oduzimanja vektora. Već u osmom razredu kada se uvode vektori u matematici njihovo se zbrajanje može objasniti kao promjena položaja. Na ovaj način učenicima se može lakše približiti da se „početak jednog vektora“ stavlja na „kraj drugog vektora“ kako bi ih zbrojili jer je to dosta intuitivno tj. ako smo se već pomaknuli iz početnog položaja (ishodišta) sljedeći pomak će ići od tog novog položaja. Kod zbrajanja kolinearnih vektora, osim što ponovno možemo koristiti vektore položaja, može se koristiti i koncept sile koju učenici rade u 7. razredu osnovne škole. Važno je, što je moguće više puta, s učenicima vježbati oduzimanje i zbrajanje vektora koji su kolinearni. Upravo je zadatak s oduzimanjem kolinearnih vektora jedan od najlošije riješenih zadataka u ovim testiranjima. Kada se ponovno rade vektori u srednjoj školi uvodi se ortonormirana baza pa je jako važno da se i taj zapis jednako koristi dok se zbrajaju i oduzimaju vektori. Korištenje oba načina (grafički i računski) pomaže učenicima da lakše razumiju koncept zbrajanja i oduzimanja vektora.

Kada učenici uče skalarni produkt u 3. razredu srednje škole ne bi ga bilo loše povezati s radom. Učenici u 1. razredu srednje škole uče rad i već u 1. razredu gledaju i spominju komponentu sile koja „gleda“ u smjeru pomaka stoga je to baš dobar uvodni problem za uvođenje skalarnog produkta. Također, već smo spomenuli da se ovdje može spomenuti da je rad koji izvrši sila koja vrši ulogu centripetalne sile na nekom tijelu jednaka nuli jer je vektor te sile u svakom trenutku okomit na vektor pomaka. Bilo bi dobro kada bi predmetni kurikul iz matematike i fizike bili bolje usklađeni. To bi se postiglo kada bi se zbrajanje i oduzimanje vektora radilo otprilike istovremeno kada i crtanje dijagrama sila, a skalarni produkt istovremeno kad i rad ili tok električnog, odnosno magnetskog polja i sl. Tada bi učenici mogli iz oba nastavna predmeta raditi istovremeno slične probleme te bi razumijevanje i povezivanje koncepata bilo znatno bolje.

Vektorski produkt radi se samo u prirodoslovno-matematičkim gimnazijama, ali često i na prvoj godini fakulteta. Ipak, većina učenika i studenata dobro određuje smjer vektora koji dobivamo kao rezultat vektorskog produkta, ali ne i orijentaciju. Često mišljenje je da je vektorski produkt komutativan. Istraživanja pokazuju da na točnost odgovora s vektorskim produktom utječu nespretnost sudionika, ravnina u kojoj su vektori zadani i kut između vektora [5] . U svakom slučaju bilo bi dobro da učenici smiju okretati papir kada rješavaju zadatke s vektorskim produktom barem na početku jer se na taj način na istraživanjima smanjila razlika između postotka točnih odgovora između zahtjevnih i ne toliko zahtjevnih zadataka [5] .

Na nastavi fizike je problem uočen kod određivanja smjera vektorskog produkta, npr. kod određivanja smjera Lorentzove sile. Neki smatraju da kada se u srednjoj školi uči pravilo desne ruke možda bi bilo bolje umjesto tog pravila učiti vektorski produkt. Postoji nekoliko različitih načina za objašnjavanje pravila desne ruke, odnosno smjera vektorskog produkta:

- *Prsti pokazuju smjer prvog vektora, palac drugog, a njihov produkt ima smjer iz dlana.*
- *Prsti se postave u smjeru prvog vektora i zakrenu se za najmanji kut tako da pokazuju drugi vektor, tada palac pokazuje smjer vektorskog produkta.*

Kažiprst pokazuje smjer prvog vektora, palac drugog vektora, a srednji prst pokazuje smjer njihovog vektorskog produkta.

Dodatan problem su razlike u fizikalno sličnim, ali nikako istim konceptima poput električnog i magnetskog polja, električnog polja i električne sile. Osim toga, poteškoće u fizici stvara i predznak naboja koji još dodatno može promijeniti orijentaciju vektora. Posebno je izražen problem inverznih zadataka s kojim i najbolji studenti imaju dosta poteškoća. To su problemi u kojima je npr. zadan smjer brzine i smjer djelovanja sile na naboj, a traži se smjer magnetskog polja. Jedan način koji uvelike može pomoći studentima je metoda „pretpostavi i provjeri“ (eng. „guess-and-check“) [5] .U ovom primjeru, smjer magnetskog polja mora biti okomit na smjer oba vektora (sile i brzine) pa znamo „pravac“ na kojem se vektor nalazi. Pretpostavimo da vektor magnetskog polja ima neku orijentaciju i provjerimo odgovara li to opisu zadatka. Ukoliko odgovara dobro smo pretpostavili smjer magnetskog polja, a ako ne, smjer je suprotan (orijentacija je suprotna).

Kod studenata se javljaju isti problemi kao i kod učenika pa je ponekad i u visokoškolskom obrazovanju potrebno i korisno ponoviti koncepte koji bi se „trebali znati“ jer očito za time postoji potreba. Na internetu postoje i razne animacije koje mogu pomoći učenicima i studentima u boljem razumijevanju vektora.

Literatura

[1] P. Barniol, G. Zavala, *Force, velocity, and work: The effects of different contexts on students' understanding of vector concepts using isomorphic problems*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 10 (2014), 020115.

[2] P. Barniol, G. Zavala, *Test of understanding of vectors: A reliable multiple-choice vector concept test*,Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 10 (2014), 010121. [3] A.F. Heckler, *Adding and subtracting vectors: The problem with the arrow representation*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 11 (2015), 010101.

[3] A.F. Heckler, Adding and subtracting vectors: The problem with the arrow representation. Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 11 (2015), 010101

[4] R. D. Knight, *Vector knowledge of beginning physics students*, Phys. Teach. 33 (1995), 74-77.

[5] M.B. Kustusch, *Assessing the impact of representational and contextual problem features on student use of right-hand rules*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 12 (2016), 010102.

[6] Nacionalni okvirni kurikulum, dostupno na http://www.azoo.hr/images/stories/dokumenti/ Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (10. rujna 2017.)

[7] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta fizike, dostupno na http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Fizika.pdf (10. rujna 2017.)

[8] Nacionalni kurikulum nastavnog predmeta matematike, dostupno na http://www.kurikulum.hr/wp-content/uploads/2016/03/Matematika.pdf (10. rujna 2017.)

[9] N.-L. Nguyen, D. E. Meltzer, *Initial understanding of vector concepts among students in introductory physics courses*, Am. J. Phys. 71 (2003), 630-639.

[10] Peter S. Shaffer and Lillian C. McDermott, *A research-based approach to improving student understanding of the vector nature of kinematical concepts*, Am. J. Phys., 10 (2005), 921-931.

[11] S.Rakkapao, S. Prasitpong, K. Arayathanitkul, *Analysis test of understanding of vectors with the three-parameter logistic model of item response theory and item response curves technique*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. 12 (2016), 020135.

[12] VassarStats: Website for Statistical Computation, dostupno na http://vassarstats.net/ (10. rujna 2017.)

[13] U. Wutchana, K. Bunrangsri, N. Emarat, *Teaching Basic Vector Concepts: A Worksheet for the Recovery of Students' Vector Understanding*, Eurasian J. Phys. & Chem. Educ. 7 (2015), 18-28.

