Polimodalna logika dokazivosti GLP

Matijašević, Ivo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivo Matijašević

POLIMODALNA LOGIKA DOKAZIVOSTI GLP

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc.
Mladen Vuković

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se izv. prof. dr. sc. Mladenu Vukoviću na savjetima, razumijevanju, strpljenju te uloženom vremenu i trudu tijekom izrade ovog diplomskog rada. Posebno se zahvaljujem svojoj obitelji na podršci tijekom studija.

Sadržaj

Uvod

Logika dokazivosti je modalna logika čiji je glavni cilj istražiti što aritmetičke teorije mogu reći o vlastitom predikatu dokazivosti. Njeni počeci sežu tridesetih godina prošlog stoljeća, odnosno od Gödelovih teorema nepotpunosti i Löbovog teorema iz 1953.

Kada govorimo o dokazivosti u aritmetici, zapravo govorimo o $\mathrm{Pr}(\cdot)$ koji ima sljedeće značenje: $\mathrm{Pr}(\ulcorner A \urcorner)$ znači da se formula A s kodom $\ulcorner A \urcorner$ može dokazati unutar same artimetike. Dokazivost se prirodno veže uz modalnu logiku. Operator *Box* u modalnoj logici, kojega označavamo sa $\Box$, se prevodi u predikat dokazivosti $\mathrm{Pr}(\cdot)$ unutar aritmetičke teorije. Najznačajniji logički sistemi vezani uz dokazivost su logika dokazivosti **GL** i njeno prirodno proširenje na beskonačno modalnih operatora, **GLP** koji je prvi put istražio Giorgi Japaridze 1986. godine. U ovom diplomskom radu nas zanimaju rezultati vezani uz semantiku obje logike. Naime, postoje netrivijalni Kripkeovi okviri na kojima je **GL** potpuna koji su važni u dokazu aritmetičku potpunost sistema **GL**. Krister Segerberg je 1971. godine dokazao da za **GLP** netrivijalni Kripkeovi okviri ne postoje, što je potaknulo istraživanje alternativnih modela, ponajviše u topologiji.

Diplomski rad se sastoji od četiri dijela. U prvom poglavlju definiramo logiku **GL** i navodimo sve bitne rezultate od kojih su najvažniji potpunost u odnosu na Kripkeovu semantiku i prvi Solovayev teorem potpunosti za primitivno rekurzivnu aritmetiku. U drugom poglavlju **GL** proširujemo na polimodalnu logiku **GLP** i pričamo o aritmetičkoj interpretaciji iste. Definiramo Kripkeovu semantiku za polimodalni jezik i navodimo dokaz da je **GLP** nepotpuna u odnosu na svoj Kripkeov okvir. Treće poglavlje je rezerivano kao referentna točka za nama bitne definicije i rezultate iz topologije, odnosno općih okvira, koje ćemo iskoristiti u posljednjem poglavlju. Opći okvir je zapravo Kripkeov okvir s dodatnom strukturom. Nadalje, u posljednjem poglavlju definiramo zatvoreni segment $\mathbf{GLP}_0$, koji je zapravo **GLP** bez varijabli i Ignatievov okvir na kojem je $\mathbf{GLP}_0$ potpuna. Cilj nam je definirati topološku semantiku $\mathbf{GLP}_0$ koja je jednostavnija od relacijske i zasniva se na Ignatievom okviru. Kako bi to postigli krenut ćemo od Ignatievog okvira, proširiti ga tako da je novi okvir deskriptivan, odnosno da je izomorfan s kanonskim okvirom za $\mathbf{GLP}_0$. Tada taj deskriptivni opći okvir možemo pojednostavniti u topološki prostor za koji ćemo dokazati potpunost $\mathbf{GLP}_0$.

Poglavlje 1

Logika dokazivosti GL

Definirat ćemo logiku dokazivosti **GL** koja je dobila ime po Gödelu i Löbu. Ekvivalentni sistemi u literaturi se još označavaju sa L, KW, K4W, K4L i PrL. Nakon toga ćemo definirati Kripkeovu semantiku te dokazati potpunost **GL** u odnosu na odgovarajuću klasu okvira. Reći nešto o primitivno rekurzivnoj aritmetici **PRA** i kodiranju sintakse u **PRA**. Kodiranje nam je bitno kako bi mogli definitirati relacije $\mathrm{Prov}(y, x)$ te $\mathrm{Pr}(x)$, gdje je x kod formule, a y kod niza formula iz **PRA**. Relacija $\mathrm{Prov}(y, x)$ je definirana tako da y kodira dokaz formule s kodom x, dok $\mathrm{Pr}(x)$ znači da u **PRA** postoji dokaz za formulu s kodom x. Konkretno, $\mathrm{Pr}(x) = \exists y \mathrm{Prov}(y,x)$. Kada to sve definiramo možemo reći što je aritmetička interpretacija sistema **GL** te zaključiti poglavlje sa Solovayevim prvim teoremom potpunosti.

1.1 Jezik i aksiomi

Kako bi definirali formalni sistem ili teoriju moramo zadati alfabet jezika teorije, formule, aksiome, te pravila zaključivanja.

Definicija 1.1.1. *Alfabet sistema **GL** sadrži:*

- *Prebrojiv skup propozicionalnih varijabli:* $p, q, r \ldots$
- *Logičke konstante:* $\top, \bot$
- *Propozicionalne veznike:* $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- *Modalni operator:* $\Box$

Definicija 1.1.2. *Pojam formule definiramo rekurzivno:*

a) svaka propozicionalna varijabla je formula *b) ako su A i B formule, tada su* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $A \vee B)$, $(A \to B)$, $(A \leftrightarrow B)$ *i* $(\Box A)$ *također formule*

c) konačni niz elemenata alfabeta sistema ***GL*** *je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta a) i b).*

Zagrade se izbjegavaju gdje god je to moguće, pomoću uobičajenih konvencija o dosegu operatora, uz dogovor da $\Box$ ima najmanji doseg.

Definicija 1.1.3. *Aksiomi sistema* ***GL*** *su:*

(A1) *Sve bulovske tautologije*

(A2) $\Box A \wedge \Box(A \to B) \to \Box B$

(A3) $\Box A \to \Box\Box A$

(A4) $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Sistem ***GL*** *sadrži sljedeća dva pravila zaključivanja:*

(R1) $\dfrac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}$

(R2) $\dfrac{A}{\Box A}$

Napomene: Aksiom *(A1)* uključuje tautologije na proširenom skupu modalnih formula, tj. primjerice formule $\Box p \to \Box p$. Koristimo i unarni modalni operator $\Diamond$, pri čemu je $\Diamond A$ pokrata za $\neg\Box\neg A$. Pravilo $(R1)$ je *modus ponens*, a $(R2)$ nazivamo *nužnost*. Sljedeći aksiomi u literaturi su poznati pod drugim oznakama:

- *(A2)*, aksiom distribucije, još označavamo **K**.
- *(A3)* je aksiom **4**.

Aksiomi *(A1)*, (A2) te pravila zaključivanja *(R1)* i *(R2)* čine osnovnu modalnu logiku K. Dodavanjem aksioma *(A3)* dobivamo sistem K4. Aksiom *(A4)* u oznaci **L** (tako imamo oznaku K4L za logiku dokazivosti) je zapravo formalizirani Löbov teorem o kojem ćemo reći nešto kasnije.

Definirajmo još dokaz u **GL**:

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je niz formula* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ **dokaz** *za formulu A u sistemu* ***GL*** *ako vrijedi:*

a) $A \equiv A_n$

b) za sve $k \in 0, 1, \ldots, n$ *formula* A *je ili aksiom u* **GL**; *ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule* A_i *i* A_j, *gdje su* $i, j < n$; *ili slijedi iz neke formule* $A_k, k < n$ *primjenom pravila izvođenja nužnosti.*

Ako takav niz postoji, kažemo da je formula A *dokaziva u* **GL** *ili da je* A *teorem u* **GL** *i pišemo* **GL** $\vdash A$.

Primjeri nekih teorema u **GL** su:

- **GL** $\vdash (\Box A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$
- **GL** $\vdash \Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$
- **GL** $\vdash \neg\Box\bot \leftrightarrow \neg\Box(\neg\Box\bot)$[1]

1.2 Kripkeovi modeli

Pedesetih i šezdesetih godina dvadesetog stoljeća Saul Kripke i André Joyal, među ostalima, razvili su prvu pravu semantiku za modalnu logiku: modalni jezici su jednostavni ali izražajni jezici za opisivanje relacijskih struktura.[2] Ideja je da određene relacijske strukture odgovaraju određenim formulama - tada pričamo o valjanosti na okvirima. Obogaćivanjem relacijske strukture valuacijom po elementima relacije gradimo modele. Kripkeova semantika ne samo da daje uvid u ekspresivnost modalne logike, nego olakšava dokaze potpunosti za razne sisteme. Nažalost, postoje zanimljivi sistemi za koje ne postoji odgovarajuća klasa relacijskih struktura na kojoj je taj sistem potpun. Jedan primjer takvog sistema je **GLP**, kao što ćemo vidjeti u idućem poglavlju. Za sistem **GL** odgovarajuća klasa okvira postoji, te ćemo pokazati da su to tranzitivne, dobro fundirane relacijske strukture.

Za početak prisjetimo se osnovnih definicija vezanih uz relacije:

Definicija 1.2.1. *Neka je* $R \subset W \times W$ *binarna relacija. Kažemo da je* R:

refleksivna na W *ako za sve* $w \in W$ *vrijedi* wRw;

irefleksivna *ako ne postoji* w *takav da* wRw;

antisimetrična *ako za sve* w, v *vrijedi: ako* wRv *i* vRw, *onda* $w = v$;

tranzitivna *ako za sve* w, v, u *vrijedi: ako* wRv *i* vRu, *onda* wRu;

[1]Kako smo u uvodu natuknuli, operator $\Box$ se u aritmetici preslikava u predikat dokazivosti. Stoga je implikacija s lijeva na desno jednostavno formalizacija drugog Gödelovog teorema nepotpunosti

[2]U kontekstu modalne logike te relacije zovemo Kripkeovi okviri ili jednostavno okviri

simetrična *ako za sve* w, v *vrijedi: ako* wRv*, onda* vRw*;*

euklidska *ako za sve* w, v, u *vrijedi: ako* wRv *i* wRu*, onda* vRu *(sljedno i* uRv*);*

relacija ekvivalencije na W *ako je refleksivna na* W*, simetrična i tranzitivna;*

inverzno dobro fundirana *ako nema beskonačnih uzlaznih nizova* $w_1Rw_2Rw_3...$*,* $w_i \in W, i \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.2.2. Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ *je relacijska struktura* (W, R) *gdje je* W *neprazan skup,* R *je binarna relacija na* W*. Elemente skupa* W *obično nazivamo* **svjetovi** *ili* **točke** *i označavamo sa* $w, v \dots$ *Relacija* R *se naziva* **relacija dostiživosti**. *To znači da ako za neke svjetove* $w, v \in W$ *vrijedi* wRv *tada još kažemo da je svijet* v *dostiživ iz svijeta* w*.*

Definicija 1.2.3. Kripkeov model $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, R, \Vdash)$ *gdje je* (W, R) *proizvoljan Kripkeov okvir, a* $\Vdash$ *relacija između svjetova iz* W *i formula modalne logike koju nazivamo* **relacija forsiranja**. *Ako je* $w \in W$ *i* A *neka formula za koje vrijedi* $w \Vdash A$*, kažemo da je* A **istinita** *u* w*. Kada model nije jasan iz konteksta pišemo* $\mathfrak{M}, w \Vdash A$*. Za svaki svijet* $w \in W$*, relacija forsiranja mora zadovoljavati sljedeće uvjete:*

1. $w \Vdash \top$
2. $w \nVdash \bot$
3. $w \Vdash \neg A \iff w \nVdash A$

4-6. $w \Vdash A \star B \iff (w \Vdash A) \star (w \Vdash B)$*, gdje je* $\star$ *jedan od binarnih operatora:* $\wedge, \vee, \rightarrow$ *ili* $\leftrightarrow$

7. $w \Vdash \Box A \iff \forall v \in W(wRv \implies v \Vdash A)$.

Navedimo sada neke bitne napomene:

- Relacija $\Vdash$ je potpuno definirana svojim djelovanjem na propozicionalnim varijablama.
- Relacija $w \Vdash A$ ovisi samo o svijetu w i o svim svjetovima v za koje vrijedi wRv.
- Modalni operator $\Box$ ostaje očuvan u odnosu na R, tj. ako $w \Vdash \Box A$ i wRv, tada $v \Vdash \Box A$. Lako je provjeriti da vrijedi $w \Vdash \Diamond A$ ako i samo ako postoji svijet v tako da vrijedi wRv i $v \Vdash A$.

Definicija 1.2.4. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *Kripkeov model. Kažemo da:*

1. *Formula A je* **istinita na modelu** $\mathfrak{M}$, *u oznaci* $\mathfrak{M} \vDash A$, *ako za svaki* $w \in W$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash A$.

2. *Formula A je* **valjana** *ako za sve Kripkeove modele* $\mathfrak{M}$ *vrijedi* $\mathfrak{M} \vDash A$.

Definicija 1.2.5. *Neka je Γ neki skup formula, te neka je $\mathfrak{M}$ neki Kripkeov model. Kažemo da je $\vDash$* **relacija semantička posljedice** *za Γ ako i samo ako za svaku formulu A i sve modele $\mathfrak{M}$ vrijedi da iz $\mathfrak{M} \vDash \Gamma$ slijedi $\mathfrak{M} \vDash A$.*

Teorem 1.2.1. *Ako je A formula, onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

- ***GL*** $\vdash A$
- ***GL*** $\vDash A$

Dokaz: Dokazat ćemo adekvatnost, tj. da **GL** $\vdash A$ povlači **GL** $\vDash A$. Dokaz radimo indukcijom po duljini dokaza $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n = A$ u **GL**.

Za bazu indukcije provjeravamo aksiome. Neka je A_0 proizvoljan aksiom od **GL** i neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model takav da vrijedi $\mathfrak{M} \vDash$ **GL**. No tada očito vrijedi i $\mathfrak{M} \vDash A_0$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve formule čiji je dokaz duljine $n-1$. Neka je A formula takva da je dokaz u **GL** duljine n. Promatramo dvije mogućnosti, da smo $A_n = A$ dobili pravilom izvođenja modus ponens ili pravilom izvođenja nužnosti (slučaj da je aksiom smo provjerili). Slučaj modus ponens: Tada postoji $A_{m_1} = A_{m_2} \to A$ takav da vrijedi $m_2 < m_1 < n$ i **GL** $\vdash A_{m_2}$ te **GL** $\vdash A_{m_1}$. No tada po pretpostavci imamo **GL** $\vDash A_{m_2}$ te **GL** $\vDash A_{m_1}$. Iz definicije relacije $\vDash$ imamo da za svaki svijet $w \in W$, gdje je $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$, vrijedi $w \Vdash A_{m_2}$ te $w \Vdash A_{m_1}$. Po definiciji relacije forsiranja imamo $w \Vdash A$ za svaki $w \in W$, dakle $\mathfrak{M} \vDash A$ te **GL** $\vDash A$. Slučaj nužnost: Postoji $A_m = \Box A$, gdje je $m < n$. Dakle, $\mathfrak{M} \vDash \Box A$, nadalje $w \Vdash \Box A$, za svaki $w \in W$. Prisjetimo se definicije relacije forsiranja: $w \Vdash \Box A \iff \forall v \in W(wRv \implies v \Vdash A)$. Tada očito za svaki $v \in W$ također mora vrijediti $v \Vdash A$. Dakle, $\mathfrak{M} \vDash A$ te **GL** $\Vdash A$. Ovime smo dokazali adekvatnost.

Dokaz potpunosti je dostupan u [4].

