Konačnost i aksiomi prirodnih brojeva

Milković, Kristina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Milković

KONAČNOST I AKSIOMI PRIRODNIH BROJEVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Zahvaljujem mentoru prof.dr.sc. Zvonku Iljazoviću na iskazanoj pomoći i vodstvu u pisanju ovog diplomskog rada, kao i na posvećenom vremenu, korisnim savjetima i razumijevanju.
Također, zahvaljujem svojoj obitelji koja mi je omogućila pohađanje studija te me podržavala i hrabrila tijekom svih godina studija.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Aksiomi skupa prirodnih brojeva **2**
1.1 Princip definicije indukcijom 2
1.2 Zbrajanje u skupu prirodnih brojeva 6
1.3 Uređaj na skupu prirodnih brojeva 8

2 Konačnost **11**
2.1 Konačni skupovi 11
2.2 Beskonačni skupovi 13
2.3 Karakterizacija beskonačnosti 15

3 Prebrojivost **20**
3.1 Prebrojivi skupovi 20
3.2 Prebrojivost skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 24
3.3 Prebrojive familije prebrojivih skupova 32

Bibliografija **37**

Uvod

U ovom diplomskom radu važnu ulogu ima skup prirodnih brojeva te pojmovi konačnog i prebrojivog skupa.

U prvom ćemo poglavlju, krenuvši od aksioma, uvesti osnovne pojmove vezane uz skup prirodnih brojeva kao što su zbrajanje prirodnih brojeva i uređaj na skupu prirodnih brojeva, a također dokazat ćemo neke činjenice s tim u vezi. Pri tome ćemo iskazati i dokazati princip definicije indukcijom.

U drugom poglavlju uvodimo pojam konačnog skupa. Dokazat ćemo osnovne činjenice vezane uz konačne skupove. Nadalje, proučavat ćemo beskonačne skupove te ćemo dokazati da je skup beskonačan ako i samo ako je ekvipotentan svom pravom podskupu.

Pojam prebrojivog skupa je središnji pojam kojega obrađujemo u trećem poglavlju. Ispitujemo razna svojstva ovoga pojma koji je svojevrsno poopćenje pojma konačnog skupa. Između ostalog dokazujemo da je unija prebrojive familije prebrojivih skupova i sama prebrojiva.

Poglavlje 1

Aksiomi skupa prirodnih brojeva

1.1 Princip definicije indukcijom

Neka su S i T skupovi te neka je $\varphi \subseteq S \times T$. Pretpostavimo da vrijedi sljedeće:

$$(\forall x \in S)(\exists! y \in T)\text{takav da je}(x, y) \in \varphi.$$

Tada za φ kažemo da je funkcijska relacija između skupova S i T, a za uređenu trojku (S, T, φ) kažemo da je funkcija sa S u T. Ako je f funkcija sa S u T, onda pišemo $f : S \to T$. Za S kažemo da je domena, a za T da je kodomena funkcije f. Ako je $f : S \to T$, pri čemu je $f = (S, T, \varphi)$, onda za svaki $x \in S$ sa $f(x)$ označavamo (jedinstven) $y \in T$ takav da je $(x, y) \in \varphi$.

Primjer 1.1.1. *Neka je $S = \{a, b, c\}$, $T = \{d, e\}$, $a \neq b, a \neq c, b \neq c, d \neq e$. Neka je*

$$\varphi_1 = \{(a, e), (b, e)\}$$

$$\varphi_2 = \{(a, e), (b, e), (c, d)\}$$

$$\varphi_3 = \{(a, e), (a, d), (b, e), (c, e)\}$$

$$\varphi_4 = \{(a, d), (b, d), (c, d)\}.$$

Tada su φ_2 i φ_4 funkcijske relacije između skupova S i T, a φ_1 i φ_3 nisu funkcijske relacije između skupova S i T. Neka je $f_2 = (S, T, \varphi_2)$ te $f_4 = (S, T, \varphi_4)$. Tada su f_2 i f_4 funkcije sa S u T. Vrijedi $f_2(a) = e, f_2(b) = e, f_2(c) = d, f_4(a) = d, f_4(b) = d, f_4(c) = d$.

Pretpostavimo da su zadani skup $\mathbb{N}$ i funkcija $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijede sljedeća svojstva:

(P1) s je injekcija i postoji $1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

(P2) (PRINCIP INDUKCIJE) Ako je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $1 \in S$ i $s(x) \in S$, za svaki $x \in S$, onda je $S = \mathbb{N}$.

Teorem 1.1.2. *Neka je S skup, neka je $a \in S$ te neka je $g : S \to S$. Tada postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{N} \to S$ takva da je $f(1) = a$ i $f(s(y)) = g(f(y))$, za svaki $y \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Dokažimo prvo jedinstvenost. Pretpostavimo da su $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to S$ funkcije takve da je

$$f_1(1) = a, f_1(s(y)) = g(f_1(y)),$$
$$f_2(1) = a, f_2(s(y)) = g(f_2(y)),$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$. Neka je $T = \{y \in \mathbb{N} \mid f_1(y) = f_2(y)\}$. Očito je $1 \in T$. Pretpostavimo da je $y \in T$. Tada je $f_1(y) = f_2(y)$ pa je

$$g(f_1(y)) = g(f_2(y)),$$

tj.

$$f_1(s(y)) = f_2(s(y)).$$

Stoga je $s(y) \in T$. Dakle, $1 \in T$ i $s(y) \in T$, za svaki $y \in T$. Prema (P2) vrijedi $T = \mathbb{N}$. Dakle,

$$f_1(y) = f_2(y),$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$f_1 = f_2.$$

Dokažimo sada da postoji funkcija f sa svojstvima $f(1) = a$ i $f(s(y)) = g(f(y))$, za svaki $y \in \mathbb{N}$. U tu svrhu dovoljno je dokazati da postoji funkcijska relacija φ između $\mathbb{N}$ i S takva da je $(1, a) \in \varphi$ te da za sve $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ vrijedi

$$(y, z) \in \varphi \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \varphi.$$

Naime, pretpostavimo da postoji takva funkcijska relacija φ. Definiramo $f = (\mathbb{N}, S, \varphi)$. Očito je f funkcija sa $\mathbb{N}$ u S te da vrijedi $f(1) = a$. Neka je $y \in \mathbb{N}$. Označimo $z = f(y)$. Tada je $(y, z) \in \varphi$ pa je $(s(y), g(z)) \in \varphi$, tj. $f(s(y)) = g(z)$. Dakle,

$$f(s(y)) = g(f(y)).$$

Prema tome, funkcija f zadovoljava $f(1) = a$ i $f(s(y)) = g(f(y))$, za svaki $y \in \mathbb{N}$.

Neka je R skup svih $\rho \subseteq \mathbb{N} \times S$ takvih da je $(1, a) \in \rho$ te da za sve $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ vrijedi
$$(y, z) \in \rho \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \rho.$$
Uočimo da je $R \neq \emptyset$, naime vrijedi $\mathbb{N} \times S \in R$. Neka je $\varphi = \bigcap_{\rho \in R} \rho$. Očito je $\varphi \subseteq \mathbb{N} \times S$. Budući da je $(1, a) \in \rho$, za svaki $\rho \in R$, vrijedi da je $(1, a) \in \varphi$. Pretpostavimo da su $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ takvi da je $(y, z) \in \varphi$. Tada je $(y, z) \in \rho$, za svaki $\rho \in R$, pa iz
$$(y, z) \in \rho \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \rho$$
slijedi da je
$$(s(y), g(z)) \in \rho,$$
za svaki $\rho \in R$. Stoga, $(s(y), g(z)) \in \varphi$. Time smo dokazali da za sve $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ vrijedi
$$(y, z) \in \varphi \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \varphi.$$

Dokažimo sada da je φ funkcijska relacija između $\mathbb{N}$ i S. U tu svrhu potrebno je pokazati da
$$(\forall y \in \mathbb{N})(\exists! z \in S) \text{takav da je} (y, z) \in \varphi.$$
Ovu tvrdnju ćemo dokazati indukcijom. Preciznije, neka je T skup svih $y \in \mathbb{N}$ za koje postoji jedinstveni $z \in S$ takav da je $(y, z) \in \varphi$. Dokažimo da je $T = \mathbb{N}$.

Neka je $\rho_0 = \{(1, a)\} \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times S)$. Očito vrijedi $\rho_0 \subseteq \mathbb{N} \times S$ te $(1, a) \in \rho_0$. Za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $s(y) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ pa za sve $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ vrijedi
$$(s(y), g(z)) \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times S,$$
tj. $(s(y), g(z)) \in \rho_0$. Prema tome, za sve $y \in \mathbb{N}$, $z \in S$ vrijedi
$$(y, z) \in \rho_0 \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \rho_0.$$
Zaključujemo da je $\rho_0 \in R$. Iz definicije skupa φ slijedi $\varphi \subseteq \rho_0$, tj.
$$\varphi \in \{(1, a)\} \cup ((\mathbb{N} \setminus \{1\}) \times S).$$
Znamo da je $(1, a) \in \varphi$, a iz prethodne inkluzije slijedi da ne postoji $b \in S$ takav da je $b \neq a$ i $(1, b) \in \varphi$. Prema tome, $1 \in T$.

Pretpostavimo sada da je $y \in T$. Želimo dokazati da je $s(y) \in T$. Postoji jedinstveni $z \in S$ takav da je $(y, z) \in \varphi$. Iz $(y, z) \in \varphi \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \varphi$ slijedi da je
$$(s(y), g(z)) \in \varphi.$$

Pretpostavimo da postoji $w \in S$ takav da je $w \neq g(z)$ i $(s(y), w) \in \varphi$. Iz $1 \neq s(y)$ slijedi da je $(1, a) \neq (s(y), w)$ pa je

$$(1, a) \in \varphi \setminus \{(s(y), w)\}.$$

Pretpostavimo da su $y' \in \mathbb{N}$, $z' \in S$ takvi da $(y', z') \in \varphi \setminus \{(s(y), w)\}$. Dokažimo da je

$$(s(y'), g(z')) \in \varphi \setminus \{s(y), w\}.$$

Iz $(y', z') \in \varphi \setminus \{s(y), w\}$ slijedi da je $(y', z') \in \varphi$ pa iz

$$(y, z) \in \varphi \Rightarrow (s(y), g(z)) \in \varphi$$

dobivamo da je

$$(s(y'), g(z')) \in \varphi.$$

Stoga, da bismo dokazali $(s(y'), g(z')) \in \varphi \setminus \{(s(y), w)\}$, preostaje dokazati da je

$$(s(y'), g(z')) \neq (s(y), w).$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$(s(y'), g(z')) = (s(y), w).$$

Tada je $s(y') = s(y)$ pa zbog injektivnosti funkcije s dobivamo da je $y' = y$. Iz $(y', z') \in \varphi$ sada slijedi da je $(y, z') \in \varphi$. No, znamo da je z jedinstveni element iz S takav da je $(y, z) \in \varphi$. Stoga je $z' = z$ pa je $g(z') = g(z)$ iz čega zaključujemo da je $g(z') \neq w$. To je u kontradikciji sa $(s(y'), g(z')) = (s(y), w)$. Time smo dokazali da je

$$(s(y'), g(z')) \neq (s(y), w).$$

Zaključujemo da vrijedi

$$(s(y'), g(z')) \in \varphi \setminus \{(s(y), w)\}.$$

Dokazali smo dakle da $(y', z') \in \varphi \setminus \{s(y), w\}$ povlači $(s(y'), g(z')) \in \varphi \setminus \{s(y), w\}$ pa prema je prema tome

$$\varphi \setminus \{(s(y), w)\} \in R.$$

Iz definicije skupa φ sada slijedi da je

$$\varphi \subseteq \varphi \setminus \{(s(y), w)\}$$

što je očito nemoguće. Prema tome, ne postoji $w \in S$ takav da je $w \neq g(z)$ i $(s(y), w) \in \varphi$. Time smo dokazali da je $s(y) \in T$.