Sažetak

U ovom diplomskom radu napravljena su dva istraživanja o razumijevanju vektora kod učenika i studenata u kojem je sudjelovalo 776 ispitanika. Cilj prvog istraživanja bio je ispitati konceptualno i proceduralno razumijevanje vektora kod studenata, a obuhvaćena su područja duljine i smjera vektora, zbrajanja i oduzimanja vektora, skalarnog produkta, vektorskog produkta te rastavljanje vektora na komponente. U drugom istraživanju ispitano je kako učenici i studenti rješavaju paralelne zadatke iz matematike i fizike koji su identični što se tiče ideja vezanih uz vektore, ali stavljeni u različite kontekste. Zadaci iz fizike obuhvaćali su pojmove sile, brzine i rada. Ispitanici su trebali na svakom pitanju izabrati jedan od pet ponuđenih odgovora. Testiranja su pokazala s kojim konceptima i procedurama učenici i studenti imaju najviše poteškoća, ali i koji su najčešći krivi odgovori. Osim toga, uočene su razlike u postotku točnih odgovora s obzirom na kontekst zadatka. Rezultati ovog istraživanja mogu pomoći nastavnicima da bolje razumiju poteškoće učenika i studenata s vektorima te da bolje i učinkovitije planiraju nastavu. Na kraju, ovaj rad sugerira da je potrebna jača integracija matematike i fizike u osnovnoj i srednjoj školi, ali i u visokoškolskom obrazovanju.

Summary

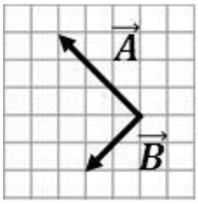
In this diploma thesis, two research studies on high school and university students' understanding of vectors were conducted on 776 participants. The goal of the first research study was to investigate conceptual and procedural student understanding of vectors; the included conceptual areas were length and direction of vectors, addition and subtraction of vectors, dot product and cross product, and vector resolution to its components. In the second research study, we explored how high school and university students solve parallel math and physics test items that were identical in the ideas related to vectors but they were set in different contexts. The physics test items were about force, velocity, and work. On each test item, the participants had to choose one from five possible answers. The test results have shown which concepts and procedures are the most challenging for high school and university students and what were the most common mistakes. Besides, the differences in the percentages of correct answers depending on the context of the test item were found. The research results can help teachers to better understand the difficulties of high school and university student with vectors and can also help them to organize better and more effective lessons. Finally, this thesis suggests the need for stronger connections between mathematics and physics in elementary and high schools but also in universities.

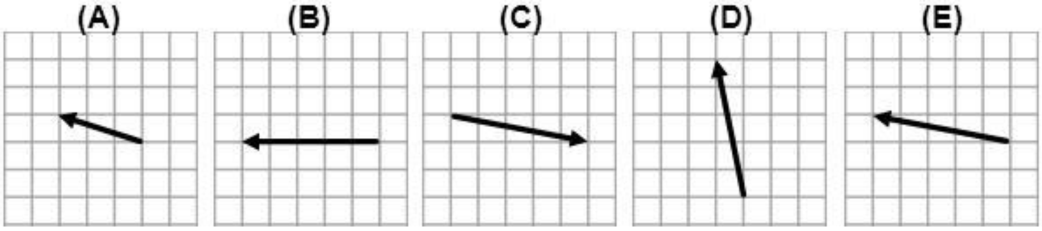
Životopis

Damjan Klemenčić rođen je 03.09.1993. u Varaždinu gdje je pohađao IV. osnovnu školu, a 2008. upisao je prirodoslovno-matematički smjer druge gimnazije u istom gradu. Nakon završene srednje škole upisao je integrirani nastavnički studij matematike i fizike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 2012. godine. Nakon prve godine fakulteta postaje demonstrator na kolegiju Analitičke geometrije, a na drugoj godini iz Osnova fizike 1 i Osnova fizike 2. Na trećoj godini postaje aktivan član „Fizike expres“ te u sljedećim godinama redovito volontira na projektu „Otvoreni dani PMF-a“ i redovito predstavlja Fizički odsjek PMF-a na Smotri Sveučilišta u Zagrebu. Damjan Klemenčić bio je i član Studentskog zbora PMF-a, te zamjenik predstavnika Vijeća prirodoslovnog područja Sveučilišta u Zagrebu. Zajedno s ostalim studentima Studentskog zbora sudjeluje u organizaciji projekta Primatijada zbog kojeg 2016. godine dobiva i Rektorovu nagradu za društveno koristan rad u akademskoj i široj zajednici. Uz sve to bio je aktivan član šahovske selekcije s kojom je 2014. osvojio brončanu medalju, te nogometne selekcije PMF-a s kojom je 2017. osvojio zlatnu medalju na Primatijadi. Također, pjevao je u zboru PMF-a. Osim što je bio redovan student, pohađao je i glazbenu školu te uspješno završio osnovnu glazbenu školu i prvi razred srednje glazbene škole za zanimanje glazbenik pjevač.

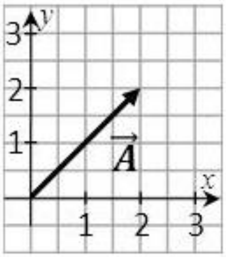
Test razumijevanja vektora

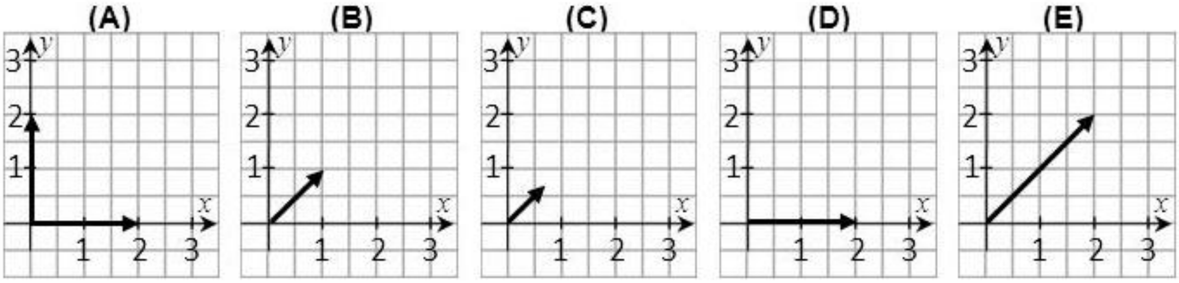
1. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Odaberite sliku koja prikazuje zbroj vektora $\vec{A}+\vec{B}$.



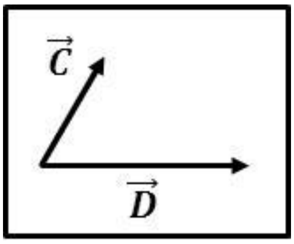


2. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$. Odaberite sliku koji prikazuje jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{A}$.



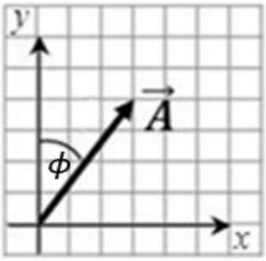


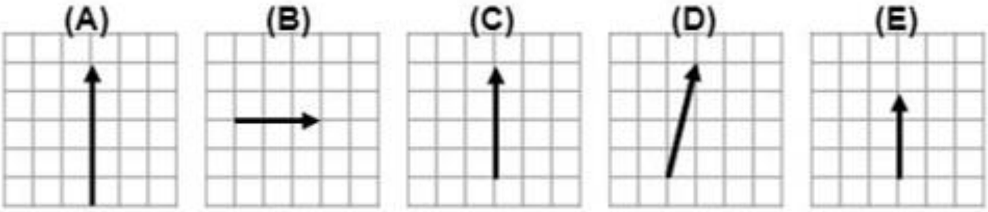
3. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{C}$ i $\vec{D}$. Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje skalarni produkt ($\vec{C}\cdot\vec{D}$)?