∎

Definicija 1.2.6. *Formula A je* **valjana na okviru** (W, R) *ako vrijedi $v \Vdash A$ za sve $v \in W$ i sve relacije forsiranja $\Vdash$ na danom okviru, tj. ako je formula A valjana na svim modelima $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ na danom okviru. Skup formula Γ je* **valjan na danom okviru** *ako je svaka formula iz Γ valjana na danom okviru.*

Propozicija 1.2.1. *Formula $\Box A \to \Box\Box A$ je valjana na okviru $\mathfrak{F} = (W, R)$ ako i samo ako je R tranzitivna na W.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je $\Box A \to \Box\Box A$ valjana na $\mathfrak{F}$ i neka za neke $v, u \in W$ vrijedi wRv i vRu. Želimo pokazati da onda vrijedi wRu. Definirajmo model na $\mathfrak{F}$ s relacijom forsiranja $\Vdash$ tako da za svaki $z \in W$ vrijedi: $z \Vdash A$ ako i samo ako wRz. Tada iz wRz slijedi $z \Vdash A$ pa imamo $w \Vdash \Box A$. Iz toga i pretpostavke valjanosti $\Box A \to \Box\Box A$ na okviru slijedi $w \Vdash \Box\Box A$. Nadalje, isto tako iz pretpostavke vRu slijedi $v \Vdash \Box A$, što povlači $u \Vdash A$ pa iz definicije $\Vdash$ slijedi wRu.

Za drugi smjer pretpostavimo da je R tranzitivna i neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model s relacijom forsiranja $\Vdash$. Također, neka je $w \Vdash \Box A$ i wRv. Ako je vRu, tada po tranzitivnosti imamo wRu, pa stoga i $u \Vdash A$. Kako je vRu imamo $v \Vdash \Box A$. Nadalje, kako je wRv imamo $w \Vdash \Box\Box A$. Formula $\Box A \to \Box\Box A$ je dakle valjana na R.

■

Prisjetimo se sistema K4 koji je zapravo **GL** bez aksioma ($A4$). Za K4 vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.2.2. *Neka je A formula u modalnom jeziku. Ako vrijedi* K4 $\vdash A$*, onda je A valjana na svim tranzitivnim okvirima.*

Dokaz: Neka je A formula, neka vrijedi K4 $\vdash A$ i neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ tranzitivan okvir. Želimo pokazati da je onda A valjana na $\mathfrak{F}$.

Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ proizvoljan model na $\mathfrak{F}$. Ako je A bulovska tautologija (na proširenom jeziku) onda je A valjana na svakom svijetu $w \in W$ pa je valjana na okviru $\mathfrak{F}$. Ako je A aksiom ($A2$), tj. $A = \Box B \wedge \Box(B \to C) \to \Box C$ za neke B, C formule, onda je A valjana na $\mathfrak{M}$. Štoviše, tada je A valjana na svakom okviru. Pretpostavimo da za $w \in W$ vrijedi $w \Vdash \Box B \wedge \Box(B \to C)$. Tvrdnja $w \Vdash \Box B \wedge \Box(B \to C)$ vrijedi ako vrijedi $w \Vdash \Box B$ i $w \Vdash \Box(B \to C)$. Tada za svaki $v \in W$ takav da vrijedi wRv slijedi $v \Vdash B$ i $v \Vdash B \to C$. Iz toga nadalje imamo $v \Vdash C$. Konačno, iz wRv imamo $w \Vdash \Box B$, dakle pokazali smo da je ($A2$) valjan na $\mathfrak{F}$. Ako je A aksiom ($A3$) tvrdnja slijedi iz propozicije 1.2.1. Time smo pokazali da su svi aksiomi sistema K4 valjani na tranzitivnim okvirima.

Sada trebamo još pokazati da je valjanost na okviru zatvorena na pravila izvoda, modus ponens i nužnost, jer tada imamo: ako je A teorem u K4, onda je A valjana na $\mathfrak{F}$. Pravilo modus ponens očito čuva valjanost na okviru, pokažimo da isto vrijedi i za nužnost. Neka je B valjana formula na $\mathfrak{M}$. Tada po definiciji za svaki $w \in W$ vrijedi $w \Vdash B$. Uzmimo $v \in W$ proizvoljan. Tada za sve $u \in W$ takve da vrijedi vRu vrijedi $u \Vdash B$, stoga $v \Vdash \Box B$. Pokazali smo da tvrdnja vrijedi za proizvoljan v što znači da je $\Box B$ valjana na $\mathfrak{M}$. Dakle, nužnost čuva valjanost na okviru.

■

Definicija 1.2.7. *Kažemo da je okvir* (W, R) **inverzno dobro fundiran** *ako ne postoji beskonačni uzlazni niz u R, tj. ako ne postoji beskonačni niz* (w_n) *takav da vrijedi*

$$w_0 R w_1 R w_2 R \ldots$$

Teorem 1.2.3 (Teorem karakterizacije)**.** *Neka je A formula u modalnom jeziku. Ako vrijedi* **GL** $\vdash A$ *onda je A valjana na okviru* $\mathfrak{F}$ *ako i samo ako je* $\mathfrak{F}$ *tranzitivan i inverzno dobro fundiran.*

Dokaz: Već smo dokazali da ako K4 $\vdash A$ onda je A valjana na okviru ako i samo ako je okvir tranzitivan. Kako je **GL** proširenje od K4 za aksiom $(A4)$ trebamo pokazati da je $(A4)$ valjana formula na okviru ako i samo ako je okvir inverzno dobro fundiran. Dokazujemo valjanost za aksiom $(A4)$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ neki model s inverzno dobro fundiranim okvirom u kojem formula $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ nije valjana. Tada na danom okviru postoji $w_1 \in W$:

$$w_1 \nVdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A.$$

Raspisivanjem po definiciji dobijemo:

$(*)$ $w_1 \Vdash \Box(\Box A \to A)$

$(**)$ $w_1 \nVdash \Box A$

Iz $(**)$ slijedi da postoji $w_2 \in W$ takav da $w_1 R w_2$ i $w_2 \nVdash A$. Iz $(*)$ također imamo $w_2 \Vdash \Box A \to A$. Zajedno sa $w_2 \nVdash A$, slijedi $w_2 \nVdash \Box A$. Iz upravo dobivenog slijedi da postoji $w_3 \in W$ takav da $w_2 R w_3$ i $w_3 \nVdash A$. Nadalje, iz $w_2 \Vdash \Box A \to A$ imamo $w_3 \Vdash \Box A \to A$. Zajedno sa $w_3 \nVdash A$, imamo $w_3 \nVdash \Box A$. Vidimo da na isti način možemo primjenjivati zaključivanje na w_3 itd. i generirati beskonačan niz $w_1 R w_2 R w_3 R \ldots$, što je u kontradikciji sa definicijom inverzno dobre fundiranosti.

Sada dokazujemo obrat. Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir takav da sadrži beskonačan niz $w_0 R w_1 R w_2 R \ldots$ Konstruirat ćemo model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ takav da formula $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$ nije valjana. Definirajmo relaciju forsiranja $\Vdash$:

$$v \Vdash A \iff v \notin \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$$

za svaki $v \in W$ i za svaku formulu A. Tada:

(1) $w_i \nVdash \Box A$ za sve $i \in \mathbb{N}$, budući da $w_i R w_{i+1} \nVdash A$

(2) $v \Vdash \Box A \to A$ za sve $v \in W$ budući da vrijedi
$v \Vdash A$ za $v \notin \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$
$v \nVdash \Box A$ za $v \in \{w_0, w_1, w_2, \ldots\}$

(3) $v \Vdash \Box(\Box A \to A)$ za sve $v \in W$, po (2)

(4) $w_0 \nVdash \Box(\Box A \to A) \to \Box A$, po (1) i (3)

■

Teorem 1.2.4 (Teorem potpunosti za **GL**). *Neka je A modalna formula u modalnom jeziku. Sljedeće tvrdnje su tada ekvivalentne:*

i) $\mathbf{GL} \vdash A$;

ii) A je istinita na svim modelima na tranzitivnim, inverzno dobro fundiranim okvirima;

iii) A je valjana na svim tranzitivnim, inverzno dobro fundiranim okvirima.

Dokaz je dostupan u npr. [10] i [4].

Idući rezultat će nam biti važan u trećem poglavlju, kada budemo govorili o topološkoj semantici. Budući da je topološka semantika različita za sisteme koje sadrže, odnosno ne sadrže formule oblika $\Box A \to A$, bitno je vidjeti sadrži li ih **GL**.

Propozicija 1.2.2. *Formula* $\Box A \to A$ *je valjana na okviru* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *ako i samo ako je R refleksivna na W.*

Dokaz: Neka je $\Box A \to A$ valjana na $\mathfrak{F}$ i neka je $w \in W$ proizvoljan. Želimo pokazati wRw.

Definirajmo model sa relacijom forsiranja $\Vdash$ na W tako da za sve $v \in W$ vrijedi $v \Vdash A$ ako i samo ako wRv. Ako je wRv, onda $v \Vdash A$. Nadalje, po točki (7.) definicije Kripkeovog modela i naše partikularne relacije forsiranja, mora biti i $w \Vdash \Box A$. Pretpostavili smo da $w \Vdash \Box A \to A$, pa iz $w \Vdash \Box A$ imamo $w \Vdash A$. Po definiciji relacije forsiranja slijedi wRw.

Obrnuto, pretpostavimo da je R refleksivna na W. Neka je $\mathfrak{M}$ proizvoljan model na $\mathfrak{F}$ s relacijom forsiranja $\Vdash$ na W te neka je $w \in W$ proizvoljan. Tada, ako vrijedi $w \Vdash \Box A$, za sve v takve da wRv, imamo $v \Vdash A$. Budući da smo pretpostavili da je R refleksivna imamo wRw pa stoga i $w \Vdash A$. Slijedi, ako vrijedi $w \Vdash \Box A$, onda vrijedi $w \Vdash A$ te napokon $w \Vdash \Box A \to A$.

■

Korolar 1.2.2.1. $\mathbf{GL} \nvdash \Box A \to A$

Dokaz: Kada bi formula $\Box A \to A$ bila teorem u **GL** iz 1.2.4 slijedilo bi da je valjana na svim tranzitivnim, konačno inverzno dobro fundiranim okvirima. No, inverzno dobro fundirani okviri su irefleksivni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $w \in R$ takav da vrijedi wRw. Trivijalno slijedi $wRwRw\ldots$ što je u kontradikciji s inverznom dobrom fundiranosti okvira. Dakle, iz 1.2.2 slijedi da **GL** $\nvdash \Box A \to A$.

∎

1.3 Primitivno rekurzivna aritmetika PRA

Kako bi mogli iskazati prvi Solovayev teorem potpunosti moramo definirati aritmetiku na kojoj ćemo formalizirati dokazivost. Predikat dokazivosti $\mathrm{Pr}(\cdot)$ ćemo promatrati za takozvanu primitivno rekurzivnu aritmetiku, **PRA**. Razlog tome je što je **PRA** dovoljno jaka teorija da može govoriti o vlastitom predikatu dokazivosti te omogućava lakše kodiranje formula unutar **PRA**, a rezultat se može proširiti na Peanovu aritmetiku, **PA**. U ovom diplomskom radu nećemo se previše zamarati kodiranjem, ali izreći ćemo glavne rezultate. Nakon toga ćemo strogo definirati predikat dokazivosti, iskazati Löbove uvjete izvedivosti te Solovayev prvi teorem potpunosti.

Definicija 1.3.1. *Funkcija $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ je* **primitivno rekurzivna** *ako se može dobiti iz sljedećih funkcija:*

(F1) $Z(x) = 0$ *(nul funkcije)*

(F2) $N(x) = x + 1$ *(funkcije sljedbenika)*

(F3) $P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i, 1 \leq i \leq n$ *(projekcije)*

primjenom konačno mnogo *puta sljedećih pravila:*

(F4^n_m) $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$ *(kompozicija)*

(F5^n) $f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$
$f(x + 1, x_1, \ldots, x_n) = h(f(x, x_1, \ldots, x_n), x, x_1, \ldots, x_n)$ *(primitivna rekurzija)*

Funkcije Z, N i P_i^n nazivamo inicijalne funkcije.

Navedimo neke primjere primitivno rekurzivnih funkcija:

- $res(x, y)$ = ostatak pri dijeljenju x sa y, pri čemu je $res(x, 0) = x$, za sve $x \in \mathbb{N}$;
- $f(n) = \lfloor en \rfloor$, gdje je e baza prirodnog logaritma.

Više o primitivno rekurzivnim funkcijama dostupno je u [11].

Definicija 1.3.2. *Alfabet teorije **PRA** se sastoji od:*

- *Prebrojivog skupa individualnih varijabli:* $v_1, v_2, v_3 \ldots$
- *Konstantskog simbola* $\bar{0}$
- *Funkcijskih simbola* $\bar{f}$ *za svaku definiciju primitivno rekurzivne funkcije* f
- *Relacijskog simbola* $=$
- *Propozicionalnih veznika:* $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- *Kvantifikatora:* $\forall, \exists$
- *Pomoćnih simbola: zagrade () i zarez ,*

Napominjemo da se funkcijski simbol dobiva na osnovu *definicije* funkcije, a dvije različite definicije mogu dovesti do iste funkcije. U tom slučaju postojat će dva različita funkcijska simbola za istu funkciju.

Definicija 1.3.3. *Sljedeće riječi iz alfabeta su* **termi u PRA***:*

- *Konstantski simboli i varijable;*
- *Ako je* $\bar{f}$ $n-$*arni funkcijski simbol i ako su* $t_1, \ldots, t_n$ *termi, tada je* $\bar{f}t_1 \ldots t_n$ *term.*

Definicija 1.3.4. *Sljedeće riječi iz alfabeta su* **formule u PRA***:*

- *Ako su* t_1 *i* t_2 *termi, tada je riječ* $t_1 = t_2$ *formula.*
- *Ako su* Φ *i* Ψ *formule, tada su riječi* $(\neg\Phi), (\Phi \vee \Psi), (\Phi \wedge \Psi), (\Phi \rightarrow \Psi), (\Phi \leftrightarrow \Psi)$ *također formule.*
- *Ako je* Φ *formula, a* v *varijabla tada su i riječi* $\exists v\Phi$ *i* $\forall v\Phi$ *formule.*

Pretpostavljamo da su pojmovi *slobodnog* i *vezanog nastupa varijable u formuli* te definicija *supstitucije terma* t *za varijablu* v *u formuli* Φ jasni. Nastavimo s definiranjem **PRA**.

Definicija 1.3.5. *Aksiomi sistema* **PRA** *su:*

- *aksiomi logike sudova*[3]

[3]Primjerice, aksiome Frege-Łukasiewiczevog sistema iz knjige [12]

- *aksiomi za kvantifikatore:*

  (i.) $\forall v \Phi v \to \Phi t$;

  (ii.) $\Phi t \to \exists v \Phi v$, *gdje je u oba slučaja moguća supstitucija terma t za varijablu v u formuli* Φ

- *standardni aksiomi za jednakost*[4]

- *nelogički aksiomi:*

  (i.) obzirom na inicijalne funkcije:

  (a) $\bar{Z}v_0 = \bar{0}$

  (b) $\neg(\bar{0} = \bar{S}v_0)$; $\bar{S}v_0 = \bar{S}v_1 \to v_0 = v_1$

  (c) $\bar{P}_i^n(v1, \ldots, v_n) = v_i$, *za* $1 \le i \le n$

  (ii.) obzirom na pravila:

  (a) $\bar{f}(v_1, \ldots, v_n) = \bar{g}(\bar{h_1}(v), \ldots, \bar{h_m}(v))$, *gdje je f definirana iz* $g, h_1, \ldots, h_m$ *pomoću kompozicije* $(F4_m^n)$

  (b) $\bar{f}(\bar{0}, v_1, \ldots, v_n) = \bar{g}(v_1, \ldots, v_n)$
  $\bar{f}(\bar{S}v_0, v_1, \ldots, v_n) = \bar{h}(\bar{f}(v_0, v_1, \ldots, v_n), v_0, v_1, \ldots, v_n)$, *gdje je f definirana iz g i h primitivnom rekurzijom* $(F5^n)$

  (iii.) shema aksioma indukcije

  $\Phi\bar{0} \wedge \forall v(\Phi v \to \Phi(\bar{S}v)) \to \forall v \Phi v$, *gdje* Φv *ima oblik:*

$$\exists v_n(\bar{f}(v, v_0, v_1, \ldots, v_n) = \bar{0})$$

Dokaz u **PRA** se definira analogno dokazu u **GL**.