Dakle, vrijedi sljedeće:

- $1 \in T$
- Ako je $y \in T$, onda je $s(y) \in T$.

Prema principu matematičke indukcije vrijedi da je $T = \mathbb{N}$. Stoga za svaki $y \in \mathbb{N}$ postoji jedinstven $z \in S$ takav da je $(y, z) \in \varphi$, što znači da je φ funkcijska relacija između $\mathbb{N}$ i S. □

1.2 Zbrajanje u skupu prirodnih brojeva

Definicija 1.2.1. *Neka je $x \in \mathbb{N}$. Neka je $f_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f_x(1) = s(x)$ i $f_x(s(y)) = s(f_x(y))$, $y \in \mathbb{N}$.*

Uočimo da je prema teoremu ova definicija dobra, tj. postoji jedinstvena funkcija $f_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ s navedenim svojstvima.

Definicija 1.2.2. *Neka je $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $+(x, y) = f_x(y)$, $x, y \in \mathbb{N}$. Umjesto $+(x, y)$ obično pišemo $x + y$, $x, y \in \mathbb{N}$.*

Uočimo sljedeće: Ako je $x \in \mathbb{N}$, onda je $x + 1 = f_x(1) = s(x)$. Nadalje, ako su $x, y \in \mathbb{N}$, onda je $x + s(y) = f_x(s(y)) = s(f_x(y)) = s(x + y)$. Dakle, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$x + 1 = s(x)$$

$$x + s(y) = s(x + y).$$

Propozicija 1.2.3. *Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x + y) + z = x + (y + z)$.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{z \in \mathbb{N} \mid (x + y) + z = x + (y + z)\}$. Želimo dokazati da je $S = \mathbb{N}$. Imamo,

$$(x + y) + 1 = s(x + y) = x + s(y) = x + (y + 1).$$

Dakle, $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$. Tada je $(x + y) + z = x + (y + z)$. Imamo,

$$(x + y) + s(z) = s((x + y) + z) = s(x + (y + z)) = x + s(y + z) = x + (y + s(z)).$$

Dakle, $(x + y) + s(z) = x + (y + s(z))$. Prema tome, $s(z) \in S$. Dokazali smo sljedeće:

- $1 \in S$
- Ako je $z \in S$, onda je $s(z) \in S$.

Stoga je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Lema 1.2.4. *Za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x + 1 = 1 + x$.

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 1 = 1 + x\}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je $x + 1 = 1 + x$. Koristeći propoziciju 1.2.3 dobivamo:

$$s(x) + 1 = (x + 1) + 1 = (1 + x) + 1 = 1 + (x + 1) = 1 + s(x),$$

dakle,

$$s(x) + 1 = 1 + s(x).$$

Prema tome, $s(x) \in S$. Dokazali smo sljedeće:

- $1 \in S$
- Ako je $x \in S$, onda je $s(x) \in S$.

Stoga je $S = \mathbb{N}$. Time je lema dokazana. □

Propozicija 1.2.5. *Za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x + y = y + x$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{y \in \mathbb{N} \mid x+y = y+x\}$. Prema lemi 1.2.4 vrijedi da je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $y \in S$. Dakle, $x + y = y + x$. Koristeći propoziciju 1.2.3 i lemu 1.2.4 dobivamo:

$$x+s(y) = x+(y+1) = (x+y)+1 = (y+x)+1 = y+(x+1) = y+(1+x) = (y+1)+x = s(y)+x.$$

Dakle, $x + s(y) = s(y) + x$. Prema tome, $s(y) \in S$. Dokazali smo:

- $1 \in S$
- Ako je $y \in S$, onda je $s(y) \in S$.

Prema tome, $S = \mathbb{N}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.2.6. *Za sve* $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x + y \neq x$.

Dokaz. Neka je $y \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x + y \neq x\}$. Imamo, $1 + y = y + 1 = s(y) \in s(\mathbb{N})$, a $1 \notin s(\mathbb{N})$. Stoga je $1 + y \neq 1$. Prema tome, $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tada je $x + y \neq x$ pa budući da je s injekcija vrijedi $s(x + y) \neq s(x)$. No,

$$s(x + y) = s(y + x) = y + s(x) = s(x) + y.$$

Prema tome,

$$s(x) + y \neq s(x),$$

što znači da je $s(x) \in S$. Dakle:

- $1 \in S$
- Ako je $x \in S$, onda je $s(x) \in S$.

Prema tome, $S = \mathbb{N}$ i time je propozicija dokazana. □

1.3 Uređaj na skupu prirodnih brojeva

Definicija 1.3.1. *Neka su* $x, y \in \mathbb{N}$. *Pišemo* $x < y$ *ako postoji* $k \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x + k = y$. *Uočimo da je* $x < s(x)$, *za svaki* $x \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.3.2. *1. Neka je* $x \in \mathbb{N}$. *Tada ne vrijedi* $x < x$.

2. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $x < y$ *i* $y < z$. *Tada je* $x < z$.

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $x < x$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x = x + k$. No, ovo je u kontradikciji s prethodnom propozicijom.

2. Postoje $k, l \in \mathbb{N}$ takvi da je $y = x + k$ i $z = y + l$. Imamo,

$$z = y + l = (x + k) + l = x + (k + l),$$

tj. $z = x + (k + l)$ pa je $x < z$. □

Lema 1.3.3. *Za svaki* $x \in \mathbb{N}$ *takav da je* $1 \neq x$ *vrijedi* $1 < x$.

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x\} \cup \{1\}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Imamo dva slučaja:

1°) $x = 1$
Imamo, $x < s(x)$, tj. $1 < s(x)$. Stoga je $s(x) \in S$.

2°) $1 < x$
Iz $x < s(x)$ i propozicije 1.3.2 slijedi da je $1 < s(x)$. Stoga je $s(x) \in S$.

Dakle, za svaki $x \in S$ vrijedi $s(x) \in S$. Iz toga zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 1.3.4. *Neka su* $x, y \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $x \neq y$. *Tada je* $x < y$ *ili* $y < x$.

Dokaz. Neka je $S_1 = \{z \in \mathbb{N} \mid z < x\}$, $S_2 = \{z \in \mathbb{N} \mid x < z\}$ te neka je $S = S_1 \cup \{x\} \cup S_2$. Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Ako je $1 = x$, onda je $1 \in S$, a ako je $1 \neq x$ onda prema lemi 1.3.3 $1 < x$ pa je $1 \in S_1$, tj. $1 \in S$. Dakle, $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$. Imamo tri slučaja:

1°) $z \in S_1$.
Tada je $z < x$ pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x = z + k$. Ako je $k = 1$, onda je $x = s(z)$

pa je $s(z) \in S$. Ako je $k \neq 1$, onda je $k = s(l)$, za neki $l \in \mathbb{N}$ (jer je $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$) pa je

$$x = z + s(l) = z + (l + 1) = z + (1 + l) = (z + 1) + l = s(z) + l,$$

tj. $x = s(z) + l$ iz čega zaključujemo da je $s(z) < x$ pa je $s(z) \in S_1$, tj. $s(z) \in S$.

2°) $z = x$.
Tada je $x < s(z)$ pa je $s(z) \in S_2$, tj. $s(z) \in S$.

3°) $z \in S_2$.
Tada je $x < z$ pa zbog $z < s(z)$ imamo da je $x < s(z)$. Stoga je $s(z) \in S_2$ pa je $s(z) \in S$.

Dakle, za svaki $z \in S$ vrijedi $s(z) \in S$. Zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$. Stoga je $y \in S$ pa zbog $x \neq y$ imamo da je $y \in S_1$ ili $y \in S_2$. Prema tome $y < x$ ili $x < y$. $\square$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Pišemo $x \leq y$ ako je $x < y$ ili $x = y$.

Propozicija 1.3.5. *1. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \leq x$.*

2. Ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$.

3. Ako su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$.

4. Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Dokaz. Tvrdnja 1. je očita.

2. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq x$. Pretpostavimo da je $x \neq y$. Tada je $x < y$ i $y < x$ pa slijedi $x < x$ što vrijedi po drugoj tvrdnji propozicije 1.3.2, no to je nemoguće po prvoj tvrdnji propozicije 1.3.2. Dakle, $x = y$.

3. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \leq y$ i $y \leq z$. Ako je $x = y$ ili $y = z$, onda je očito $x \leq z$. U suprotnom imamo $x < y$ i $y < z$ pa je $x < z$, što povlači $x \leq z$.

4. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Želimo dokazati da je $x \leq y$ ili $y \leq x$. To je jasno ako je $x = y$, a ako je $x \neq y$ tvrdnja slijedi iz propozicije 1.3.4. $\square$

Uočimo sljedeće: Ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$, onda je $x + 1 \leq y$. Naime, vrijedi $y = x + k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Ako je $k = 1$, onda je $x + 1 = k$, a ako je $k \neq 1$, onda je $k = s(l)$, za neki $l \in \mathbb{N}$ pa je $y = x + s(l) = x + (l + 1) = (x + 1) + l$ što povlači da je $x + 1 < y$. Nadalje, ako su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \nleq y$ (tj. takvi da ne vrijedi $x \leq y$), onda je $y < x$. To slijedi iz propozicije 1.3.4. Obratno, ako je $y < x$, onda $x \nleq y$.

Propozicija 1.3.6. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$. Neka je $z \in \mathbb{N}$. Tada je $x + z < y + z$.*

Dokaz. Iz $x < y$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = k + x$. Imamo,

$$y + z = (x + k) + z = x + (k + z) = x + (z + k) = (x + z) + k,$$

tj. $y + z = (x + z) + k$. Prema tome, $x + z < y + z$. □

Propozicija 1.3.7. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x + z \leq y + z$. Tada je $x \leq y$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \nleq y$. Tada je $y < x$ pa iz propozicije 1.3.6 slijedi da je $y + z < x + z$. Ovo je u kontradikciji s $x + z \leq y + z$. Prema tome, $x \leq y$. □

Korolar 1.3.8. *Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x + z = y + z$. Tada je $x = y$.*

Dokaz. Imamo $x + z \leq y + z$ i $y + z \leq x + z$ pa iz propozicije 1.3.7 slijedi $x \leq y$ i $y \leq x$, a što zajedno s propozicijom 1.3.5 daje $x = y$. □

Ako su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da je $x + z < y + z$, onda je $x < y$. Naime, iz propozicije 1.3.7 slijedi da je $x \leq y$. Kada bi vrijedilo $x = y$ onda bismo imali $x + z = y + z$ što je nemoguće. Prema tome, $x < y$.