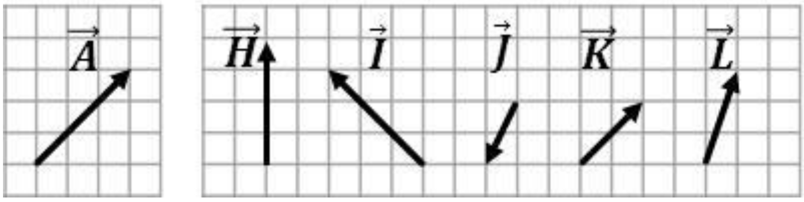
(A) Duljina (modul, iznos) vektora između $\vec{C}$ i $\vec{D}$ koji pokazuje desno gore.
(B) Duljina projekcije vektora $\vec{C}$ na vektor $\vec{D}$ pomnožena duljinom vektora $\vec{D}$.
(C) Vektor između $\vec{C}$ i $\vec{D}$ koji pokazuje desno gore.
(D) Vektor okomit na oba vektora.
(E) Vektor u smjeru vektora $\vec{D}$.

4. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ koji zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. Odaberite sliku koja prikazuje *y*-komponentu vektora $\vec{A}$, (tj. $\vec{A}_y$).



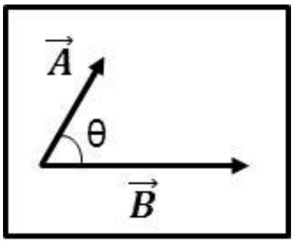


5. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ i skupinu drugih vektora. Koji vektor/i sa slike ima/ju isti smjer kao vektor $\vec{A}$?



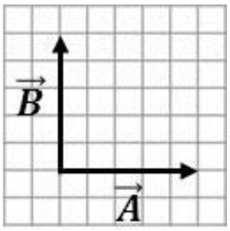
(A) $\vec{K}, \vec{L}$
(B) $\vec{I}, \vec{K}$
(C) $\vec{K}$
(D) $\vec{H}, \vec{K}, \vec{L}$
(E) Nijedan vektor nema isti smjer kao vektor $\vec{A}$

6. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji zatvaraju kut θ. $|\vec{A}|$ je duljina vektora $\vec{A}$ i $|\vec{B}|$ duljina vektora $\vec{B}$. Koji je od ponuđenih odgovara skalarni produkt ($\vec{A} \cdot \vec{B}$)?



(A) $|\vec{A}||\vec{B}|$
(B) $|\vec{A}||\vec{B}|cos\ \theta$
(C) $|\vec{A}|cos\ \theta + |\vec{B}|sin\ \theta$
(D) $|\vec{A}||\vec{B}|sin\ \theta$
(E) $|\vec{A}|cos\ \theta|\vec{B}|sin\ \theta$

7. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji imaju jednake duljine. Koja je od ponuđenih tvrdnji o duljini zbroja ova dva vektora točna?

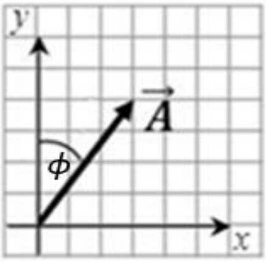


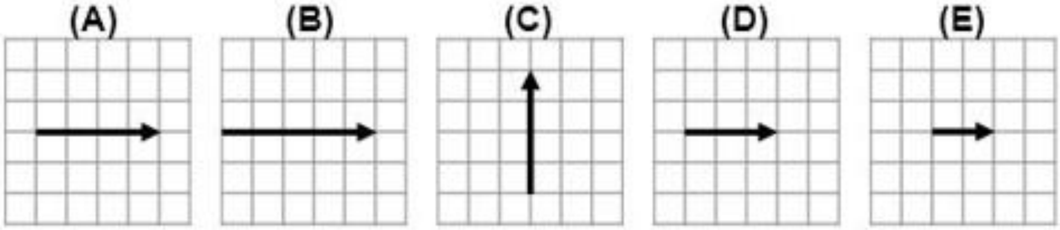
(A) Duljina zbroja vektora jednaka je duljini vektora $\vec{A}$. Zbroj vektora samo mijenja smjer.
(B) Duljina zbroja vektora veća je od duljine vektora $\vec{A}$ i to se pokaže direktnom primjenom Pitagorinog teorema.
(C) Duljina zbroja vektora jednaka je duljini vektora $\vec{A}$ jer vektori $\vec{A}$ i $\vec{B}$ imaju jednake duljine.
(D) Duljina zbroja vektora jednaka je duljini vektora $\vec{A}$ i to se pokaže direktnom primjenom Pitagorinog teorema.
(E) Duljina zbroja vektora manja je od duljine vektora $\vec{A}$ jer ta dva vektora zatvaraju kut od 90°.

8. Neka je vektor $\vec{A} = 1\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ i vektor $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\mathbf{i}}$. Koji je od ponuđenih odgovora skalarni produkt ($\vec{A} \cdot \vec{B}$)?

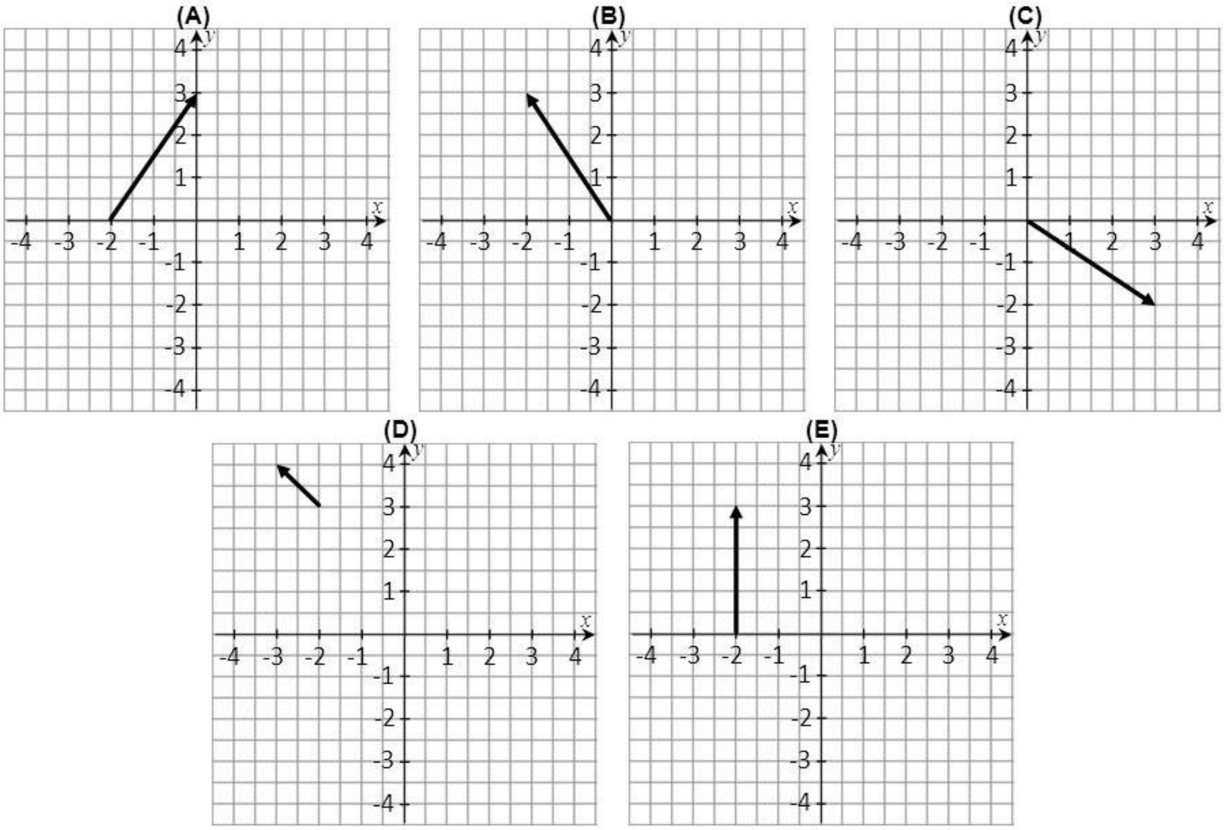
(A) 5
(B) $-15\hat{\mathbf{k}}$
(C) $5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(D) $6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(E) $5\hat{\mathbf{i}}$

9. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ koji zatvara kut Θ s vertikalnom osi. Odaberite sliku koja prikazuje *x*-komponentu vektora $\vec{A}$, (tj. $\vec{A}_x$).