Prisjetimo se cilja u ovom poglavlju: želimo definirati relaciju dokazivosti u **PRA**. U svrhu toga trebamo moći svakoj formuli Φ u **PRA** zadati jednoznačno **kod** (**Gödelov broj**) u oznaci $\ulcorner\Phi\urcorner$, prirodan broj, takav da je relacija "$n \in \mathbb{N}$ je kod formule" primitivno rekurzivna.[5]

U kolegiju *Izračunljivost*([11]) definirano je kodiranje rada RAM-stroja, a u kolegiju *Složenost algoritama* kodiranje Turingovog stroja. Na sasvim analogan način moguće je definirati kodiranje sintakse **PRA**. Uz pretpostavku da imamo kodiranje sintakse, definirajmo binarnu relaciju *Prov*:

$$Prov(y, x) \iff y \text{ kodira dokaz formule s kodom } x.$$

[4]Jedan primjer je dostupan u [12].

[5]Relacija R je ***primitivno rekurzivna*** ako je njena karakteristična funkcija primitivno rekurzivna.

Tada vrijedi sljedeće: Relacija "x je kod u **PRA**" je primitivno rekurzivna. Također, relacija $Prov(y, x)$ je primitivno rekurzivna.

Definicija 1.3.6. Predikat dokazivosti, *u oznaci Pr, je relacija definirana na sljedeći način:*

$$Pr(x) := \exists y Prov(y, x).$$

$Pr(x)$ znači da je formula s kodom x dokaziva u ***PRA***.

Napokon smo definirali predikat dokazivosti. Sada ćemo izreći Löbove uvjete izvedivosti (d1), (d2) i (d3), te Löbov teorem, (LT); formule dokazive u **PRA** koje ćemo direktno preslikati u aksiome ($A1$) i ($A2$), pravilo izvođenja ($R2$) te aksiom ($A4$).

Može se pokazati[6] da postoji formula $\overline{Pr}$ jezika **PRA** tako da za svaku formulu Φ i Ψ u **PRA** vrijedi sljedeće

(d1) Ako vrijedi **PRA**$\vdash \Phi$, onda vrijedi i **PRA** $\vdash \overline{Pr}(\ulcorner\Phi\urcorner)$

(d2) **PRA** $\vdash Pr(\ulcorner\Phi\urcorner) \wedge Pr(\ulcorner\Phi \rightarrow \Psi\urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner\Psi\urcorner)$

(d3) **PRA** $\vdash Pr(\ulcorner\Phi\urcorner) \rightarrow Pr(Pr(\ulcorner\Phi\urcorner))$

(LT) **PRA** $\vdash Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner\Phi\urcorner) \rightarrow \Psi\urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner\Phi\urcorner)$

Još je Gödel tridesetih godina prošlog stoljeća uočio kako uvjeti izvedivosti podsjećaju na aksiome modalne logike, no tek je 1955. godine Martin Hugo Löb dokazao teorem (LT) koji je ime dobio po njemu.

1.4 Aritmetička interpretacija GL-a

Sada kada smo definirali **PRA** i naveli glavne teoreme koji opisuju predikat dokazivosti možemo formalno definirati preslikavanje * iz **GL** u **PRA**. Želimo uspostaviti korespondenciju između relacije *Pr()*, odnosno funkcije $\overline{Pr()}$ u **PRA** i operatora $\Box$ u **GL**.

Definicija 1.4.1. Aritmetička interpretacija * *je preslikavanje koje svakoj modalnoj formuli A dodjeljuje formulu A^* iz* ***PRA*** *tako da za sve A, B, p modalne formule u* ***GL*** *vrijedi:*

(1.) Za atomarne formule p, odnosno za varijable u ***GL****, p^* je* bilo koja *rečenica u jeziku* ***PRA***

(2.) $\top^*$ *je* $\bar{0} = \bar{0}$

(3.) $\bot^*$ *je* $\bar{0} = \bar{1}$

[6] Dokazi su dostupni u [10] i [9].

(4.) $(\neg A)^*$ *je* $\neg(A^*)$

(5-7.) $(A \star B)^*$ *je* $A^* \star B^*$ *gdje je* $\star$ *jedan od binarnih operatora:* $\wedge, \vee, \rightarrow$ *ili* $\leftrightarrow$

(8.) $(\Box A)^*$ *je* $\mathrm{Pr}(\ulcorner A^* \urcorner)$

1.5 Prvi Solovayev teorem potpunosti

Sada iznosimo jedan od najbitnijih teorema za logiku dokazivosti. To je upravo rezultat koji opravdava ime logike, odnosno, govori da je **GL** upravo ona logika koja u potpunosti opisuje predikat dokazivosti.

Teorem 1.5.1 (Prvi Solovayev teorem potpunosti)**.** *Za svaku modalnu formulu A u **GL**, sljedeće je ekvivalentno:*

- *Za svaku aritmetičku interpretaciju* * *vrijedi:* ***PRA*** $\vdash A^*$
- ***GL*** $\vdash A$

Navodimo skicu dokaza, dok je detaljan dokaz dostupan u [10] i [9]. Adekvatnost se dokazuje indukcijom po duljini izvoda formule A u **GL**. Sjetimo se, izvod je dokaz formule iz nekog proizvoljnog skupa formula iz **GL**. Za bazu treba pokazati da za svaku interpretaciju * i vrijedi **PRA** $\vdash A^*$ gdje je A jedan od aksioma sistema **GL**. U koraku indukcije potrebno je pokazati da pravila izvođenja ($R1$) i ($R2$) i njihovo prevođenje ne narušavaju dokazivost formule u **PRA**.

Potpunost je puno zanimljivija i teža za dokazati. Upravo zato smo i definirali Kripkeovu semantiku. Potpunost se dokazuje obratom po kontrapoziciji. Želimo pokazati, ako je A proizvoljna i fiksna modalna formula takva da vrijedi **GL**$\nvdash A$, tada je moguće konstruirati interpretaciju * takvu da vrijedi **PRA**$\nvdash A^*$. Po teoremu potpunosti za Kripkeove modele, vrijedi ako A nije dokaziva u **GL**, tada postoji model $\mathfrak{M}$ na kome A nije istinita. Primjenom modela $\mathfrak{M}$ konstruira se tražena interpretacija *.

Poglavlje 2

Polimodalna logika dokazivosti GLP

2.1 Motivacija za polimodalnost

Vidjeli smo zašto je sistem **GL** zanimljiv. Polimodalno proširenje **GLP** također ima aritmetičku motivaciju. Reći nešto o povjesnom razvoju i aritmetičkoj interpretaciji prije nego formalno definiramo **GLP**.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je teorija T ω-**inkonzistentna** ako postoji artimetička formula $A(x)$ takva da vrijedi $T \vdash \exists x A(x)$, i za svaki prirodni broj n imamo $T \vdash \neg A(\bar{n})$. Teorija T je ω-**konzistentna** ako nije ω-inkonzistentna.*

Ako je teorija T ω-konzistentna, onda $T \nvdash \exists x(x \neq x)$, dakle T je konzistentna. Konzistentnost ne povlači ω-konzistentnost. Primjer teorije koja je konzistentna ali ne i ω-konzistentna je $T = \mathbf{PRA} + \neg Con(\mathbf{PRA})$, gdje formula $Con(\mathbf{PRA})$ označava "za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ nije kod dokaza iz **PRA** formule $\bar{0} = \bar{1}$", tj.

$$Con(\mathbf{PRA}) = \neg\exists\bar{n}(\mathrm{Prov}(\bar{n}, \bar{0} = \bar{1})).$$

Pretpostavimo sada da je T konzistentna. Iz toga slijedi da je i teorija $\mathbf{PRA} + \neg Con(\mathbf{PRA})$ konzistentna, jer kada ne bi bila konzistentna, **PRA** bi mogla dokazati svoju konzistentnost što po Gödelovom drugom teoremu nepotpunosti dovodi do inkonzistentnosti od **PRA**. Stoga, $\mathbf{PRA}+\neg Con(\mathbf{PRA})$ je konzistentna. No, očito $\mathbf{PRA}+\neg Con(\mathbf{PRA})$ nije ω-konzistentna jer u njoj možemo dokazati da postoji neki prirodni broj n takav da je n kod dokaza za $\neg Con(\mathbf{PRA})$.

Definicija 2.1.2. *Kažemo da je formula A ω-**dokaziva u sistemu** T, kako je sistem $T + \neg A$ ω-inkonzistentna. Ako A nije dokaziva formula, onda je $T + \neg A$ konzistentna, tj. nije inkonzistentna pa nije ni ω-inkonzistentna, što po definiciji znači da nije ω-dokaziva.*

George Boolos je prvi promatrao logiku za ω-dokazivost i dokazao je aritmetičku potpunost na sličan način kao što smo dokazali potpunost za **GL**. Sljedeće prirodno pitanje bilo je odrediti logiku koja će objediniti dokazivost i ω-dokazivost te odnose među njima. Pišimo [0] za normalnu dokazivost i [1] za formalizaciju ω-dokazivosti kao Σ_3-predikata. Znamo da [0] i [1] moraju zadovoljavati aksiome sistema **GL**. Kako dokazivost povlači ω-dokazivost mora vrijediti:

$$[0]A \to [1]A.$$

Trebamo uključiti i sljedeći princip:

$$\neg[0]A \to [1]\neg[0]A.$$

To nam je jedna od motivacija za razmatranje tzv. polimodalne logike dokazivosti **GLP**, koju definiramo u sljedecoj tocki.

Još jedna aritmetička interpretacija sistema **GLP**, odnosno operatora $[n], n < \omega$, je dokazivost pomoću svih istinitih Π^1_n aritmetičkih formula, gdje je Π^1_n oznaka za sve aritmetičke formule koje su logički ekvivalentne nekoj aritmetičkoj formuli u preneksnoj normalnoj formi s n alternacija tipova kvantifikatora te čiji je prvi kvantifikator univerzalni. Dakle, formulu $\Box A$ interpretiramo kao "formula A je dokaziva pomoću svih istinitih Π^1_n aritmetičkih formula. Pritom je istinita Π^1_n aritmetička formula aritmetički predikat, tj. aritmetička formula s jednom slobodnom varijablom koja na prirodan način izražava, ali ne i zahvaća, istinitost Π^1_n formula u standardnom modelu aritmetike.

Rezultat aritmetičke potpunosti za **GLP** je dokazao Giogri Japaridze koji je ujedno osamdesetih godina prvi uveo polimodalnu logiku dokazivosti te se u njegovu čast ponekad naziva Japaridzeova polimodalna logika dokazivosti.

2.2 Jezik i aksiomi

GLP je propozicionalna modalna logika formulirana u jeziku s beskonačno mnogo modalnih operatora $[0], [1], [2] \ldots$ Sa $\langle n \rangle A$ označavamo formulu $\neg[n]\neg A$. Kao i **GL**, kako bi definirali **GLP** trebamo navesti alfabet, aksiome i pravila izvođenja. Alfabet za **GLP** je isti kao za **GL** uz razliku da izbacimo $\Box$ te dodajemo beskonačno mnogo dodatnih modalnih operatora $[n], n \in \mathbb{N}$. Operator $\Box$ u ovom slučaju smo zamjenili sa [0].

Definicija 2.2.1. *Aksiomi sistema **GLP** su sljedeći:*

(A1) Sve bulovske tautologije

(A2) $[n](A \to B) \to ([n]A \to [n]B)$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$

(A3) $[n]([n]A \to A) \to [n]A$ *(Löbov aksiom), za svaki* $n \in \mathbb{N}$

(A4) $\langle n\rangle A \to [n+1]\langle n\rangle A$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$

(A5) $[n]A \to [n+1]A$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$

*Sistem **GLP** sadrži sljedeća dva pravila zaključivanja.*

(R1) $\dfrac{\begin{array}{c} A \\ A \to B \end{array}}{B}$

(R2) $\dfrac{A}{[n]A}$*, gdje je* $n \in \mathbb{N}$

Vidimo da za svaki modalni operator $[n], n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, **GLP** sadrži aksiome i pravila zaključivanja logike **GL**. Aksiomi $(A4)$ i $(A5)$ međusobno povezuju modalne operatore.

2.3 Kripkeovi modeli

Već smo definirali Kripkeove okvire i modele za sisteme s jednim modalnim operatorom. Sada ćemo proširiti definiciju na polimodalni jezik.

Definicija 2.3.1. Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ *je* $(W, \{R_n | n \in \mathbb{N}\})$ *gdje je* W *neprazan skup i* R_n *je binarna relacija na* W*. Elemente skupa* W *također nazivamo* **svjetovi** *i označavamo sa* $w, v \ldots$

Napomena: Umjesto $\mathfrak{F} = (W, \{R_n | n \in \mathbb{N}\})$ ponekad pišemo i $\mathfrak{F} = (W, \{R_n : n < \omega\})$.

Definicija 2.3.2. Kripkeov model $\mathfrak{M}$ *je uređena trojka* $(W, \{R_i | i \in \mathbb{N}\}, \Vdash)$ *gdje je* $(W, \{R_i | i \in \mathbb{N}\})$ *proizvoljan Kripkeov okvir, a* $\Vdash$ *relacija između svjetova iz* W *i formula koju nazivamo* **relacija forsiranja**. *Relacija forsiranja mora zadovoljavati sljedeće uvjete:*

1. $w \Vdash \top$

2. $w \nVdash \bot$

3. $w \Vdash \neg A \iff w \nVdash A$

4-6. $w \Vdash A \star B \iff (w \Vdash A) \star (w \Vdash B)$*, gdje je* $\star$ *jedan od binarnih operatora:* $\wedge, \vee, \to$ *ili* $\leftrightarrow$

7. $w \Vdash [n]A \iff \forall v(wR_nv \implies v \Vdash A)$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$

Vidimo da su definicije okvira i modela sasvim analogne kao u prvom poglavlju do na interpretaciju modalnih operatora.

2.4 Nepotpunost GLP u odnosu na Kripkeove okvire

Vidjeli smo da za sistem **GL** imamo klasu Kripkeovih okvira na kojima je logika **GL** potpuna i adekvatna. Nažalost, za sistem **GLP** takav model ne postoji.

Sljedeća lema trivijalno slijedi iz teorema karakterizacije za **GL**, tj. teorema 1.2.3:

Lema 2.4.1. *Neka je $\mathfrak{F}$ proizvoljan Kripkeov okvir u polimodalnom jeziku. Tada vrijedi:* $\mathfrak{F} \vDash [n]([n]A \to A) \to [n]A$ *ako i samo ako je R_n inverzno dobro fundirana.*

Okarakterizirajmo sada aksiome (4) i (5).