Uočimo da za $x, y \in \mathbb{N}$ ne može vrijediti $x < y$ i $y < x$. To slijedi iz propozicije 1.3.2.

Poglavlje 2

Konačnost

2.1 Konačni skupovi

Za skupove S i T kažemo da su ekvipotentni i pišemo $S \cong T$, ako postoji bijekcija $f : S \longrightarrow T$.
Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\}$. Dakle, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.
Za skup S kažemo da je konačan ako je S=$\emptyset$ ili postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{N}_{n+1} = \mathbb{N}_n \cup \{n + 1\}$.
Očito je

$$\mathbb{N}_n \cup \{n + 1\} \subseteq \mathbb{N}_{n+1}.$$

Obratno, neka je $x \in \mathbb{N}_{n+1}$. Pretpostavimo da je $x \neq n + 1$ te da $x \notin \mathbb{N}_n$. Slijedi da je $n < x$ i $x < n + 1$. Iz $n < x$ slijedi $n + 1 \leq x$, a to je u kontradikciji s $x < n + 1$. Dakle, $x \in \mathbb{N}_n \cup \{n + 1\}$ pa zaključujemo da je

$$\mathbb{N}_{n+1} \subseteq \mathbb{N}_n \cup \{n + 1\}.$$

Uočimo također da je $\mathbb{N}_1 = \{1\}$.

Propozicija 2.1.1. *Neka je S konačan skup. Tada za bilo koji a vrijedi da je $S \cup \{a\}$ konačan skup.*

Dokaz. Ako je S=$\emptyset$, onda je $S \cup \{a\} = \{a\}$ pa je očito $S \cup \{a\} \cong \mathbb{N}_1$. Pretpostavimo sada da je $S \neq \emptyset$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$. Ako je $a \in S$, onda je $S \cup \{a\} = S$ pa je $S \cup \{a\}$ konačan skup. Pretpostavimo da $a \notin S$. Znamo da postoji bijekcija $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow T$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S \cup \{a\}$ pravilom

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in \mathbb{N}_n \\ a, & \text{ako je } x = n+1 \end{cases}$$

Neka su $x, y \in \mathbb{N}_{n+1}$ takvi da je $x \neq y$. Ako je $x = n+1$, onda je $y \in \mathbb{N}_n$ pa je $g(x) = a$, $g(y) = f(y) \in S$ pa je $g(x) \neq g(y)$ (jer $a \notin S$). Do istog zaključka dolazimo ako je $y = n+1$. Ako je $x \neq n+1$ i $y \neq n+1$, onda su $x, y \in \mathbb{N}_n$ pa je $g(x) = f(x)$, $g(y) = f(y)$ te je $g(x) \neq g(y)$ jer je f injekcija. Zaključak: g je injekcija.

Neka je $y \in S \cup \{a\}$. Tada je $y \in S$ ili $y = a$. Ako je $y \in S$, onda postoji $x \in \mathbb{N}_n$ takav da je $f(x) = y$ (jer je f surjekcija) pa je $g(x) = y$, a ako je $y = a$, onda je $g(n+1) = y$. Prema tome, g je surjekcija.

Dakle, g je bijekcija pa zaključujemo da je

$$\mathbb{N}_{n+1} \cong S \cup \{a\}.$$

Time smo dokazali da je $S \cup \{a\}$ konačan skup. □

Propozicija 2.1.2. *Ako je S skup, $n \in \mathbb{N}$ te $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$ surjekcija, onda je S konačan skup.*

Dokaz. Neka je Σ skup svih $n \in \mathbb{N}$ koji imaju sljedeće svojstvo: ako je S skup i $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$ surjekcija, onda je S konačan skup. Dokažimo da je $\Sigma = \mathbb{N}$; ako to dokažemo, gotovi smo. Očito je $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$. Ako je S skup i $f : \mathbb{N}_1 \longrightarrow S$ surjekcija, onda je f očito i bijekcija. Prema tome, $1 \in \Sigma$. Pretpostavimo da je $n \in \Sigma$. Neka je S skup te $f : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S$ surjekcija. Neka je $T = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}_n\}$. Funkcija $g : \mathbb{N}_n \longrightarrow T$, $g(x) = f(x)$ je očito surjekcija pa budući da je $n \in \Sigma$ vrijedi da je T konačan skup. Imamo,

$$S = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}_{n+1}\} = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}_n\} \cup \{f(n+1)\},$$

dakle,

$$S = T \cup \{f(n+1)\}.$$

Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je S konačan skup. Prema tome, $n+1 \in \Sigma$. Prema principu indukcije vrijedi da je $\Sigma = \mathbb{N}$. □

Korolar 2.1.3. *Neka je S konačan skup te neka je $T \subseteq S$. Tada je T konačan skup.*

Dokaz. Ako je T prazan skup tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da je T neprazan skup. Tada je i S neprazan pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i bijekcija $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$. Odaberimo $t_0 \in T$. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}_n \longrightarrow T$ pravilom

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f(x) \in T \\ t_0, & \text{ako } f(x) \notin T \end{cases}$$

Funkcija g je surjekcija. Naime, ako je $y \in T$, onda postoji $x \in \mathbb{N}_n$ takav da je $f(x) = y$ (jer je f surjekcija). Imamo, $g(x) = f(x)$ (jer je $f(x) \in T$), dakle, $g(x) = y$. Iz propozicije 2.1.2 slijedi da je T konačan skup. □

Uočimo da iz propozicije 2.1.2 slijedi ova tvrdnja: Ako je $f : S \longrightarrow T$ surjekcija i S konačan skup, onda je T konačan skup.

2.2 Beskonačni skupovi

Za skup S koji nije konačan kažemo da je beskonačan.

Aksiom izbora. *Neka su X i Y skupovi te neka je $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ funkcija (gdje $\mathcal{P}(Y)$ označava partitivni skup od Y, tj. skup svih podskupova od Y) takva da je $F(x) \neq \emptyset$, za svaki $x \in X$. Tada postoji funkcija $f : X \longrightarrow Y$ takva da je $f(x) \in F(x)$, za svaki $x \in X$.*

Teorem 2.2.1. *Neka je S beskonačan skup. Tada postoji injekcija sa $\mathbb{N}$ u S.*

Dokaz. Neka je Σ skup svih funkcija f oblika $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $F : \Sigma \longrightarrow P(\Sigma)$ na sljedeći način: Neka je $f \in \Sigma$. Tada postoji jedinstveni $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$.

Definiramo $F(f) = \{h : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S \mid h|_{\mathbb{N}_n} = f, h(n+1) \notin f(\mathbb{N}_n)\}$. Tvrdimo da je $F(f) \neq \emptyset$. Funkcija $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$ nije surjekcija (jer bi u suprotnom prema propoziciji 2.1.2 S bio konačan skup) pa postoji $y \in S$ takav da $y \notin f(\mathbb{N}_n)$. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S$ pravilom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in \mathbb{N}_n \\ y, & \text{ako je } x = n+1 \end{cases}$$

Očito je $h \in F(f)$. Prema tome, $F(f) \neq \emptyset$, za svaki $f \in \Sigma$. Prema aksiomu izbora postoji funkcija $g : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ takva da je $g(f) \in F(f)$, za svaki $f \in \Sigma$. Dakle, ako je $n \in \Sigma$ i $f : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$, onda je $g(f) : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S$ funkcija takva da je $g(f)|_{\mathbb{N}_n} = f$ i $g(f)(n+1) \notin f(\mathbb{N}_n)$. Nadalje ako je f injekcija, onda je i $g(f)$ injekcija. Naime, neka su $x, y \in \mathbb{N}_{n+1}$ takvi da je $x \neq y$. Imamo nekoliko slučajeva:

1°) $x, y \in \mathbb{N}_n$
Budući da je f injekcija vrijedi $f(x) \neq f(y)$ pa zbog $g(f)|_{\mathbb{N}_n} = f$ vrijedi $g(f)(x) \neq$

$g(f)(x)$.

2°) $x = n + 1$, $y \in \mathbb{N}_n$
Tada je $g(f)(y) = f(y)$ pa je $g(f)(y) \in f(\mathbb{N}_n)$. No, $g(f)(x) \notin f(\mathbb{N}_n)$ pa zaključujemo da je $g(f)(y) \neq g(f)(x)$.

3°) $y = n + 1$, $x \in \mathbb{N}_n$.
Analogno dobivamo $g(f)(x) \neq g(f)(y)$.

Prema tome, za sve $x, y \in \mathbb{N}_{n+1}$ takve da je $x \neq y$ vrijedi da je $g(f)(x) \neq g(f)(y)$. Stoga je $g(f)$ injekcija.

Odaberimo bilo koju funkciju $a : \mathbb{N}_1 \longrightarrow S$ (takva funkcija sigurno postoji jer je S neprazan skup). Očito je $a \in \Sigma$. Prema teoremu 1.1.2 postoji funkcija $\Phi : \mathbb{N} \longrightarrow \Sigma$ takva da je $\Phi(1) = a$ i $\Phi(n + 1) = g(\Phi(n))$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Neka je T skup svih $n \in \mathbb{N}$ takvih da je $\Phi(n)$ funkcija sa $\mathbb{N}_n$ u S koja je injekcija. Vrijedi $\Phi(1) = a$ pa je očito $1 \in T$. Pretpostavimo da je $n \in T$. Dakle, vrijedi $\Phi(n) : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$ i $\Phi(n)$ je injekcija. Prema dokazanom znamo da je tada $g(\Phi(n)) : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S$ injekcija. No, $g(\Phi(n)) = \Phi(n + 1)$, dakle,

$$\Phi(n + 1) : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow S$$

je injekcija. Prema tome, $n + 1 \in T$. Prema principu indukcije zaključujemo da je T=$\mathbb{N}$. Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\Phi(n) : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$ injekcija. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Iz $\Phi(n + 1) = g(\Phi(n))$ slijedi da je

$$\Phi(n + 1)|_{\mathbb{N}_n} = \Phi(n).$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ funkcija $\Phi(n + k)$ proširuje funkciju $\Phi(n)$.

Neka je T skup svih $k \in \mathbb{N}$ za koje tvrdnja vrijedi. Očito je $1 \in T$. Pretpostavimo da je $k \in T$. Tada je $\Phi(n + k)$ proširenje funkcije $\Phi(n)$, a znamo da je $\Phi((n + k) + 1)$ proširenje funkcije $\Phi(n + k)$. Stoga je $\Phi((n + k) + 1)$ proširenje funkcije $\Phi(n)$. Dakle,

$$k + 1 \in T.$$

Zaključujemo da je $T = \mathbb{N}$ i time smo dokazali da je $\Phi(n + k)$ proširenje funkcije $\Phi(n)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $n < m$. Tada je $\Phi(m)$ proširenje funkcije $\Phi(n)$. Naime, iz $n < m$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n + k = m$.