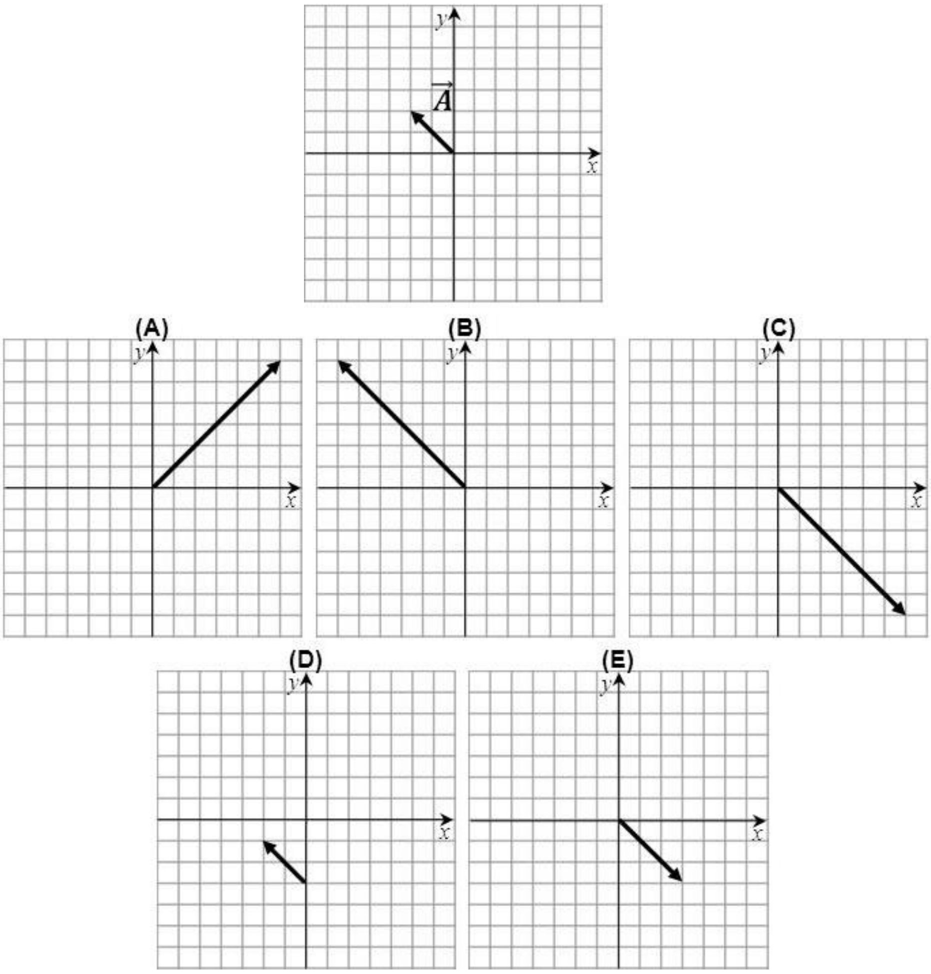




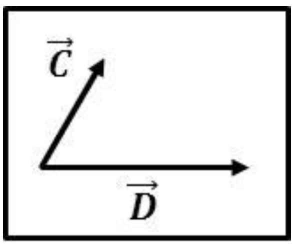
10. Odaberite sliku koja prikazuje vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$.



11. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$. Odaberite sliku koja prikazuje vektor $-3\vec{A}$.

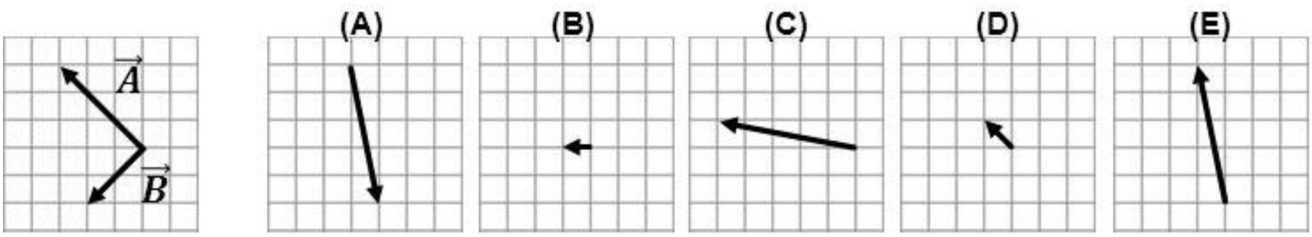


12. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{C}$ i $\vec{D}$. Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje vektorski produkt ($\vec{C}\times\vec{D}$) ?

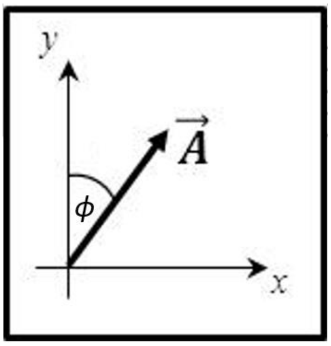


(A) Vektor između $\vec{C}$ i $\vec{D}$ koji pokazuje desno gore.
(B) Vektor okomit na oba vektora koji ima orijentaciju iz papira.
(C) Duljina vektora između $\vec{C}$ i $\vec{D}$ koji pokazuje desno.
(D) Veličina u smjeru kazaljke na satu.
(E) Vektor okomit na oba vektora koji ima orijentaciju u papir.

13. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Odaberite sliku koji prikazuje razliku vektora $\vec{A}-\vec{B}$.



14. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ koji zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. $|\vec{A}|$ je duljina vektora $\vec{A}$. Koji od ponuđenih odgovora prikazuje duljinu x-komponente vektora $\vec{A}$, (tj. $|\vec{A_x}|$) ?

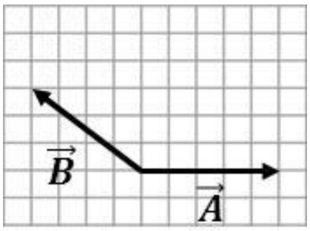


(A) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, tan\ \phi$
(B) $|\vec{A_x}| = \frac{|\vec{A}|}{cos\ \phi}$
(C) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, sin\ \phi$
(D) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, cos\ \phi$
(E) $|\vec{A_x}| = \frac{|\vec{A}|}{sin\ \phi}$

15. Neka je vektor $\vec{A} = 1\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ i vektor $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\mathbf{i}}$. Koji je od ponuđenih odgovora vektorski produkt ($\vec{A}\times\vec{B}$)?