Lema 2.4.2. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, \{R_i | i \in \mathbb{N}\})$ proizvoljan Kripkeov okvir, a A formula u polimodalnom jeziku. Tada vrijedi:*
$\mathfrak{F} \vDash \langle n \rangle A \to [n+1]\langle n \rangle A$, *ako i samo ako za sve $w, v, u \in W$, iz $wR_n v$, $wR_{n+1}u$ slijedi $uR_n v$.*

Dokaz: Pretpostavimo da za neku formulu A vrijedi $\mathfrak{F} \vDash \langle n \rangle A \to [n+1]\langle n \rangle A$. Tada je na $\mathfrak{F}$ posebno valjana i formula $\langle n \rangle p \to [n+1]\langle n \rangle p$. Neka su $w, u, v \in W$ za koje vrijedi $wR_n u$ i $wR_{n+1} v$. Definirajmo model $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, \Vdash)$ takav da je p istinita samo na svijetu u, tj. $u \Vdash p$. Kako vrijedi $wR_n u$, slijedi $w \Vdash \langle n \rangle p$. Iz pretpostavke valjanosti vrijedi konkretno $w \Vdash \langle n \rangle p \to [n+1]\langle n \rangle p$. Iz toga i definicije implikacije slijedi $w \Vdash [n+1]\langle n \rangle p$. Kako vrijedi $wR_{n+1} v$, slijedi $v \Vdash \langle n \rangle p$. Nadalje, iz toga slijedi da postoji $z \in W$ takav da vrijedi $vR_n z$ i $z \Vdash p$. Kako smo definirali relaciju forsiranja, u je jedina takva točka, dakle $vR_n u$.

Za obrat pretpostavimo da na okviru $\mathfrak{F} = (W, \{R_n : n < \omega\})$ vrijedi da za sve $w, u, v \in W$, iz $wR_n v$, $wR_{n+1} u$ slijedi $uR_n v$. Neka je $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, \Vdash)$ proizvoljan model na $\mathfrak{F}$. Neka je $w \in W$ proizvoljna točka i neka je A proizvoljna ali fiksna formula. Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \langle n \rangle A$. Tada postoji $u \in W$ tako da vrijedi $wR_n u$ i $u \Vdash A$. Neka je $v \in W$ proizvoljna R_{n+1}-dostiživa iz točke w. Kako vrijedi $wR_n u$ i $wR_{n+1} v$, iz pretpostavke slijedi $vR_n u$. Kako vrijedi $u \Vdash A$, slijedi $v \Vdash \langle n+1 \rangle A$. Iz te činjenice i proizvoljnosti točke v slijedi $w \Vdash [n]\langle n+1 \rangle$.

■

Lema 2.4.3. *Neka je $\mathfrak{F}$ proizvoljan Kripkeov okvir u polimodalnom jeziku. Tada vrijedi:* $\mathfrak{F} \vDash [n]A \to [n+1]A$, *ako i samo ako iz $wR_{n+1} v$ slijedi $wR_n v$.*

Dokaz: Pretpostavimo prvo da je formula $[n]p \to [n+1]p$ valjana za neki p na okviru $\mathfrak{F} = (W, \{R_i | i \in \mathbb{N}\})$ i da vrijedi $wR_{n+1} v$. Tada definiramo model $\mathfrak{M} = (W, \{R_i | i \in \mathbb{N}\}, \Vdash)$ s relacijom forsiranja $\Vdash$ tako da $z \Vdash p$ ako i samo ako $z \neq v$. Tada vrijedi $v \nVdash p$ (tako smo definirali $\Vdash$), $w \Vdash \neg[n+1]$ i $w \Vdash \neg[n]p$ (obje tvrdnje slijede iz pretpostavke $wR_{n+1} v$ i prethodne tvrdnje). Tada postoji u takav da $wR_n u$ i $u \nVdash p$. No to znači da je $wR_n v$ jer smo upravo tako definirali relaciju forsiranja.

S druge strane neka za sve w, v vrijedi da iz $wR_{n+1}v$ slijedi $wR_n v$. Bez obzira kako definirali model imat ćemo ili $w \Vdash [n+1]A$, ili $w \nVdash [n+1]A$. Po pretpostavci u prvom slučaju imamo $w \Vdash [n]A$, dok u drugom imamo $w \nVdash [n]A$. To jednostavno znači da su $[n]A$ i $[n+1]A$ obje ili istinite ili lažne u svijetu w za proizvoljan w. To po definiciji implikacije povlači $w \Vdash [n]A \to [n+1]A$.

■

Teorem 2.4.1. *Logika* ***GLP*** *je nepotpuna u odnosu na svoju klasu okvira, odnosno za* ***GLP*** *ne postoji adekvatan Kripkeov okvir za koji vrijedi $R_n \neq \emptyset$ za $n > 0$.*

Dokaz: Prisjetimo se aksioma $(A4)$ i $(A5)$ logike **GLP**:

(A4) $[m]A \to [n]A$, za $m < n$

(A5) $\langle m \rangle A \to [n]\langle m \rangle A$, za $m < n$

Dokažimo da ne postoji neprazan okvir koji zadovoljava $(A4)$ i $(A5)$. Pretpostavimo suprotno, tj. za **GLP** postoji adekvatan okvir $\mathfrak{F}$ takav da mu je relacija R_2 neprazna. Tada postoje x, y takvi da xR_2y te uz lemu 2.4.3 imamo xR_1y. Iz leme 2.4.2 slijedi yR_1y, odnosno postoji beskonačan uzlazan niz $yR_1yR_1y\ldots$. Po definiciji, to znači da R_1 nije inverzno dobro fundirana. Iz leme 2.4.1, za $n = 1$, nadalje slijedi da $\mathfrak{F} \nvDash [n]([n]A \to A) \to [n]A$, odnosno $\mathfrak{F}$ nije adekvatan okvir za **GLP**.

Ovo znači da svaki okvir na kojemu je **GLP** adekvatna mora biti $R_n = \emptyset$. Tada je $[n]\bot$ valjana formula za sve $n > 1$. No, očito $[n]\bot$ nije valjana na svakom okviru za **GLP**.

■

Poglavlje 3

Topološki prostori. Kanonski modeli. Opći okviri

Ovo poglavlje ćemo iskoristiti kao podsjetnik te kao uvod u iduće. Istaknut ćemo definicije i teoreme vezane uz topološke prostore, odnosno kanonske modele i opće okvire za modalne logike, koji su nam bitni u dokazivanju topološke potpunosti zatvorenog fragmenta sistema **GLP**.

3.1 Topološki prostori

Definicija 3.1.1. **Topološki prostor** *je uređeni par* (X, τ) *gdje je* X *neki skup, a* $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ *familija podskupova od* X *koji zadovoljava sljedeće aksiome:*

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. *Ako je* $\tau' \subseteq \tau$ *tada je i* $y = \cup_{x \in \tau'} \in \tau$ *(napomena:* τ' *može biti konačan ili beskonačan)*
3. *Ako je* $\tau' \subseteq \tau$ *konačan podskup tada je i* $y = \cap_{x \in \tau'} \in \tau$.

Članove skupa τ *nazivamo* τ-**otvoreni skupovim**, *a* τ *zovemo* **topologijom nad** X.

Definicija 3.1.2. *Neka je* (X, τ) *topološki prostor. Tada:*

- *Za skup* $S \subseteq X$ *kažemo da je* **otvorena okolina** *(ili jednostavno okolina) točke* $t \in X$ *ako je* S *otvoren u prostoru* X *i sadrži točku* t.
- *Točka* t *je izolirana u skupu* $S \subseteq X$ *ako postoji otvoren skup* O *takav da vrijedi* $S \cap O = \{t\}$.

- *Skup* $S \subseteq X$ *je probušena okolina točke* $t \in X$ *ako je skup* $S \cup \{t\}$ *okolina točke* t *i* $t \notin S$.

Definicija 3.1.3. *Neka su* (X, τ) *i* (X', τ') *topološki prostori. Kažemo da je* (X', τ') *topološki potprostor od* (X, τ) *ako vrijedi* $X' \subseteq X$ *i topologija* τ' *je familija presjeka* τ*-otvorenih skupova sa skupom* X'.

Definicija 3.1.4. *Neka je* (X, τ) *topološki prostor.* **Operator deriviranja na skupu X** *je preslikavanje* $d_\tau : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *koje svakom* $A \in \mathcal{P}(X)$ *pridružuje njegov skup izoliranih točaka u oznaci* $d_\tau(A)$*. Drugim riječima,* $x \in d_\tau(A)$ *ako i samo ako svaka otvorena okolina od* x *sadrži* $y \neq x$ *takvu da* $y \in A$*. Pisat ćemo* dA *za* $d_\tau(A)$ *kad god je topologija* τ *jasna iz konteksta.* **Topološko zatvorenje skupa** A *sada definiramo kao* $cl(A) = A \cup d(A)$.

Definicija 3.1.5. *Kažemo da je topološki prostor* (X, τ) **raspršen** *ako svaki neprazan potprostor* $\emptyset \neq A \in \tau$ *od* X *ima izoliranu točku.*

Definicija 3.1.6. *Kažemo da je topološki prostor* (X, τ) **kompaktan** *ako svaki pokrivač* P*, tj. familiju skupova* P *takvu da* $\bigcup P = X$*, ima konačnu podfamiliju* $P' \subseteq P$ *takvu da vrijedi* $\bigcup P' = X$.

Definicija 3.1.7. *Funkciju* $f : X_1 \to X_2$ *zovemo* **homeomorfizam** *između dva topološka prostora ako:*

- f *je bijekcija;*
- *Ako je* $O \in X_1$ *otvoren skup, tada je i* $f(O)$ *otvoren skup u* X_2*;*
- *Ako je* $O' \in X_2$ *otvoren skup, tada je i* $f^{-1}(O')$ *otvoren skup u* X_1.

Umjesto eksplicitnog zadavanja, topološki prostor može biti generiran dijelom topologije, odnosno *bazom*, koja u potpunosti određuje ostale članove topologije.

Definicija 3.1.8. **Baza topologije** *na* X *je familija* $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ *za koju vrijedi:*

- *presjek svaka dva člana familije* B *je unija nekih članova iz* B*;*
- $\cup B = X$.

Za topologiju τ *kažemo da je generirana bazom* B *ako se sastoji od praznog skupa i svih proizvoljnih unija članova baze* B.

Za familiju B *kažemo da je podbaza topologije* τ *ako vrijedi da je familija svih konačnih presjeka članova familije* B *jedna baza topologije* τ*. Neka je* B *proizvoljna familija podskupova od* X*, te familija* B' *zatvorenje familije* B *na konačne presjeke. Za topologiju* τ *kažemo da je generirana familijom* B *ako se sastoji od praznog skupa i svih proizvoljnih unija članova familije* B'

Podbaza jedinstveno određuje topologiju, ali ne vrijedi obratno.

Ako skupu X pridružimo prebrojivo mnogo topologija $\tau_0, \tau_1, \ldots$, tada $(X, \tau_0, \tau_1, \ldots)$ nazivamo politopološki prostor.

Definicija 3.1.9. *Neka je $\mathcal{Y}$ familija topoloških prostora. Kažemo da je $(X, \tau) = \Pi_{Y_i \in \mathcal{Y}} Y_i$ produktna topologija ili jednostavno produkt, ako je jedna pripadna baza tog prostora familija svih skupova oblika $\Pi_{U_i \in Y_i, U_i otvoren\ skup} U_i$.*

Teorem 3.1.1 (Teorem Tihonova)**.** *Produkt kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.*

I sljedeća propozicija će nam biti bitna.

Propozicija 3.1.1. *Intervalna topologija na ordinalu λ je kompaktna ako i samo ako je λ ordinalni broj prve vrste, tj. postoji ordinalni broj β takav da vrijedi $\lambda = \beta + 1$.*

3.2 Kanonski modeli

Vratimo se na priču o modalnim sistemima. Uz Kripkeovu, odnosno relacijsku semantiku, te topološku semantiku imamo jednu vrstu modela za koju uvijek imamo rezultat potpunosti. To su takozvani kanonski modeli.

Definicija 3.2.1. *Neka je Λ normalni modalni sistem, odnosno modalni sistem koji sadrži aksiom K. Kažemo da je skup formula Γ maksimalno Λ-konzistentan ako je Λ-konzistentan i svaki pravi nadskup od Γ je Λ-inkonzistentan. Ako je sistem Λ jasan iz konteksta, maksimalno Λ-konzistentne skupove ćemo zvati maksimalno konzistentni.*

Napomena: Ako je Λ modalni sistem i Γ maksimalno Λ-konzistentan skup, tada vrijedi:

- Γ je zatvoren na pravilo izvođenja modus ponens;
- $\Lambda \subseteq \Gamma$;
- Za sve modalne formule A vrijedi $A \in \Gamma$ ili $\neg A \in \Gamma$;
- Za sve modalne formule A i B takve da $A \vee B \in \Gamma$ vrijedi $A \in \Gamma$ ili $B \in \Gamma$.

Lema 3.2.1 (Lindenbaumova lema)**.** *Ako je Σ Λ-konzistentan skup formula, tada postoji maksimalno Λ-konzistentan skup Σ^+ takav da vrijedi $\Sigma \in \Sigma^+$.*

Dokaz leme je dostupan u npr. [12].

Definirajmo sada model temeljen na maksimalno konzistentnim skupovima.

Definicija 3.2.2. *Kanonski model $\mathfrak{M}^\Lambda$ za normalnu logiku Λ u osnovnom modalnom jeziku je uređena trojka $(W^\Lambda, R^\Lambda, \Vdash^\Lambda)$ pri čemu vrijedi:*

- *W^Λ je familija svih maksimalno Λ-konzistentnih skupova;*
- *R^Λ je binarna relacija na W^Λ sa svojstvom da $wR^\Lambda u$ ako za sve formule A, ako vrijedi $A \in u$ tada vrijedi $\Diamond A \in w$. Relaciju R^Λ nazivamo kanonskom relacijom;*
- *Neka je $w \in W^\Lambda$. Definiramo kanonsku relaciju forsiranja $\Vdash^\Lambda$ ovako:*

  Vrijedi $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash^\Lambda p$ ako i samo ako $p \in w$, za svaku propozicionalnu varijablu p.

Uređeni par $\mathfrak{F}^\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda)$ nazivamo kanonski okvir za Λ.

Lema 3.2.2 (Lema o istinitosti)**.** *Neka je Λ normalna modalna logika, $\mathfrak{M}^\Lambda$ kanonski model za Λ, te A formula. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

- *$\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash A$;*
- *$A \in w$.*

Izrecimo sada najbitniji teorem ove točke na koji se oslanjamo u idućem poglavlju kada budemo govorili o kanonskom okviru za zatvoreni fragment sistema **GLP**.

Teorem 3.2.1. *Neka je Λ normalna modalna logika, $\mathfrak{M}^\Lambda$ kanonski model za Λ, te A formula. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*[1]

- *$\Lambda \vdash A$;*
- *$\mathfrak{M}^\Lambda \vDash A$.*

Dokaz: Adekvatnost slijedi trivijalno jer ako vrijedi $\Lambda \vdash A$ tada svaki maksimalno Λ-konzistentan nadskup od Λ, $w \in W^\Lambda$ sadrži A. Dakle, $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash A$, za svaki $w \in W^\Lambda$.

Obrnuto, ako $\mathfrak{M}^\Lambda \vDash A$ tada za svaki maksimalno Λ-konzistentan skup $w \in W^\Lambda$ vrijedi $\mathfrak{M}^\Lambda, w \Vdash A$. No, to znači da je A dokaziv u najmanjem takvom skupu iz čega slijedi $\Lambda \vdash A$.

■

3.3 Opći okviri

Glavni koncept vezan uz Kripkeove okvire je *valjanost*, dok na razini modela pričamo o *ispunjivosti*. Valjanost na Kripkeovom okviru je definirana u terminima istinosti na svim modelima. No, Kripkeove okvire možemo proširiti na međustrukturu s algebarskim svojstvima.

Ako je R neka binarna relacija, koristimo oznaku R^{-1} za njen inverz, tj. $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.

[1] Relacije $\vdash$ za Λ i $\vDash$ za $\mathfrak{M}^\Lambda$ su definirane ekvivalentno kao za **GL**, odnosno Kripkeove modele za **GL**.