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$, $f(n) = \Phi(n)(n)$. Tvrdimo da je f injekcija. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da je $n \neq m$. Tvrdimo da je $f(n) \neq f(m)$. Prema propoziciji 1.3.4 vrijedi da je $n < m$ ili $m < n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n < m$. Tada je $\Phi(m)$ proširenje funkcije $\Phi(n)$ pa slijedi da je

$$\Phi(n)(n) = \Phi(m)(n).$$

Funkcija $\Phi(m)$ je injekcija pa je $\Phi(m)(n) \neq \Phi(m)(m)$. Prema tome,

$$\Phi(n)(n) \neq \Phi(m)(m),$$

tj. $f(n) \neq f(m)$. Dakle, f je injekcija i time je tvrdnja teorema dokazana. □

2.3 Karakterizacija beskonačnosti

Lema 2.3.1. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \longrightarrow T$ bijekcija.*

1. *Neka su $a, b \in S$, $a \neq b$. Neka je $g : S \longrightarrow T$ funkcija definirana sa*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in S,\ x \neq a,\ x \neq b \\ f(b), & \text{ako je } x = a \\ f(a), & \text{ako je } x = b \end{cases}$$

   Tada je g bijekcija.

2. *Neka je $a \in S$ te neka je $h : S \setminus \{a\} \longrightarrow T \setminus \{f(a)\}$ funkcija definirana sa $h(x) = f(x)$. Tada je h bijekcija.*

Dokaz. Tvrdnja 2. je očita. Dokažimo tvrdnju 1. Dokažimo da je g injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Imamo nekoliko slučajeva.

1°) $x_1, x_2 \in S \setminus \{a, b\}$
Tada je $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$, dakle, $g(x_1) \neq g(x_2)$.

2°) $x_1, x_2 \in \{a, b\}$
Tada je $g(x_1) \neq g(x_2)$ jer je $f(a) \neq f(b)$.

3°) $x_1 \in S \setminus \{a, b\}$, $x_2 \in \{a, b\}$
Tada je $g(x_1) = f(x_1) \notin \{f(a), f(b)\}$, a $g(x_2) \in \{f(a), f(b)\}$. Prema tome, $g(x_1) \neq g(x_2)$.

4°) $x_1 \in \{a,b\}$, $x_2 \in S \setminus \{a,b\}$
Analogno kao u 3°) dobivamo da je $g(x_1) \neq g(x_2)$.
Zaključujemo da je g injekcija.

Neka je $y \in T$. Budući da je f surjekcija postoji $x \in S$ takav da je $f(x) = y$. Imamo nekoliko slučajeva.

1°) $x \neq a$, $x \neq b$.
Tada je $g(x) = f(x) = y$.

2°) $x = a$
Tada je $g(b) = f(a) = y$.

3°) $x = b$.
Tada je $g(a) = f(b) = y$.

U svakom slučaju postoji $x' \in S$ takav da je $g(x') = y$. Prema tome, g je surjekcija i time smo dokazali da je g bijekcija. □

Teorem 2.3.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da skup $\mathbb{N}_n$ nije ekvipotentan niti jednom svom pravom podskupu.*

Dokaz. Neka je $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N}_n$ nije ekvipotentan niti jednom svom pravom podskupu$\}$. Imamo $\mathbb{N}_1 = \{1\}$ pa je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $n \in S$. Pokažimo da je $n+1 \in S$. Pretpostavimo da postoji pravi podskup T od $\mathbb{N}_{n+1}$ takav da je $\mathbb{N}_{n+1} \cong T$. Tada postoji bijekcija $f : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow T$. Imamo dva slučaja.

1°) $n+1 \notin T$
Tada je $T \subseteq \mathbb{N}_n$. Očito je $T \setminus \{f(n+1)\} \subset T$ pa je $T \setminus \{f(n+1)\} \subset \mathbb{N}_n$. Prema lemi 2.3.1 vrijedi $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{n+1\} \cong T\{f(n+1)\}$, tj.

$$\mathbb{N}_n \cong T \setminus \{f(n+1)\}.$$

Dakle, $\mathbb{N}_n$ je ekvipotentan svom pravom podskupu, a to je u kontradikciji s činjenicom da je $n \in S$.

2°) $n+1 \in T$
Očito je $T \setminus \{n+1\} \subseteq \mathbb{N}_n$. No vrijedi i $T \setminus \{n+1\} \subset \mathbb{N}_n$. U suprotnom bi vrijedilo $T \setminus \{n+1\} = \mathbb{N}_n$ pa bismo imali $\mathbb{N}_n \subseteq T$ što bi zajedno s $n+1 \in T$ davalo $\mathbb{N}_{n+1} \subseteq T$, tj. $\mathbb{N}_{n+1} = T$ što je nemoguće (jer je $T \subset \mathbb{N}_{n+1}$). Budući da je f bijekcija postoji $a \in \mathbb{N}_{n+1}$ takav da je $f(a) = n+1$. Tvrdimo da postoji bijekcija $h : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow T$

takva da je $h(n+1) = n+1$. To je jasno ako je $a = n+1$, a ako je $a \neq n+1$, onda je funkcija $h : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow T$ zadana pravilom

$$h(x) = \begin{cases} f(x), \text{ ako je } x \neq a,\ x \neq n+1 \\ f(n+1), \text{ ako je } x = a \\ f(a), \text{ ako je } x = n+1 \end{cases}$$

bijekcija (prema lemi 2.3.1) takva da je $h(n+1) = f(a) = n+1$. Iz leme 2.3.1 slijedi $\mathbb{N}_{n+1} \setminus \{n+1\} \cong T \setminus \{h(n+1)\}$, tj.

$$\mathbb{N}_n \cong T \setminus \{n+1\}.$$

Ovo prema $T \setminus \{n+1\} \subset \mathbb{N}_n$ znači da je $\mathbb{N}_n$ ekvipotentan svom pravom podskupu. To je nemoguće jer je $n \in S$.

Oba slučaja dovode do kontradikcije pa zaključujemo da ne postoji pravi podskup T od $\mathbb{N}_{n+1}$ takav da je $\mathbb{N}_{n+1} \cong T$. Stoga je $n+1 \in S$. Prema principu indukcije zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Napomena 2.3.3. *Ako su S, T i V skupovi takvi da je $S \cong T$ i $T \cong V$, onda je $S \cong V$. Naime, ako su $f : S \longrightarrow T$ i $g : T \longrightarrow V$ bijekcije, onda je očito $g \circ f : S \longrightarrow V$ bijekcija.*

Nadalje, ako su S i T skupovi, $f : S \longrightarrow T$ bijekcija te $A \subseteq S$, $A \neq \emptyset$, onda je $A \cong f(A)$. Naime, funkcija $g : A \longrightarrow f(A)$, $g(x) = f(x)$ je bijekcija.

Teorem 2.3.4. *Neka je S skup. S je beskonačan ako i samo ako postoji $T \subset S$ takav da je $S \cong T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S beskonačan skup. Prema teoremu 2.2.1 postoji injekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$. Neka je $T = S \setminus \{f(1)\}$. Očito je $T \subset S$. Definirajmo funkciju $g : S \longrightarrow T$ na sljedeći način:

$$g(x) = \begin{cases} x, \text{ ako } x \notin f(\mathbb{N}) \\ f(n+1), \text{ ako je } x = f(n) \end{cases}$$

Uočimo da je ova definicija funkcije dobra, naime, za svaki $x \in f(\mathbb{N})$ postoji jedinstven $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x = f(n)$. Nadalje, za svaki $x \in S$ takav da $x \notin f(\mathbb{N})$ vrijedi $x \in T$, tj. $g(x) \in T$, a za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n+1) \in T$. Dokažimo da je g bijekcija. Neka su $x_1, x_2 \in S$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Tvrdimo da je $g(x_1) \neq g(x_2)$. Imamo nekoliko slučajeva.

1°) $x_1, x_2 \notin f(\mathbb{N})$
Tada je $g(x_1) = x_1$, a $g(x_2) = x_2$ pa je $g(x_1) \neq g(x_2)$.

2°) $x_1 \notin f(\mathbb{N})$, $x_2 \in f(\mathbb{N})$
Tada $g(x_1) \notin f(\mathbb{N})$, a $g(x_2) \in f(\mathbb{N})$. Stoga je $g(x_1) \neq g(x_2)$.

3°) $x_1 \in f(\mathbb{N})$, $x_2 \notin f(\mathbb{N})$
Analogno kao u 2. slučaju zaključujemo da je $g(x_1) \neq g(x_2)$.

4°) $x_1, x_2 \in f(\mathbb{N})$
Tada je $x_1 = f(n)$ i $x_2 = f(m)$, za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Iz $x_1 \neq x_2$ slijedi $m \neq n$. Stoga je $m+1 \neq n+1$ pa iz činjenice da je f injektivna funkcija slijedi da je $f(n+1) \neq f(m+1)$, tj. $g(x_1) \neq g(x_2)$.
U svakom slučaju imamo $g(x_1) \neq g(x_2)$. Zaključujemo da je g injekcija.

Neka je $y \in T$. Ako $y \notin f(\mathbb{N})$, onda je $g(y) = y$ prema definiciji funkcije g. S druge strane, ako je $y \in f(\mathbb{N})$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $y = f(n)$. Znamo da $f(1) \notin T$ pa je stoga $n \neq 1$ iz čega slijedi da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $n = m + 1$ (jer je $1 < n$). Neka je $x = f(m)$. Tada je

$$g(x) = f(m+1) = f(n) = y,$$

dakle, $g(x) = y$. Prema tome, za svaki $y \in T$ postoji $x \in S$ takav da je $g(x) = y$, a to znači da je g surjekcija.

Zaključak: Funkcija $g : S \longrightarrow T$ je bijekcija.

Pretpostavimo sada da postoji $T \subset S$ takav da je $S \cong T$. Dokažimo da je S beskonačan skup. Pretpostavimo suprotno. Tada je S konačan skup pa, budući da je očito neprazan, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$. Neka je $f : S \longrightarrow \mathbb{N}_n$ bijekcija. Budući da je $T \subset S$, vrijedi $f(T) \subset \mathbb{N}_n$. Nadalje, $T \cong f(T)$. Imamo,

$$\mathbb{N}_n \cong S \cong T \cong f(T)$$

pa je $\mathbb{N}_n \cong f(T)$. Ovo je u kontradikciji s teoremom 2.3.2. Prema tome, S je beskonačan skup. $\square$

Korolar 2.3.5. *Neka je S skup. Tada je S konačan skup ako i samo ako ne postoji $T \subset S$ takav da je $T \cong S$.*

Napomena 2.3.6. *Ako su S i T skupovi te $f : S \longrightarrow T$ injekcija, onda je $S \cong f(S)$. Naime, funkcija $g : S \longrightarrow f(S)$, $g(x) = f(x)$ je očito bijekcija.*

Uočimo da iz teorema 2.3.4 slijedi da je $\mathbb{N}$ beskonačan skup. Naime, funkcija $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ je injekcija pa je $\mathbb{N} \cong s(\mathbb{N})$, a $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dakle, $\mathbb{N}$ je ekvipotentan svom pravom podskupu pa je prema teoremu 2.3.4 $\mathbb{N}$ beskonačan skup.