(A) $-15\hat{\mathbf{k}}$
(B) $5\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{k}}$
(C) $5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(D) $15\hat{\mathbf{k}}$
(E) $6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$

16. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji imaju jednake duljine. Koja je od sljedećih tvrdnji o duljini zbroja ovih dvaju vektora točna?

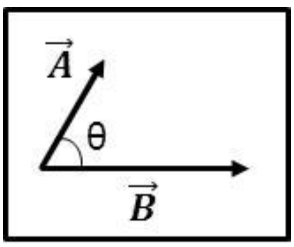


(A) Duljina zbroja vektora veća je od duljine vektora $\vec{A}$, i to se pokaže direktnom primjenom Pitagorinog teorema.
(B) Duljina zbroja vektora manja je od duljine vektora $\vec{A}$ jer kada grafički zbrojimo ta dva vektora uočavamo da je zbroj vektora manji.
(C) Duljina zbroja vektora veća je od duljine vektora $\vec{A}$ jer zbrajanje dvaju vektora uvijek daje rezultantni vektor koji ima veću duljinu nego vektori koji su zbrajani.
(D) Duljina zbroja vektora jednaka je duljini vektora $\vec{A}$, i to se pokaže direktnom primjenom Pitagorinog teorema.
(E) Duljina zbroja vektora veća je od duljine vektora $\vec{A}$ jer je udaljenost između vrhova strelica veća od duljine vektora $\vec{A}$.

17. Neka je vektor $\vec{A} = -3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$. Koji od ponuđenih odgovora pokazuje smjer tog vektora s obzirom na pozitivni dio x-osi?

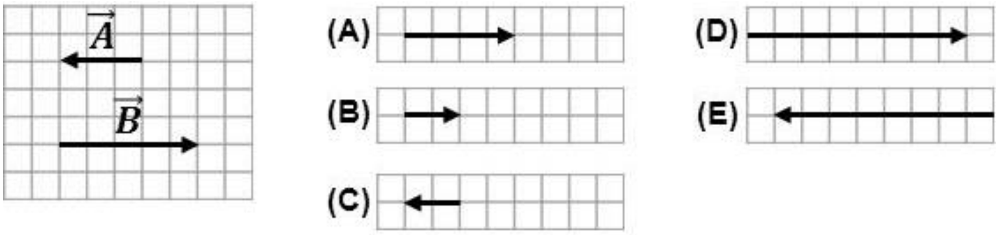
(A) 126.87°
(B) 53.13°
(C) 143.13°
(D) 135°
(E) -53.13°

18. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji zatvaraju kut θ. $|\vec{A}|$ je duljina vektora $\vec{A}$ i $|\vec{B}|$ duljina vektora $\vec{B}$. Koji je od ponuđenih odgovora duljina vektorskog produkta ($\vec{A}\times\vec{B}$)?



(A) $|\vec{A}| cos\ \theta |\vec{B}| sin\ \theta$
(B) $|\vec{A}||\vec{B}|$
(C) $|\vec{A}||\vec{B}| sin(90° - \theta)$
(D) $|\vec{A}||\vec{B}| sin\ \theta$
(E) $|\vec{A}||\vec{B}| cos\ \theta$

19. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{\boldsymbol{A}}$ i $\vec{\boldsymbol{B}}$. Odaberite sliku koja prikazuje razliku vektora $\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}}$.

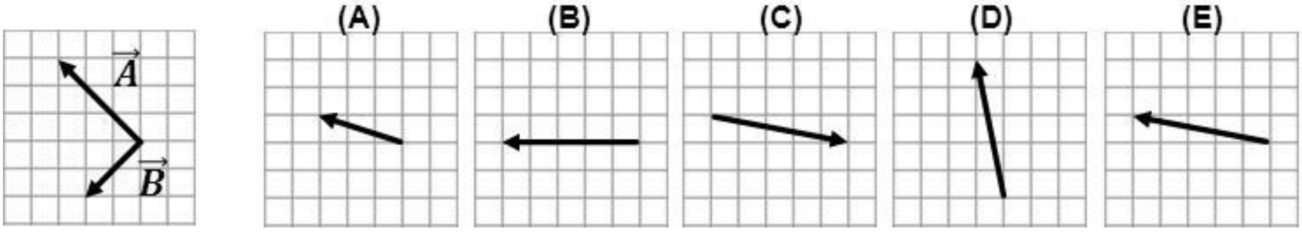


20. Neka je vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Koji je od ponuđenih odgovora duljina tog vektora?

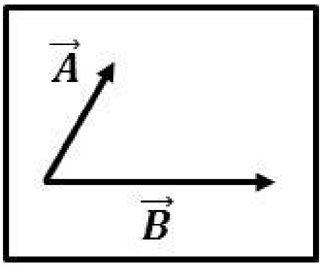
(A) 2
(B) $\sqrt{8}$
(C) 4
(D) $\frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\jmath}$
(E) 8

Test razumijevanja vektora (paralelni zadaci iz matematike i fizike)

1. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Odaberi sliku koja prikazuje zbroj vektora $\vec{A}+\vec{B}$.

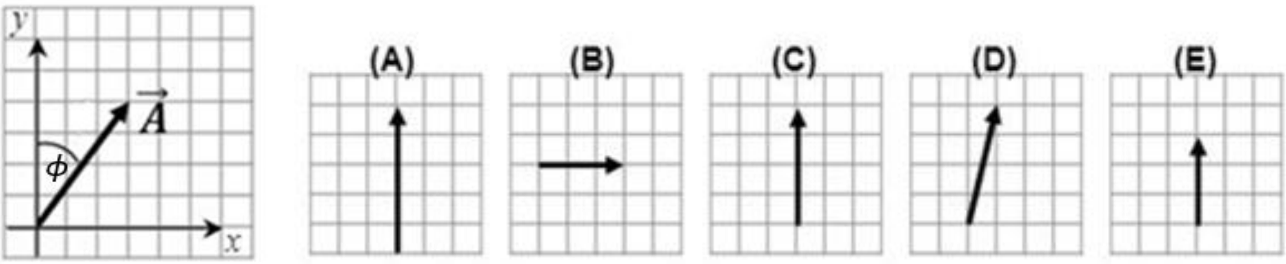


2. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje skalarni produkt ($\vec{A}\cdot\vec{B}$)?

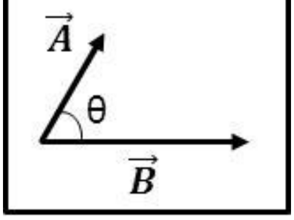


(A) Duljina (modul, iznos) vektora između $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji pokazuje desno gore.
(B) Duljina projekcije vektora $\vec{A}$ na vektor $\vec{B}$ pomnožena duljinom vektora $\vec{B}$.
(C) Vektor između $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji pokazuje desno gore.
(D) Vektor okomit na oba vektora.
(E) Vektor u smjeru vektora $\vec{B}$.

3. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ koji zatvara kut Φ s vertikalnom osi. Odaberi sliku koja prikazuje *y*-komponentu vektora $\vec{A}$, (tj. $\vec{A}_y$).



4. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$ koji zatvaraju kut θ. $|\vec{A}|$ je duljina vektora $\vec{A}$ i $|\vec{B}|$ duljina vektora $\vec{B}$. Koji je od ponuđenih odgovara skalarni produkt ($\vec{A}\cdot\vec{B}$)?