Definicija 3.3.1. Opći okvir *u osnovnom modalnom jeziku je uređeni par* $(\mathfrak{F}, A)$ *gdje je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *Kripkeov okvir i* $A \subseteq \mathcal{P}(W)$ *familija za koju vrijedi da je* A *zatvoren na konačne unije, konačne presjeke, komplement i* R^{-1}.

Opći okvir za polimodalni jezik je definiran analogno.

Definicija 3.3.2. *Neka je* $(\mathfrak{F}, A)$ *opći okvir. Kažemo da je* $(\mathfrak{F}, A)$*:*

- **diferencirajući** *ako za sve* x, y *takve da* $x \neq y$ *postoji* $X \in A$ *takav da* $x \in X$ *i* $y \notin X$.
- **uzak** *ako za sve* x, y *vrijedi* xRy *ako i samo ako iz* $y \in X$ *slijedi* $y \in R^{-1}(X)$ *za sve* $X \in A$.
- **kompaktan** *ako za svaki* $A_0 \subseteq A$*, takav da* A_0 *posjeduje svojstvo konačnog presjeka,*[2] *vrijedi* $\bigcap A_0 \neq \emptyset$.
- **deskriptivan** *okvir ako i samo ako je diferencirajući, uzak i kompaktan.*

Za svaki opći okvir $((W, R), A)$, A čini bazu topologije τ^A na skupu W. Ako je R relacija na W i $x \in W$ definiramo skup $R[x] := \{y \in W : xRy\}$.

Propozicija 3.3.1. *Opći okvir* $\mathfrak{M} = ((W, \{R_n : n < \omega\}), A)$ *je uzak ako je svaki skup* $R_n[x]$ *zatvoren u* τ^A.

Dokaz propozicije je dostupan u [3].

Opći okviri su zanimljivi sami za sebe, no nama je potrebna veza između općih okvira i kanonskih okvira, posebno za zatvoreni fragment modalnog sistema.

Za dva opća modela ćemo htjeti znati kada ih praktički možemo poistovjetiti. To formalizira pojam izomorfnosti.

Definicija 3.3.3. *Kažemo da su modeli* $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', \Vdash)$ *izomorfni, u oznaci* $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$*, ako postoji bijektivna funkcija* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}'$ *koja zadovoljava iduća svojstva:*

- *Za svaku propozicionalnu varijablu* p *i* $w \in W$ *vrijedi:* $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash' p$*;*
- *Ako za* $w, v \in W$ *vrijedi:* wRv *ako i samo ako* $f(w)R'f(v)$.

Definicija 3.3.4. *Neka je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *proizvoljan Kripkeov okvir,* $w \in W$ *i* A *neka formula. Ako za svaki model* $\mathfrak{M}$ *nad* $\mathfrak{F}$ *vrijedi* $\mathfrak{M}, w \Vdash A$ *pisat ćemo*

$$\mathfrak{F}, w \vDash A.$$

[2] Kažemo da A posjeduje svojstvo konačnog presjeka ako za svaki konačni podskup $A_f \subseteq A$ vrijedi $\bigcap A_f \neq \emptyset$

Definiramo skup točaka:

$$D_A := \{w \in W : \mathfrak{F}, w \vDash A\}.$$

Definicija 3.3.5. *Neka je $\mathfrak{F}$ proizvoljan Kripkeov okvir. Definiramo opći okvir $(\mathfrak{F}, \mathfrak{D})$ tako da:*

$$\mathfrak{D} := \{D_A : A \textit{ je zatvorena formula}\}.$$

Tada imamo idući rezultat:

Propozicija 3.3.2. *Neka je $\mathfrak{F}$ neki okvir i Λ modalni sistem i neka vrijedi za sve zatvorene modalne formule A:*

$$\mathfrak{F} \vDash A \textit{ ako i samo ako } \Lambda \vdash A.$$

Ako je $\mathfrak{M}^\Lambda$ kanonski okvir za Λ, vrijedi $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{M}^\Lambda$ ako i samo ako je opći okvir $(\mathfrak{F}, \mathfrak{D})$ deskriptivan.

Dokaz je dostupan u [6].

Poglavlje 4

Topološka potpunost segmenta $\mathbf{GLP}_0$

Zatvoreni segment sistema **GLP**, u oznaci $\mathbf{GLP}_0$, je podskup svih formula iz **GLP** bez propozicionalnih varijabli. Taj fragment je našao primjenu u teoriji dokaza i ordinalnoj analizi.

Glavni cilj ovog poglavalja nam je dokazati topološku potpunost sistema $\mathbf{GLP}_0$. Izričemo to u sljedećem teoremu, gdje ćemo točnu definiciju politopološkog prostora Θ dati kasnije (4.3), kada budemo imali sve potrebne preduvjete:

Teorem 4.0.1 (Topološka potpunost sistema $\mathbf{GLP}_0$)**.** *Neka je A modalna formula u polimodalnom jeziku. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- $\boldsymbol{GLP}_0 \vdash A$
- $\Theta \vDash A$

U tu svrhu promatramo takozvani Igantievljev okvir $\mathcal{U}$ i postepeno izgrađujemo opći okvir koji je izomorfan kanonskom okviru od $\mathbf{GLP}_0$.

4.1 Igantievljev okvir $\mathcal{U}$

Iako smo za **GLP** dokazali da nije potpun u odnosu na netrijvijalne Kripkeove okvire, za zatvoreni fragment $\mathbf{GLP}_0$ ipak postoji odgovarajući okvir na kojemu je potpun. Prvi put ga je uveo Ignatiev u [7]. Prije nego ga definiramo trebamo spomenuti rezultat o Cantorovoj normalnoj formi iz teorije skupova.

Teorem 4.1.1 (Cantorova normalna forma)**.** *Svaki ordinalni broj $\alpha > 0$ se može zapisati u Cantorovoj normalnoj formi: $\alpha = \omega^{\lambda_k} + \ldots + \omega^{\lambda_0}$, gdje je $\lambda_i \geq \lambda_j$ za $i > j$.*

Dokaz je dostupan u npr. [13].

Prisjetimo se ordinalnog broja $\epsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}$ koji je ujedno i najmanji ordinalan broj ϵ koji zadovoljava jednakost $\epsilon = \omega^\epsilon$.

Definicija 4.1.1. *Neka je $\alpha \leq \epsilon_0$ ordinalni broj koji ima Cantorovu normalnu formu $\omega^{\lambda_k} + \ldots + \omega^{\lambda_0}$. Definiramo funkciju $e(\alpha) := \lambda_0$ uz dogovor da je $e(0) = 0$.*

Napomena: Za bilo koji ordinalni broj $\alpha < \epsilon_0$, postoji prirodan broj n takav da za sve $k \geq n$ vrijedi $e^k(\alpha) = 0$.[1]

Definicija 4.1.2. *Neka je $\Omega = \{(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots) : \alpha_i < \epsilon_0\}$.* **Igantievljev okvir** *$\mathcal{U}$ je Kripkeov okvir $\mathcal{U} = (U, R_n : n \in \mathbb{N})$ takav da:*

- *$U := \{\vec{\alpha} \in \Omega : \forall n < \omega, \alpha_{n+1} \leq e(\alpha_n)\}$*
- *Definiramo relaciju R_n za svaki $n < \omega$:*

$$\vec{\alpha} R_n \vec{\beta} \text{ ako i samo ako vrijedi } \alpha_n > \beta_n \text{ i za svaki } m < n, \alpha_m = \beta_m$$

Članove skupa U možemo smatrati strogo padajućim konačnim nizovima ordinalnih brojeva. Tada za svaki $\vec{\alpha} \in U$ postoji prirodan broj $m < \omega$ takav da vrijedi $\alpha_n = 0$ za sve $n \geq m$. U tom slučaju za $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, 0, 0, \ldots)$ ponekad koristimo oznaku $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ iako se radi o beskonačnom nizu.

Igantievljev okvir $\mathcal{U}$ jest adekvatan okvir za $\mathbf{GLP}_0$. Štoviše, $\mathbf{GLP}_0$ je potpun u odnosu na $\mathcal{U}$ što je K. Ignatiev dokazao u [7], dok je čisto semantički dokaz potpunosti dao T. Icard u [5].

Sada ćemo definirati jedan poseban skup točaka u U koji će nam biti bitan u danjoj raspravi o Igantievljevom okviru te je u nekom smislu prototip za podbazu topološkog prostora Θ.

Definicija 4.1.3. *Kažemo da je $\vec{\alpha} \in \mathcal{U}$* **korijen** *ako i samo ako za svaki $i < \omega$ vrijedi $\alpha_{i+1} = e(\alpha_i)$.* **Glavna os** *od $\mathcal{U}$, u oznaci M, je skup svih korijena. Ako je α ordinalan broj, sa $\widehat{\alpha}$ ćemo označavati korijen generiran tim brojem:*

$$\widehat{\alpha} := (\alpha, e(\alpha), e(e(\alpha)), \ldots).$$

U [5] također je dostupan dokaz iduće propozicije:

Propozicija 4.1.1. *Neka je A neka formula takva da vrijedi $\mathbf{GLP}_0 \nvdash A$. Tada postoji korijen $\widehat{\alpha}$ na glavnoj osi M takav da vrijedi $\mathcal{U}, \widehat{\alpha} \nvDash A$.*

Definicija 4.1.4. *Formulu A zovemo* **riječ** *ako je oblika $A = \langle n_m \rangle \ldots \langle n_0 \rangle \top$ za $m < \omega$ i $n_i < \omega$ za svaki $i < m$. Uvodimo pokratu tako da umjesto cijele formule pišemo radije numerale vezane uz modalne operatore.*[2] *Prazan niz, u oznaci Λ odgovara formuli $\top$.*

[1] Koristit ćemo oznaku $e^k(\alpha)$ za $e(...e(\alpha))$ gdje se e ponavlja k puta.

[2] Tako npr. za $\langle 3 \rangle \langle 1 \rangle \langle 0 \rangle \top$ pišemo 310. Riječ 123331 možemo pisati kao $123^3 1$.

Pišemo $n, m, \ldots$ za pojedine operatore, te $a, b, c, \ldots$ za nizove operatora.

Sa S označujemo skup svih riječi, dok sa S_n označujemo skup svih riječi koje sadrže modalne operatore $\langle m \rangle$ takve da $m \geq n$.

Bitna činjenica je da je svaka zatvorena formula, tj. formula bez propozicijskih varijabli $\mathbf{GLP}_0$-ekvivalentna boolovskoj kombinaciji riječi. Dokaz te činjenice dostupan je u [1]. Uz činjenicu adekvatnosti i potpunosti sistema $\mathbf{GLP}_0$ i $\mathcal{U}$, imamo rezultat o normalnim formama za $\mathcal{U}$. Riječi će stoga biti korisne u daljnjem proučavanju zatvoreno definabilnih podskupova od U. Kako bi mogli reći više o valjanosti riječi na $\mathcal{U}$, uvodimo sljedeći parcijalni uređaj na U.

Definicija 4.1.5. *Definiramo relaciju $\leq$ na U kako slijedi. Ako su $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in U$ točke iz U, tada vrijedi $\vec{\beta} \leq \vec{\alpha}$ ako i samo ako za svaki $i < \omega$ vrijedi $\beta_i \leq \alpha_i$.*

Lema 4.1.1. *Neka je a riječ. Ako vrijedi $\mathcal{U}, \vec{\alpha} \Vdash a$, tada za sve $\vec{\beta} \in U$ za koje vrijedi $\vec{\beta} \geq \vec{\alpha}$, također vrijedi i $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash a$.*

Dokaz: Dokazujemo indukcijom po duljini riječi. Ako je $a = \Lambda$, tvrdnja slijedi trivijalno. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve riječi duljine m i neka vrijedi $\vec{\alpha} \Vdash na$, gdje je duljina riječi a manja ili jednaka m. Konkretno, pretpostavimo da $\vec{\alpha} R_n \vec{\delta}$ za neki $\vec{\delta} \in U$ takav da vrijedi $\vec{\delta} \Vdash a$.

Neka je $\vec{\beta} \in U$ proizvoljna fiksirana točka takva da vrijedi $\vec{\beta} \geq \vec{\alpha}$. Neka je zatim $\vec{\gamma}$ točka definirana tako da vrijedi $\gamma_i = \beta_i$, za svaki $i < n$ te $\gamma_j = \delta_j$, za svaki $j \geq n$. Tada očito vrijedi $\vec{\beta} R_n \vec{\gamma}$. Dakle, konstruirali smo $\vec{\gamma}$ takav da vrijedi $\vec{\gamma} \geq \vec{\delta}$ pa iz pretpostavke indukcije slijedi $\vec{\gamma} \Vdash a$. Kako je $\vec{\beta} R_n \vec{\gamma}$ slijedi $\vec{\beta} \Vdash na$.

■

Napomena: Ako je a riječ koja ne sadrži operator $\langle 0 \rangle$, sa a^- označavamo riječ čiji je svaki element niza umanjen za jedan. Sljedeća surjektivna funkcija sa skupa riječi u skup ordinalnih brojeva je dobro definirana.

Definicija 4.1.6. *Definiramo funkciju $o : S \rightarrow \epsilon_0$ rekurzivno kako slijedi:*

- *Ako je a riječ oblika $a = 0^k$ za $k < \omega$, onda $o(a) = k$*
- *Inače, ako je $a = a_1 0 \ldots 0 a_k$ tako da je svaki $a_i \in S_1$ i postoji barem jedan neprazan a_i tada $o(a) = \omega^{o(a_k^-)} + \ldots + \omega^{o(a_1^-)}$*

Cilj je pokazati da nam funkcija o daje način kako odrediti točke iz $\mathcal{U}$ na kojima je dana zatvorena formula istinita. Za to će nam trebati sljedeća pomoćna lema.

Lema 4.1.2. *Neka je $a = n_1 n_2 \ldots n_k \in S_1$ i b neka proizvoljna riječ. Tada vrijedi $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash a0b$ ako i samo ako vrijedi $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash a$ te $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash 0b$.*

Dokaz: Ako vrijedi $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash a0b$ tada sigurno vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a$. Kako je $a = n_1 n_2 \ldots n_k$, postoji niz točaka iz U takvih da vrijedi:

$$\vec{\beta} R_{n_1} \vec{\alpha_{1n_1}} R_{1n_2} \vec{\alpha_{1n_2}} \ldots R_{n_k} \vec{\alpha_{1n_k}} R_0 \vec{\alpha}$$

uz to da su $n_i > 0$ (to slijedi iz toga što je $a \in S_1$) i $\vec{\alpha} \Vdash b$. Dakle, $\alpha_0 < \beta_0$, iz čega slijedi $\vec{\beta} R_0 \vec{\alpha}$, nadalje $\beta \Vdash 0b$.

Pokažimo sada suprotni smjer. Neka vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a$ i $\vec{\beta} \Vdash 0b$. Kako je $a = n_1 n_2 \ldots n_k$ imamo niz

$$\vec{\beta} R_{n_1} \vec{\alpha_{1n_1}} R_{1n_2} \vec{\alpha_{1n_2}} \ldots R_{n_k} \vec{\alpha_{1n_k}}.$$

Već smo rekli da vrijedi $n_i > 1$, stoga mora vrijediti i $\beta_0 = (\alpha_{1n_k})_0$. Iz $\vec{\beta} \Vdash 0b$ nadalje slijedi $\vec{\alpha_{1n_k}} \Vdash 0b$. Konačno, imamo $\vec{\beta} \Vdash a0b$.