Korolar 2.3.7. *Neka je S skup. Tada je S beskonačan ako i samo ako postoji injekcija $\mathbb{N} \longrightarrow S$.*

Dokaz. Ako je S beskonačan skup, onda prema teoremu 2.2.1 postoji injekcija $\mathbb{N} \longrightarrow S$. Obratno, pretpostavimo da postoji injekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$. Vrijedi $\mathbb{N} \cong f(\mathbb{N})$ (funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ je injekcija). Iz činjenice da je $\mathbb{N}$ beskonačan skup slijedi da je $f(\mathbb{N})$ beskonačan skup. Očito je $f(\mathbb{N}) \subseteq S$ pa slijedi da je S beskonačan skup (po korolaru 2.1.3). $\square$

Poglavlje 3

Prebrojivost

3.1 Prebrojivi skupovi

Definicija 3.1.1. *Za skup S kažemo da je prebrojiv ako je S konačan ili $S \cong \mathbb{N}$.*

Propozicija 3.1.2. *Neka je T skup te neka je T' neprazan podskup skupa T. Tada postoji surjekcija $h : T \longrightarrow T'$.*

Dokaz. Odaberimo $a \in T'$. Definirajmo funkciju $h : T \longrightarrow T'$ sa

$$h(x) = \begin{cases} a, \text{ ako } x \notin T' \\ x, \text{ ako je } x \in T' \end{cases}$$

Očito je h surjekcija. □

Korolar 3.1.3. *Neka su S i T neprazni skupovi te neka je $f : S \longrightarrow T$ injekcija. Tada postoji surjekcija $g : T \longrightarrow S$.*

Dokaz. Imamo da je $S \cong f(S)$ pa postoji bijekcija $k : f(S) \longrightarrow S$. Očito je $f(S)$ neprazan podskup od T pa prema propoziciji 3.1.2 postoji surjekcija $h : T \longrightarrow f(S)$. Funkcija $k \circ h : T \longrightarrow S$ je surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. □

Propozicija 3.1.4. *Neka su S i T skupovi te neka je $f : S \longrightarrow T$ surjekcija. Tada postoji injekcija $g : T \longrightarrow S$.*

Dokaz. Neka je $G : T \longrightarrow P(S)$ funkcija definirana tako da za svaki $y \in T$ vrijedi

$$G(y) = \{x \in S \mid f(x) = y\}.$$

Uočimo da je $G(y)$ neprazan skup za svaki $y \in T$, naime to slijedi iz činjenice da je f surjekcija. Prema aksiomu izbora postoji funkcija $g : T \longrightarrow S$ takva da je

$g(y) \in G(y)$, za svaki $y \in T$. Uočimo da iz ovoga slijedi da je $f(g(y)) = y$, za svaki $y \in T$. Tvrdimo da je g injekcija. Pretpostavimo da su $y_1, y_2 \in T$ takvi da je $g(y_1) = g(y_2)$. Tada je

$$f(g(y_1)) = f(g(y_2)),$$

tj. $y_1 = y_2$. Prema tome, g je injekcija. $\square$

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ te neka je $x \in S$. Kažemo da je x minimum skupa S ako je $x \leq y$, za svaki $y \in S$. Uočimo da je minimum skupa S, ako postoji, jedinstven. Naime, ako su x_1, x_2 minimumi skupa S, onda je $x_1 \leq y$, za svaki $y \in S$ pa je $x_1 \leq x_2$ jer je $x_2 \in S$. Analogno dobivamo da je $x_2 \leq x_1$, dakle $x_1 = x_2$. Minimum skupa S, ako postoji, označavamo sa $\min\ S$.

Teorem 3.1.5. *Svaki neprazan podskup od* $\mathbb{N}$ *ima minimum.*

Dokaz. Neka je T skup svih $n \in \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: Svaki podskup S od $\mathbb{N}$ za kojega postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k \in S$ i $k \leq n$ ima minimum.

Dokažimo da je $T = \mathbb{N}$ koristeći princip indukcije. Dokažimo prvo da je $1 \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $S \subseteq \mathbb{N}$ te da je $k \in S$ takav da je $k \leq 1$. Tada je očito $k = 1$, dakle, $1 \in S$. Stoga je 1 minimum skupa S, tj. skup S ima minimum. Prema tome, $1 \in T$.

Pretpostavimo sada da je $n \in T$. Dokažimo da je $n+1 \in T$. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da postoji $k \in S$ sa svojstvom $k \leq n+1$. Imamo dva slučaja:

1°) S sadrži neki element manji ili jednak od n. Tada iz činjenice da je $n \in T$ slijedi da S ima najmanji element.

2°) Ne postoji element od S koji je manji ili jednak od n. Tada za svaki $x \in S$ vrijedi $n < x$, tj. $n + 1 \leq x$. Posebno, $n + 1 \leq k$, što zajedno s $k \leq n + 1$ daje $k = n + 1$. Dakle, $n + 1 \in S$ pa iz $n + 1 \leq x$, za svaki $x \in S$, slijedi da je $n + 1$ minimum skupa S.

Prema tome, u oba slučaja dobivamo da S ima minimum. Stoga je $n + 1 \in T$. Prema principu indukcije zaključujemo da je $T = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja teorema dokazana. Naime, ako je $S \subseteq \mathbb{N}$, $S \neq \emptyset$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \in S$. Iz činjenice da je $n \in T$ slijedi da S ima minimum. $\square$

Teorem 3.1.6. *Neka je* S *beskonačan podskup od* $\mathbb{N}$*. Tada je* $S \cong \mathbb{N}$*.*

Dokaz. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x \in S$ takav da je $k < x$. Naime, u suprotnom bi za svaki $x \in S$ vrijedilo $x \leq k$ pa bi slijedilo da je $S \subseteq \mathbb{N}_k$ što bi zajedno s korolarom 2.1.3 povlačilo da je S konačan skup što je nemoguće. Dakle, skup $\{x \in S \mid k < x\}$ je neprazan skup pa prema prethodnom teoremu ima minimum.

Neka je $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$F(k) = min\ \{x \in S \mid k < x\}.$$

Prema principu definicije indukcijom postoji funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da je $f(1) = min\ S$, $f(n+1) = F(f(n))$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz definicije funkcije F je jasno da je $k < F(k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga posebno za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) < F(f(n))$, tj.

$$f(n) < f(n+1).$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) < f(n+k)$. Neka je

$$T = \{k \in \mathbb{N} \mid f(n) < f(n+k)\}.$$

Očito da je $1 \in T$. Pretpostavimo da je $k \in T$. Dokažimo da je $k+1 \in T$. Imamo $f(n) < f(n+k)$ (jer je $k \in T$), te $f(n+k) < f(n+(k+1))$. Stoga je

$$f(n) < f(n+(k+1)).$$

Dakle, $k+1 \in T$. Time smo pokazali da je $T = \mathbb{N}$. Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) < f(n+k)$.

Dokažimo da je f injekcija. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Tada je $m < n$ ili $n < m$.

1°) $m < n$
Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = m + k$. Znamo da je $f(m) < f(m+k)$, dakle $f(m) < f(n)$. Stoga je $f(m) \neq f(n)$.

2°) $n < m$
Analogno dobivamo da je $f(n) \neq f(m)$.
Zaključujemo da je f injekcija.

Dokažimo sada da je $f(\mathbb{N}) = S$. Očito je $f(1) \in S$. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$. Tada je $n = m + 1$, za neki $m \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$f(n) = f(m+1) = F(f(m)).$$

Iz definicije funkcije F je očito da je $F(k) \in S$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Stoga je $f(n) \in S$. Dakle, $f(n) \in S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Prema tome,

$$f(\mathbb{N}) \subseteq S.$$

Neka je T skup svih $n \in \mathbb{N}$ koji imaju sljedeće svojstvo: Za svaki $x \in S$ takav da je $x \leq f(n)$ vrijedi $x \in f(\mathbb{N})$. Tvrdimo da je $1 \in T$. Neka je $x \in S$ takav da je $x \leq f(1)$. Tada je $x \leq min\ S$. Iz $min\ S \leq x$ slijedi da je $x = min\ S$. Stoga je $x = f(1)$, dakle, $x \in f(\mathbb{N})$. Prema tome, $1 \in T$.

Pretpostavimo da je $n \in T$. Dokažimo da je $n+1 \in T$. Neka je $x \in S$ takav da je $x \leq f(n+1)$. Želimo dokazati da je $x \in f(\mathbb{N})$. Ako je $x = f(n+1)$, to je očito. Pretpostavimo da je $x < f(n+1)$. Ako je $x \leq f(n)$, onda je $x \in f(\mathbb{N})$ jer je $n \in T$. Pretpostavimo da je $f(n) < x$. Imamo,

$$f(n) < x < f(n+1).$$

Imamo, $f(n+1) = F(f(n))$ pa je $f(n+1) = min\ \{y \in S \mid f(n) < y\}$. Očito je $x \in \{y \in S \mid f(n) < y\}$ pa je $f(n+1) \leq x$. Ovo je u kontradikciji s $x < f(n+1)$. Dakle, $x \in f(\mathbb{N})$ pa zaključujemo da je $n+1 \in T$. Prema tome, $T = \mathbb{N}$.

Neka je $x \in S$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x \leq f(n)$. Naime, u suprotnom bi za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedilo da je $f(n) < x$ pa bismo imali $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}_x$. No, $f(\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}$ (funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ je injekcija) pa je stoga $f(\mathbb{N})$ beskonačan skup što je u kontradikciji s činjenicom da je $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}_x$ (podskup konačnog skupa je konačan). Iz $x \leq f(n)$ i $n \in T$ slijedi da je $x \in f(\mathbb{N})$. Prema tome,

$$S \subseteq f(\mathbb{N}).$$

Time smo dokazali da je $f(\mathbb{N}) = S$. Dakle, $S \cong \mathbb{N}$. $\square$

Korolar 3.1.7. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$. Tada je S prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je S konačan skup tvrdnja je jasna. Pretpostavimo da S nije konačan skup. Tada je prema teoremu 3.1.6 $S \cong \mathbb{N}$. Stoga je S prebrojiv. $\square$

Teorem 3.1.8. *Neka je S neprazan skup. Tada je S prebrojiv ako i samo ako postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S prebrojiv. Tada je $S \cong \mathbb{N}$ ili S konačan. Ako je $S \cong \mathbb{N}$ tada postoji bijekcija sa $\mathbb{N}$ u S, dakle postoji surjekcija sa $\mathbb{N}$ u S. Pretpostavimo da je S konačan. Budući da je $S \neq \emptyset$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S \cong \mathbb{N}_n$. Dakle, postoji bijekcija $h : \mathbb{N}_n \longrightarrow S$. Kako je $\mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N}$ po propoziciji 3.1.2 postoji surjekcija

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_n$. Sada je $h \circ g : \mathbb{N} \longrightarrow S$ surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. Dakle, postoji surjekcija $\mathbb{N} \longrightarrow S$.