(A) $|\vec{A}||\vec{B}|$
(B) $|\vec{A}||\vec{B}|cos\ \theta$
(C) $|\vec{A}|cos\ \theta + |\vec{B}|sin\ \theta$
(D) $|\vec{A}||\vec{B}|sin\ \theta$
(E) $|\vec{A}|cos\ \theta|\vec{B}|sin\ \theta$

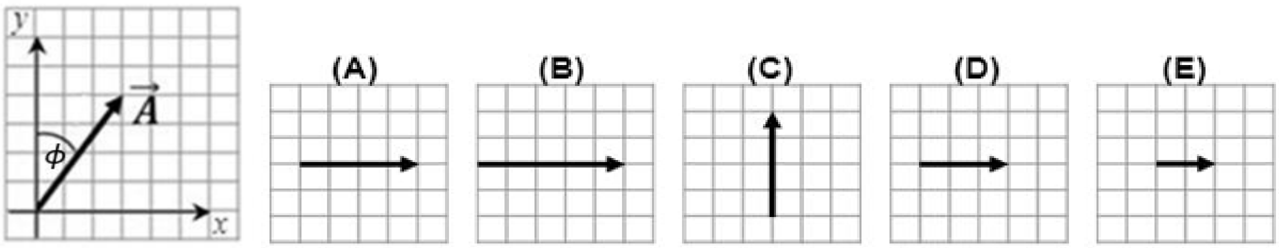
5. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ i skupinu drugih vektora. Koji vektor/i sa slike ima/ju isti smjer kao vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$?

(A) $\vec{\boldsymbol{K}}, \vec{\boldsymbol{L}}$
(B) $\vec{\boldsymbol{I}}, \vec{\boldsymbol{K}}$
(C) $\vec{\boldsymbol{K}}$
(D) $\vec{\boldsymbol{H}}, \vec{\boldsymbol{K}}, \vec{\boldsymbol{L}}$
(E) Nijedan vektor nema isti smjer kao vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$

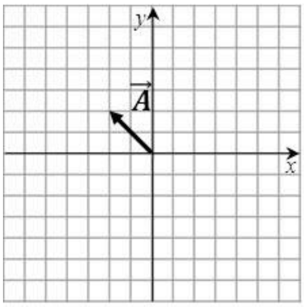
6. Neka je vektor $\vec{\boldsymbol{A}} = 1\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ i vektor $\vec{\mathbf{B}} = 5\hat{\mathbf{i}}$. Koji je od ponuđenih odgovora skalarni produkt $(\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}})$?

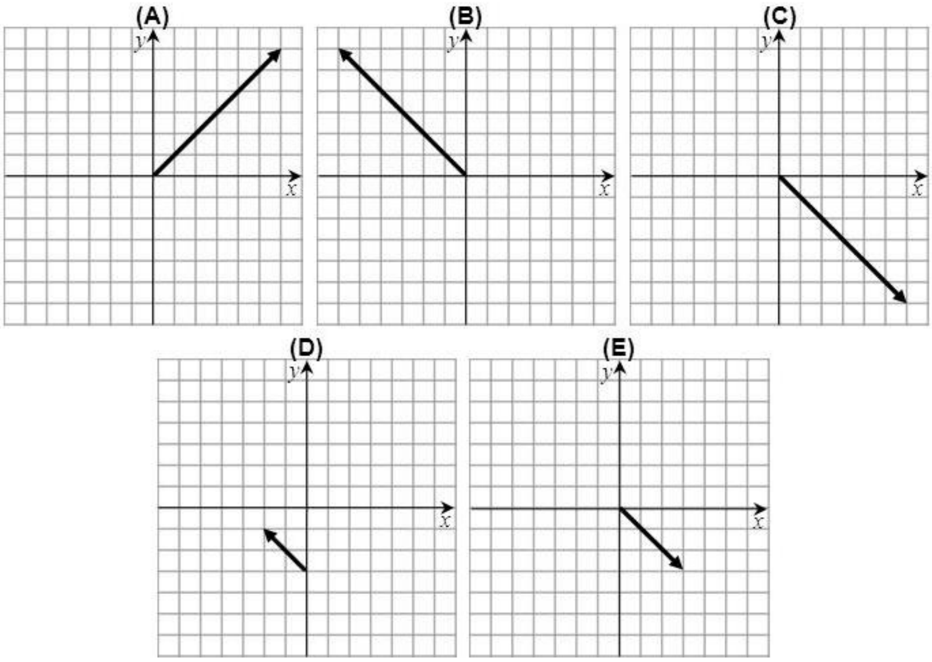
(A) 5
(B) $-15\hat{\mathbf{k}}$
(C) $5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(D) $6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(E) $5\hat{\mathbf{i}}$

7. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{\boldsymbol{A}}$ koji zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. Odaberi sliku koja prikazuje *x*-komponentu vektora $\vec{\boldsymbol{A}}$, (tj. $\vec{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{x}}$).

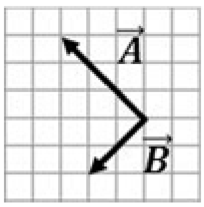


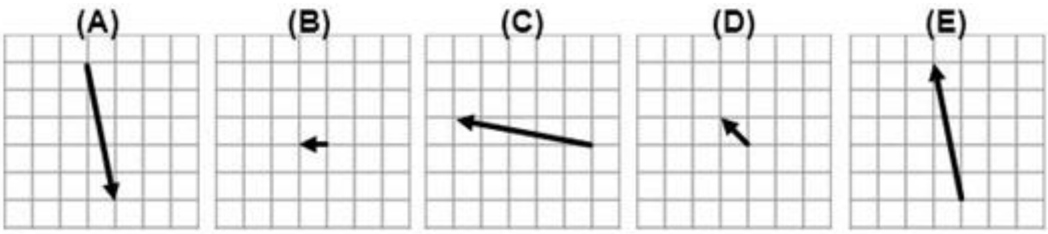
8. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$. Odaberi sliku koja prikazuje vektor $-3\vec{A}$.



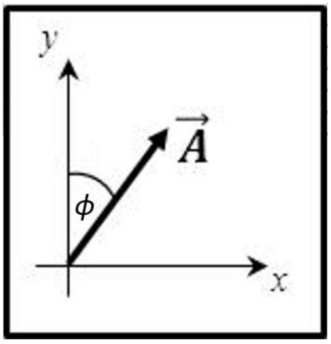


9. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Odaberi sliku koji prikazuje razliku vektora $\vec{A} - \vec{B}$.





10. Slika ispod prikazuje vektor $\vec{A}$ koji zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. $|\vec{A}|$ je duljina vektora $\vec{A}$. Koji od ponuđenih odgovora prikazuje duljinu *x*-komponente vektora $\vec{A}$, (tj. $|\vec{A_x}|$) ?

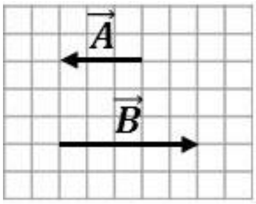


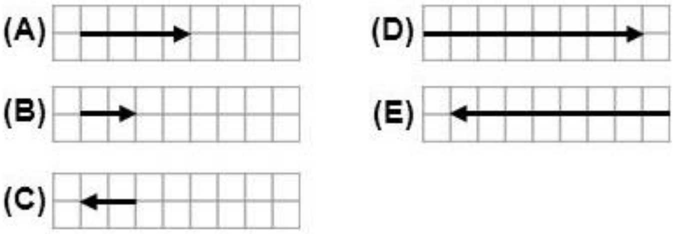
(A) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, tan\ \phi$
(B) $|\vec{A_x}| = \frac{|\vec{A}|}{cos\ \phi}$
(C) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, sin\ \phi$
(D) $|\vec{A_x}| = |\vec{A}|\, cos\ \phi$
(E) $|\vec{A_x}| = \frac{|\vec{A}|}{sin\ \phi}$

11. Neka je vektor $\vec{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Koji je od ponuđenih odgovora duljina tog vektora?

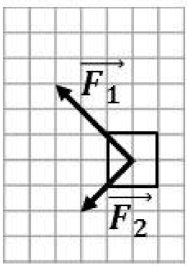
(A) 2
(B) $\sqrt{8}$
(C) 4
(D) $\frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\jmath}$
(E) 8

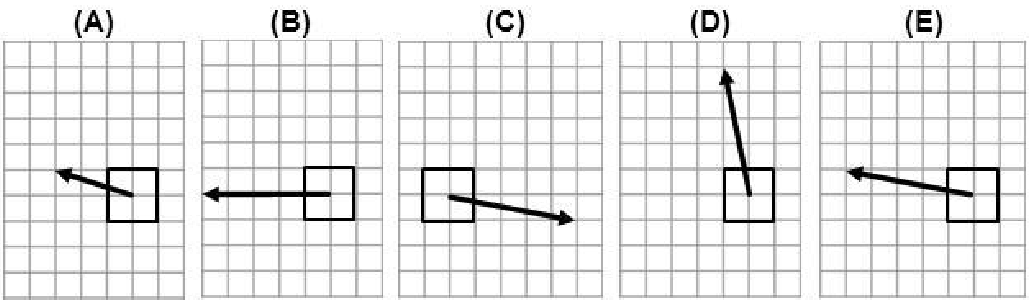
12. Slika ispod prikazuje vektore $\vec{A}$ i $\vec{B}$. Odaberi sliku koja prikazuje razliku vektora $\vec{A} - \vec{B}$.



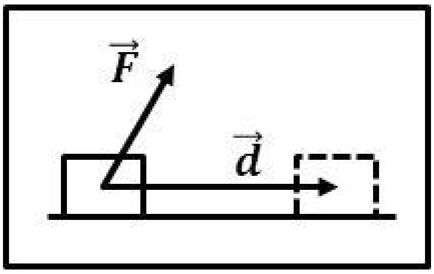


13. Slika ispod prikazuje kutiju (gledanu od gore). Dvije sile $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$ djeluju na kutiju. Odaberi sliku koja prikazuje ukupnu silu $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ na kutiju.



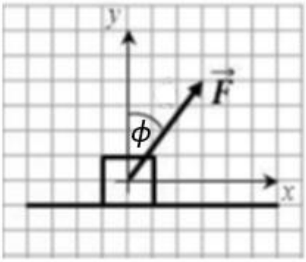


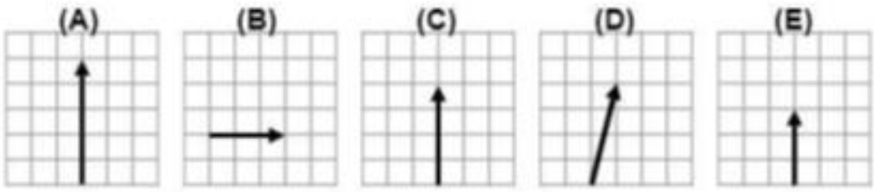
14. Slika ispod prikazuje silu $\vec{\boldsymbol{F}}$ koja djeluje na kutiju. Kutija se pomjeri za pomak $\vec{\boldsymbol{d}}$. Koji od ponuđenih odgovora najbolje opisuje rad koji je izvršila sila $\vec{\boldsymbol{F}}$? Rad definiramo kao skalarni produkt ($\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{d}}$).



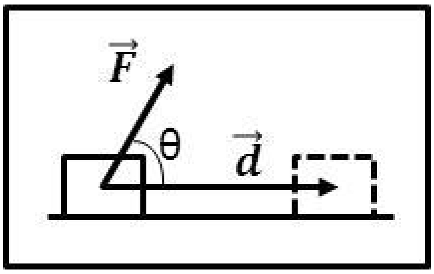
(A) Iznos (duljina, modul) vektora između $\vec{\boldsymbol{F}}$ i $\vec{\boldsymbol{d}}$ koji pokazuje desno gore.
(B) Iznos projekcije vektora $\vec{\boldsymbol{F}}$ na vektor $\vec{\boldsymbol{d}}$ pomnožen iznosom vektora pomaka $\vec{\boldsymbol{d}}$.
(C) Vektor između $\vec{\boldsymbol{F}}$ i $\vec{\boldsymbol{d}}$ koji pokazuje desno gore.
(D) Vektor okomit na silu i pomak.
(E) Vektor u smjeru pomaka $\vec{\boldsymbol{d}}$.

15. Slika ispod prikazuje silu $\vec{\boldsymbol{F}}$ koja djeluje na kutiju te zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. Odaberi sliku koja prikazuje y-komponentu sile $\vec{\boldsymbol{F}}$ (tj. $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{Y}}$)?



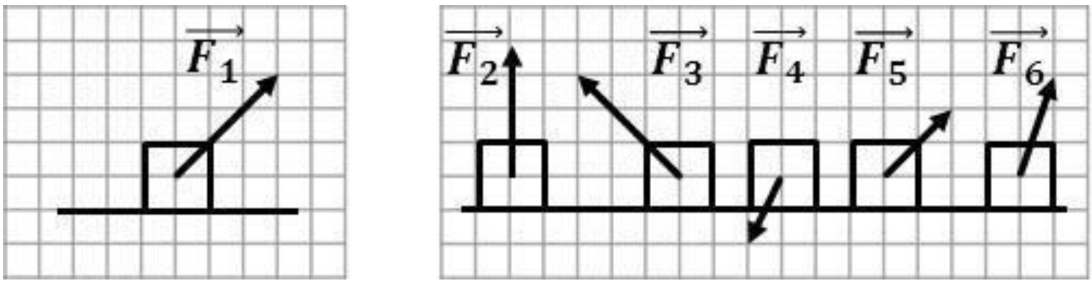


16. Slika ispod prikazuje silu $\vec{\boldsymbol{F}}$ koja djeluje na kutiju. Kutija se pomjeri za pomak $\vec{\boldsymbol{d}}$. $\vec{\boldsymbol{F}}$ i $\vec{\boldsymbol{d}}$ zatvaraju kut θ. $|\vec{\boldsymbol{F}}|$ je iznos sile $\vec{F}$ i $|\vec{\boldsymbol{d}}|$ iznos pomaka $\vec{\boldsymbol{d}}$. Koji je od ponuđenih odgovara rad koji je izvršila sila $\vec{F}$ na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt ($\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{d}}$).



(A) $|\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{d}}|$
(B) $|\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{d}}|cos\ \theta$
(C) $|\vec{\boldsymbol{F}}|cos\ \theta + |\vec{\boldsymbol{d}}|sin\ \theta$
(D) $|\vec{\boldsymbol{F}}||\vec{\boldsymbol{d}}|sin\ \theta$
(E) $|\vec{\boldsymbol{F}}|cos\ \theta|\vec{\boldsymbol{d}}|sin\ \theta$

17. Slika ispod prikazuje silu $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}$ koja djeluje na kutiju i skupinu drugih vektora koji djeluju na različite kutije. Koja/koje od ponuđenih sila ima/ju isti smjer kao sila $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}$?

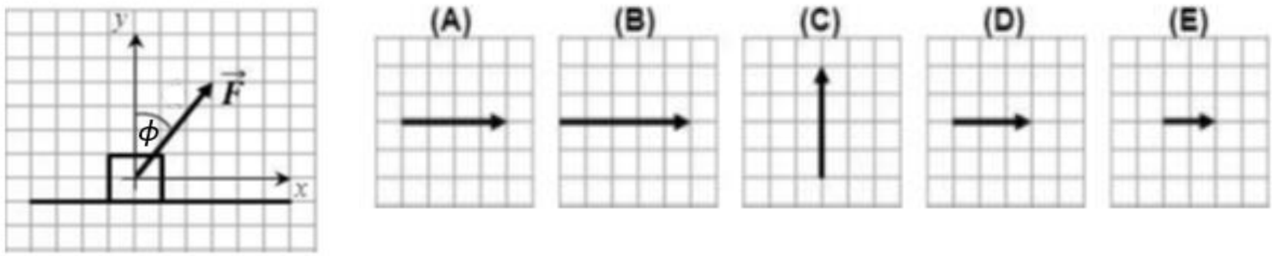


(A) $\overrightarrow{\boldsymbol{F_5}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{F_6}}$
(B) $\overrightarrow{\boldsymbol{F_3}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{F_5}}$
(C) $\overrightarrow{\boldsymbol{F_5}}$
(D) $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{F_5}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{F_6}}$
(E) Nijedan vektor nema isti smjer kao sila $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}}$.

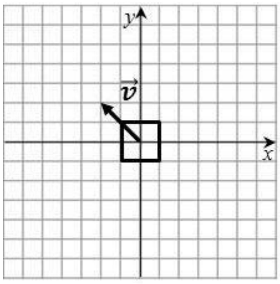
18. Sila $\vec{\boldsymbol{F}} = 1\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ (N) djeluje na kutiju te se kutija pomjeri za pomak $\vec{\mathbf{d}} = 5\hat{\mathbf{i}}$ **(**m**)**. Koji je od ponuđenih odgovora rad u džulima (J) koji je izvršila sila $\vec{\boldsymbol{F}}$ na kutiju? Rad definiramo kao skalarni produkt ($\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\vec{\boldsymbol{d}}$).

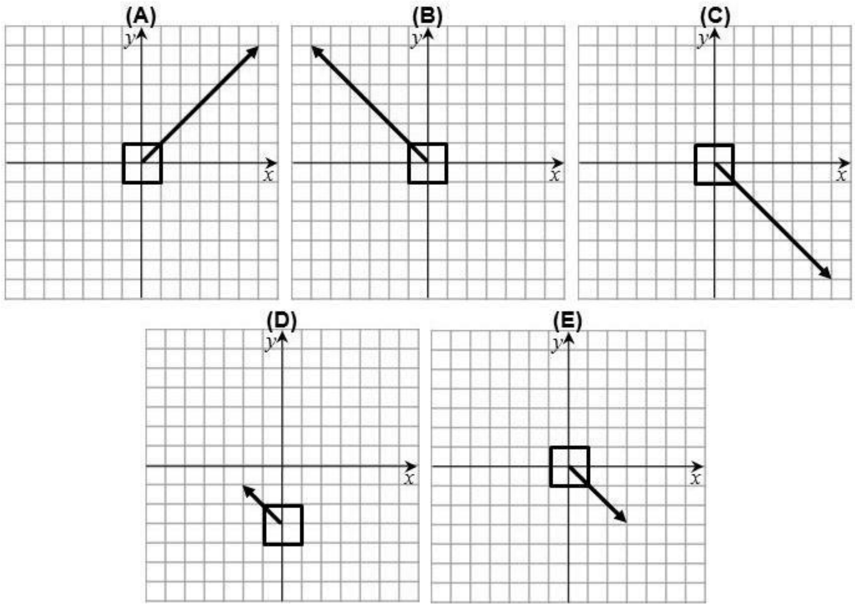
(A) 5
(B) $-15\hat{\mathbf{k}}$
(C) $5\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(D) $6\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$
(E) $5\hat{\mathbf{i}}$

19. Slika ispod prikazuje silu $\vec{\boldsymbol{F}}$ koja djeluje na kutiju i zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. Odaberi sliku koja najbolje prikazuje *x*-komponentu sile $\vec{\boldsymbol{F}}$, (tj. $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{x}}$).

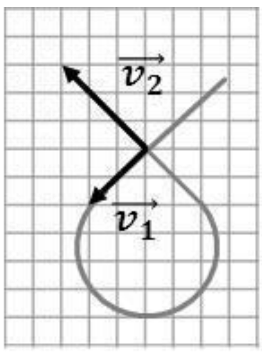


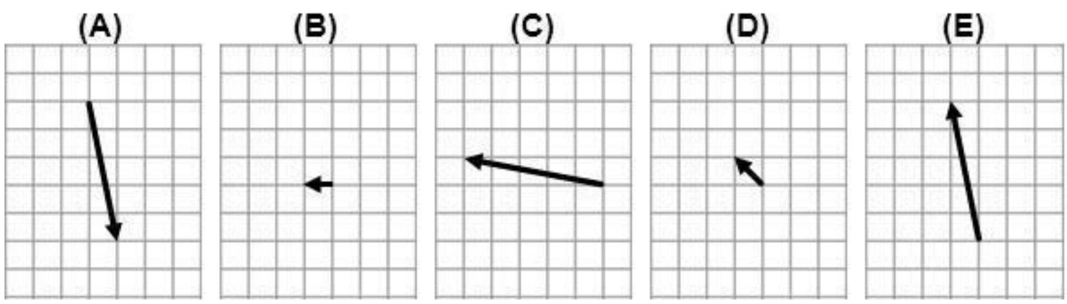
20. Slika ispod prikazuje kutiju (gledano od gore) koja se giba brzinom $\vec{v}$. Odaberi sliku koja prikazuje kutiju koja se giba brzinom $-3\vec{v}$.



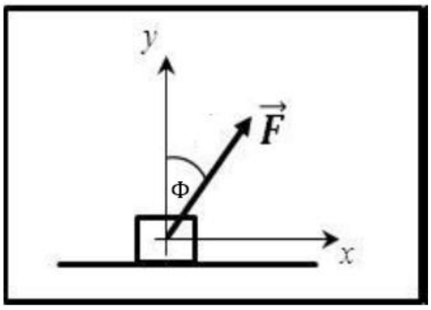


21. Promotrite auto (gledan od gore) koji se giba po krivulji prikazanoj na slici. Slika također prikazuje brzine auta $\vec{v}_1$ $\boldsymbol{i}$ $\vec{v}_2$ u dva trenutka. Odaberi odgovor koji prikazuje promjenu vektora brzine, tj. razliku vektora $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$.





22. Slika ispod prikazuje silu $\vec{F}$ koja djeluje na kutiju te zatvara kut ϕ s vertikalnom osi. $|\vec{F}|$ je iznos sile $\vec{F}$. Koji od ponuđenih odgovora prikazuje iznos x-komponentu sile $\vec{F}$ (tj. $|\vec{F_x}|$) ?



(A) $|\vec{F_x}| = |\vec{F}|\, tan\, \phi$
(B) $|\vec{F_x}| = \frac{|\vec{F}|}{cos\, \phi}$
(C) $|\vec{F_x}| = |\vec{F}|\, sin\, \phi$
(D) $|\vec{F_x}| = |\vec{F}|\, cos\, \phi$
(E) $|\vec{F_x}| = \frac{|\vec{F}|}{sin\, \phi}$

23. Neka je sila $\vec{F} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$ **(**N**)**. Koji je od ponuđenih odgovora iznos te sile izražen u njutnima (N)?

(A) 2
(B) $\sqrt{8}$
(C) 4
(D) $\frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\imath} + \frac{2}{\sqrt{8}}\,\hat{\jmath}$
(E) 8

24. Promotrite kolica koja se sudaraju sa zidom. Slika prikazuje početnu brzinu $\vec{v}_p$ prije sudara i konačnu brzinu $\vec{v}_k$ nakon sudara. Odaberi odgovor koji prikazuje promjenu vektora brzine, tj. razliku vektora $\vec{v}_k$ - $\vec{v}_p$.