■

Definicija 4.1.7. *Definiramo funkciju ι sa skupa riječi u glavnu os M od U kako slijedi.*

$$\iota(a) := \widehat{o(a)}$$

Lema 4.1.3. *Neka je $a \in S$ proizvoljna riječ i $\vec{\beta}$ proizvoljna točka u U. Vrijedi $\mathcal{U}, \vec{\beta} \Vdash a$ ako i samo ako $\vec{\beta} \geq \iota(a)$.*

Dokaz: Dokaz radimo indukcijom po duljini riječi a. Ako je a prazan niz, tada očito imamo $\iota(\Lambda) = (0)$. Pretpostavimo da je $a = n_1 \ldots n_m$ neprazna riječ i da tvrdnja vrijedi za sve riječi čija je duljina manja od m. Definiramo $\min(a) = \min\{n_1, \ldots, n_m\}$. Korak indukcije radimo za riječ a duljine m. Ako je $\min(a) = 0$ tada a možemo zapisati u obliku $a_0 0 a'$, tako da $a_0 \in S_1$ (dakle, a_0 je početni "ne-nul" dio koji potencijalno može biti i prazan). Neka je

$$\iota(a') = \widehat{\alpha}.$$

Tada iz pretpostavke slijedi $\vec{\beta} \Vdash a'$ ako i samo ako $\vec{\beta} \geq \vec{\alpha}$. Kako je $a_0 \in S_1$, imamo $o(a_0) = \omega^\gamma$, gdje je $\gamma = o(a_0^-)$. Imamo dakle:

$$\iota(a_0) = (\omega^\gamma, \gamma, e(\gamma), e(e(\gamma)), \ldots).$$

Nadalje, također iz pretpostavke indukcije vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a_0$ ako i samo ako $\vec{\beta} \geq \widehat{\omega^\gamma}$. Iz leme 4.1.2 imamo:

$$\vec{\beta} \Vdash a_0 0 a' \iff (\vec{\beta} \Vdash a_0 \;\&\; \vec{\beta} \Vdash 0a').$$

Kako je duljina od a_0 manja od m, iz pretpostavke indukcije vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a_0$ ako $\vec{\beta} \geq \widehat{\omega^\gamma}$. Raspišimo $\vec{\beta} \Vdash 0a'$:

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \Vdash 0a' &\iff \exists \vec{\beta}'(\vec{\beta} R_0 \vec{\beta}' \;\&\; \vec{\beta}' \Vdash a') \\ &\iff \exists \vec{\beta}'(\vec{\beta} R_0 \vec{\beta}' \;\&\; \vec{\beta}' \geq \widehat{\alpha}) \\ &\iff \beta_0 > \alpha\end{aligned}$$

Iz upravo pokazanog imamo da vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a_0 0 a'$ ako i samo ako $\vec{\beta} \geq \widehat{\omega^\gamma}$ i $\beta_0 > \alpha$. S druge strane vrijedi $o(a) = o(a') + \omega^{o(a_0^-)} = \alpha + \omega^\gamma$, pa imamo:

$$\iota(a) = (\alpha + \omega^\gamma, \gamma, e(\gamma), \ldots)$$

Stoga, vrijedi $\vec{\beta} \geq \iota(a)$ ako i samo ako $\vec{\beta} \geq \widehat{\omega^\gamma}$ i $\beta_0 \geq \alpha + \omega^\gamma$. Preostaje pokazati da vrijedi $\beta_0 > \alpha$ ako i samo ako vrijedi $\beta_0 > \alpha + \omega^\gamma$. Očito vrijedi $\beta_0 > \alpha > \alpha + \omega^\gamma$. Pretpostavimo sada da vrijedi $\beta_0 > \alpha$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $\beta_0 = \alpha + \delta$. Kako je $e(\beta_0) = e(\delta)$, slijedi

$$\delta \geq \omega^{e(\delta)} = \omega^{e(\beta_0)} \geq \omega^{\beta_1} \geq \omega^\gamma.$$

Dakle, $\beta_0 \geq \alpha_0 + \omega^\gamma$. Ovime smo dovršili slučaj kada je $\min(a) = 0$.

Razmotrimo sada slučaj $\min(a) > 0$. Kako se 0 ne pojavljuje u a vrijedi $\vec{\beta} \Vdash a$ ako i samo ako $\vec{\beta}' \Vdash a^-$, gdje je $\vec{\beta}' := (\beta_1, \beta_2, \ldots)$, odnosno sve koordinate iz $\vec{\beta}$ pomaknute za 1 ulijevo. Iz pretpostavke indukcije to je ekvivalentno $\vec{\beta}' \geq \iota(a^-)$. Neka je $\iota(a^-) = \widehat{\alpha}$, za neki $\alpha < \epsilon_0$. Tada je $\iota(a) = \widehat{\omega^\alpha}$. Ali imamo $\vec{\beta} \geq \widehat{\omega^\alpha}$ ako i samo ako $\vec{\beta}' \geq \widehat{\alpha}$. Na kraju stoga imamo:

$$\begin{aligned}\vec{\beta} \Vdash a &\iff \vec{\beta}' \Vdash a^- \\ &\iff \vec{\beta}' \geq \widehat{\alpha} \\ &\iff \vec{\beta}' \geq \widehat{\omega^\alpha} \\ &\iff \vec{\beta} > \iota(a)\end{aligned}$$

Ovime smo dovršili korak indukcije.

■

Korolar 4.1.1.1. *Neka su $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in U$ točke takve da vrijedi $\vec{\alpha} \neq \vec{\beta}$. Tada postoji riječ a takva da vrijedi $\vec{\alpha} \Vdash a$ i $\vec{\beta} \nVdash a$.*

4.2 Kanonski okvir za $\mathbf{GLP}_0$

U trećem poglavlju smo uveli pojam općeg okvira za proizvoljni modalni sistem. Ovdje će nas zanimati kanonski okvir za $\mathbf{GLP}_0$. Konkretno, htjeli bi uspostaviti vezu između kanonskog okvira $\mathbb{C}^0$ i Ignatievog okvira $\mathcal{U}$. Je li svaki maksimalno $\mathbf{GLP}_0$-konzistentan skup formula istinit u nekoj točki u $\mathcal{U}$, odnosno U? Kao što ćemo vidjeti to nije istina, tj. ta dva okvira nisu izomorfna. No, moguće je proširiti $\mathcal{U}$ do okvira koji je "dovoljno dobar", tj. ne narušava rezultate koje smo dokazali za $\mathcal{U}$, a ujedno je izomorfan kanonskom okviru.

Opći okvir na Ignatievom okviru označavat ćemo sa $(\mathcal{U}, \mathfrak{D})$. U trećem poglavlju smo pričali o kanonskim modelima za osnovni modalni jezik. Ista definicija se lako proširuje na polimodalni jezik te vrijede analogni rezultati. Sada posebno definiramo kanonski okvir za fragment $\mathbf{GLP}_0$.

Definicija 4.2.1. Kanonski okvir $\mathbb{C}^0$ *za* $\mathbf{GLP}_0$ *definiramo kao:*

$$\mathbb{C}^0 := (W^0, \{R_n^0 : n < \omega\})$$

- W^0 *je skup maksimalno* $\mathbf{GLP}_0$ *konzistentnih skupova*
- xR_n^0y *ako i samo ako za sve zatvorene formule* A*, iz* $A \in y$ *slijedi* $\langle n \rangle A \in x$.

Propozicija 3.3.2 nam daje opis okvira na kojima su ispunjivi maksimalno konzistentni skupovi. Dakle, trebamo provjeriti je li $(\mathcal{U}, \mathfrak{D})$ deskriptivan.

Korolar 4.1.1.1 govori da se svake dvije točke iz U razlikuju za riječ, što nam trivijalno daje idući rezultat.

Propozicija 4.2.1. *Okvir* $(\mathcal{U}, \mathfrak{D})$ *je diferencirajući okvir.*

Problem je što okvir $(\mathcal{U}, \mathfrak{D})$ nije niti uzak niti kompaktan. Kako bi vidjeli da nije uzak, iskoristimo iduću tvrdnju. Ako je A formula, tada ako vrijedi $\mathcal{U}, (\omega) \Vdash A$ onda vrijedi i $\mathcal{U}, (\omega, 1) \Vdash \langle 0 \rangle A$. No iz definicije $\mathcal{U}$, odnosno relacije R_0, nemamo $(\omega, 1) R_0 (\omega)$.

Za kompaktnost promotrimo idući skup formula:

$$\{\langle n \rangle : n < \omega\}.$$

Svaki konačan podskup je ispunjiv u nekoj točki iz U, no cijeli skup nije ispunjiv u niti jednoj točki.

Dakle, $(\mathcal{U}, \mathfrak{D})$ nije deskriptivan pa tako $\mathcal{U}$ ne može biti izomorfan općem okviru sistema **GLP**, $\mathbb{C}^0$. Sada nam je cilj proširiti $\mathcal{U}$ do puno većeg okvira koji će biti deskriptivan. Za to ćemo iskoristiti topološki karakter općih okvira. Promotrimo intervalnu topologiju na nekom ordinalnom broju λ. Iz 3.1.1 imamo topološku kompaktnost ako i samo ako je λ ordinalni broj prve vrste. Promotrimo sljedeći topološki prostor.

Definicija 4.2.2. *Neka je* $\varepsilon := \prod_{i<\omega}(\epsilon_0)$*. Sa* $(\varepsilon, \tau^{\varepsilon})$ *označavamo produktnu topologiju na* ε.

Teorem 4.2.1. $(U, \tau^{\mathfrak{D}})$ *je potprostor od* $(\varepsilon, \tau^{\varepsilon})$.

Dokaz: Definiramo dva skupa $P_\beta := \{\vec{\alpha} : \vec{\alpha} \geq \widehat{\beta}\}$ i $\overline{P_\beta} := \{\vec{\alpha} : \vec{\alpha} \not\geq \widehat{\beta}\}$ za svaki $\beta < \epsilon_0$. Primjenom leme 4.1.3 vidimo da se podbaza topologije $\tau^{\mathfrak{D}}$ sastoji od svih skupova P_β i $\overline{P_\beta}$, za sve $\beta < \epsilon_0$. Stoga, dovoljno je pokazati da je svaki skup, P_β ili $\overline{P_\beta}$, otvoren u τ^ε te obrnuto, da za svaki bazni polupravac u τ^ε, $\rho_{\beta,i,<} = \{\vec{\alpha} : \beta < \alpha_i\}$ ili $\rho_{\beta,i,>} = \{\vec{\alpha} : \beta < \alpha_i\}$ vrijedi da je $\rho_{\beta,i,<} \cap U$, odnosno $\rho_{\beta,i,>} \cap U$, otvoren u $\tau^{\mathfrak{D}}$.

Promotrimo prvo slučaj za skupove tipa $P_\beta := \{\vec{\alpha} : \vec{\alpha} \geq \widehat{\beta}\}$ za neki $\beta < \epsilon_0$. S ozbirom kako smo definirali funkciju e, uočimo da zadnja koordinata točke $\widehat{\beta}$, β_i za neki $i < \omega$, ne može biti granični ordinalni broj. Ako β_i nije granični, onda je ordinalni broj prvog reda. Stoga postoji $\gamma < \epsilon_0$ takav da vrijedi $\beta_i = \gamma + 1$. Onda postoje ordinalni brojevi κ_i, κ_1 takvi da Cantorova normalna formula od β izgleda ovako:

$$\kappa_i + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa_1 + \omega^{\gamma+1}}}}}.$$

Neka je λ ordinalan broj sa Cantorovom normalnom formom kako slijedi,

$$\lambda := \kappa_i + \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\kappa_1 + \omega^{\gamma}}}}},$$

i neka je $\widehat{\lambda}$ pripadajući korijen. Tada postoji $i < \omega$ takav da vrijedi $\lambda_i = \gamma$. Definiramjmo skup I_λ kako slijedi:

$$I_\lambda := \{\vec{\alpha} : \alpha_0 > \lambda\} \cup \{\vec{\alpha} : \alpha_1 > \lambda_1\} \cup \ldots \cup \{\vec{\alpha} : \alpha_i > \lambda_i\}.$$

Tvrdnja: $P_\beta = I_\beta \cap U$. Očito, ako vrijedi $\vec{\alpha} \geq \widehat{\beta}$ onda vrijedi $\vec{\alpha} \in I_\beta$. Pretpostavimo sada $\vec{\alpha} \not\geq \widehat{\beta}$. Tada postoji neki $j \leq i$ takav da $\alpha_j < \beta_j$. Pokazat ćemo da u tom slučaju postoji $k \leq i$ takav da vrijedi $\alpha_k \leq \lambda_k$. Kada je $j = i$ imamo α_i takav da vrijedi $\alpha_i < \beta_i = \lambda_i + 1$, pa vrijedi $\alpha_i \leq \lambda_i$. Za bilo koji k takav da vrijedi $j \leq k < i$, ako $\lambda_k < \eta < \beta_k$, za neki ordinalni broj η, vrijedi $e(\eta) < \beta_{k+1}$. Da pokažemo da je to točno, pretpostavimo $\lambda_k = \kappa + \omega^{\lambda_{k+1}}$ i $\beta_k = \kappa + \omega^{\beta_k+1}$, za neki κ ordinalni broj. Tada vrijedi $\eta = \kappa + \delta + \omega^\xi$, za neki δ. Primjetimo da vrijedi $\xi < \beta_{k+1}$, jer inače bi vrijedilo $\beta_k \leq \eta$ pa bi vrijedilo $e(\eta) = \xi < \beta_{k+1}$ što bi nas dovelo u kontradikciju. Dakle, za sve takve brojeve k, ako imamo $\lambda_k < \alpha_k$, tada imamo $\alpha_i < \beta_i$, stoga vrijedi i $\alpha_i \leq \lambda_i$. Inače, $\alpha_k \leq \lambda_k$ za neki $j \leq k < i$.

Za drugi slučaj, uzmimo proizvoljan $\beta < \epsilon_0$ i odgovarajući skup $\overline{P_\beta} := \{\vec{\alpha} : \vec{\alpha} \not\geq \widehat{\beta}\}$. Označimo s β_i za $i < \omega$ zadnju koordinatu različitu od nule korijena $\widehat{\beta}$. Tada, ekvivalentno prvom slučaju kao skup I_β definiramo skup J_β:

$$J_\beta := \{\vec{\alpha} : \alpha_0 < \beta\} \cup \{\vec{\alpha} : \alpha_1 < \beta_1\} \cup \ldots \cup \{\vec{\alpha} : \alpha_i < \beta_i\}.$$

Ako vrijedi $\vec{\alpha} \in \overline{P_\beta}$, tada je očito $\vec{\alpha} \in J_\beta$. U suprotnom slučaju, tj. kada $\vec{\alpha} \notin \overline{P_\beta}$, imamo $\alpha_j \geq \beta_j$ za sve $j < \omega$, stoga $\vec{\alpha} \notin J_\beta$. Za drugi smjer, prvo uzmimo proizvoljni $\beta < \epsilon_0$ i skup $\{\vec{\alpha} : \alpha_i > \beta\}$. Promotrimo idući korijen:

$$\widehat{\gamma} := (\omega_i^{\beta+1}, \ldots, \omega^{\beta+1,\beta+1,0,\ldots}).$$

Ekvivalentni skup ćemo označiti s P_γ.

Promotrimo sada slučaj za proizvoljni $\beta < \epsilon_0$ ordinalni broj prve vrste i skup $\{\vec{\alpha} : \alpha_i < \beta\}$. Definiramo nadalje:

$$\widehat{\delta} := (\omega_i^{\beta}, \ldots, \omega^{\beta}, \beta, 0, \ldots).$$

Tada, ako vrijedi $\alpha_i < \beta$ vrijedi $\vec{\alpha} \notin P_\delta$. Ako je slučaj $\alpha_i \geq \beta$ tada imamo da za sve $j \leq i$ vrijedi $\alpha_j \geq \delta_j$. Stoga, $\vec{\alpha} \in P_\delta$ i $\vec{\alpha} \notin \overline{P_\delta}$.