Pretpostavimo da postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$. Tada prema propoziciji 3.1.4 postoji injekcija $g : S \longrightarrow \mathbb{N}$. Ako je S konačan skup onda je očito prebrojiv. Pretpostavimo da je S beskonačan. Vrijedi $S \cong g(S)$. Stoga je $g(S)$ beskonačan skup. No, $g(S) \subseteq \mathbb{N}$ pa iz teorema 3.1.6 slijedi da je $g(S) \cong \mathbb{N}$. Stoga je $S \cong \mathbb{N}$. Dakle, S je prebrojiv. $\square$

Propozicija 3.1.9. *Neka je S skup. Tada je S prebrojiv ako i samo ako postoji $T \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $S \cong T$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je neki S prebrojiv skup. Tada je S konačan ili $S \cong \mathbb{N}$. Stoga je $S = \emptyset$ ili $S \cong \mathbb{N}_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$ ili $S \cong \mathbb{N}$. U svakom slučaju postoji $T \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $S \cong T$ ($T = \emptyset$ ili $T = \mathbb{N}_n$ ili $T = \mathbb{N}$). Pretpostavimo sada da postoji $T \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $S \cong T$. Iz korolara 3.1.7 slijedi da je T prebrojiv pa je očito i S prebrojiv. $\square$

3.2 Prebrojivost skupa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Napomena 3.2.1. *Neka je S skup. Uočimo da je $\emptyset \times S = \emptyset$. Nadalje, uočimo da je $\emptyset$ funkcijska relacija između $\emptyset$ i S. Dakle, $f = (\emptyset, S, \emptyset)$ je funkcija između $\emptyset$ i S. Uočimo da je f injekcija te da je f surjekcija ako i samo ako je $S = \emptyset$. Nadalje, ako je $g : \emptyset \longrightarrow S$, onda je $g = (\emptyset, S, \emptyset)$, tj. $g = f$. Stoga je $\emptyset \cong S$ ako i samo ako $S = \emptyset$. S druge strane, uočimo da ne postoji funkcija $S \longrightarrow \emptyset$ ako je $S \neq \emptyset$.*

Fiksirajmo x iz $\mathbb{N}$. Neka je $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(a) = a + x$, za svaki $a \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 1.1.2 postoji jedinstvena funkcija $g_x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da je

$$g_x(1) = x,$$
$$g_x(s(y)) = h(g_x(y)),$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$g_x(s(y)) = g_x(y) + x,$$

za svaki $y \in \mathbb{N}$. Definirajmo binarnu operaciju $\cdot$ na $\mathbb{N}$ sa $x \cdot y = g_x(y)$. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \cdot 1 = g_x(1) = x$. Nadalje, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x \cdot (y + 1) = g_x(y + 1) = g_x(s(y)) = g_x(y) + x = (x \cdot y) + x.$$

Dakle,

$$x \cdot 1 = x,$$

$$x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x,$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.2.2. *Ubuduće ćemo koristiti standardni dogovor da množenje ima "veći prioritet" od zbrajanja pa ćemo npr. umjesto $(x \cdot y) + (u \cdot v)$ pišemo $x \cdot y + u \cdot v$.*

Propozicija 3.2.3. *Za sve $a, b, c \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Neka je $S = \{c \in \mathbb{N} \mid (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\}$. Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $c \in S$. Imamo, $(a + b) \cdot (c + 1) = (a + b) \cdot c + (a + b) = (ac + bc) + (a + b) = ac + (bc + (a + b)) = ac + ((bc + a) + b) = ac + ((a + bc) + b) = ac + (a + (bc + b)) = (ac + a) + (bc + b) = a \cdot (c + 1) + b \cdot (c + 1)$. Prema tome, $c + 1 \in S$. Dakle, $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.2.4. *Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.*

Dokaz. Dokažimo prije svega da je $1 \cdot x = x$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Neka je

$$T = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \cdot x = x\}.$$

Očito je $1 \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x \in T$. Vrijedi,

$$1 \cdot (x + 1) = 1 \cdot x + 1 = x + 1,$$

tj. $x + 1 \in T$. Prema tome, $T = \mathbb{N}$. Dakle, $1 \cdot x = x$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $x \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \{y \in \mathbb{N} \mid x \cdot y = y \cdot x\}.$$

Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Imamo, $1 \in T$ (jer je $x \cdot 1 = x$, $1 \cdot x = x$). Pretpostavimo da je $y \in S$. Koristeći prethodnu propoziciju imamo

$$x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x = y \cdot x + x = y \cdot x + 1 \cdot x = (y + 1) \cdot x.$$

Dakle, $y + 1 \in S$. Dobili smo da je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 3.2.5. *Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.*

Dokaz. Fiksirajmo $x, y \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \{z \in \mathbb{N} \mid (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\}.$$

Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $z \in S$. Imamo, $(x \cdot y) \cdot (z + 1) = (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y = (y \cdot z) \cdot x + y \cdot x = (y \cdot z + y) \cdot x = (y \cdot (z + 1)) \cdot x = x \cdot (y \cdot (z + 1))$. Dakle,

$$z + 1 \in S.$$

Dobili smo da je $S = \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Kažemo da x dijeli y i pišemo

$$x|y$$

ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = k \cdot x$. Definiramo $2 = 1 + 1$. Za $x \in \mathbb{N}$ kažemo da je paran broj ako

$$2|x.$$

Za $x \in \mathbb{N}$ koji nije paran kažemo da je neparan.

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pravilom $g(u) = 2u$, za svaki $u \in \mathbb{N}$. Prema teoremu 1.1.2 postoji jedinstvena funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takva da je $f(1) = 2$, $f(k+1) = g(f(k))$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $f(1) = 2$ i $f(k + 1) = 2 \cdot f(k)$, za svaki $k \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ ćemo pisati 2^k umjesto $f(k)$. Dakle, $2^1 = 2$ i $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k$.

Lema 3.2.6. *Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $a \leq b$ i $c < d$. Tada je $a+c < b+d$.*

Dokaz. Iz $a \leq b$ i propozicije 1.3.6 slijedi da je $a+c \leq b+c$. Nadalje iz iste propozicije i $c < d$ slijedi da je $c+b < d+b$. Dakle, $a+c < b+c$ i $b+c < b+d$ pa iz propozicije 1.3.2 slijedi $a + c < b + d$. □

Propozicija 3.2.7. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $xn < yn$.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid xn < yn\}.$$

Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada je $xn < yn$, a znamo da je $x < y$ pa iz prethodne leme slijedi da je $xn + x < yn + y$. Dakle,

$$x(n + 1) < y(n + 1)$$

što znači da je $n + 1 \in S$. Zaključujemo da je $S = \mathbb{N}$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 3.2.8. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $nx = ny$. Tada je $x = y$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \neq y$. To znači da je $x < y$ ili $y < x$. Prema propoziciji 3.2.7 vrijedi $xn < yn$ ili $yn < xn$, no to je u kontradikciji s $nx = ny$. □

Propozicija 3.2.9. *1. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da $x|y$. Tada je $x \leq y$.*

2. Neka su $x, y, z \in \mathbb{N}$ takvi da $x|y$ i $y|z$. Tada $x|z$.

Dokaz. 1) Iz $x|y$ slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $y = k \cdot x$. Imamo $1 \leq k$, a iz prethodne propozicije slijedi $1 \cdot x \leq k \cdot x$, tj. $x \leq y$.

2) Imamo $y = kx$ i $z = ly$, za neke $k, l \in \mathbb{N}$. Koristeći propoziciju 3.2.5 dobivamo $z = l(kx) = (lk)x$ pa očito $x|z$. □

Lema 3.2.10. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n < 2^n$.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 2^n\}.$$

Pokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $n \in S$. Tada je $n < 2^n$. Iz propozicije 3.2.7 slijedi da je

$$2n < 2 \cdot 2^n,$$

tj. $2n < 2^{n+1}$. Iz $1 \leq n$ slijedi

$$n + 1 \leq n + n,$$

tj. $n + 1 \leq 2n$. Iz toga i $2n < 2^{n+1}$ slijedi

$$n + 1 < 2^{n+1}.$$

Dakle, $n + 1 \in S$. Prema tome, $S = \mathbb{N}$ i time je tvrdnja dokazana. □

Napomena 3.2.11. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da $y|x$. Tada postoji jedinstveni $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x = z \cdot y$. Pretpostavimo da postoje $z_1, z_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = z_1 y$ i $x = z_2 y$ te $z_1 \neq z_2$. Tada je $z_1 < z_2$ ili $z_2 < z_1$. Ako je $z_1 < z_2$ onda iz propozicije 3.2.7 slijedi $yz_1 < yz_2$, odnosno $x < x$ što je nemoguće. Analogno zaključujemo da $z_2 < z_1$ vodi na kontradikciju.*

Neka je $x \in \mathbb{N}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $2^k \nmid x$. Naime, prema prethodnoj lemi postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x < 2^k$ (npr. uzmemo da je $k = x$) pa slijedi $2^k \nmid x$ (jer bi u suprotnom prema propoziciji 3.2.9 vrijedilo $2^k \leq x$, a što je nemoguće zbog $x < 2^k$). Prema tome, za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup

$$\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \nmid x\}$$

je neprazan pa prema teoremu 3.1.5 ima minimum.

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sa

$$f(x) = \min \{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \nmid x\}.$$

Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}$ paran broj. Tada je $f(x) \neq 1$ (kada bi vrijedilo $f(x) = 1$, onda bismo imali $2^1 \nmid x$, tj. $2 \nmid x$ što je nemoguće jer je x paran broj). Stoga je

$1 < f(x)$ pa postoji jedinstveni $l \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) = l + 1$. Očito je $l < f(x)$. Iz definicije broja $f(x)$ slijedi da

$$2^l | x.$$

Stoga postoji jedinstveni $y \in \mathbb{N}$ takav da je $x = 2^l \cdot y$.

Neka je P skup svih parnih brojeva. Definirajmo funkciju $g : P \longrightarrow \mathbb{N}$ na način da za $x \in P$ definiramo $g(x) = y$, gdje je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $x = 2^l \cdot y$ pri čemu je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $l + 1 = f(x)$.