Ako bi pak β bio granični ordinalni broj, to znači da je limes ordinalnih brojeva prve vrste $\beta_1, \beta_2, \ldots$ tako da vrijedi:

$$\{\vec{\alpha} : \alpha_i < \beta\} = \cup_{j<\omega}\{\vec{\alpha} : \alpha_i < \beta_j\}.$$

Kako smo vidjeli u slučaju za ordinalne brojeve prve vrste, svaki od tih skupova odgovara nekom P_{δ_j}, stoga vrijedi

$$\{\vec{\alpha} : \alpha_i < \beta\} = \cup_{j<\omega} P_{\delta_j}.$$

Dakle imamo uniju otvorenih skupova, što je opet ovoreni skup. Ovime smo dokazali da je $(U, \tau^{\mathfrak{D}})$ topološki potprostor od $(\varepsilon, \tau^{\varepsilon})$.

■

Upravo dokazani teorem i propozicija 3.1.1 nam daju vjerojatni uzrok nekompaktnosti Ignatievog okvira, no ujedno daju i prirodno rješenje. Kako ϵ_0 nije prvog reda možemo jednostavno proširiti okvir na $\epsilon_0 + 1$, a odgovarajući produktni prostor ćemo označiti sa $(\varepsilon', \tau^{\varepsilon}{}')$ koji je po teoremu 3.1.1 kompaktan.

Definicija 4.2.3. *Neka je* $\varepsilon' := \prod_{i<\omega}(\epsilon_0 + 1)$. *Sa* $(\varepsilon', \tau^{\varepsilon'})$ *označavamo produktnu topologiju na* ε'.

Definiramo okvir $\mathcal{V} = (V, \{R_n : n < \omega\})$ *slično kao i* $\mathcal{U}$, *osim što dopuštamo da vrijednosti* α_i *mogu biti i* ϵ_0. *Odnosno:*

- $V := \{\vec{\alpha} \in \Omega : \forall n \leq \omega, \alpha_{n+1} \leq e(\alpha_n)\}$
- $\vec{\alpha} R_n \vec{\beta}$ *ako i samo ako vrijedi* $\alpha_n > \beta_m$ *i za svaki* $m < n, \alpha_m = \beta_m$

Topološki prostor $(V, \tau^{\mathfrak{D}})$ je kompaktan budući da je potprostor kompaktnog prostora. Bitno je napomenuti da rezultati koje imamo za Ignatiev okvir $\mathcal{U}$ nisu narušeni time što dopuštamo da vrijednosti koordinata uključuju i ϵ_0. To je zato što je svaka formula koja nije dokaziva u sistemu $\mathbf{GLP}_0$ oboriva na $M \subset U \subset V$. Tako da topologija $\tau^{\mathfrak{D}}$ može biti opisana slično kao u dokazu teorema 4.2.1.

Korolar 4.2.1.1. *Okvir $(\mathcal{V}, \mathfrak{D})$ je kompaktan i diferencirajući opći okvir.*

Naravno, $\mathcal{V}$ nije uzak iz istog razloga zašto $\mathcal{U}$ nije uzak. Na primjer, ne vrijedi $(\omega, 1)R_0(\omega, 0)$ što bi htjeli. Uz propoziciju 3.3.1 sljedeći okvir će biti izomorfan kanonskom okviru.

Definicija 4.2.4. *Definiramo okvir $\mathcal{V}^c = (V, \{R_n^c : n < \omega\})$ tako da za $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ takve da $\vec{\alpha}R_n^c\vec{\beta}$, vrijedi jedno od sljedećeg:*

- $\vec{\alpha}R_n\vec{\beta}$
- $\exists k \geq n$ *takav da* $\forall m \leq k, \alpha_m = \beta_m$ *i* $e(\alpha_k) > \beta_{k+1}$
- $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \widehat{\epsilon_0}$

Okvir $\mathcal{V}^c$ je isti kao $\mathcal{V}$, uz dodatak novih parova svakoj relaciji R_n.

Lema 4.2.1. *Za svaki $n < \omega$ relacija R_n^c je zatvorena u $\tau^{\mathfrak{D}}$.*

Dokaz je dostupan u [6].

Korolar 4.2.1.2. *$(\mathcal{V}^c, \mathfrak{D})$ je deskriptivan opći okvir.*

Lema 4.2.2. *Za sve riječi a i točke $\vec{\alpha} \in V$ vrijedi sljedeće:*

$$\mathcal{V}, \vec{\alpha} \Vdash a \text{ ako i samo ako } \mathcal{V}^c, \vec{\alpha} \Vdash a.$$

Dokaz: Dokaz radimo indukcijom po duljini riječi a. Baza indukcije, odnosno slučaj kada je $a = \Lambda$ je jasan budući da za svaki $n < \omega$, relacija R_n^c proširuje relaciju R_n.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve riječi duljine l, za svaki $l < m$. Tada je slučaj s lijeva na desno trivijalan budući da je $R_n \subset R_n^c$. Promotrimo slučaj s desna na lijevo, tj. neka je $n < \omega$ proizvoljan takav da vrijedi $\mathcal{V}^c, \vec{\alpha} \Vdash na$. Pretpostavimo također da je razlog tome što postoji $\vec{\beta}$ takav da $\vec{\alpha}R_n^c\vec{\beta}$, gdje vrijedi $e^k(\beta_n) > \beta_{n+k}$, za neki $1 \leq k \leq \omega$, $\beta_m = \alpha_m$ za sve $m \leq n$ te vrijedi $\mathcal{V}^c, \vec{\beta} \Vdash a$. U suprotnom bi imali $\vec{\alpha}R_n\vec{\beta}$ iz čega bi po pretpostavci indukcije odmah slijedilo $\mathcal{V}, \vec{\alpha} \Vdash na$.

Promotrimo $\widehat{\gamma} = \iota(a)$. Vrijedi $\widehat{\gamma} = \iota(a) < \vec{\beta}$ pa stoga vrijedi i $\gamma_{k+1} \leq \beta_{k+1}$. Nadalje, uz činjenice da uvijek vrijedi $\beta_{k+1} < e(\beta_k)$ te je $\widehat{\gamma}$ korijen, imamo $\gamma_k < \beta_k$. Štoviše, vrijedi $\gamma_x < \beta_x = \alpha_x$ za sve $x \leq n$. Iz toga zaključujemo da vrijedi $\vec{\alpha}R_n\vec{\delta}$ gdje je

$$\vec{\delta} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots).$$

Kako iz pretpostavke imamo $\mathcal{V}, \vec{\delta} \Vdash a$, slijedi $\mathcal{V}, \vec{\alpha} \Vdash na$.

■

Sljedeći korolar sljedi iz teorema o normalnoj formi i leme 4.2.2.

Korolar 4.2.1.3. *Za sve zatvorene formule A ekvivalentno je sljedeće:*

- $\boldsymbol{GLP} \vdash A$
- $\mathcal{V} \models A$
- $\mathcal{V}^c \models A$

Teorem 4.2.2. *Opći okvir* $\mathcal{V}^c$ *je izomorfan s kanonskim okvirom* $\mathbb{C}^0$*, tj.* $\mathcal{V}^c \cong \mathbb{C}^0$.

4.3 Topološka semantika

Uobičajena interpretacija modalnog operatora $\Diamond$ u topologiji je topološko zatvorenje skupa. Nažalost, to vrijedi samo za modalne logike koje sadrže aksiom refleksije, tj. $\Box A \to A$, budući da je svaki skup podskup svog zatvorenja. Za logike koje ne sadrže aksiom refleksije, $\Diamond$ možemo interpretirati kao operator deriviranja na skupu. Kao što smo pokazali u prvom poglavlju, **GL**, **GLB** i **GLP** ne sadrže aksiom refleksije pa stoga treba prilagoditi topološku interpretaciju za isti.

Definicija 4.3.1. *Neka je* $\mathcal{X}$ *topološki prostor, a* f *funkcija sa skupa formula u* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. *Kažemo da je* $(\mathcal{X}, f)$ **topološki model** *ako za* A, B *formule funkcija* f *zadovoljava iduće uvjete:*

- $f(p) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{X})$
- $f(\top) = \mathcal{X}$
- $f(\neg A) = \mathcal{X} \backslash f(A)$
- $f(A \vee B) = f(A) \cup f(B)$
- $f(\Diamond A) = d(f(A))$

Definiramo **istinitost formule u točki** $x \in \mathcal{X}$*, u oznaci* $\mathcal{X}, x, f \Vdash A$ *ako vrijedi* $x \in f(A)$. *Kažemo da je A* **istinita na modelu** $(\mathcal{X}, f)$*, u oznaci* $\mathcal{X}, f \models A$*, ako za svaki* $x \in \mathcal{X}$ *vrijedi* $\mathcal{X}, x, f \Vdash A$. *Kažemo da je A* **valjana na topološkom prostoru** $\mathcal{X}$ *u oznaci* $\mathcal{X} \models A$*, ako za sve modele na* $\mathcal{X}$, $(\mathcal{X}, f)$ *vrijedi* $\mathcal{X}, x, f \Vdash A$.

Napomena: budući da nas zanima zatvoreni fragment sistema **GLP**, funkcija f neće ovisiti o propozicionalnim varijablama.

Leo Esakia je bio prvi koji je istražio topološku semantiku sistema **GL** u terminima operatora deriviranja i dokazao 1981. idući teorem.

Teorem 4.3.1. *Neka je A modalna formula u modalnom jeziku. Sljedeće tvrdnje su tada ekvivalentne:*

- $\mathbf{GL} \vdash A$
- *A je valjana na svim raspršenim prostorima.*

Dokaz: Dokazujemo potpunost, tj. ako je A valjana na svim raspršenim prostorima, tada vrijedi $\mathbf{GL} \vdash A$. Neka je A proizvoljna formula koja je valjana na svim raspršenim prostorima i neka vrijedi $\mathbf{GL} \nvdash A$. Tada postoji Kripekov model $\mathfrak{M}_R = (W, R, \Vdash_R)$ na tranzitivnom, inverzno dobro fundiranom okviru (W, R) i $w \in W$ tako da vrijedi $w \nVdash_R A$.

Neka je topologija τ generirana familijom B:

$$B := \{\{x\} \cup R[x] : x \in W\},$$

gdje je $R[x] = \{y \in W : xRy\}$. Tada je prostor (W, τ) raspršen, a familija B čini bazu za τ. Pokažimo da je (W, τ) raspršen. Neka je $S \subseteq W$ proizvoljan neprazan skup. Kako je relacija R inverzno dobro fundirana, unutar skupa S postoji barem jedna R-maksimalna točka t. Skup $R[t] \cup \{t\}$ je otvoren jer je dio baze. Iz toga imamo $S \cap (R[t] \cup \{t\}) = \{t\}$, dakle dobili smo izoliranu točku, pa je prostor (W, τ) raspršen.

Definiramo topološki model $\mathfrak{M}^T = (W, \tau, \Vdash_T)$ gdje relaciju forsiranja na prostoru (W, τ) definiramo na sljedeći način:

$$\mathfrak{M}^T, x \Vdash_T p \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^R, x \Vdash_R p,$$

za sve točke $x \in W$ i sve propozicijske varijable p. Dokažimo da za sve formule B i točke $x \in W$ vrijedi:

$$\mathfrak{M}^T, x \Vdash_T B \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}^R, x \Vdash_R B.$$

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule B. Baza indukcije, tj. kada je $B = q$, za neki q propozicionalnu varijablu, tvrdnja trivijalno vrijedi. Korak indukcije za slučaj logičkih veznika je jasan. Promotrimo korak indukcije za slučaj $B = \Box C$, te neka je $x \in W$ proizvoljna točka.

Neka vrijedi $\mathfrak{M}^R, x \Vdash_R B$. Za sve točke $y \in R[x]$ vrijedi $y \Vdash_R C$. Kako je C manje složenosti od B, po pretpostavci indukcije za sve točke $y \in R[x]$ vrijedi $y \Vdash_T C$, tj. vrijedi $R[x] \Vdash_T C$. No iz definicije baze B slijedi da je $R[x]$ probušena okolina točke x, pa po definiciji istonitosti u točki topološkog modela slijedi $x \Vdash_T B$.

Neka sada vrijedi $\mathfrak{M}^R, x \nVdash_R B$. Tada postoji točka $y \in R[x]$ za koju vrijedi $y \nVdash_R C$. Neka je O proizvoljna otvorena okolina točke x. Iz toga što je B baza topologije τ slijedi da postoji familija B_O skupova iz baze B takva da vrijedi $O = \cup B_O$. Iz $x \in O$ slijedi da postoji skup U iz familije B_O takav da vrijedi $x \in U$. Kako je skup U član baze, slijedi $U = \{u\} \cup R[u]$ za neku točku $u \in W$. Promotrimo dva slučaja, ovisno o tome vrijedi li

$u = x$. Ako vrijedi, točka y je sadržana u skupu $R[u] = R[x]$, je onda sadržana i u okolini U, odnosno okolini O. Ako vrijedi $u \neq x$, slijedi uRx. Kako je R tranzitivna relacija tada imamo $R[x] \subseteq R[u]$. Očito vrijedi $R[u] \subseteq U \subseteq O$. Tada zbog $y \in R[x]$ imamo $y \in O$.

Inverzno dobra fundiranost povlači irefleksivnost relacije R, pa vrijedi i $x \neq y$. Dakle, u svakoj okolini točke x postoji neka točka $y, y \neq x$, takva da vrijedi $y \nVdash C$. No tada vrijedi $x \nVdash_T B$, pa posebno vrijedi i $x \nVdash_T A$.

■

Vidjeli smo da je svaka formula koja nije dokaziva u sistemu $\mathbf{GLP}_0$ oboriva u nekoj točki glavne osi M bilo okvira $\mathcal{V}^c$, bilo $\mathcal{U}$. Napominjemo da ćemo koristiti isti skup M od $\mathcal{U}$ za $\mathcal{V}^c$ iako bi glavna os okvira $\mathcal{V}^c$ po definiciji korijena trebala sadržavati $\widehat{\epsilon_0}$. No kako je svaka formula koja nije dokaziva u sistemu $\mathbf{GLP}_0$ oboriva na glavnoj osi od $\mathcal{U}$, točku $\widehat{\epsilon_0}$ možemo ispustiti iz glavne osi od $\mathcal{V}^c$. U neku ruku imamo previše točaka u okvirima, no te točke su potrebne u relacijskim modelima. Prelaskom na topološke modele, točke koje nisu na glavnoj osi možemo izbaciti te će nam bazni topološki prostor biti puno jednostavniji. Umjesto produktne topologije na $\epsilon_0 + 1$, možemo uzeti sam ordinalni broj ϵ_0 kao temeljni skup naše topologije.

Definicija 4.3.2. *Definiramo politopološki prostor $\Theta = (\epsilon_0, \{\theta_n : n < \omega\})$ tako da je svaka topologija θ_n definirana bazom polupravaca, za $m \leq n, k < n$ i $\beta < \epsilon_0$:*

- $\{\alpha : e^m(\alpha) < \beta\}$
- $\{\alpha : e^k(\alpha) > \beta\}$

Primjetimo kako je svaka topologija θ_n u prošloj definiciji generalizacija intervalne topologije. Kako bi dokazali teorem 4.0.1, prisjetimo se topologije $\tau^{\mathfrak{D}}$ definirane na skupu V okvira $\mathcal{V}^c$. Topologija $\tau^{\mathfrak{D}}$ će nam biti prototip za izgradnju politopološkog prostora koji bi detaljnije razlikovao operatore deriviranja. Koristimo oznaku $[n]^+A := A \wedge [n]A$ te prisjetimo se oznake $D_A = \{x : \mathfrak{F}, x \Vdash A\}$.