Propozicija 3.2.12. *Za sve $k, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{k+l} = 2^k \cdot 2^l$.*

Dokaz. Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}$. Neka je

$$S = \{l \in \mathbb{N} \mid 2^{k+l} = 2^k \cdot 2^l\}.$$

Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Imamo,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2^k \cdot 2^1,$$

dakle, $1 \in S$. Pretpostavimo da je $l \in S$. Dokažimo da je $l + 1 \in S$. Imamo,

$$2^{k+(l+1)} = 2^{(k+l)+1} = 2^{(k+l)} \cdot 2 = (2^k \cdot 2^l) \cdot 2 = 2^k \cdot (2^l \cdot 2) = 2^k \cdot 2^{l+1},$$

dakle, $2^{k+(l+1)} = 2^k \cdot 2^{l+1}$. Time smo dokazali da je $l + 1 \in S$. Prema tome, $S = \mathbb{N}$ i time je propozicija dokazana. $\square$

Napomena 3.2.13. *Neka su $x, y \in \mathbb{N}$ takvi da je $x < y + 1$. Tada je $x \leq y$. Naime, u suprotnom bi vrijedilo $y < x$ što bi povlačilo $y + 1 \leq x$, a to je nemoguće zbog $x < y + 1$.*

Lema 3.2.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f(2^n) = n + 1$.*

Dokaz. Imamo $1 < 2$ pa iz propozicije 3.2.7 slijedi

$$2^n < 2 \cdot 2^n, 2^n < 2^{n+1}.$$

Iz ovoga i propozicije 3.2.9 dobivamo da

$$2^{n+1} \nmid 2^n.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k < n + 1$. Iz prethodne napomene slijedi da je $k \leq n$. Tvrdimo da $2^k | 2^n$. Ovo je jasno ako je $k = n$. Inače vrijedi $k < n$ pa postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $n = k + l$. Prema prethodnoj propoziciji vrijedi

$$2^n = 2^{k+l} = 2^k \cdot 2^l$$

pa očito $2^k|2^n$. Dakle, $2^k|2^n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k < n+1$. Iz ovoga zaključujemo da je $n+1$ najmanji element skupa $\{k \in \mathbb{N} \mid 2^k \nmid 2^n\}$, dakle,

$$f(2^n) = n + 1.$$

$\square$

Lema 3.2.15. *Neka su $n, y \in \mathbb{N}$, pri čemu je y neparan broj. Tada je $f(2^n \cdot y) = n+1$ i $g(2^n \cdot y) = y$.*

Dokaz. Tvrdimo da $2^{n+1} \nmid 2^n \cdot y$. Pretpostavimo suprotno, tj.

$$2^{n+1}|2^n \cdot y.$$

Tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $2^n \cdot y = l \cdot 2^{n+1}$. Vrijedi,

$$l \cdot 2^{n+1} = l \cdot (2^n \cdot 2) = 2^n \cdot (2 \cdot l)$$

pa je $2^n \cdot y = 2^n \cdot (2 \cdot l)$. Iz korolara 3.2.8 slijedi da je $y = 2l$, dakle, y je paran broj. To je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Prema tome,

$$2^{n+1} \nmid 2^n \cdot y.$$

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k < n+1$. U dokazu prethodne leme smo vidjeli da $2^k|2^n$, a budući da očito $2^n|2^y \cdot y$ iz propozicije 3.2.9 slijedi $2^k \cdot y$. Zaključujemo, kao u dokazu leme, da je

$$f(2^n \cdot y) = n + 1.$$

Očito je $2^n \cdot y$ paran broj. Označimo $y' = g(2^n \cdot y)$. Tada je $2^n \cdot y = 2^l \cdot y'$, gdje je $l \in \mathbb{N}$ takav da je $l + 1 = f(2^n \cdot y)$. Slijedi,

$$l + 1 = n + 1$$

pa je $l = n$. Iz $2^n \cdot y = 2^l \cdot y'$ slijedi

$$2^n \cdot y = 2^n \cdot y'$$

pa korolar 3.2.8 povlači da je $y = y'$. Dakle, $g(2^n \cdot y) = y$. $\square$

Neka je $x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada postoji jedinstven $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y + 1 = x$ (jer $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ injekcija i $s(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$). Taj y označavamo sa $x - 1$. Dakle, $(x-1)+1 = x$. Ako je $k \in \mathbb{N}$, onda je $1 \leq k$ pa po propoziciji 3.2.7 vrijedi $2 \cdot 1 \leq 2 \cdot k$, tj. $2 \leq 2 \cdot k$. Prema tome, za svaki paran broj x vrijedi $2 \leq x$. Iz toga zaključujemo da 1 nije paran broj.

Propozicija 3.2.16. *Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi da brojevi x i $x+1$ nisu istovremeno parni.*

Dokaz. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x, x+1 \text{ nisu istovremeno parni}\}$. Dokažimo da je $S = \mathbb{N}$. Očito je $1 \in S$. Pretpostavimo da je $x \in S$. Tvrdimo da je $x+1 \in S$. Pretpostavimo da $x+1 \notin S$. Tada su brojevi $x+1$ i $(x+1)+1$ parni brojevi. Dakle, $x+2$ je paran broj pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x+2 = 2k$. Koristeći propoziciju 1.3.6 dobivamo

$$2 = 1+1 < 1+2 \leq x+2 = 2k,$$

dakle, $2 < 2k$ iz čega slijedi $k \neq 1$. Stoga postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $k = l+1$. Slijedi, $x+2 = 2 \cdot k = 2 \cdot (l+1) = 2 \cdot l + 2$, dakle,

$$x+2 = 2 \cdot l + 2$$

pa je $x = 2k$. Prema tome, x je paran broj, a znamo da je $x+1$ paran broj (jer je $x+1 \notin S$). Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x \in S$. Prema tome, $x+1 \in S$. Time smo dokazali da je $S = \mathbb{N}$. $\square$

Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$h(x) = \begin{cases} f(x+1), & x \notin P \\ f(g(x)+1), & x \in P \end{cases}$$

Neka je $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $F(x) = (f(x), h(x))$.

Propozicija 3.2.17. *Neka je $(a,b) \in \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{1\})$. Tada postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x) = (a,b)$.*

Dokaz. Očito je $b \neq 1$. Imamo dva slučaja.
1°) $a = 1$
Broj 2^{b-1} je očito paran pa je $2^{b-1} \neq 1$. Neka je $x = 2^{b-1} - 1$. Imamo,

$$x+1 = 2^{b-1},$$

dakle, $x+1$ je paran broj pa iz propozicije 3.2.16 slijedi da x nije paran broj. Dakle, $2^1 \nmid x$ pa je $f(x) = 1$. Nadalje vrijedi,

$$h(x) = f(x+1) = f(2^{b-1})$$

pa iz leme 3.2.14 slijedi $h(x) = (b-1)+1$, tj. $h(x) = b$. Prema tome,

$$F(x) = (f(x), h(x)) = (1, b),$$

tj. $F(x) = (a, b)$.

2°) $a \neq 1$
Definirajmo $x = 2^{a-1}(2^{b-1} - 1)$. Očito je x paran broj. U prethodnom slučaju smo vidjeli da je $2^{b-1} - 1$ neparan broj. Iz leme 3.2.15 slijedi da je $f(x) = a$. Nadalje, koristeći opet lemu 3.2.15 dobivamo

$$h(x) = f(g(x) + 1) = f[(2^{b-1} - 1) + 1] = f(2^{b-1}) = b.$$

Dakle, $F(x) = (f(x), h(x)) = (a, b)$. $\square$

Teorem 3.2.18. *Skup $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je prebrojiv.*

Dokaz. Definirajmo $\Gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sa

$$\Gamma(x) = \begin{cases} 1, \ x = 1 \\ x - 1, \ x \neq 1 \end{cases}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sa

$$G(x, y) = (x, \Gamma(y)).$$

Tvrdimo da je funkcija $G \circ F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ surjekcija. Neka je $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Vrijedi $G(a, b + 1) = (a, \Gamma(b + 1)) = (a, b)$, dakle,

$$G(a, b + 1) = (a, b).$$

Očito je $(a, b + 1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{1\}$ pa prema propoziciji 3.2.17 postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $F(x) = (a, b + 1)$. Vrijedi, $(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(a, b + 1) = (a, b)$, dakle,

$$(G \circ F)(x) = (a, b).$$

Time smo dokazali da je $G \circ F$ surjekcija. Iz teorema 3.1.8 slijedi da je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv. $\square$

Neka je $\mathcal{F}$ skup čiji su elementi skupovi. Tada za $\mathcal{F}$ kažemo da je familija skupova.

Ako je $\mathcal{F}$ familija skupova definirano $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \text{postoji } F \in \mathcal{F} \text{ takav da je } x \in F\}$.

Za $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ kažemo da je unija familije $\mathcal{F}$.

3.3 Prebrojive familije prebrojivih skupova

Lema 3.3.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je T skup takav da je $T \cong \mathbb{N}_{n+1}$. Tada postoje $T' \subseteq T$ i $a \in T$ tako da je $T = T' \cup \{a\}$ i $T' \cong \mathbb{N}_n$.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}_{n+1} \longrightarrow T$ bijekcija. Označimo $T' = f(\mathbb{N}_n)$. Prema napomeni 2.3.6. Naime, funkcija $g : A \longrightarrow f(A)$, $g(x) = f(x)$ je bijekcija., vrijedi $T' \cong \mathbb{N}_n$. Označimo $a = f(n+1)$. Imamo:

$$T = f(\mathbb{N}_{n+1}) = f(N_n \cup \{n+1\}) = f(\mathbb{N}_n) \cup f(\{n+1\}) = f(\mathbb{N}_n) \cup \{f(n+1)\} = T' \cup \{a\}.$$

Dakle,

$$T = T' \cup \{a\}.$$

□

Propozicija 3.3.2. *Ako su S i T konačni skupovi, onda je $S \cup T$ konačan skup.*

Dokaz. Neka je S konačan skup. Neka je $\Sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid$ za svaki skup T takav da je $T \cong \mathbb{N}_n$ vrijedi da je $S \cup T$ konačan skup$\}$. Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je $1 \in \Sigma$. Pretpostavimo da je $n \in \Sigma$. Neka je T skup takav da je $T \cong \mathbb{N}_{n+1}$. Prema lemi 3.3.1 postoji $T' \subseteq T$ i $a \in T$ takav da je $T = T' \cup \{a\}$ i $T' \cong \mathbb{N}_n$. Vrijedi,

$$S \cup T = S \cup (T' \cup \{a\}) = (S \cup T') \cup \{a\}.$$

Iz $n \in \Sigma$ i $T \cong \mathbb{N}_n$ slijedi da je $S \cup T'$ konačan skup. Iz propozicije 2.1.1 slijedi da je $(S \cup T') \cup \{a\}$ konačan skup, dakle,

$$S \cup T$$

konačan skup. Time smo dokazali da je $n+1 \in \Sigma$. Zaključujemo da je $\Sigma = \mathbb{N}$. Neka je T bilo koji konačan skup. Ako je $T = \emptyset$, onda je očito $S \cup T$ konačan skup.

Pretpostavimo da je $T \neq \emptyset$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $T \cong \mathbb{N}_n$. Zbog $\Sigma = \mathbb{N}$ imamo da je $n \in \Sigma$ pa po definiciji skupa Σ vrijedi da je $S \cup T$ konačan skup. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Primjer 3.3.3. *Neka je $\mathcal{F} = \{\{n\} | n \in \mathbb{N}\}$. Tada je $\mathcal{F}$ familija konačnih skupova. No, $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F$ nije konačan skup jer je očito $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \mathbb{N}$. Uočimo da je funkcija $\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$, $n \mapsto \{n\}$, bijekcija. Dakle, $\mathbb{N} \cong \mathcal{F}$ pa je $\mathcal{F}$ beskonačna familija (beskonačan skup).*

Lema 3.3.4. *Neka su $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ familije skupova takve da je $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$. Tada je $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} F = (\bigcup\limits_{F \in \mathcal{G}} F) \cup (\bigcup\limits_{F \in \mathcal{H}} F)$.*

Dokaz. Neka je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Tada postoji $F_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $x \in F_0$. Znamo da je $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ pa slijedi $F_0 \in \mathcal{G}$ ili $F_0 \in \mathcal{H}$. Ako je $F_0 \in \mathcal{G}$, onda je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$, a ako je $F_0 \in \mathcal{H}$, onda je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{H}} F$. U svakom slučaju

$$x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F) \cup (\bigcup_{F \in \mathcal{H}} F).$$

Obratno, neka je $x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F) \cup (\bigcup_{F \in \mathcal{H}} F)$. To znači da je $x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F)$ ili $x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{H}} F)$. Pretpostavimo da je $x \in (\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F)$. Tada postoji $F_0 \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in F_0$. S obzirom da je $\mathcal{F} = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ slijedi da je $F_0 \in \mathcal{F}$ pa je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Do istog zaključka dolazimo kada je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{H}} F$. Dakle,

$$x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Time je tvrdnja dokazana. $\square$

Propozicija 3.3.5. *Ako je $\mathcal{F}$ konačna familija konačnih skupova (tj. $\mathcal{F}$ je konačan skup čiji su elementi konačni skupovi), onda je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ konačan skup.*

Dokaz. Neka je $\Sigma = \{n \in \mathbb{N} \mid$ ako je $\mathcal{F}$ familija konačnih skupova takva da je $\mathcal{F} \cong \mathbb{N}_n$, onda je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ konačan skup$\}$. Vrijedi $1 \in \Sigma$. Naime, ako je $\mathcal{F}$ familija konačnih skupova takva da je $\mathcal{F} \cong \mathbb{N}_1$, onda je $\mathcal{F} = \{A\}$, gdje je A konačan skup pa iz

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = A$$

slijedi da je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ konačan skup. Pretpostavimo da je $n \in \Sigma$. Pretpostavimo da je $\mathcal{F}$ familija konačnih skupova takva da je $\mathcal{F} \cong \mathbb{N}_{n+1}$. Prema lemi 3.3.1 postoji $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ i $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \{A\}$ i $\mathcal{F}' \cong \mathbb{N}_n$. Koristeći lemu 3.3.4 dobivamo

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = (\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F) \cup (\bigcup_{F \in \{A\}} F) = (\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F) \cup A.$$

Iz $n \in \mathbb{N}$ slijedi da je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F$ konačan skup pa iz propozicije 3.3.2 slijedi da je $(\bigcup_{F \in \mathcal{F}'} F) \cup A$ konačan skup, dakle,

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

je konačan skup. Time smo dokazali da je $n+1 \in \Sigma$. Prema tome $\Sigma = \mathbb{N}$.

Dokažimo sada tvrdnju propozicije. Neka je $\mathcal{F}$ konačna familija konačnih skupova. Ako je $\mathcal{F} = \emptyset$, onda je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, dakle, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ je konačan skup. Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathcal{F} \cong \mathbb{N}_n$. Imamo $n \in \Sigma$ (jer je $\Sigma = \mathbb{N}$) pa iz definicije skupa Σ slijedi da je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ konačan skup. □

Teorem 3.3.6. *Neka je $\mathcal{F}$ prebrojiva familija prebrojivih skupova. Tada je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{G} = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Iz $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ slijedi da je $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. S druge strane, ako je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$, onda postoji $F_0 \in \mathcal{F}$ takav da je $x \in F_0$. Imamo, $F_0 \neq \emptyset$ i $F_0 \in \mathcal{F}$ pa je $F_0 \in \mathcal{G}$. Stoga je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$. Zaključujemo da je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$. Prema tome,

$$\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Stoga je dovoljno pokazati da je $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$ prebrojiv skup. Iz $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ slijedi da je $\mathcal{G}$ prebrojiva familija prebrojivih skupova. Ako je $\mathcal{G} = \emptyset$, onda je $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F = \emptyset$ pa je $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$ prebrojiv skup. Pretpostavimo da je $\mathcal{G} \neq \emptyset$. Prema teoremu 3.1.8 postoji surjekcija $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{G}$. Za $n \in \mathbb{N}$ neka je Σ_n skup svih surjekcija sa $\mathbb{N}$ u $S(n)$. Neka je $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma_n$ te neka je $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ funkcija definirana sa $F(n) = \Sigma_n$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $S(n)$ neprazan prebrojiv skup (jer je $S(n) \in \mathcal{G}$, a $\emptyset \notin \mathcal{G}$ po definiciji skupa $\mathcal{G}$) pa prema teoremu 3.1.8 postoji surjekcija $\mathbb{N} \longrightarrow S(n)$. Dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Sigma_n \neq \emptyset$, tj. $F(n) \neq \emptyset$. Prema aksiomu izbora postoji funkcija $f : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ takva da je $f(n) \in F(n)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $f(n) : \mathbb{N} \longrightarrow S(n)$ je surjekcija za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definirajmo funkciju $H : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$, $H(n,i) = (f(n))(i)$. Za sve $n, i \in \mathbb{N}$ vrijedi $(f(n))(i) \in S(n)$ pa zbog $S(n) \in \mathcal{G}$ imamo da je

$$(f(n))(i) \in \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F.$$

Dakle, funkcija H je dobro definirana. Tvrdimo da je H surjekcija. Neka je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$. Tada postoji $F \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in F$. Budući da je S surjekcija postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $S(n) = F$. Dakle, $x \in S(n)$ pa budući da je $f(n) : \mathbb{N} \longrightarrow S(n)$ surjekcija postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(f(n))(i) = x$. Dakle, $x = H(n,i)$. Prema tome, H je surjekcija. Iz teorema 3.2.18 slijedi da postoji surjekcija $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Funkcija $H \circ h : \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$ je surjekcija kao kompozicija dviju surjekcija. Prema teoremu 3.1.8 skup $\bigcup_{F \in \mathcal{G}} F$ je prebrojiv. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 3.3.7. *Neka su S i T prebrojivi skupovi. Tada je $S \cup T$ prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} = \{S, T\}$. Očito je $\mathcal{F}$ prebrojiva familija prebrojivih skupova. Dakle, prema teoremu 3.3.6 slijedi da je $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ prebrojiv skup. Tvrdimo da je

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = S \cup T.$$

Neka je $x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$. Tada postoji $F \in \mathcal{F}$ takav da je $x \in F$. Iz definicije od $\mathcal{F}$ slijedi $F = S$ ili $F = T$ pa je $x \in S$ ili $x \in T$. Stoga je

$$x \in S \cup T.$$

Obratno, neka je $x \in S \cup T$. Tada je $x \in S$ ili $x \in T$. U svakom slučaju, postoji $F \in \mathcal{F}$ takav da je $x \in F$, dakle,

$$x \in \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F.$$

Prema tome, $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = S \cup T$ vrijedi pa zaključujemo da je $S \cup T$ prebrojiv skup. □

Definicija 3.3.8. *Za skup koji nije prebrojiv kažemo da je neprebrojiv.*

Primjer 3.3.9. *Neka je S skup svih funkcija sa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$. Tvrdimo da je S neprebrojiv skup.*

Pretpostavimo suprotno, tj. da je S prebrojiv skup. Tada postoji surjekcija $F : \mathbb{N} \longrightarrow S$. Neka je $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $f(n) = (F(n))(n) + 1$. Imamo, $f \in S$ pa postoji (jer je F surjekcija) $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f = F(n)$. Stoga je $f(i) = (F(n))(i)$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Posebno, $f(n) = (F(n))(n)$. Iz definicije funkcije f slijedi $(F(n))(n) + 1 = (F(n))(n)$ što je nemoguće po propoziciji 1.2.6.

Dakle, S je neprebrojiv skup.

Propozicija 3.3.10. *Neka je S skup. Tada ne postoji surjekcija sa S u $\mathcal{P}(S)$.*

Dokaz. Tvrdimo da ne postoji surjekcija sa S u $\mathcal{P}(S)$. Pretpostavimo suprotno, tj. postoji surjekcija f sa S u $\mathcal{P}(S)$. Neka je

$$A = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}.$$

Očito je $A \subseteq S$, tj. $A \in \mathcal{P}(S)$. Budući da je f surjekcija postoji $x_0 \in S$ takav da je $f(x_0) = A$. Pretpostavimo da je $x_0 \in A$. Iz definicije skupa A slijedi da $x_0 \notin f(x_0)$. Dakle, $x_0 \notin A$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $x_0 \in A$.

Pretpostavimo da $x_0 \notin A$. Iz definicije skupa A slijedi da je $x_0 \in f(x_0)$, tj. $x_0 \in A$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da $x_0 \notin A$. Zaključujemo da ne postoji surjekcija f sa S u $\mathcal{P}(S)$. $\square$

Bibliografija

1. Mardešić, S.: *Matematička analiza 1*, Školska knjiga, Zagreb, 1991.

2. Pavković, B., Veljan, D.: *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo skup prirodnih brojeva te pojam konačnog i prebrojivog skupa.

U prvom smo poglavlju, krenuvši od aksioma, uveli osnovne pojmove vezane uz skup prirodnih brojeva kao što su zbrajanje prirodnih brojeva i uređaj na skupu prirodnih brojeva te smo dokazali neke činjenice vezane uz to. Također, iskazali smo i dokazali princip definicije indukcijom.

U drugom smo poglavlju uveli pojam konačnog skupa te dokazali osnovne činjenice vezane uz to. Nadalje, proučavali smo beskonačne skupove te dokazali da je skup beskonačan ako i samo ako je ekvipotentan svom pravom podskupu.

Pojam prebrojivog skupa je bio središnji pojam trećeg poglavlja. Ispitivali smo razna svojstva ovoga pojma te smo dokazali da je unija prebrojive familije prebrojivih skupova i sama prebrojiva.

Navedeni pojmovi imaju važnu ulogu u teoriji skupova, što je prikazano i u ovom diplomskom radu.

Summary

In this thesis we studied a set of natural numbers and the concept of a finite and a countable set.

In the first chapter, starting with the axioms, we introduced basic concepts related to a set of natural numbers such as the addition of natural numbers and the order on the set of natural numbers, and we have proven the facts related to it. We also demonstrated and proved the principle of definition by induction.

In the second chapter, we introduced the concept of a finite set and we proved the basic facts related to it. Furthermore, we have studied infinite sets and we proved that a set is infinite if and only if it is equipotent to its proper subset.

The countable set was the central notion of the third chapter. We examined the various properties of this concept and we proved that the union of a countable family of countable sets is countable.

These notions have significant role in the theory of sets, which is shown in this thesis.

Životopis

Zovem se Kristina Milković. Rođena sam 5. ožujka 1992. godine u Požegi.

Osnovnu školu završila sam u Požegi 2006. godine, dok sam srednjoškolsko obrazovanje stekla pohađajući Gimnaziju u Požegi, u razdoblju od 2006. do 2010. godine. U ljeto 2010. godine upisala sam Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički. Po završetku preddiplomskog sveučilišnog studija 2015. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički.

Tijekom studija sam držala instrukcije iz matematike učenicima osnovnih i srednjih škola.