Definicija 4.3.3. *Definiramo politopološki prostor $\mathcal{M} := (M', \{\nu_n : n < \omega\})$ tako da je svaka topologija ν_n generirana otvorenom bazom skupova $D_{[n]^+A} \cap M$ za svaki $n < \omega$ i svaku formulu A.*

Propozicija 4.3.1. *Za sve točke $\widehat{\alpha} \in M$ i sve formule A vrijedi sljedeće:*

$$\mathcal{M}, \widehat{\alpha} \Vdash A \text{ ako i samo ako } \mathcal{V}^c, \widehat{\alpha} \Vdash A.$$

Dokaz: Promotrit ćemo slučaj kada je formula oblika $\langle n\rangle A$. Neka vrijedi $\mathcal{V}^c, \widehat{\alpha} \nVdash \langle n\rangle A$. Tada za sve $\vec{\beta}$ takve da vrijedi $\widehat{\alpha} R_n^c \vec{\beta}$ vrijedi i $\mathcal{V}^c, \vec{\beta} \nVdash A$. Kako bi pokazali da vrijedi $\mathcal{M}, \widehat{\alpha} \nVdash A$ moramo prvo naći otvorenu okolinu od $\widehat{\alpha}$ u topologiji ν_n tako da svi ostali korijeni iz te okoline obaraju A. S obzirom kako je topologija ν_n definirana, dovoljno je pronaći odgovarajuću formulu. Kako je $\widehat{\alpha}$ korijen, postoji riječ a takva da vrijedi $\iota(a) = \widehat{\alpha}$. Definiramo nadalje formulu

$$B := (a \vee \neg A) \wedge [0]\neg a.$$

Vrijedi $\mathcal{V}^c, \widehat{\alpha} \Vdash [n]^+ B$ pa ova formula definira otvorenu okolinu od $\widehat{\alpha}$. Sada nam je cilj pokazati da ako vrijedi $\widehat{\beta} \Vdash [n]^+ B$ i $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$, onda vrijedi $\widehat{\beta} \nVdash A$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$ i $\widehat{\beta} \Vdash a \wedge [0]\neg a$ jer u slučaju da vrijedi $\widehat{\beta} \Vdash \neg A$ smo gotovi. To znači da je $\beta_0 = \alpha_0$ jer inače bi vrijedilo $\widehat{\beta} R_0^c \widehat{\alpha}$ što bi dalje povlačilo $\widehat{\beta} \Vdash \langle 0\rangle a$, a $\widehat{\alpha} R_0^c \widehat{\beta}$ bi povlačila $\widehat{\alpha} \Vdash \langle 0\rangle a$. Ali $\beta_0 = \alpha_0$ povlači $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$, što je kontradikcija s odabirom $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$. Zaključak je da ako vrijedi $\widehat{\beta} \Vdash [n]^+ B$ i $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$ slijedi $\widehat{\beta} \nVdash A$. Dakle, $\mathcal{M}, \widehat{\alpha} \nVdash \langle n\rangle A$.

Pokažimo sada drugi smjer. Ako vrijedi $\mathcal{M}, \widehat{\alpha} \nVdash \langle n\rangle A$, tada postoji formula $[n]^+ B$ takva da vrijedi $\mathcal{M}, \widehat{\alpha} \Vdash [n]^+ B$, te da $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$ i $\widehat{\beta} \Vdash [n]^+ B$ povlače $\widehat{\beta} \nVdash A$. Neka je a riječ takva da $\iota(a) = \widehat{\alpha}$. Neka je γ takav ordinalni broj da vrijedi $\widehat{\alpha} R_n^c \gamma$ i $\gamma \Vdash A$. Ako definiramo formulu $C := \neg([n]^+ B \wedge A \wedge \not{a})$, tada vrijedi $\gamma \nVdash C$. Kako C nije dokaziva formula u $\mathbf{GLP}_0$, to znači da je oboriva u nekom korijenu $\widehat{\beta}$ glavne osi. No to je u kontradikciji s pretpostavkom da iz $\widehat{\beta} \neq \widehat{\alpha}$ i $\widehat{\beta} \Vdash [n]^+ B$ slijedi $\widehat{\beta} \nVdash A$. Stoga, $\widehat{\alpha} R_n^c \vec{\gamma}$ povlači $\vec{\gamma} \nVdash A$. Dakle, $\mathcal{V}^c, \widehat{\alpha} \nVdash \langle n\rangle A$.

■

Korolar 4.3.1.1. *Neka je A formula u polimodalnom jeziku. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

- $\boldsymbol{GLP}_0 \vdash A$
- $\mathcal{M} \vDash A$

Kako smo vidjeli, glavna os M ima svojstvo da su svi elementi iz M određeni prvom koordinatom jer sve koordinate nakon su definirane u terminima funkcije e i vrijednosti prvog člana. Tako da M jednostavno možemo mapirati u ordinalni broj ϵ_0. Definicija politopološkog prostora Θ je takva da definicija pojedinih topologija ne ovise o okviru $\mathcal{V}^c$ nego samo o ϵ_0. Uzimajući to u obzir, definicija ima ekvivalentnu formulaciju u terminima korijena $\widehat{\alpha}$, za $\alpha < \epsilon_0$. Tako bi prostor Θ definirali ovako: $\Theta := (M, \{\theta_n : n < \omega\})$ gdje se podbaza za svaki θ_n sastoji od konačnih presjeka k podskupova $(M, \tau^{\mathfrak{D}})$, za sve $k < n$ te svih polupravaca

$$\{\widehat{\alpha} : \alpha_n < \beta\}$$

gdje je $\beta < \epsilon_0$. Uz takvu definiciju topologija $\theta_n, n < \omega$, imamo sljedeću jednakost

$$\tau^{\mathfrak{D}} = \cup_{n<\omega}\theta_n,$$

gdje je $\tau^{\mathfrak{D}}$ topologija kanonskog okvira ograničena na glavnu os M. Koristimo ovu formulaciju za dokaz sljedeće leme.

Lema 4.3.1. *$\mathcal{M}$ i Θ su homeomorfni politopološki prostori.*

Dokaz: Dovoljno je pokazati da je svaki skup iz podbaze topologije ν_n otvoren u θ_n, i obrnuto, da je svaki skup iz podbaze topologije θ_n otvoren u ν_n.

Neka je $D_{[n]^+A} \cap M$ element podbaze za ν_n. Iz teorema 4.2.1 slijedi da je skup $D_{[n]^+A}$ neka kombinacija unija i presjeka polupravaca oblika $\{\widehat{\alpha} : \beta < \alpha_m\}$ ili $\{\widehat{\alpha} : \beta > \alpha_m\}$, gdje je $\beta < \epsilon_0$.

Koristimo oznaku $\omega_k^\beta = \omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^\alpha}}}$ gdje se ω ponavlja k puta. Neka je sad $n < m$. Tada:

(i) $\{\widehat{\alpha} : \beta < \alpha_m\} = \{\widehat{\alpha} : \omega_m^\beta < \alpha\}$;

(ii) Ako vrijedi $\{\widehat{\alpha} : \alpha_m < \beta\} \subseteq D_{[n]^+A}$, tada vrijedi i $\{\widehat{\alpha} : \alpha_n < \omega_{m-n}^\beta\} \subseteq D_{[n]^+A}$;

(iii) Ako vrijedi $D_{[n]^+A} \subseteq \{\widehat{\alpha} : \alpha_n < \omega_{m-n}^\beta\}$, tada vrijedi $D_{[n]^+A} \cap M \subseteq \{\widehat{\alpha} : \alpha_n < \omega_{m-n}^\beta\}$.

Tvrdnja (i) je jednostavna posljedica definicije korijena i činjenice da vrijedi $e(\omega_m^\beta) = \omega_{m-1}^\beta$ za $m > 1$. Ako vrijedi $\alpha_n < \omega_{m-n}^\beta$ tada vrijedi $\alpha_m < \beta$ je također jasno kada je malo raspišemo: $e^n(\omega_m^\beta) = e(\omega_{m-n}^\beta)$, za $n < m$. To povlači tvrdnju (ii).

Promotrimo tvrdnju (iii) te pretpostavimo da vrijedi suprotno, tj. neka vrijedi $\widehat{\alpha} \Vdash [n]^+A$ i $\alpha_n \geq \omega_{m-n}^\beta$. Iz pretpostavke slijedi $\alpha_m < \beta$, te kako je $\widehat{\alpha}$ korijen vrijedi $\alpha_n > \omega_{m-n}^\beta$. No to povlači $\widehat{\alpha}R_n^c\vec{\gamma}$, gdje je

$$\vec{\gamma} := (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \omega_{m-n}^\beta, \ldots, \beta).$$

Iz toga imamo $\vec{\gamma} \Vdash [n]^+A$ i $\gamma_m = \beta$ što je u kontradikciji s pretpostavkom $\alpha_m < \beta$. Iz tvrdnji (i), (ii) i (iii) slijedi da restrikcija polupravaca iz baze od na ν_n M dopušta da u polupravcima $\{\widehat{\alpha} : \beta < \alpha_m\}$ i $\{\widehat{\alpha} : \beta > \alpha_m\}$ umjesto $m > n$ stavimo $m < n$, odnosno $m \leq n$, respektivno. Time smo dokazali jedan smjer.

Neka je $I = \{\widehat{\alpha} : \beta < \alpha\}$ proizvoljan θ_n-otvoren polupravac tako da vrijedi $m < n$ i $\beta < \epsilon_0$. Definiramo

$$\widehat{\delta} := (\omega_m^\beta, \ldots, \omega^\beta, \beta, e(\beta), \ldots).$$

Promotrimo $A := ma$, gdje je a riječ takva da vrijedi $\iota(a) = \widehat{\delta}$. Pokazat ćemo da vrijedi $\widehat{\alpha} \Vdash [n]^+A$ ako i samo vrijedi $\widehat{\alpha} \in I$. Tvrdnja: $\alpha_m > \beta$ ako i samo ako vrijedi $\widehat{\alpha} \Vdash ma$. Ako je $\alpha_M > \beta$, tada $\widehat{\alpha}R_m^c\vec{\kappa}$, gdje je $\vec{\kappa} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}, \beta, e(\beta), \ldots)$, tako da vrijedi $\vec{\kappa} \Vdash a$ pa stoga $\vec{\alpha} \Vdash ma$. S druge strane, ako vrijedi $\vec{\alpha} \Vdash ma$, tada $\widehat{\alpha}R_m^c\vec{\gamma}$ za $\vec{\gamma}$ takav da je prvih m koordinata identično kao i $\vec{\alpha}$, te vrijedi $\alpha_m > \gamma_m \geq \beta$, ili vrijedi da postoji $k \geq m$ takav da $\gamma_{k+1} < e(\gamma_k)$.

U potonjem slučaju slijedi $\alpha_m \geq \gamma_m > \beta$. Dakle, $\widehat{\alpha} \in I$ ako i samo ako $\widehat{\alpha} \Vdash A$. Tada mora biti istinita i tvrdnja $\widehat{\alpha} \Vdash [n]^+A$, jer ako imamo $\widehat{\alpha} \Vdash ma$, tada vrijedi $\widehat{\alpha} R_n^c \vec{\gamma}$, te nadalje $\alpha_k = \gamma_k$, za sve $k < n$; dakle $\vec{\gamma} \Vdash ma$. Već smo pokazali da $D_{[n]^+A} \cap M$ definira ν_n-otvoren skup, te da je $I = D_{[n]^+A} \cap M$, dakle I je ν_n-otvoren. Slučaj kada je $I = \{\vec{\alpha} : \alpha_m < \beta\}$ dokazuje se analogno.

■

Dokazom leme 4.3.1 imamo dakle dokaz glavnog teorema 4.0.1.

Važno je napomenuti da Θ nije model za **GLP**. Konkretno, ako dopustimo varijable, Θ ne zadovoljava aksiom ($A5$). Kako bi to provjerili, uzmimo da vrijedi $V(p) = \{\omega^n : n < \omega\}$. Tada se može pokazati da vrijedi

$$\Theta, \omega^\omega \Vdash \langle 1 \rangle p \wedge \langle 2 \rangle [1] p.$$

Više o topološkoj potpunosti cijelog sistema **GLP** dostupno je u [8].

Bibliografija

[1] L. D. Beklemishev, *Provability algebras and proof-theoretic ordinals*, Annals of Pure and Applied Logic **128** (2004), 103–123.

[2] L. Beklemishev, G. Bezhanishvili i T. Icard, *On topological models of GLP*, preprint no. 278, Utrecht, 2009, `http://www.phil.uu.nl/preprints/preprints/PREPRINTS/preprint278.pdf`.

[3] P. Blackburn, M. de Rijke i Y. Venema, *Modal logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] G. S. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[5] T. Icard, *Models of the Polymodal Provability Logic - MSc Thesis*, ILLC Amsterdam, Amsterdam, 2008, `https://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Reports/MoL-2008-06.text.pdf`.

[6] ______, *A Topological Study of the Closed Fragment of GLP*, Journal of Logic and Computation **21** (2011), 683–686.

[7] K. Ignatiev, *On Strong Provability Predicates and the Associated Modal Logics*, The Journal of Symbolic Logic, 58 (1993), 249-290.

[8] L. Mikec, *Topološka potpunost logika dokazivosti - Diplomski rad*, PMF-MO, Zagreb, 2016, `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/mikec-toploska-potpunost-2016.pdf`.

[9] Z. Obajdin, *Prvi Solovayev teorem potpunosti - Diplomski rad*, PMF-MO, Zagreb, 1996.

[10] C. Smoryński, *Self-Reference and Modal Logic*, Springer, New York, 1985.

[11] M. Vuković, *Izračunljivost*, PMF-MO, Zagreb, 2009, `https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/izn-skripta-2009.pdf`.

[12] ______, *Matematička logika*, Element, Zagreb, 2009.

[13] ______, *Teorija skupova - predavanja*, PMF-MO, Zagreb, 2015, https://www.math.pmf.unizg.hr/sites/default/files/pictures/ts-skripta-2015.pdf.

Sažetak

U ovom diplomskom radu glavni cilj je dokazati topološku potpunost zatvorenog fragmenta polimodalne logike **GLP**.

Definiramo logiku dokazivosti **GL** i takozvanu Kripkeovu semantiku za modalne logike koja uspostavlja vezu između relacijskih struktura i modalnog jezika. Ujedno definiramo aritmetičku interpretaciji logike dokazivosti te izričemo Solovayev prvi teorem aritmetičke potpunosti čiji se dokaz temelji na Kripkeovoj semantici za **GL**.

Definiramo modalni sistem s beskonačno mnogo modalnih operatora, **GLP**, te dokazujemo nepotpunosti sistema **GLP** u odnosu na vlastitu Kripkeovu semantiku.

Zatvoreni fragment sistema **GLP**, koji označavamo sa $\mathbf{GLP}_0$, ima odgovarajuću Kripkeovu semantiku u obliku takozvanog Ignatievog univerzalnog okvira. Taj okvir onda proširujemo tako da bude izomorfan kanonskom okviru i taj rezultat iskorištavamo kako bi definirali jednostavan topološki model nad ordinalnim brojem ϵ_0, na kojem je promatrana logika potpuna.

Summary

The main goal of this thesis is to show the closed fragment of polymodal logic **GLP** is complete with respect to a certain topological model.

We define provability logic **GL** and so-called Kripke semantics for modal logics, which establishes a connection between relational structures and modal language. Also, we define the arithmetical interpretation of logic of provability and state Solovay's first arithmetical completeness theorem, whose proof relies on Kripke semantics for **GL**.

We define a model system with infinitely many modalities, **GLP**, and show that it is incomplete with respect to its class of Kripke frames.

Closed fragment of system **GLP**, which we denote by $\mathbf{GLP}_0$, has appropriate semantics in the form of Ignatiev's universal frame. That frame is then expanded to one that is isomorphic to the canonical frame and we use that result to define a simple topological model on the ordinal ϵ_0 for which we have completeness result.

Životopis

Ivo Matijašević rođen je 11.12.1989. u Novoj Gradiški, gdje ujedno završava osnovnu školu te nakon toga Gimnaziju Nova Gradiška. Prediplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu upisuje 2008. godine te ga završava 2012. godine, nakon čega upisuje diplomski studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu.