Kreditni rizik

Novko, Reamare

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Reamare Novko

Kreditni rizik

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Nela Bosner

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Zoji, mami i drugim dragim ljudima

Sadržaj

1 Uvod

Jedan od glavnih rizika kojem se banke i ostale kreditne institucije izlažu u svom poslovanju jest kreditni rizik, a definira se kao rizik nepodmirenja obveza, odnosno mogućnost da se uložena sredstva neće pravodobno i/ili u potpunosti vratiti te da se neće vraćati planiranom dinamikom. Nedavna financijska kriza pokazala je da banke trebaju biti duboko svjesne potrebe za identifikacijom, mjerenjem, praćenjem i kontrolom kreditnog rizika kao i utvrđivanjem postojanja primjerene razine kapitala za pokriće potencijalnih gubitaka u slučaju materijalizacije rizika. Upravljanje rizicima tako se u novije vrijeme posebno oslanja na direktnu implementaciju matematičkih i statističkih metoda i modela, kao i poslovnu primjenu njihovih rezultata. Kreditni rejting predstavlja mišljenje o kreditnom riziku u narednom periodu i podrazumijeva procjenu sposobnosti i spremnosti dužnika da pravovremeno i u potpunosti podmiruje svoje obveze prema kreditorima. Promjena istog reflektira procjenu o poboljšanju ili pogoršanju kreditne kvalitete dužnika. Jedan od prvih koraka kod modeliranja kreditnog rizika u svrhu procjene budućeg gubitka kreditne institucije jest analiza spomenutih migracija među kreditnim kategorijama. Obzirom da u takvim modelima matrica vjerojatnosti prijelaza iz jedne kreditne kategorije u drugu igra središnju ulogu, u sljedećim poglavljima cilj je dati (konzistentnog) procjenitelja vjerojatnosti prijelaza, proučiti svojstva prijelazne matrice, kao i promjenu u sastavu kreditnog portfelja izazvanu promjenama rejtinga.

2 Promjene kreditnog rejtinga

Kreditni rejting jedan je od najvažnijih indikatora kreditne sposobnosti (boniteta) dužnika. Visok kreditni rejting predstavlja veliku vjerojatnost da dužnik vrati zajam u potpunosti bez ikakvih poteškoća u otplati, dok niski kreditni rejting sugerira da je dužnik u prošlosti imao problema u otplati kredita i izgledno je da će u budućnosti biti suočen s istim poteškoćama. Kreditni rejting možemo stoga promatrati kao mjerilo vjerojatnosti neispunjavanja novčanih obveza po kreditu. Kreditni rejting se dodjeljuje svim entitetima koji žele posuditi novac - fizičkim i pravnim osobama, državi ili nižim upravnim jedinicama. Procjenu kreditne kvalitete korporacija i država donose agencije za dodjelu kreditnog rejtinga, kao što su Standard & Poor's, Moody's i Fitch. Kreditni rejtinzi se u tom slučaju općenito dodjeljuju svim dužnicima (i potencijalnim dužnicima) javno izlistanim na burzi. Osim eksternih kreditnih rejtinga koje dodjeljuju za to specijalizirane agencije, postoje i interni kreditni rejtinzi dodijeljeni od strane banaka i drugih financijskih institucija. Interni sustavi rangiranja klijenata s obzirom na izloženost kreditne institucije kreditnom riziku predstavljaju najznačajniju inovaciju "Bazela II.", standarda za regulaciju kapitala banaka donesenog 2001. godine. Podaci o rejtinzima dodijeljenim od strane eksternih agencija dostupni su za širok vremenski period, budući su praksu dodjeljivanja rejtinga uveli Moody's 1914. godine i Poor's Corporation 1922. godine, dok je povijest internih kreditnih rejtinga u većini slučajeva relativno kratka. Obje vrste rejtinga obično se baziraju na rednoj skali i označene su alfabetski ili numerički. Agencije za dodjelu kreditnog rejtinga obično obveznici pridružuju slova koja predstavljaju kreditni rejting. Primjerice, Standard & Poor's ima rejting skalu u rasponu AAA (izvrstan kreditni rejting) i AA+ pa do C i D. Dužnički instrument sa rejtingom ispod BBB- nalazi se u špekulativnom razredu i ima veću vjerojatnost da uđe u default (stanje neispunjavanja obveza) od više rangiranih dužničkih instrumenata koji se nalaze u tzv. investicijskom razredu.

Promjena kreditnog rejtinga reflektira procjenu da li se kreditna kvaliteta kompanije (ili dužnika općenito) poboljšala ili pogoršala. Analiza migracija među kreditnim razredima jedan je od prvih koraka kod izrade modela kreditnog rizika, čija je svrha procijeniti budući kreditni gubitak. U takvim modelima važnu ulogu igra matrica vjerojatnosti prijelaza iz jednog kreditnog razreda u drugi. Tzv. prijelazna matrica omogućava izračun zajedničke distribucije budućih rejtinga dužnika koji tvore portfelj. Element prijelazne matrice predstavlja vjerojatnost da će dužnik kroz određeni rizični horizont migrirati iz inicijalnog kreditnog razreda u drugi kreditni razred.

Obzirom da buduće promjene rejtinga ne ovise o promjenama u prošlosti već o trenutnoj financijskoj poziciji dužnika (Markovljevo svojstvo), prijelaze među kreditnim razredima modeliramo pomoću vremenski homogenog Markovljevog lanca. Pretpostavljamo da je vjerojatnost prijelaza iz jednog kreditnog rejtinga u drugi konstantna kroz vrijeme. Pretpostavka o homogenosti je isključivo radi jednostavnosti matematičkog izračuna, no empirijski nije opravdana. U praksi se pokazalo da prijelazne vjerojatnosti variraju kroz vrijeme, ovisno o poslovnom ciklusu i drugim različitim faktorima. Poslovni ciklus uključuje ciklička kretanja ekonomske aktivnosti u okviru koje se smjenjuju razdoblja ekspanzije i recesije. Pojava recesije vidljiva je u padu proizvodnje, dohotka i zaposlenosti, što dužnicima pogoršava financijski položaj i otplatu prethodno preuzetih obveza (kredita, obveza po izdanoj obveznici i općenito svih dužničkih instrumenata) čini težom. U tom slučaju, u matrici prijelaza može se uočiti znatno veća vjerojatnost pogoršanja kreditnog rejtinga nego za vrijeme ekspanzije. Kvari se opća kreditna kvaliteta pa se značajno povećava broj defaulta. Ukoliko portfelj nije dovoljno diverzificiran već je izložen prema nekoj gospodarskoj grani ili regiji, prijelazna matrica može primjerice ovisiti i o stanju u industriji.

U ovom poglavlju proučavamo migracije među kreditnim razredima sa statističkog aspekta. Pokazati ćemo put od u prošlosti uočenih rejting migracija do procijenjenih jednogodišnjih vjerojatnosti prijelaza i dati procjenu za odstupanje od stvarnih prijelaznih stopa. Zbog međuovisnosti dužnika u portfelju biti će raspravljene i zavisne migracije. Posebno, prikazati ćemo modeliranje pomoću normalnog modela s pragom.

Vremenska stabilnost prijelazne matrice jedan je od ključnih elemenata za procjenu kreditnog rizika stoga ćemo provesti χ^2-test homogenosti za procijenjene prijelazne vjerojatnosti i naposljetku ga ilustrirati konkretnim primjerom. Pretpostavljajući vremensku stabilnost, promatrati ćemo višeperiodne prijelaze među kreditnim razredima. Konačno, bit će uzeta u obzir i promjena u sastavu kreditnog portfelja izazvana rejting migracijama. Izračunat ćemo očekivani sastav i varijancu u slučaju nezavisnih migracija.

2.1 Vjerojatnost promjene kreditnog rejtinga

2.1.1 Od kreditnog događaja do brojanja rejting migracija

Pretpostavimo da su krediti ili obveznici kredita (dužnici) rangirani u d kategorija (razreda). Kategorija 1 pritom predstavlja najbolji kreditni rejting dodijeljen najkvalitetnijim dužnicima odnosno najmanje rizičnim kreditnim plasmanima, dok kategorija d obuhvaća kredite u defaultu odnosno dužnike koji ne uspijevaju ispuniti svoje obveze po kreditu. Nadalje, neka su dani povijesni podaci o migracijama unutar kreditnih razreda. Preciznije, n primijećenih migracija unutar danog vremenskog perioda zapisujemo u $n\times 2$ matrici, pri čemu je redak matrice oblika

$$(e_{i1}, e_{i2}) \in \{1, \ldots, d-1\} \times \{1, \ldots, d\}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Pritom e_{i1} označava rejting i-tog kredita na početku, a e_{i2} rejting na kraju vremenskog perioda, za koji se obično uzima godina dana. Pretpostavljamo da je stanje defaulta apsorbirajuće stanje, odnosno da je dužnikova kreditna kvaliteta nepopravljiva jednom kad uđe u default. Dakle, inicijalni rejting e_{i1} ne može biti jednak d jer iz tog stanja, po pretpostavci, daljnje migracije nisu moguće.

Potom su migracije iste vrste sažete u matricu $\mathbf{C}$ dimenzija $(d-1)\times d$ koja broji migracije. Preciznije, na mjestu c_{jk} stoji broj plasmana koji su, krenuvši od rejtinga j, na kraju vremenskog perioda rangirani u kategoriju k. Dakle, opći element matrice $\mathbf{C}$ definiran je kao

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{(e_{i1}, e_{i2}) = (j,k)\}}$$

i on predstavlja broj migracija od j do k. Očito, ukupna suma elemenata matrice jednaka je n,

$$\sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=1}^{d} c_{jk} = n.$$

2.1.2 Procjena vjerojatnosti promjene kreditnog rejtinga

Pretpostavimo da je svaka opažena vrijednost rejtinga e_{i2} na kraju promatranog vremenskog perioda realizacija slučajne varijable $\widetilde{e_{i2}}$ sa uvjetnom funkcijom distribucije

$$p_{jk} = \mathbb{P}(\widetilde{e}_{i2} = k | \widetilde{e}_{i1} = j), \quad \sum_{k=1}^{d} p_{jk} = 1$$

gdje je p_{jk} vjerojatnost da kredit migrira iz inicijalnog rejtinga j u kreditni razred s rejtingom k. Ove vjerojatnosti su tzv. *rejting prijelazne (migracijske) vjerojatnosti*. Uočimo da je indikatorska varijabla $\mathbf{1}_{\{\widetilde{e}_{i2}=k\}}$ uvjetno na $\{\widetilde{e}_{i1}=j\}$ Bernoullijeva slučajna varijabla s vjerojatnošću uspjeha p_{jk},

$$\mathbf{1}_{\{\widetilde{e}_{i2}=k\}}|\widetilde{e}_{i1}=j \sim Ber(p_{jk}). \tag{1}$$

Da bismo procijenili prijelazne vjerojatnosti, najprije definiramo broj migracija koje kreću od rejting razreda j sa

$$n_j = \sum_{k=1}^{d} c_{jk}, \quad j = 1,\dots,d-1. \tag{2}$$

Pretpostavljamo da smo na početku vremenskog perioda imali barem jedan kredit u svakom od rejting razreda, što je ekvivalentno zahtjevu $n_j > 0$ za $j = 1,\dots,d-1$. Dakle, $(n_1,\dots,n_{d-1})$ je sastav kreditnog portfelja na početku perioda, a

$$(\sum_{j=1}^{d-1} c_{j1},\dots,\sum_{j=1}^{d-1} c_{jd}) \tag{3}$$

sastav kreditnog portfelja na kraju perioda (obzirom da $\sum_{j=1}^{d-1} c_{ji}$ predstavlja sve kredite koji su počevši iz bilo kojeg stanja $j = 1,\dots,d-1$ na kraju vremenskog perioda završili u i-tom rejting razredu). Zadnji element $\sum_{j=1}^{d-1} c_{jd}$ u sastavu (3) je stoga broj kredita u defaultu na kraju danog vremenskog perioda. Na temelju zadanih povijesnih podataka o migracijama unutar kreditnih razreda, možemo izračunati opažene *stope migracije* iz kreditnog razreda j u kreditni razred k kao omjer broja kredita koji su krenuvši iz rejting kategorije j završili u rejting kategoriji k i broja kredita koji su na početku vremenskog portfelja bili u j-tom razredu. Opažena stopa migracije iz j-tog u k-ti razred definirana s

$$\widehat{p}_{jk} = \frac{c_{jk}}{n_j} \tag{4}$$

prirodni je procjenitelj za nepoznate prijelazne vjerojatnosti p_{jk}.

Neka su sada migracije među razredima nezavisne. Ekvivalentno je pretpostaviti da su slučajne varijable $\widetilde{e_{12}},\dots,\widetilde{e_{n2}}$ nezavisne. Tada je c_{jk} realizacija binomne slučajne varijable (suma n_j nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli)

$$\widetilde{c}_{jk} \sim B(n_j, p_{jk}),$$

odakle slijedi da je standardna devijacija od $\widehat{p}_{jk}$ jednaka

$$\sigma_{jk} = \sigma\Big(\frac{\widetilde{c}_{jk}}{n_j}\Big) = \frac{1}{n_j}\sigma(\widetilde{c}_{jk}) = \frac{\sqrt{n_j p_{jk}(1-p_{jk})}}{n_j} = \sqrt{\frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j}}.$$

Pritom smo koristili svojstvo varijance $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$, odnosno ekvivalentno svojstvo standardne devijacije $\sigma(aX) = a\sigma(X)$. Standardnu devijaciju stoga možemo procijeniti s

$$\widehat{\sigma}_{jk} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_{jk}(1-\widehat{p}_{jk})}{n_j}} \tag{5}$$

no procijenjene standardne greške moramo oprezno interpretirati budući su bazirane na pretpostavci o nezavisnosti kreditnih migracija, što u praksi gotovo nikad nije slučaj.

2.1.3 Uvjetovane promjene kreditnog rejtinga

Slučaj zavisnih migracija među kreditnim razredima je složeniji, no pretpostaviti da su migracije unutar portfelja nezavisne bilo bi suviše nerealno obzirom da su prijelazi među kreditnim razredima u nekoj mjeri posljedica i makroekonomskih varijabli koje su jednake za sve dužnike. Kako bismo uzeli u obzir taj efekt, koristit ćemo model koji imovinu poduzeća dovodi u vezu s njegovim kreditnim rejtingom, no u nastavku najprije donosimo motivaciju za takvo što.

U kontekstu zavisnih migracija, $\widetilde{c}_{jk}$ je suma n_j koreliranih Bernoullijevih varijabli, koje na svakom kreditu poprimaju 0 ili 1. Preciznije, varijabla poprima vrijednost 1 ukoliko je kredit kojem je inicijalno dodijeljen rejting j migrirao u kreditnu kategoriju k, inače poprimi vrijednost 0. Ukoliko su te Bernoullijeve varijable u parovima korelirane sa koeficijentom korelacije ρ_{jk}, onda je varijanca σ^2_{jk} nepristranog procjenitelja $\widehat{p}_{jk}$ za p_{jk} dana s [1]

$$\sigma^2_{jk} = \frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j} + \frac{n_j-1}{n_j}\rho_{jk}p_{jk}(1-p_{jk}). \tag{6}$$

Gore naveden izraz za varijancu σ^2_{jk} nepristranog procjenitelja $\widehat{p}_{jk}$ za p_{jk} slijedi iz jednakosti za varijancu sume jednako distribuiranih slučajnih varijabli

[1] Vidjeti [10] Huschens, Locarek - Junge, 2000. god., str. 44.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ koje su u parovima korelirane sa koeficijentom korelacije ρ, i čija je varijanca jednaka σ^2. Raspis navedene jednakosti dan je u nastavku:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \\
&= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\sigma^2}\sqrt{\sigma^2}} \cdot \sigma^2 = \\
&= n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \mathrm{Corr}(X_i, X_j) \cdot \sigma^2 = \\
&= n\sigma^2 + n(n-1)\rho\sigma^2
\end{aligned}$$

Obzirom da je $\widetilde{c}_{jk}$ suma n_j koreliranih Bernoullijevih varijabli, slijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\widehat{p}_{jk}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{c_{jk}}{n_j}\right) = \frac{1}{n_j^2}\,\mathrm{Var}(c_{jk}) = \\
&= \frac{1}{n_j^2}\Big(n_j p_{jk}(1-p_{jk}) + n_j(n_j-1)\rho_{jk} p_{jk}(1-p_{jk})\Big) = \\
&= \frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j} + \frac{(n_j-1)}{n_j}\rho_{jk} p_{jk}(1-p_{jk}),
\end{aligned}$$

što je upravo izraz za σ_{jk}^2 procjenitelja $\widehat{p}_{jk}$ za p_{jk} dan u relaciji (6).

Promotrit ćemo što se događa kada broj kredita kojima je inicijalno dodijeljen rejting j, n_j, teži u beskonačnost, no za to će nam trebati dva tipa konvergencije slučajnih varijabli koje se pojavljuju u teoriji vjerojatnosti pa u nastavku najprije donosimo njihove definicije. [2]

Definicija 2.1. *Kažemo da niz $(X_n, n \in \mathbb{N})$ slučajnih varijabli **konvergira po vjerojatnosti** prema slučajnoj varijabli X ako za svako $\epsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

To označujemo (P) $\lim_n X_n = X$ ili $X_n \xrightarrow{P} X (n \to \infty)$.

[2] Vidjeti [18] Sarapa, 2002. god., poglavlje 10.5. *Konvergencija slučajnih varijabli*

Definicija 2.2. *Neka je* $1 \leq p < \infty$ *i neka je* $X_n, X \in L^p(\Omega)$ $(n \in \mathbb{N})$. *Kažemo da niz* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ ***konvergira u srednjem reda*** p *prema* X *ako vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

To označujemo $(L^p) \lim_n X_n = X$ *ili* $X_n \xrightarrow{L^p} X(n \to \infty)$.

Veza između ta dva tipa konvergencije dana je s

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X(1 \leq p > \infty).$$

Obrat ne vrijedi, to jest konvegencija po vjerojatnosti ne povlači konvergenciju u srednjem reda p, a da bi to vidjeli možemo za kontraprimjer uzeti $p = 2$ i niz slučajnih varijabli $(X_n, n \in \mathbb{N})$, $X_n = \sqrt{n}\ \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)$, gdje je U uniformna varijabla na intervalu [0,1]. U tom slučaju,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(|\sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)| > \epsilon).$$

Za proizvoljno malen ϵ i dovoljno velik n, gornja jednakost postaje

$$\mathbb{P}(|\sqrt{n}\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(U)| > \epsilon) = \mathbb{P}(0 \leq U \leq \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

odakle imamo $X_n \xrightarrow{P} 0$, ali

$$E[X_n^2] = n \int_0^{\frac{1}{n}} dx = 1$$

pa stoga $X_n \overset{L^2}{\not\longrightarrow} 0$.

Sada se možemo vratiti na varijancu σ_{jk}^2 nepristranog procjenitelja $\widehat{p}_{jk}$ za p_{jk}. Kad broj kredita kojima je inicijalno dodijeljen rejting j, n_j, teži u beskonačnost dobivamo

$$\lim_{n_j\to\infty} \sigma_{jk}^2 = \rho_{jk} p_{jk}(1 - p_{jk}),$$

odakle slijedi da niz slučajnih varijabli $\widehat{p}_{jk}$ ne zadovoljava zakon velikih brojeva u slučaju $\rho_{jk} > 0$. Naime,

$$\lim_{n_j\to\infty} \sigma_{jk}^2 = \lim_{n_j\to\infty} \mathbb{E}[(\widehat{p}_{jk} - \mathbb{E}(\widehat{p}_{jk}))^2] \neq 0$$

za $\rho_{jk} > 0$, odnosno niz $\widehat{p}_{jk}$ ne konvergira u srednjem reda 2 prema svome očekivanju. Općenito, to što niz ne konvergira u srednjem reda 2 ne implicira tvrdnju da niz ne konvergira ni po vjerojatnosti. Ipak, obzirom da je slučajna varijabla $\widehat{p}_{jk}$ ograničena svi momenti višeg reda postoje pa u ovom slučaju konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju u srednjem reda 2. Ta tvdnja proizlazi iz sljedećeg teorema:

Teorem 2.3. [3] *Pretpostavimo da za niz slučajnih varijabli* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *vrijedi* $X_n \xrightarrow{P} X$ *i* $|X_n| \leq Y$, $\forall n$ *i slučajnu varijablu* Y *t.d.* $Y \in L^p$. *Tada vrijedi* $|X| \in L^p$ *i* $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

Budući da niz $\widehat{p}_{jk}$ ne konvergira u srednjem reda 2 prema svome očekivanju, iz gornjeg teorema po obratu po kontrapoziciji slijedi da niz $\widehat{p}_{jk}$ ne konvergira ni po vjerojatnosti. Dakle, niz $\widehat{p}_{jk}$ ne zadovoljava zakon velikih brojeva za $\rho_{jk} > 0$. Za $\rho_{jk} = 0$ zakon velikih brojeva vrijedi.

Za koeficijent korelacije ρ općenito vrijedi $\rho \in [-1, 1]$, no u ovom slučaju možemo dati i precizniju donju ogradu. Prisjetimo se da je varijanca σ^2_{jk} procjenitelja $\widehat{p}_{jk}$ za p_{jk} dana s

$$
\begin{aligned}
0 \leq \mathrm{Var}(\widehat{p}_{jk}) &= \frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j} + \frac{(n_j - 1)}{n_j}\rho_{jk}p_{jk}(1-p_{jk}) \\
&= \frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j}(1 + (n_j - 1)\rho_{jk}),
\end{aligned}
$$

a obzirom da je $\frac{p_{jk}(1-p_{jk})}{n_j} > 0$ slijedi

$$
1 + (n_j - 1)\rho_{jk} \geq 0 \Longrightarrow \rho_{jk} \geq -\frac{1}{n_j - 1}.
$$

Uočimo da donja granica za koeficijent korelacije teži u nulu kad broj kredita n_j teži u beskonačnost.

Zakon velikih brojeva ne vrijedi ni ukoliko su koeficijenti korelacije među varijablama različiti, bilo sa zajedničkom pozitivnom donjom granicom, ili sa nezanemarivom pozitivnom prosječnom korelacijom, ili konstantnom korelacijom unutar blokova varijabli, pri čemu je korelacija unutar svakog bloka pozitivna.[4] Dakle, statistički rečeno, u slučaju koreliranih Bernoullijevih slučajnih varijabli, relativna frekvencija uspjeha nije konzistentan procjenitelj parametra p_{jk}.

Ipak, parametre ρ_{jk} odnosno koreliranost unutar portfelja možemo modelirati na konzistentan način u okviru *normalnog modela s pragom* sa jednim parametrom ρ.[5] Osnovna ideja je ta da na default možemo gledati kao na

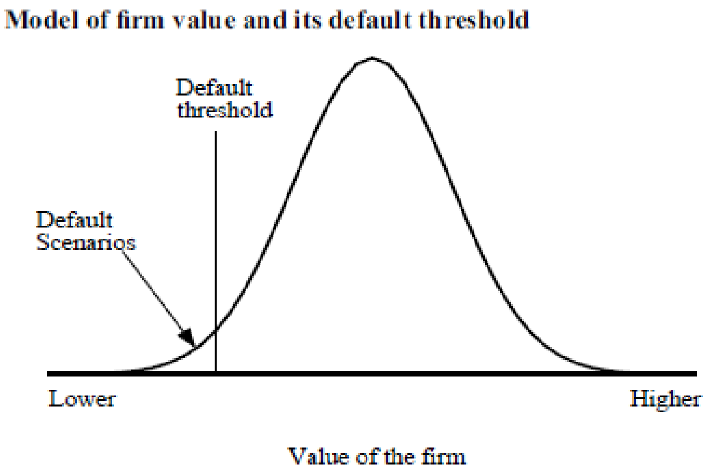
---

[3] Za dokaz teorema vidjeti [12] Jacod, Protter, 2004. god., poglavlje 17, *Convergence of Random Variables*

[4] Vidjeti [7] Finger, 1998. god, str. 5

[5] Vidjeti [3] Basel Committee on Banking Supervision, 2001. god., [8] Gupton, Finger, Bhatia, 1997. god., [13] Kim, 1999. god.

funkciju (volativne) vrijednosti imovine poduzeća koja je u podlozi. Takav pristup prvi je predložio Robert Merton i često se naziva opcijsko teorijsko vrednovanje duga (engl. *option theoretic valuation of debt*). Okvir se naslanja na Black-Scholes model vrednovanja opcija, uz pretpostavku da se kreditni rizik poduzeća može vrednovati analogno kao put opcija na vrijednost referentne imovine poduzeća. U Mertonovom modelu referentna vrijednost firme je slučajna varijabla, a motivacija je sljedeća: ako vrijednost imovine poduzeća toliko opadne da je manja od njegovih obveza, jasno je da poduzeće neće biti u mogućnosti ispuniti obveze. Dakle, poduzeće će nužno ući u stanje defaulta, a razinu imovine pri kojoj se to događa zvati ćemo prag za default (Slika 1[6]).

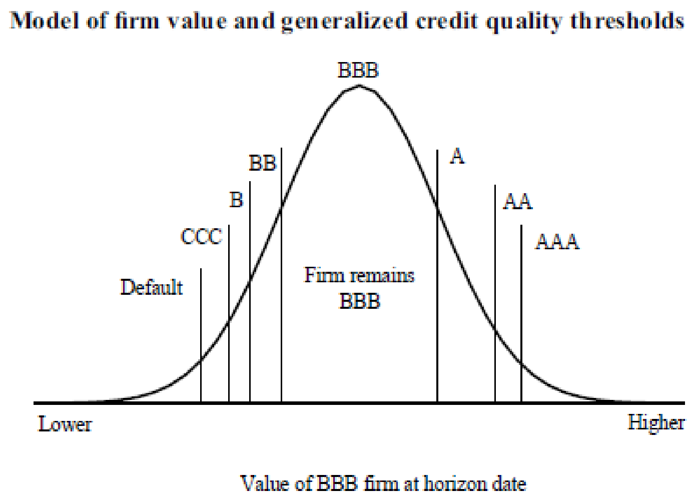


Slika 1: Prag za default

Mertonov model može se jednostavno proširiti tako da pored ulaska u default obuhvatimo i druge promjene rejtinga. Takva generalizacija onda osim praga defaulta zahtijeva i pragove za pogoršanje odnosno poboljšanje kreditne kvalitete. Osnovna ideja modela da promjena kreditnog rejtinga reflektira promjenu vrijednosti imovine poduzeća ilustrirana je slikom 2.[7]

Obzirom da nam je inicijalna namjera bila modelirati zajedničke vjerojatnosti poboljšanja i pogoršanja kreditne kvalitete te defaulta, ovaj okvir je praktičniji, budući je zajedničke vjerojatnosti teško procijeniti direktno. Stoga će naš pristup biti indirektan i sastoji se od dva koraka:

[6]Slika preuzeta iz [8] Gupton, Finger, Bhatia, 1997. god.
[7]Slika preuzeta iz [8] Gupton, Finger, Bhatia, 1997. god.



Slika 2: Generalizirani model kreditne kvalitete s pragom

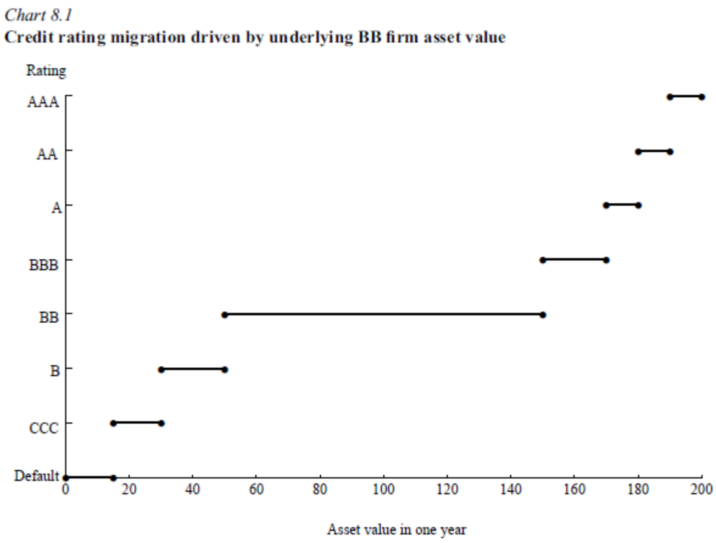
1. Predložiti referentni proces koji će biti pokretač za promjene kreditnog rejtinga. Time ćemo uspostaviti vezu između događaja koje želimo opisati (promjene kreditnog rejtinga), a koji nisu lako uočljivi, i procesa kojeg razumijemo i čiju nam je putanju jednostavno pratiti.

2. Procijeniti parametre referentnog procesa.

Neka je vrijednost imovine poduzeća proces koji je pokretač (engl. *driver*) za promjene kreditnog rejtinga. Kao što smo već spomenuli, očito je da vrijednost imovine poduzeća određuje njegovu sposobnost da otplati potraživanja kreditora, stoga pretpostavimo da postoji niz pragova za vrijednost imovine koji će odrediti kreditnu kvalitetu poduzeća na kraju promatranog perioda. Preciznije, pretpostavka je da postoje razine imovine takve da možemo konstruirati preslikavanje koje vrijednosti imovine pridružuje rejting, poput onog na slici 3[8] gdje je na primjeru hipotetskog poduzeća čija je imovina trenutno vrijedna 100 000 000 dolara (pa mu je shodno tome dodijeljen rejting BB) prikazana željena ovisnost vrijednosti imovine poduzeća i njegovog kreditnog rejtinga.

Vrijednosti imovine koje odgovaraju promjenama kreditnog rejtinga su tzv. pragovi. Pritom naglasimo da još uvijek ne znamo što su njihove vrijednosti, ali smo ustvrdili da postoji veza. Ukoliko zasad zanemarimo tu činjenicu i pretpostavimo da su nam pragovi poznati, preostaje nam modelirati promjenu vrijednosti imovine poduzeća kako bismo mogli opisati kretanje

[8]Slika preuzeta iz [8] Gupton, Finger, Bhatia, 1997. god.



Slika 3

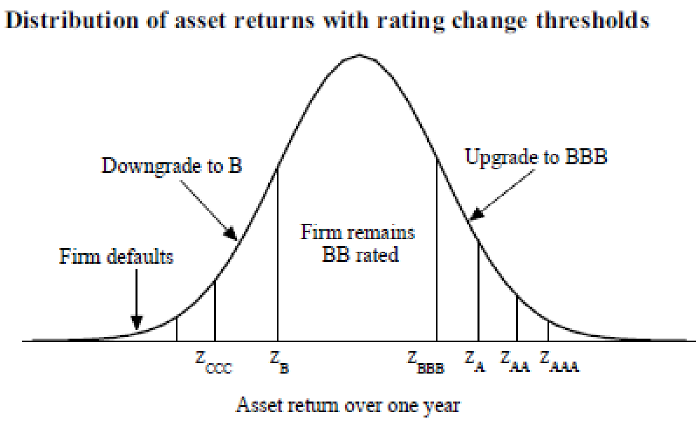
kreditnog rejtinga. Da bismo to napravili, pretpostavimo da su postotne promjene u vrijednosti imovine (tzv. povrati na imovinu, u oznaci R) normalno distribuirane, što nam omogućava da uspostavimo vezu između pragova imovine i prijelaznih vjerojatnosti. Naime, pretpostavili smo da postoje pragovi povrata na imovinu $z_1, z_2, \ldots, z_d$ takvi da ukoliko je $R < z_d$ dužnik ulazi u default; ako je $z_d < R < z_{d-1}$, dužniku je dodijeljen rejting $(d-1)$ itd. Obzirom da pretpostavljamo standardnu normalnu distribuciju povrata na imovinu, možemo izračunati vjerojatnosti pojave tih događaja:

$$\mathbb{P}(\{\text{dužniku je dodijeljen rejting d}\}) = \mathbb{P}(R < z_d) = \Phi(z_d)$$
$$\mathbb{P}(\{\text{dužniku je dodijeljen rejting d-1}\}) = \mathbb{P}(z_d < R < z_{d-1}) = \Phi(z_{d-1}) - \Phi(z_d)$$
$$\vdots$$

U relacijama iznad Φ označava funkciju distribucije standardne normalne slučajne varijable. Sada korištenjem inverza funkcije distribucije standardne normalne slučajne varijable i rješavanjem sustava možemo izračunati pragove povrata na imovinu. Jedno hipotetsko rješenje dano je na slici 4.[9]

Dosad smo opisivali kretanje rejtinga pojedinog dužnika obzirom na proces vrijednosti imovine. Da bismo opisali zajedničko kretanje rejtinga dvaju ili više kredita, pretpostavit ćemo da su pripadni povrati na imovinu korelirane standardno normalno distribuirane slučajne varijable i preostaje nam

[9]Slika preuzeta iz [8] Gupton, Finger, Bhatia, 1997. god.



Slika 4

samo specificirati koeficijent korelacije između njih. Time završavamo motivacijski primjer i dolazimo do normalnog modela s pragom s jednim parametrom ρ, kojeg formaliziramo u nastavku.

Normalni model s pragom sa jednim parametrom ρ specificira dakle posebnu strukturu zavisnosti (među kreditima unutar portfelja) na temelju standardne višedimenzionalne normalne razdiobe vektora $(R_1, \ldots, R_n)$ s ekvikorelacijskom matricom.[10] Pritom $R_i, i = 1, \ldots, n$, predstavlja standardizirani[11] povrat na imovinu, a n je broj dužnika. Ekvikorelacijska matrica n slučajnih varijabli je općenito pozitivno definitna matrica oblika $\Sigma = (1-\rho)I + \rho J$, pri čemu je je ρ koeficijent korelacije za svaki par varijabli, I jedinična matrica dimenzija $n \times n$, a J matrica jedinica, također dimenzija $n \times n$. Parametar $\rho > 0$ možemo interpetirati kao korelaciju među prosječnim povratima na imovinu.

U ovom modelu, svaki par varijabli $(X, Y) = (R_i, R_{i'})$, $i, i' = 1, \ldots, n$, $i \neq i'$ ima dvodimenzionalnu normalnu distribuciju. Pripadna funkcija gustoće dana je s

$$\varphi(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right). \tag{7}$$

Naime, općenita dvodimenzionalna normalna distribucija dana je funkcijom

[10] Vidjeti [16] Mardia, Kent, Bibby, 1979. god., str. 461

[11] Pod standardiziranim povratom pretpostavljamo normalno distribuiranu slučajnu varijablu R_i s očekivanjem 0 i varijancom 1, $R_i \sim N(0, 1)$.

gustoće

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\Bigg(-\frac{(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2-2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}+(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2}{2(1-\rho^2)}\Bigg)$$

pa je relacija (7) jednostavna posljedica toga da su povrati na imovinu standardizirani ($\mu_1=\mu_2=0$, $\sigma_1=\sigma_2=1$).

Vjerojatnosti $\mathbb{P}[(X,Y)\in(a,b)^2]$ računamo kao integral funkcije gustoće, budući se radi o neprekidnoj distribuciji, i dane su s

$$\beta(a,b;\rho)=\int_a^b\int_a^b\varphi(x,y;\rho)dxdy \tag{8}$$

Pragovi $z_{j1},...,z_{jd}$ za rejting j su u ovom modelu izvedeni iz $p_{j1},...,p_{j,d-1},p_{jd}$, i to rješavanjem sustava jednadžbi za svaki od inicijalnih kreditnih razreda $j=1,\dots,d-1$. Naime, da bismo konačno uspostavili vezu između kreditnih rejtinga i povrata na imovinu dovoljno je zahtijevati da su vjerojatnosti u stupcima tablice 1 jednake za svaki $j=1,\dots,d-1$.

Rejting	Vjerojatnost prijelaza	Vjerojatnost prijelaza u normalnom modelu s pragom
d	p_{jd}	$\Phi(z_{j,d})$
$d-1$	$p_{j,d-1}$	$\Phi(z_{j,d-1})-\Phi(z_{j,d})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	p_{j2}	$\Phi(z_{j,2})-\Phi(z_{j,3})$
1	p_{j1}	$1-\Phi(z_{j,2})$

Tablica 1: Vjerojatnosti prijelaza za dužnika s inicijalnim rejtingom j

Iz relacije $p_{jd}=\Phi(z_{j,d})$ možemo izračunati z_{jd} kao $z_{jd}=\Phi^{-1}(p_{jd})$. Potom,

$$\begin{aligned}p_{j,d-1}=\Phi(z_{j,d-1})-\Phi(z_{j,d})&\Rightarrow\Phi(z_{j,d-1})=p_{j,d-1}+p_{jd}\\&\Rightarrow z_{j,d-1}=\Phi^{-1}(p_{j,d-1}+p_{jd})\end{aligned}$$

odakle dobijemo prag $z_{j,d-1}$, a analognim iteracijama i ostale pragove. Vrijedi dakle

$$z_{jd}:=\Phi^{-1}(p_{jd}),z_{j,d-1}:=\Phi^{-1}(p_{jd}+p_{j,d-1}),\dots,z_{j2}=\Phi^{-1}(p_{jd}+p_{j,d-1}+\dots+p_{j2}),$$

gdje je Φ funkcija distribucije standardne normalne varijable, a Φ^{-1} njen inverz. Uočimo da ne postoji prag za prvi kreditni razred, obzirom da svaki povrat veći od z_{j2} rezultira dodjelom najvišeg mogućeg rejtinga.

Svaki kredit u kategoriji j je sada karakteriziran pomoću normalne slučajne varijable Z koja određuje migraciju u druge kreditne razrede, i to na način da je vjerojatnost da migrira u kategoriju k dana s

$$p_{jk} = \mathbb{P}(Z \in (z_{j,k+1}, z_{j,k})) = \Phi(z_k) - \Phi(z_{j,k+1}).$$

Simultana vjerojatnost prijelaza dva kredita i, i' iz kreditne kategorije j u kategoriju k dana je s

$$p_{jj:kk} = \mathbb{P}(\widetilde{e}_{i2} = \widetilde{e}_{i'2} = k | \widetilde{e}_{i1} = \widetilde{e}_{i'1} = j) = \beta(z_{j,k+1}, z_{jk}; \rho),$$

odnosno vjerojatnost da istovremeno dospiju u stanje neispunjavanja novčanih obveza dana je s [12]

$$p_{jj:dd} = \beta(-\infty, z_{jd}; \rho).$$

U specijalnom slučaju kada su migracije među kreditnim razredima nezavisne vrijedi $p_{jj:kk} = p_{jk}^2$. Ako migraciju iz j u k smatramo uspjehom, imamo korelirane Bernoullijeve varijable sa zajedničkim parametrom uspjeha p_{jk}, s vjerojatnošću simultanog uspjeha $p_{jj:kk}$ i koeficijentom korelacije među migracijama danim s

$$\rho_{jk} = \frac{p_{jj:kk} - p_{jk}^2}{p_{jk}(1 - p_{jk})}.$$

U slučaju $\rho = 0$ vrijedi $\rho_{jk} = 0$. Ukoliko je pak $\rho \geq 0$ možemo procijeniti koeficijent korelacije među migracijama ρ_{jk} metodom ograničene maksimalne vjerodostojnosti s

$$\widehat{\rho}_{jk} = max\left\{0; \frac{\beta(\widehat{z}_{j,k+1}, \widehat{z}_{j,k}; \rho) - \widehat{p}_{jk}^2}{\widehat{p}_{jk}(1 - \widehat{p}_{jk})}\right\}, \tag{9}$$

pri čemu je

$$\widehat{z}_{jk} = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=k}^{d} \widehat{p}_{ji}\right). \tag{10}$$

Procjenitelj standardne devijacije

$$\sigma_{jk} = \sqrt{\frac{p_{jk}(1 - p_{jk})}{n_j} + \frac{n_j - 1}{n_j}\rho_{jk}p_{jk}(1 - p_{jk})},$$

dan je s

$$\widehat{\sigma}_{jk} = \sqrt{\frac{\widehat{p}_{jk}(1 - \widehat{p}_{jk})}{n_j} + \frac{n_j - 1}{n_j}\widehat{\rho}_{jk}\widehat{p}_{jk}(1 - \widehat{p}_{jk})}, \tag{11}$$

i predstavlja generalizaciju formule (5), koja je bila rezultat dobiven u specijalnom slučaju za $\rho = 0$.

[12] Za detalje vidjeti [19] Saunders, 1999. god., str. 122-125

2.2 Analiza vremenske stabilnosti vjerojatnosti prijelaska

2.2.1 Akumuliranje tijekom vremena

Neka su sada dani podaci o migracijama između kreditnih razreda za m perioda. Potom, kao i ranije, sve migracije iste vrste prebrojimo i zapišemo u matricu, no obzirom da se povijesni podaci odnose na više vremenskih perioda uvodimo vremensku komponentu. Podatke stoga zapisujemo u m matrica $\mathbf{C}(\mathrm{t})$, za $t = 1, \ldots, m$, pri čemu je svaka matrica tipa $(d-1) \times d$. Opći element $c_{jk}(\mathrm{t})$ matrice $\mathbf{C}(\mathrm{t})$ predstavlja broj migracija iz kreditne kategorije j u kategoriju k primijećen u periodu t. Matrice $\mathbf{C}(\mathrm{t})$ izračunamo na temelju m skupova podataka o promjeni kreditnog rejtinga.

Očito pitanje koje se nameće je sljedeće: možemo li pretpostaviti da su prijelazne vjerojatnosti konstantne kroz vrijeme ili pretpostavka o vremenskoj stabilnosti nije opravdana? Jedan od načina da analiziramo stabilnost prijelaznih vjerojatnosti u vremenu je taj da usporedimo procijenjene vjerojatnosti za m perioda sa prijelaznim vjerojatnostima procijenjenim na temelju svih povijesnih podataka.

Tzv. brojeve akumuliranih migracija kroz m perioda definiramo s

$$c_{jk}^{+} := \sum_{t=1}^{m} c_{jk}(t) \tag{12}$$

i zajedno ih zapisujemo u matrici

$$\mathbf{C}^{+} := \sum_{t=1}^{m} \mathbf{C}(t)$$

tipa $(d-1) \times d$. Prijelazne vjerojatnosti za određeni period izračunamo kao

$$\widehat{p}_{jk}(t) := \frac{c_{jk}(t)}{n_j(t)}, \quad t = 1, \ldots, m \tag{13}$$

gdje je

$$n_j(t) := \sum_{k=1}^{d} c_{jk}(t)$$

ukupan broj migracija u periodu t. Vjerojatnosti prijelaza u određenom periodu definirane s (13) usporedimo s prijelaznim vjerojatnostima procijenjenim na temelju svih opaženih kreditnih migracija. Agregatne vjerojatnosti možemo procijeniti pomoću broja akumuliranih migracija s

$$\hat{p}_{jk}^{+} := \frac{c_{jk}^{+}}{n_j^{+}} \tag{14}$$

pri čemu je

$$n_j^{+} := \sum_{k=1}^{d} c_{jk}^{+} = \sum_{t=1}^{m} n_j(t), \quad j = 1, \ldots, d-1.$$

2.2.2 Stacionarnost vjerojatnosti prijelaza

U ovom poglavlju bavimo se vremenskom invarijantnošću vjerojatnosti prijelaza. Za to će nam trebati statistički testovi pa u nastavku najprije donosimo kratak uvod u testiranje statističkih hipoteza[13] i formalne definicije koje su nam potrebne.

Definicija 2.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor i* $\mathcal{P}$ *množina vjerojatnosnih mjera na* $(\Omega, \mathcal{F})$*. Tada je uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ***statistička struktura****. Ako je* $\mathcal{P}$ *jednočlana množina, tada je statistička struktura vjerojatnosni prostor. Često je množina* $\mathcal{P}$ *parametrizirana:* $\mathcal{P} = \{\ \mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$*.* Θ *je skup vrijednosti parametra* θ*. Pretpostavljamo* $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m, m \geq 1$*, te da je parametrizacija injektivna,*

$$\theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow \mathbb{P}_{\theta_1} \neq \mathbb{P}_{\theta_2}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta.$$

Definicija 2.5. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *slučajna varijabla i* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *statistička struktura,* $\mathcal{P} = \{\ \mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$*. Za* $\theta \in \Theta$ *imamo* $F(x; \theta) = \mathbb{P}_\theta(X \leq x), x \in \mathbb{R}^d$*. Tada je* $F(\cdot; \theta)$ *funkcija distribucije od* X *uz vjerojatnost* $\mathbb{P}_\theta \in \mathcal{P}$*. Kažemo da* X *pripada statističkom modelu* $\mathcal{P}' = \{F(\cdot; \theta) : \theta \in \Theta\}$*.*

Statistička hipoteza je pretpostavka o populacijskoj razdiobi promatrane varijable. Populacija je grupa objekata ili osoba za koju izučavamo određeno statističko obilježje. Obzirom da je takav skup često prevelik da bismo mogli popisati sve vrijednosti izučavanog statističkog obilježja, analizu obilježja provodimo na temelju reprezentativnog uzorka iz populacije. Cilj nam je na osnovu tih podataka donijeti određeni zaključak o populacijskoj razdiobi

[13] Više o testiranju statističkih hipoteza može se naći u [14] E. L. Lehmann, J. P. Romano, 2005. god., poglavlje *Uniformly Most Powerful Tests*, str. 56-110, [11] M. Huzak, 2006. god., poglavlje *Testiranje statističkih hipoteza* i [20] I. Šošić, 2004. god., poglavlje *Testiranje hipoteza o parametru*

promatranog statističkog obilježja. U slučaju parametarskih modela za populacijske razdiobe, statistička hipoteza je bilo koja izjava o vrijednostima parametra. Osnovna hipoteza koja se testira zove se nulhipoteza i označava se sa $\mathcal{H}_0$. Nulhipoteza često predstavlja aktualno znanje o vrijednostima parametara ili neutralnu izjavu. Uz nulhipotezu, postavlja se i njoj alternativna hipoteza koju označavamo sa $\mathcal{H}_1$ i njen sadržaj uvijek proturječi sadržaju nulte hipoteze, vrijedi

$$\mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \mathcal{P}', \quad \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}_1 = \emptyset.$$

Sud koji izvire iz odluke o prihvaćanju ili neprihvaćanju nulte hipoteze nije kategoričan jer se odluka donosi na temelju vrijednosti iz slučajnog uzorka, odnosno dijela podataka. Statistički test je stoga pravilo podjele prostora vrijednosti uzoraka na dva disjunktna podskupa: na područje vrijednosti uzoraka koji su konzistentni sa hipotezom $\mathcal{H}_0$ i na njegov komplement u kojemu se nalaze vrijednosti nekonzistentne sa $\mathcal{H}_0$. Odluka o odbacivanju ili ne odbacivanju nulte hipoteze donosi se na osnovi realizacije testne statistike. Slika testne statistike odnosno područje vrijednosti koje ona poprima dijeli se ponovno na područje vrijednosti konzistentnih sa $\mathcal{H}_0$ i na područje vrijednosti nekonzistentnih sa $\mathcal{H}_0$. Vrijedi dakle

$$\mathcal{C} \cup \mathcal{C}^c = \mathcal{X}, \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^c = \emptyset,$$

pri čemu smo s $\mathcal{X}$ označili skup svih mogućih realizacija testne statistike, a s $\mathcal{C}$ skup svih realizacija nekonzistentnih s $\mathcal{H}_0$. Skup $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ nazivamo kritično područje. Ukoliko realizacija testne statistike upada u kritično područje, odbacit ćemo $\mathcal{H}_0$ u korist alternativne hipoteze. Obzirom da zaključak donosimo na temelju slučajnog uzorka u postupku odlučivanja mogu se pojaviti dvije vrste pogrešaka. Pogreška prve vrste nastaje kada se odbaci istinita nulta hipoteza. Ukoliko prihvatimo nultu hipotezu premda ista nije istinita, počinili smo pogrešku druge vrste. Razina značajnosti α je vjerojatnost pogreške prve vrste. Idealan test bi bio onaj za koji bi bilo moguće vjerojatnosti grešaka oba tipa učiniti proizvoljno malima. Takav test međutim ne postoji - smanjivanjem vjerojatnosti pogreške prve vrste povećava se vjerojatnost pogreške druge vrste i obratno. Neyman-Pearsonova teorija polazi od fiksne razine značajnosti α i konstruira test za koji vrijedi da je pogreška druge vrste β najmanja moguća za sve parametre specificirane alternativnom hipotezom $\mathcal{H}_1$. Ključan rezultat je Neyman-Pearsonova lema[14] koja daje najbolji test (najmanji β uz fiksno α) u slučaju kad su obje hipoteze, nulta i alternativna,

[14] Za precizan iskaz i dokaz leme vidi [14] E. L. Lehmann, J. P. Romano, 2005. god., poglavlje *The Neyman–Pearson Fundamental Lemma*, str. 59-63

jednostavne hipoteze. Statistička hipoteza je jednostavna ako jednoznačno određuje populacijsku razdiobu, primjerice $\mathcal{H} : \theta = 0$. Jedan primjer složene hipoteze bio bi $\mathcal{H} : \theta \neq 0$. Ako je barem jedna od hipoteza složena, tada test koji je najbolji za sve parametre postoji samo u specijalnim slučajevima (npr. kod jednostranih testova). U slučajevima kada najbolji test u smislu Neymman-Pearsonove teorije ne postoji, drugi pristup za nalaženje dobrih testova je metoda omjera vjerodostojnosti.

Klasičan pristup kod testiranja statističkih hipoteza je donijeti odluku o prihvaćanju nulte hipoteze ili odbacivanju iste u korist alternativne na zadanoj razini značajnosti. Međutim, takav pristup ne daje informacije o tome koliko su argumenti za odbacivanje ili prihvaćanje $\mathcal{H}_0$ jaki. Puno je informativniji pristup u kojemu se uz vrijednost testne statistike računa njena ***p*-vrijednost**. p-vrijednost je vjerojatnost pogreške prve vrste u odnosu na kritično područje kojemu je opažena vrijednost testne statistike granična vrijednost. Drugim riječima, p-vrijednost je najmanja razina značajnosti na kojoj bismo za realiziranu vrijednost testne statistike odbacili $\mathcal{H}_0$ u korist zadane alternative $\mathcal{H}_1$. Logika zaključivanja je sljedeća:

- ako je $p \leq \alpha$, onda se realizacija testne statistike nalazi u kritičnom području pa odbacujemo $\mathcal{H}_0$ u korist $\mathcal{H}_1$ na nivou značajnosti α,

- ako je $p \geq \alpha$, onda se realizacija testne statistike ne nalazi u kritičnom području pa ne možemo odbaciti $\mathcal{H}_0$ u korist $\mathcal{H}_1$ na nivou značajnosti α.

Dakle, p-vrijednost mjeri koliko je realizacija testne statistike "daleko" od ruba kritičnog područja. Što je p-vrijednost manja, to su dokazi protiv $\mathcal{H}_0$ jači.

Prije nego se vratimo na prijelaze među kreditnim razredima uvedimo još pojam multinomne distribucije pomoću koje ćemo modelirati spomenute prijelaze. Multinomna distribucija je generalizacija binomne distribucije - modelira ponavljanje nezavisnih pokusa n puta, pri čemu svaki pokus ima $k \geq 2$ mogućih ishoda $I_1, \ldots, I_k$. U svakom pokusu se ishod I_j dogodi s vjerojatnošću p_j. Pritom vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Definiramo slučajne varijable:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{broj pokusa koji su rezultirali ishodom } I_1, \\ X_2 &= \text{broj pokusa koji su rezultirali ishodom } I_2, \\ &\vdots \\ X_k &= \text{broj pokusa koji su rezultirali ishodom } I_k. \end{aligned}$$

Tada slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ ima multinomnu distribuciju s indeksom n i parametrom $p = (p_1, \dots, p_k)$, u oznaci $X \sim Mult(n;p)$. Komponente multinomnog slučajnog vektora imaju binomnu distribuciju: $X_j \sim B(n, p_j)$, $j = 1, \dots, k$. Očito vrijedi $X_1 + \cdots + X_k = n$.

Promotrimo sada vektor $(c_{j1}(t), \dots, c_{jd}(t))$. Na i-toj komponenti vektora nalazi se broj migracija iz j u i, odnosno broj kreditnih plasmana koji su u periodu t krenuvši iz kreditne kategorije j završili u kategoriji i. Uz pretpostavku o nezavisnosti migracija, taj vektor je realizacija multinomno distribuiranog slučajnog vektora

$$(\widetilde{c}_{j1}(t), \widetilde{c}_{j2}(t) \dots, \widetilde{c}_{jd}(t)) \sim Mult(n_j(t); p_{j1}(t), \dots, p_{jd}(t)),$$

gdje $p_{jk}(t)$ označava vjerojatnost prijelaza iz j u k u periodu t.

Fiksirajmo $j \in 1, \dots, d-1$. Nulta hipoteza o homogenosti

$$\mathcal{H}_0 : p_{j1}(1) = \cdots = p_{j1}(m), p_{j2}(1) = \cdots = p_{j2}(m), \dots, p_{jd}(1) = \cdots = p_{jd}(m)$$

može se testirati statistikom

$$X_j^2 = \sum_{k=1}^{d} \sum_{t=1}^{m} \frac{(\tilde{c}_{jk}(t) - n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+})^2}{n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+}}. \tag{15}$$

Izraz $\tilde{c}_{jk}(t)$ predstavlja opažene frekvencije iz uzorka, a $n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+}$ očekivane teorijske frekvencije. Navedena statistika uz pretpostavku $\mathcal{H}_0$ ima asimptotsku χ^2-distribuciju s $(d-1)(m-1)$ stupnjeva slobode. Odbacujemo nultu hipotezu $\mathcal{H}_0$ na razini značajnosti α ako je realizacija testne statistike veća od $(1-\alpha)$-kvantila χ^2-distribucije s $(d-1)(m-1)$ stupnjeva slobode. $p-$vrijednost testa dana je s $p = \mathbb{P}(X_j^2 > x_j^2 | \mathcal{H}_0)$. Preciznije, računamo vjerojatnost da testna statistika X_j^2 poprimi ekstremniju vrijednost od vrijednosti x_j^2, konkretne realizacije testne statistike na temelju opaženih prijelaza među kreditnim razredima, pod uvjetom da je nulta hipoteza o homogenosti točna. Uz pretpostavku $\mathcal{H}_0$, poznata nam je asimptotska razdioba testne statistike pa $p-$vrijednost testa možemo izračunati kao vrijednost repa[15] funkcije distribucije χ^2-razdiobe u točki x_j^2.

Gore navedenih $(d-1)$ nultih hipoteza o homogenosti za svako od inicijalnih stanja j kraće možemo zapisati u kombiniranu nultu hipotezu

$$\mathcal{H}_0 : p_{jk}(t) = \cdots = p_{jk}(m), \quad t = 1, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, d-1, \quad k = 1, \dots, d.$$

[15] Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Rep funkcije distribucije definiran je s $\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > t) = 1 - F(x)$.

U gornjoj hipotezi je zapravo formulirana tvrdnja da je matrica prijelaznih vjerojatnosti konstantna tijekom vremena pa hipotezu možemo ekvivalentno zapisati kao

$$\mathcal{H}_0 : \mathbf{P}(1) = \mathbf{P}(2) = \cdots = \mathbf{P}(m),$$

gdje $\mathbf{P}$(t) označava matricu prijelaza u periodu t s općim elementom $p_{jk}(t)$. Kombinirana nulta hipoteza o homogenosti može se testirati statistikom

$$X^2 = \sum_{j=1}^{d-1} X_j^2, \tag{16}$$

koja, pod pretpostavkom $\mathcal{H}_0$, ima asimptotski χ^2-distribuciju sa $(d-1)^2(m-1)$ stupnjeva slobode. Odbacit ćemo kombiniranu hipotezu na razini značajnosti α ukoliko je realizacija testne statistike veća od $(1-\alpha)$-kvantila χ^2-distribucije s $(d-1)^2(m-1)$ stupnjeva slobode. U tom slučaju barem jedna od nultih hipoteza unutar kombinirane hipoteze nije istinita. $p-$vrijednost testa dana je s $p = \mathbb{P}(X^2 > x^2|\mathcal{H}_0)$, gdje je x^2 konkretna realizacija testne statistike na temelju opaženih prijelaza među kreditnim razredima, a računamo je analogno kao kod prijašnjeg testa.

Ovaj pristup u testiranju vremenske stabilnosti matrice prijelaza stvara dva problema. Prvo, gornja dva testa su bazirana na pretpostavci o nezavisnosti migracija među kreditnim razredima, za što smo već rekli da je u praksi rijetkost. Drugi problem je taj što su obje testne statistike samo asimptotski χ^2-distribuirane. Dakle, potreban nam je velik uzorak za provedbu testa. U literaturi se kao donja ograda često navodi barem pet opservacija unutar svakog teorijskog razreda. U našem slučaju to bi značilo da za sve j i k mora vrijediti $n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+} \geq 5$, što je u kontekstu kreditnih migracija težak uvjet za ispuniti.

Gornje dvije χ^2-statistike su Pearsonovog tipa. Druge dvije često korištene i asimptotski ekvivalentne statistike su odgovarajuće χ^2-statistike Neymanovog tipa

$$Y_j^2 = \sum_{k=1}^{d} \sum_{t=1}^{m} \frac{(\tilde{c}_{jk}(t) - n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+})^2}{\tilde{c}_{jk}(t)}, \quad Y^2 = \sum_{j=1}^{d-1} Y_j^2$$

i χ^2-statistika

$$G_j^2 = 2\sum_{k=1}^{d} \sum_{t=1}^{m} \tilde{c}_{jk}(t) \ln\left[\frac{\tilde{c}_{jk}(t)}{n_j(t)\hat{p}_{jk}^{+})^2}\right], \quad G^2 = \sum_{j=1}^{d-1} G_j^2,$$

koja slijedi iz Wilksovog omjera log vjerodostojnosti.[16]

Uzimajući u obzir snažne pretpostavke na kojima su navedeni testovi bazirani, možemo se okrenuti jednostavnijem pristupu koji točkovne procjenitelje $\hat{p}_{jk}(t)$ nadopunjuje s procijenjenim standardnim greškama

$$\widehat{\sigma}_{jk}(t) = \sqrt{\frac{\widehat{p}_{jk}(t)(1 - \widehat{p}_{jk}(t))}{n_j(t)}}$$

za svaki period $t \in 1, \ldots, m$. Za korelirane migracije procijenjena standardna devijacija se izračuna pomoću formule (11). Ideja je potom grafički istodobno prikazati

$$\widehat{p}_{jk}^{+}, \quad \widehat{p}_{jk}(t), \quad \widehat{p}_{jk}(t) \pm 2\widehat{\sigma}_{jk}(t), t = 1, \ldots, m \tag{17}$$

za $j = 1, \ldots, d-1$ i $k = 1, \ldots, d$ i na temelju vizualizacije zaključiti pokazuju li agregatne prijelazne vjerojatnosti isti trend kao i prijelazne vjerojatnosti u periodu $t = 1, \ldots, m$.

2.2.3 Primjer

U ovom poglavlju ilustriramo dosad razrađenu teoriju konkretnim primjerom. Primjer je baziran na prijelaznim matricama danim u članku *Stability of rating transitions* objavljenom u *Journal of Banking & Finance* 2000. god.[17] Podaci obuhvaćaju dugoročne obveznice čiju je kreditnu kvalitetu ocijenila agencija za dodjelu kreditnog rejtinga Moddy's, u periodu od 1970. do 1997. godine. Obveznice su razvrstane u sljedećih 8 kategorija: Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa i C/Ca. Kategorija Def predstavlja stanje defaulta i nju ne promatramo kao inicijalni rejting obzirom da pretpostavljamo da se dužnikova kreditna kvaliteta ne može popraviti jednom kad uđe u stanje defaulta. Navedena Moddyjeva alfabetska skala bila je u upotrebi do 1982. godine, nakon čega je zamijenjena sa proširenom skalom koja svaki od šest razreda Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa dijeli još na tri podrazreda. Primjerice razred Aaa je podijeljen u razrede Aaa1, Aaa2 i Aaa3, i u Aaa1 nalaze se financijski instrumenti najviše kreditne kvalitete.

[16]Za detalje o navedenim testnim statistikama vidjeti [4] Bishop, Fienberg, Holland, 1975. god, str. 58, 124-127, 293-294, 349-350, 472-474, 513-516

[17]Za detalje vidjeti spomenuti članak, Nickell, Perraudin, Varotto, 2000. god., [17]

Umjesto da koristimo originalne matrice tipa 8×9, slijedit ćemo pristup korišten u knjizi *Applied Quantitative Finance*[18] i koristiti sažete matrice: originalne podatke spajamo u $d = 4$ osnovne kreditne kategorije A, B, C i D, gdje D predstavlja kategoriju defaultiranih kredita.

Podaci o broju akumuliranih migracija u periodu od 1970. do 1997. godine dani su u matrici

$$C = \begin{bmatrix} 21726 & 790 & 0 & 0 \\ 639 & 21484 & 139 & 421 \\ 0 & 44 & 307 & 82 \end{bmatrix}.$$

U tablici 2 dana je jednogodišnja prijelazna matrica koja odgovara podacima.

Rejtinzi agencije Moody's u razdoblju 12/1970 - 12/1997

	Rejting na kraju razdoblja				
Inicijalni rejting	A	B	C	D	n_j
A	0.965 (0.001)	0.035 (0.001)	0.000 (0.000)	0.000 (0.000)	22 516
B	0.028 (0.001)	0.947 (0.001)	0.006 (0.001)	0.019 (0.001)	22 683
C	0.000 (0.000)	0.102 (0.015)	0.709 (0.022)	0.189 (0.019)	433

Tablica 2: Prijelazna matrica

Elementi tablice predstavljaju uzoračku frekvenciju prijelaza iz inicijalnog kreditnog razreda j (danog na lijevoj strani tablice) u finalni razred (dan u vrhu tablice) podijeljenu sa ukupnim brojem obveznica koje su na početku razdoblja bile u odgovarajućem inicijalnom razredu. Broj obveznica na početku razdoblja po kategorijama n_j dan je u krajnjem desnom stupcu tablice. Iz tablice vidimo da se volatilnost promjene kreditnog rejtinga povećava kako se kreditna kvaliteta smanjuje. Primjerice, za A-rangirane dužničke instrument vjerojatnost da rejting ostane nepromijenjen godinu dana poslije jest 96.5%. S druge strane, obveznice koje se nalaze u špekulativnim razredima B i C sljedeće godine će ostati u istom razredom s vjerojatnošću 94.7% i 70.9%, respektivno. Točnost procjene vjerojatnosti dana je u tablici kao standardna devijacija[19] zapisana unutar zagrada ispod

[18] Vidjeti [9] Härdle, Kleinow, Stahl, 2002. god., str. 98-100

[19] Standardnu devijaciju izračunali smo za slučaj nezavisnih migracija, $\rho = 0$.

svake prijelazne vjerojatnosti. Možemo zaključiti da se manjim inicijalnim brojem obveznica unutar razreda i većom volatilnosti promjene kreditne kategorije za lošije rangirane obveznice preciznost procjene prijelaznih vjerojatnosti smanjuje - redak koji odgovara inicijalnom rejtingu C pokazuje znatno veće odstupanje od procijenjenih vrijednosti naspram ostalih redaka. To je jedan od problema kod primjene modela kreditnog rizika, obzirom da promjene rejtinga koje znatno utječu na vrijednost portfelja obično obuhvaćaju niže rangirane instrumente. Nadalje, iz perspektive modeliranja kreditnog rizika veoma je važan ciklus u kojem se ekonomija nalazi stoga nam je sljedeći korak proučiti ovisnost prijelaznih vjerojatnosti o poslovnom ciklusu. Da bismo to mogli napraviti definirati ćemo različite razine ekonomske aktivnosti i razdijeliti Mooddyjeve podatke o kreditnim rejtinzima obveznica u tri kategorije:

- dno poslovnog ciklusa
- normalna faza poslovnog ciklusa
- vrh poslovnog ciklusa

ovisno o tome da li je realni BDP u zemlji izdavatelja obveznice bio u gornjoj, srednoj ili donjoj trećini stopa rasta zabilježenih u razdoblju 1970. do 1997. godine.

Podaci o broju akumuliranih migracija za svaku od faza poslovnog ciklusa dani su u matricama $C(1), C(2)$ i $C(3)$. Matrica $C(1)$ odgovara dnu poslovnog ciklusa, $C(2)$ normalnoj fazi, a $C(3)$ vrhu poslovnog ciklusa:

$$C(1) = \begin{bmatrix} 7434 & 277 & 0 & 0 \\ 273 & 7306 & 62 & 187 \\ 0 & 15 & 94 & 33 \end{bmatrix},$$

$$C(2) = \begin{bmatrix} 7125 & 305 & 0 & 0 \\ 177 & 6626 & 35 & 147 \\ 0 & 15 & 92 & 24 \end{bmatrix},$$

$$C(3) = \begin{bmatrix} 7167 & 208 & 0 & 0 \\ 189 & 7552 & 42 & 87 \\ 0 & 14 & 121 & 25 \end{bmatrix}.$$

Pripadajuće matrice procijenjenih prijelaznih vjerojatnosti dane su u tablicama 3, 4 i 5, respektivno.

	Rejting na kraju razdoblja				
Inicijalni rejting	A	B	C	D	n_j
A	0.964	0.036	0.000	0.000	7711
B	0.035	0.933	0.008	0.024	7828
C	0.000	0.106	0.662	0.232	142

Tablica 3: Prijelazna matrica za dno poslovnog ciklusa

	Rejting na kraju razdoblja				
Inicijalni rejting	A	B	C	D	n_j
A	0.959	0.041	0.000	0.000	7430
B	0.025	0.949	0.005	0.021	6985
C	0.000	0.115	0.702	0.183	131

Tablica 4: Prijelazna matrica za normalnu fazu poslovnog ciklusa

	Rejting na kraju razdoblja				
Inicijalni rejting	A	B	C	D	Inicijalni broj obveznica
A	0.972	0.028	0.000	0.000	7375
B	0.024	0.960	0.005	0.011	7870
C	0.000	0.088	0.756	0.156	160

Tablica 5: Prijelazna matrica za vrhunac poslovnog ciklusa

Analizom tablica uočavamo da su na vrhu poslovnog ciklusa niže rangirane obveznice manje volatilne i manje sklone daljnjem pogoršanju kreditne kvalitete. Vjerojatnosti defaulta su posebno osjetljive na faze poslovnog ciklusa i očekivano, najveće su u razdoblju loše opće ekonomske situacije. Što se investicijskog razreda tiče, vidimo da je volatilnost najmanja na vrhuncu poslovnog ciklusa. Ipak, uočavamo da se efekt poslovnog ciklusa na visoko rangirane obveznice više odražava kroz porast volatilnosti vjerojatnosti prijelaza nego kroz sistematsko pogoršanje kreditne kvalitete takvih obveznica.

U nastavku ćemo za ilustrativne svrhe koristiti matrice $C(1)$, $C(2)$ i $C(3)$ kao da su njima dani podaci o broju kreditnih migracija za $m = 3$ vremenska perioda. Želimo provjeriti opravdanost pretpostavke o vremenskoj stabilnosti matrice prijelaza pa ćemo Pearsonovom χ^2-statistikom testirati nultu hipotezu da podaci za dana tri perioda dolaze iz iste teorijske distribucije prijelaznih vjerojatnosti. Očito, iz same konstrukcije matrica možemo očekivati da će rezultati testa odbaciti nultu hipotezu.

Najprije testiramo homogenost svakog retka matrice prijelaza. Tri χ^2-statistike sa $6 = 3 \cdot (2-1)$ stupnjeva slobode imaju $p-$vrijednosti redom $0.005559689, 1.938872e-12, 0.6974296$. Za prva dva retka prijelazne matrice odbacit ćemo stoga nultu hipotezu na svim uobičajenim razinama značajnosti obzirom da se radi o jako malim vrijednostima. S druge strane, test za treći redak ima veliku $p-$vrijednost, no broj migracija iz kreditnog razreda C je malen u odnosu na broj migracija iz prve dvije kategorije pa je očito da je test u tom slučaju ograničen veličinom uzorka. χ^2- statistika za simultano testiranje jednakosti dane tri prijelazne matrice ima $18 = 3^2 \cdot (3-1)$ stupnjeva slobode i $p-$vrijednost $2.340117e-11$, stoga ćemo nultu hipotezu o homogenosti prijelazne matrice odbaciti pri bilo kojoj uobičajenoj razini značajnosti.

Sada usporedimo matricu prijelaznih vjerojatnosti $\widehat{P}$ (danu tablicom 2) za cijeli period 1970. - 1977. sa matricom $\widehat{P}(2)$, baziranom na podacima nastalim u vrijeme normalne faze poslovnog ciklusa (tablica 4). Moguće je da u ovom slučaju test neće indicirati značajne razlike među prijelaznim matricama $\widehat{P}$ i $\widehat{P}(2)$, obzirom da očekujemo da su dno i vrh poslovnog ciklusa relativno rijetka ekstremna odstupanja od normalnog ekonomskog okruženja. Ponovo koristimo Pearsonov χ^2- test homogenosti, najprije za svako inicijalno stanje posebno, a potom za čitave matrice. χ^2- statistike sa 3 stupnja slobode za testiranje jednakosti svakog retka prijelaznih matrica pojedinačno imaju $p-$vrijednosti 0.1305102, 0.2188879 i 0.9797453, redom za inicijalna stanja 1, 2 i 3. Statistika za simultano testiranje hipoteze o homogenosti sa 9 stupnjeva slobode ima $p-$vrijednost 0.3303659 pa pri uobičajenim razinama značajnosti ni u kojem slučaju nećemo odbaciti nultu hipotezu.

2.3 Višeperiodni prijelazi

Promjene kreditnog rejtinga odnosno prijelaze među kreditnim razredima i u višeperiodnom slučaju karakteriziramo pomoću prijelaznih matrica. Neka $\mathbf{P}^{(m)}$ označava m-periodnu matricu prijelaza. Opći element matrice $p_{jk}^{(m)}$ predstavlja vjerojatnost promjene kreditnog rejtinga iz j u k kroz $m \geq 1$ vremenskih perioda. Jednoperiodnu matricu prijelaza $\mathbf{P}^{(1)}$ zbog jednostavnosti u nastavku kraće označavamo sa $\mathbf{P}$ i pretpostavljamo da je kvadratna tipa $d \times d$. Nadalje, pretpostavljamo da je stanje defaulta apsorbirajuće stanje, odakle slijedi $p_{dj} = 0$ za $j = 1, 2, \ldots, d-1$ i $p_{dd} = 1$. Pod pretpostavkom Markovljevog svojstva, višeperiodne matrice prijelaza možemo konstruirati iz jednoperiodnih matrica prijelaza.

2.3.1 Vremenski homogen Markovljev lanac

Definicija 2.6 (Slučajan proces)**.** *Neka je S skup. Slučajan proces s diskretnim vremenom i prostorom stanja S je familija $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ slučajnih varijabli definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u S. Dakle, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla za svaki $n \geq 0$.*

Definicija 2.7 (Markovljev lanac)**.** *Neka je S prebrojiv skup. Slučajni proces $X = \{X_t\}_{t \in \mathbf{Z}_+}$ definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu S je Markovljev lanac (prvog reda) ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t, X_{t-1} = x_{t-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{t+1} = x_{t+1} | X_t = x_t) \tag{18}$$

za sve $t \geq 0$ i za sve $x_0, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1} \in S$ za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

Svojstvo u relaciji (18) naziva se Markovljevim svojstvom. Ako pretpostavimo da se nalazimo u vremenskom trenutku t, onda vrijeme $t+1$ predstavlja neposrednu budućnost, dok vremena $0, 1, \ldots, t-1$ predstavljaju prošlost. Markovljevo svojstvo nam govori da ponašanje Markovljevog lanca u neposrednoj budućnosti ovisi samo o sadašnjosti, ne i o prošlosti.

Nadalje, kažemo da je Markovljev lanac prvog reda vremenski homogen ako desna strana u relaciji (18) ne ovisi o vremenu $t \geq 0$.

U kontekstu vjerojatnosti prijelaza između rejting kategorija, homogenost i Markovljevo svojstvo impliciraju konstantnu jednoperiodnu matricu prijelaza neovisnu o vremenu t. Dakle, matrica $\mathbf{P}$ je vremenski stabilna. Jednoperiodna prijelazna matrica dimenzija $d \times d$ sadrži nenegativne prijelazne vjerojatnosti

$$p_{jk} = \mathbb{P}(X_{t+1} = k | X_t = j).$$

Prijelazne vjerojatnosti zadovoljavaju

$$\sum_{k=1}^{d} p_{jk} = 1$$

pa je $\mathbf{P}$ stohastička matrica. Nadalje, vrijedi

$$(p_{d1}, p_{d2}, \dots, p_{dd}) = (0, \dots, 0, 1).$$

Iz gornje jednakosti vidimo da je d apsorbirajuće stanje, odnosno nakon što lanac jednom uđe u stanje d tamo ostane zauvijek. U kontekstu rejtinga, nakon što je klijent jednom ušao u default i shodno tome dodijeljen mu je najgori kreditni rejting, zauvijek ostaje u toj kreditnoj kategoriji.

Jednom kada imamo jednoperiodnu stohastičku matricu $\mathbf{P}$, koristeći Markovljevo svojstvo lako izračunamo višeperiodne prijelazne matrice $\mathbf{P}^{(m)}$. Primjerice, vjerojatnost da lanac krenuvši iz stanja j dođe u stanje k nakon dva koraka (ekvivalentno, dva vremenska perioda) jednaka je vjerojatnosti da lanac, krenuvši iz stanja j, u prvom koraku ode u proizvoljno stanje i, a potom u drugom koraku iz i u stanje k. Kako je "međustanje" i bilo proizvoljno, potrebno je prosumirati po svim mogućnostima (u našem slučaju po svim mogućnim rejting kategorijama, a takvih ima d), odakle slijedi

$$p_{jk}^{(2)} = \sum_{i=1}^{d} p_{ji} p_{ik}.$$

Gornji izraz lako prepoznamo kao element na mjestu (j, k) u matrici $\mathbf{P}^2$. Dakle, dvoperiodnu prijelaznu matricu možemo izračunati matričnim množenjem slijeva, $\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{PP}$. Analogno, sastav portfelja u sljedećem periodu dobijemo još jednom iteracijom. Prošireno na m perioda, općenito vrijedi

$$\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m-1)}\mathbf{P} = \mathbf{P}^m,$$

a opći član dobivene m-periodne prijelazne matrice je nenegativan i zadovoljava

$$p_{jk}^{(m)} = \sum_{i=1}^{d} p_{ji}^{(m-1)} p_{ik}.$$

Navedena rekurzivna shema može se u općenito primijeniti i na ne-homogene Markovljeve lance. U tom slučaju jednoperiodna matrica prijelaza nije konstantna već ovisi o vremenskom trenutku t u kojem je promatramo.

2.3.2 Bootstrap Markovljevih lanaca

Jednoperiodna matrica prijelaza $\mathbf{P}$ nam je nepoznata stoga je moramo procijeniti. Kao što smo već ranije naveli, opažena *stopa migracije* iz j-tog u k-ti kreditni razred definirana s

$$\widehat{p}_{jk} = \frac{c_{jk}}{n_j}$$

je prirodni procjenitelj za nepoznate prijelazne vjerojatnosti p_{jk}. Opažene stope migracije zapisujemo u matricu $\widehat{P}$ i ona nam je procjenitelj nepoznate matrice $\mathbf{P}$. Budući se radi tek o empirijskoj procjeni egzaktne prijelazne matrice, matrica $\widehat{P}$ je povezana s pogreškama procjene. Obzirom da višeperiodne prijelazne matrice definiramo s $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$, pogreške u procjeni, posljedično, utječu i na procjenu višeperiodne prijelazne matrice. Tradicionalan pristup kvantificiranju njihovog utjecaja nije moguć, obzirom da nam nije poznata distribucija slučajne varijable $(\widehat{P} - P)$ pomoću koje bi mogli karakterizirati pogreške procjene u jednoperiodnom slučaju.

Također, nepoznata nam je i distribucija slučajne varijable $(\widehat{P}^{(m)} - P^{(m)})$, pri čemu je procjenitelj višeperiodne prijelazne matrice dan s

$$\widehat{P}^{(m)} = \widehat{P}^m, \tag{19}$$

a od jednakog nam je interesa obzirom da moramo kvantificirati osjetljivost procijenjene prijelazne matrice i u višeperiodnom slučaju. Umjesto tradicionalnog pristupa, primjenit ćemo *bootstrap*, metodu ponovnog uzorkovanja (engl. *resampling*), u kombinaciji s Monte Carlo metodom.

Bootstrap metode su neparametarske metode ponovnog uzorkovanja nezavisnih događaja korištene za procjenu statističkih parametara, pouzdanosti modela i procedura, a odlikuje ih brza i jednostavna procjena, nepostojanje pretpostavki na tip modela (ukoliko je model nepoznat ili kompleksan, što je upravo naš slučaj) i neoslanjanje na asimptotske rezultate. U nastavku najprije donosimo kratak pregled metode.[20]

Cilj bootstrap metode je na temelju podataka procijeniti neki parametar θ - primjerice aritmetičku sredinu, medijan ili standardnu devijaciju. Proučavane podatke $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tretiramo kao realizaciju slučajnog uzorka X_1, X_2, $\ldots$, X_n iz nepoznate distribucije F. Parametar θ je općenito realizacija statističkog funkcionala $t(\cdot)$ na F, odnosno $\theta = t(F)$. Trivijalni primjeri takvih

[20] Za detalje vidjeti [5] Chernick, LaBudde, 2011. god., poglavlje *Introduction*, str. 1-10 i [1] Asmussen, Glynn, 2007. god., poglavlje *Sectioning, Jackknifing, and Bootstrapping*, str. 80-86

funkcionala su očekivanje μ i varijanca σ^2 - reprezentiramo ih funkcionalima na sljedeći način:

$$\mu = \int x dF(x), \quad \sigma^2 = \int (x-\mu)^2 dF(x).$$

Navedeni integrali po skupu svih mogućih vrijednosti od x koje su u domeni od F konkretni su primjeri funkcionala, ali općenito o $t(\cdot)$ mislimo kao o nekom algoritmu koji namjeravamo primijeniti na F. Osnovna ideja metode je da realizacije sadrže sve dostupne informacije o distribuciji F i stoga očekujemo da će ponovno uzorkovanje iz tog uzorka dati uzorak koji odgovara generiranju slučajnog uzorka iz distribucije F. Promotrimo parametar $\theta = t(F)$ i njegov procjenitelj $\widehat{\theta} = t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Često nas zanima distribucija tog procjenitelja (npr. zbog pouzdanih intervala ili testiranja), ali nju je rijetko moguće odrediti. Kada bi nam F bila poznata, mogli bismo odrediti uzoračku distribuciju od $\widehat{\theta}$ opetovanim uzorkovanjem iz F (Monte Carlo metoda). Kako nam je distribucija F nepoznata, ideja *bootstrap* metode je da generiramo uzorak $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ iz empirijske distribucije $\widehat{F}$ dobivene na temelju realizacije $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Potom na osnovu tog uzorka možemo odrediti *bootstrap* pocjenitelj za θ, $\widehat{\theta}^* = t(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$ i procijeniti vjerojatnosti s $\widehat{\mathbb{P}}(\widehat{\theta} \in A) = \mathbb{P}^*(\widehat{\theta}^* \in A)$, gdje potonju distribuciju možemo dobiti Monte Carlo metodom iz $\widehat{F}$. Pritom pod A podrazumijevamo bilo koji Borelov skup.

U kontekstu kreditnih rejtinga, pretpostavimo da je $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ vremenski homogen Markovljev lanac (prvog reda) iz definicije 2.7 kojim modeliramo migracije među kreditnim kategorijama. Prijelaze među rejting kategorijama možemo generirati pomoću pripadne prijelazne matrice $\mathbf{P}$, no ona nam nije poznata. U duhu *bootstrap* metode, nepoznatu matricu prijelaza $\mathbf{P}$ zamijenit ćemo s procijenjenom matricom prijelaza $\widehat{P}$, koja sadrži opažene stope migracije. Podsjetimo se da je, uz pretpostavku o nezavisnosti migracija, vektor $(c_{j1}, \ldots, c_{jd})$ realizacija multinomno distribuiranog slučajnog vektora

$$(\widetilde{c}_{j1}, \widetilde{c}_{j2}, \ldots, \widetilde{c}_{jd}) \sim Mult(n_j; p_{j1}, \ldots, p_{jd}).$$

Dakle, poznata nam je empirijska distribucija $\widehat{F}$ pa možemo generirati *bootstrap* uzorak iz multinomne distribucije, ponovo uz pretpostavku nezavisnosti migracija među kreditnim razredima,

$$(\widetilde{c}_{j1}^*, \widetilde{c}_{j2}^*, \ldots, \widetilde{c}_{jd}^*) \sim Mult(n_j; \widehat{p}_{j1}, \ldots, \widehat{p}_{jd}), \tag{20}$$

za sve inicijalne rejting kategorije $j = 1, \ldots, d-1$. Pritom $\widetilde{c}_{jk}^*$ označava *bootstrap* slučajnu varijablu koja daje broj migracija iz kreditnog razreda j u razred k u jednom periodu, a $\widehat{p}_{jk}$ je procijenjena jednoperiodna vjerojatnost prijelaza iz j u k.

Pomoću dobivenog *bootstrap* uzorka $\{c^*_{jk}\}_{j=1,\ldots,d-1,k=1,\ldots,d}$, procjenjujemo *bootstrap* prijelaznu matricu $\widehat{P}^*$, čiji je opći element dan s

$$\widehat{p}^*_{jk} := \frac{c^*_{jk}}{n_j}. \tag{21}$$

Obzirom da i dalje stoji pretpostavka da je default apsorbirajuće stanje, tj. da se kreditna kvaliteta defaultiranih dužnika ne može popraviti, ne treba nam *bootstrap* metoda da bi procijenili zadnji redak matrice $\widehat{P}^*$ jer nam je on poznat: $(\widetilde{p}_{d1}, \ldots, \widetilde{p}_{dd}) = (0, \ldots, 0, 1)$. Matrično množenje slijeva nam potom daje m-periodnu prijelaznu matricu procijenjenu na temelju *bootstrap* uzorka,

$$\widehat{P}^{*(m)} = \widehat{P}^{*m},$$

s općim elementom $\widehat{p}^{*(m)}_{jk}$.

Sada možemo procijeniti distribuciju od $\widehat{P}^{*(m)}$ Monte Carlo metodom. Najprije generiramo dovoljno velik broj uzoraka B, $\widehat{P}^{*(m)}_b, b = 1, \ldots, B$. Tada je distribucija od $\widehat{P}^{*(m)}_b$ procjenitelj za distribuciju od $\widehat{P}^{*(m)}$, i to konzistentan, budući je konzistentnost *bootstrap* procjenitelja dokazana 1990. godine.[21] Kako bismo okarakterizirali distribuciju od $\widehat{P}^{*(m)}$, standardnu devijaciju $\widehat{\sigma}(\widehat{p}^{*(m)}_{jk})$ procjenjujemo pomoću

$$\widehat{\sigma}(\widehat{p}^{*(m)}_{jk}) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{b=1}^{B}[\hat{p}^{*(m)}_{jk,b} - \widehat{\mathbb{E}}(\hat{p}^{*(m)}_{jk,b})]^2}, \tag{22}$$

gdje je

$$\widehat{\mathbb{E}}(\hat{p}^{*(m)}_{jk,b}) = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\hat{p}^{*(m)}_{jk,b},$$

za sve $j = 1, \ldots, d-1$ i $k = 1, \ldots, d$. Pritom je $\hat{p}^{*(m)}_{jk,b}$ opći element b-tog m-periodnog *bootstrap* uzorka $\widehat{P}^{*(m)}_b$. Standardna devijacija $\widehat{\sigma}(\widehat{p}^{*(m)}_{jk})$ je *bootstrap* procjenitelj standardne devijacije $\sigma(\widehat{p}^{(m)}_{jk})$, odnosno izrazom (22) dana je procjena nepoznate standardne devijacije m-periodnih prijelaznih vjerojatnosti $\sigma(\widehat{p}^{(m)}_{jk})$ na temelju B Monte Carlo uzoraka.

[21] Za detalje vidjeti [2] Basawa, Green, McCormick, Taylor, 1990. god.

2.3.3 Primjer

U ovom poglavlju ilustriramo bootstrap proceduru primjerom. Primjer je baziran na matrici prijelaza danoj u članku *Bank behavior based on internal credit ratings of borrowers* objavljenom u *Journal of Banking & Finance* 1998. god.[22] Podaci obuhvaćaju kreditne migracije malih i srednjih poduzeća koja su se u periodu od siječnja 1992. godine do prosinca 1996. godine zaduživala kod u to vrijeme pet vodećih njemačkih banaka: *Bayerische Vereinbsbank, Deutsche Bank, DG Bank, Dresdner Bank, and WestLB*. Pripadna matrica prijelaza dana je u tablici 6.

	Rejting na kraju razdoblja							
Inicijalni rejting	1	2	3	4	5	6	Default	n_j
1	0.514	0.400	0.086	0.000	0.000	0.000	0.000	35
2	0.078	0.621	0.194	0.078	0.019	0.010	0.000	103
3	0.000	0.080	0.690	0.168	0.062	0.000	0.000	226
4	0.009	0.009	0.099	0.640	0.212	0.032	0.000	222
5	0.000	0.015	0.022	0.190	0.657	0.117	0.000	137
6	0.000	0.000	0.000	0.017	0.155	0.707	0.121	58
Default	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0

Tablica 6: Prijelazna matrica njemačkih dužnika

Cilj nam je procijeniti višeperiodne vjerojatnosti prijelaza među kreditnim kategorijama i bootstrap procedurom izračunati odstupanje od danih $\widehat{p}_{jk}^{(m)}$ procijenitelja. Izračun ćemo napraviti za $m = 1, 5, 10$ perioda.

Dio dobivenih vrijednosti prikazan je u tablici 7. Usredotočili smo se na stanje neispunjavanja novčanih obveza pa su u tablici dane vjerojatnosti prijelaza u default i pripadne standardne devijacije, za svaki od perioda. Broj iteracija korišten u bootstrap proceduri jednak je $B = 1000$.

2.3.4 Prijelasci unutar portelja

Konačno, nakon što smo u prethodnim poglavljima prezentirali sve potrebne metode, spremni smo dotaknuti se problema promjene cjelokupnog portfelja, odnosno možemo procijeniti distribuiranost $n(t)$ kredita po d kreditnih kategorija i evoluciju te iste distribucije kroz naredne periode $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

[22]Za detalje vidjeti spomenuti članak, Machauer, Weber, 1998. god., [15]

j	$\widehat{p}_{jd}^{(1)}$	$\widehat{Std}(\hat{p}_{jd}^{*(1)})$	$\widehat{p}_{jd}^{(5)}$	$\widehat{Std}(\hat{p}_{jd}^{*(5)})$	$\widehat{p}_{jd}^{(10)}$	$\widehat{Std}(\hat{p}_{jd}^{*(10)})$
1	0.000	0.000	0.004	0.003	0.037	0.016
2	0.000	0.000	0.011	0.007	0.056	0.023
3	0.000	0.000	0.012	0.005	0.069	0.024
4	0.000	0.000	0.037	0.015	0.120	0.041
5	0.000	0.000	0.078	0.030	0.179	0.059
6	0.121	0.042	0.353	0.105	0.464	0.122

Tablica 7: m-periodne vjerojatnosti defaulta i bootstrap procjenitelj standardne devijacije za $m = 1, 5, 10$ perioda

Pritom pretpostavljamo stacionarnu matricu prijelaza $\mathbf{P}$. Broj kredita kojima je u vremenskom periodu t dodijeljen rejting j pa se shodno tome nalaze u j-toj kreditnoj kategoriji slučajna je varijabla $-$ mijenja se kroz vrijeme, a označavamo ga s $\widetilde{n}_j(t)$. Slučajan broj kredita $\widetilde{n}_j(t)$ omogućava nam da definiramo nenegativne težine portfelja s

$$\widetilde{w}_j(t) := \frac{\widetilde{n}_j(t)}{n(t)}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Iako je broj kredita s rejtingom j slučajan, uočimo da je ukupan broj kredita u portfelju $n(t)$ konstantan. Obzirom na definiciju, nenegativne težine portfelja također su slučajne varijable i možemo ih dovesti u vezu s brojem istovrsnih kreditnih migracija u periodu t, $\widetilde{c}_{jk}(t)$, s

$$\widetilde{w}_k(t+1) = \frac{1}{n(t)} \sum_{j=1}^{d} \widetilde{c}_{jk}(t), \tag{23}$$

pri čemu je sumom dan broj svih migracija koje iz bilo koje inicijalne kategorije (osim defaulta, u skladu s dosadašnjom pretpostavkom o nepopravljivosti kreditnog rejtinga nakon ulaska u default) prelaze u rejting kategoriju k. Ukoliko pretpostavimo da je $w_j(t)$ realizacija slučajne varijable $\widetilde{w}_j(t)$ u trenutku t, $\widetilde{w}_j(t) = w_j(t)$, brojevi istovrsnih migracija $\widetilde{c}_{jk}(t)$ su binomno distribuirani

$$\widetilde{c}_{jk}(t) | \widetilde{w}_j(t) = w_j(t) \sim B(n(t)w_j(t), p_{jk}). \tag{24}$$

Nenegativne težine možemo zajedno zapisati kao vektor

$$\widetilde{w}(t) = (\widetilde{w}_1(t), \ldots, \widetilde{w}_d(t))$$

i očito, vrijedi

$$\sum_{j=1}^{d} \widetilde{w}_j(t) = 1.$$

U slučaju nezavisnih kreditnih migacija, udio kredita u portfelju koji će se u sljedećem periodu nalaziti u j-toj kreditnoj kategoriji, $\widetilde{w}_j(t+1)$, dobiva se kao

$$\widetilde{w}_j(t+1) = \sum_i \widetilde{w}_i(t) p_{ij}.$$

Stoga, ukoliko se prelazak iz razreda u razred svakog kredita odvija neovisno o drugima, očekivane težine portfelja u trenutku $t+1$ uvjetno na težine u trenutku t dane su s

$$\mathbb{E}[\widetilde{w}(t+1)|\widetilde{w}(t) = w(t)] = w(t)\mathbf{P}, \tag{25}$$

a uvjetna kovarijacijska matrica $V[\widetilde{w}(t+1)|\widetilde{w}(t) = w(t)]$ ima elemente[23]

$$v_{kl} := \begin{cases} \dfrac{1}{n(t)} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} w_j(t) p_{jk}(1-p_{jk}), & k = l \\ -\dfrac{1}{n(t)} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} w_j(t) p_{jk} p_{jl}, & k \neq l. \end{cases} \tag{26}$$

Ako nas pak zanima očekivana distribucija kredita po rejting kategorijama za m perioda, koristimo višeperiodnu matricu prijelaza definiranu s $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$ i modificiramo izraze (23) i (24) kao

$$\widetilde{w}_k(t+1) = \frac{1}{n(t)} \sum_{j=1}^{d} \widetilde{c}_{jk}^{(m)}(t),$$

i

$$\widetilde{c}_{jk}^{(m)}(t)|\widetilde{w}_j(t) = w_j(t) \sim B(n(t)w_j(t), p_{jk}^{(m)}).$$

Pritom smo s $\widetilde{c}_{jk}^{(m)}(t)$ označili broj kredita koji migriraju iz kategorije j u kategoriju k kroz m perioda počevši u trenutku t. Uvjetno očekivanje težina portfelja je sada dano s

$$\mathbb{E}[\widetilde{w}(t+m)|\widetilde{w}(t) = w(t)] = w(t)\mathbf{P}^{(m)},$$

a elemente višeperiodne uvjetne kovarijacijske matrice $V[\widetilde{w}(t+m)|\widetilde{w}(t) = w(t)]$ dobijemo ako u relaciji (26) p_{jk} i p_{jl} zamijenimo sa $p_{jk}^{(m)}$ i $p_{jl}^{(m)}$.

[23]Relacije (25) i (26) dane su u [9] Härdle, Kleinow, Stahl, 2002. god., str. 107-108

3 Implementacija u matematičkom software-u R

U ovom poglavlju navodimo programe izrađene u matematičkom software-u R koji implementiraju teoriju iznesenu u diplomskom radu i njihovu specifikaciju. Dani programi korišteni su za izračune prilikom ilustracije teorije konkretnim primjerima.

Funkcija **RatMigCount** broji istovrsne migracije među kreditnim razredima. Argumenti funkcije su skalar $\boldsymbol{d}$ koji predstavlja broj kreditnih kategorija, uključujući stanje neispunjavanja novčanih obveza (default) i matrica $\boldsymbol{e}$ dimenzija $n \times 2$ u kojoj su dani povijesni podaci o migracijama unutar kreditnih razreda. Primjerice, i-ti događaj u kojem se dužniku s inicijalnim rejtingom j promijenila kreditna kvaliteta i na kraju perioda mu je dodijeljen kreditni rejting k zapisujemo u i-ti redak matrice e, i to tako da na mjestu $(i, 1)$ stoji inicijalni rejting j, a na mjestu $(i, 2)$ ažurirani kreditni rejting k. Funkcija vraća matricu *counts* dimenzija $(d-1) \times d$ u kojoj su pobrojane istovrsne migracije odnosno preciznije, u matrici *counts* na mjestu (j, k) stoji broj u danom vremenskom periodu uočenih migracija iz kreditnog rejtinga j u kreditni rejting k.

Kod:

```
RatMigCount <- function(d,e){

  if (d<2) stop("Broj kategorija d mora biti barem 2!");

  if (ncol(e) != 2) stop("Matrica e mora biti dimenzija n*2!");

  if (max(e[,1]) > (d-1))
    stop("Elementi u prvom stupcu matrice e ne smiju biti veci od d-1!");

  if (max(e[,2]) > d)
    stop("Elementi u drugom stupcu matrice e ne smiju biti veci od d!");

  if (min(e[,1]) < 1)
    stop("Elementi matrice e ne smiju biti manji od 1!");

  if (min(e[,2]) < 1)
    stop("Elementi matrice e ne smiju biti manji od 1!");


  c <- matrix(numeric((d-1)*d),nrow=d-1,ncol=d)
```

```
  n <- nrow(e)

  for (event in 1:n)
    c[e[event,1],e[event,2]] <- c[e[event,1],e[event,2]] + 1

  return(matrix_of_migration_counts = c)

}
```

Sljedeća funkcija je **RatMigRate**. Ta funkcija na temelju ulazne matrice ***counts*** i zadanog korelacijskog parametra ***rho*** računa stope migracije kojima procjenjujemo nepoznate prijelazne vjerojatnosti i procijenjene standardne greške za m perioda. Ulazna varijabla *counts* stoga mora biti niz matrica, i to dimenzija $(d-1) \times d \times m$. Svaki element niza predstavlja matricu dimenzija $(d-1) \times d$ u kojoj je zapisan broj istovrsnih migracija među kreditnim razredima u periodu t, $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Treća dimenzija nam služi kao vremenski indeks. Parametar rho je nenegativni koeficijent korelacije među prosječnim povratima na imovinu iz normalnog modela s pragom. Ukoliko je $rho = 0$, funkcija računa standardne greške za slučaj nezavisnih kreditnih migracija.

Za računanje vjerojatnosti dane relacijom (8) koristimo funkciju *pmvnorm* koja vraća vrijednost funkcije distribucije multivarijantne normalne razdiobe, uz zadane granice integracije i korelacijsku matricu. Funkcija je implementirana unutar R - paketa *mvtnorm*.

Funkcija RatMigRate vraća listu ***output*** koja sadrži:

- ***nstart*** – sastav kreditnog potfelja na početku svakog perioda, niz dimenzija $(d-1) \times 1 \times m$ čije su komponente dane relacijom (2)

- ***nend*** – sastav kreditnog portfelja na kraju svakog perioda, niz dimenzija $d \times 1 \times m$ čije su komponente dane relacijom (3)

- ***etp*** – procijenjene prijelazne vjerojatnosti, niz dimenzija $(d-1) \times d \times m$ čije su komponente $\widehat{p}_{jk}$ dane relacijom (4)

- ***etv*** – procijenjene vrijednosti za pragove normalnog modela, niz dimenzija $(d-1) \times (d-1) \times m$ čije su komponente $\widehat{z}_{jk}$ dane relacijom (10) za $j = 1, \ldots, d-1, \quad k = d, \ldots, 2$. Uočimo da pritom ne računamo prag za prvi kreditni razred, obzirom da svaki povrat veći od $\widehat{z}_{j2}$ rezultira dodjelom najvišeg mogućeg rejtinga.

- ***emc*** – procijenjeni koeficijenti korelacije među migracijama, niz dimenzija $(d-1) \times d \times m$ čije su komponente $\widehat{\rho}_{jk}$ dane relacijom (9) (ukoliko je $\widehat{p}_{jk} > 0$)

- ***esd*** – procijenjene standardne devijacije, niz dimenzija $(d-1) \times d \times m$ čije su komponente $\widehat{\sigma}_{jk}$ dane relacijom (11).

Kod:

```
RatMigRate <- function(counts, rho){

    dim <- dim(counts);

    if (rho < 0 | rho >1)
      stop("Koeficijent korelacije rho mora biti izmedu 0 i 1!");

    if (ncol(counts) != (nrow(counts) + 1))
      stop("c mora biti niz dimenzija (d-1)*d*m");

    for (m in 1:dim[length(dim)])
      if (!isTRUE(all(counts[,1,m] >= 0)))
        stop("Elementi matrice c moraju biti nenegativni cijeli brojevi!")

    for (m in 1:dim[length(dim)])
      if (!isTRUE(all(counts[,1,m] == floor(counts[,1,m]))))
        stop("Elementi matrice c moraju biti nenegativni cijeli brojevi!")


    nstart <- array(NA, c(dim[1],1,dim[length(dim)]))

    for (m in 1:dim[length(dim)]) nstart[,,m] <- rowSums(counts[,,m])


    nend <- array(NA, c(dim[2],1,dim[length(dim)]))

    for (m in 1:dim[length(dim)]) nend[,,m] <- colSums(counts[,,m])


    etp <- array(NA, c(dim[1],dim[2],dim[3]))

    for (m in 1:dim[length(dim)]) etp[,,m] <- counts[,,m]/nstart[,,m]


    etv_aux <- array(NA, c(dim[1],dim[2],dim[3]))

    for (m in 1:dim[length(dim)]){
      for (i in 1:dim[1]) etv_aux[i,,m] <- cumsum(rev(etp[i,,m]));
```

```
}

etv <- array(NA, c(dim[1],dim[2]-1,dim[3]))

for (m in 1:dim[length(dim)]){
  for (i in 1:dim[1]) etv[i,,m] <- qnorm(etv_aux[i,-dim[2],m]);
}

emc <- array(NaN, c(dim[1],dim[2],dim[3]))
esd <- array(NaN, c(dim[1],dim[2],dim[3]))

if (rho==0)
{
  for (m in 1:dim[length(dim)])
    esd[,,m] <- sqrt(etp[,,m]*(1-etp[,,m])/nstart[,,m])
}
else
{
  beta <- array(NA, c(dim[1],dim[2],dim[3]))

  for (m in 1:dim[length(dim)]){
    for (k in 1:dim[2]){
      for (j in 1:dim[1]){

        if(k==dim[2]) { # prijelaz u stanje defaulta
          L <- c(-Inf,-Inf);
          U <- c(etv[j,1,m],etv[j,1,m]);
          beta[j,k,m] <- pmvnorm(lower=L, upper= U,
                                 sigma=matrix(c(1,rho,rho,1),2,2));
        }

        else if(k==1) { # prijelaz u najbolji kreditni razred
          L <- c(etv[j,dim[1],m],etv[j,dim[1],m]);
          U <- c(+Inf,+Inf);
          beta[j,k,m] <- pmvnorm(lower=L, upper=U,
                                 sigma=matrix(c(1,rho,rho,1),2,2));
        }

        else {
          L <- c(etv[j,dim[2]-k,m],etv[j,dim[2]-k,m]);
          U <- c(etv[j,dim[2]-k+1,m],etv[j,dim[2]-k+1,m]);
          beta[j,k,m] <- pmvnorm(lower=L, upper=U,
                                 sigma=matrix(c(1,rho,rho,1),2,2));
        }
      }
    }
  }
```

```
      for (m in 1:dim[length(dim)]){
        for (k in 1:dim[2]){
          for (j in 1:dim[1]){

            if (etp[j,k,m] > 0) {
              mc <- (beta[j,k,m]-etp[j,k,m]^2)/(etp[j,k,m]*(1-etp[j,k,m]))
              emc[j,k,m] <- max(0, mc)
            }

          }
        }
      }

      for (m in 1:dim[length(dim)]){
        var <- etp[,,m]*(1-etp[,,m])/nstart[,,m] +
               (nstart[,,m]-1)/nstart[,,m]*emc[,,m]*etp[,,m]*(1-etp[,,m])

        esd[,,m] <- sqrt(var)
      }
    }

    output <- list(portfolio_weights_before_migration=nstart,
                   porfolio_weights_after_migration=nend,
                   estimated_transition_probabilities=etp,
                   estimated_threshold_values=etv,
                   estimated_migration_correlations=emc,
                   estimated_standard_deviations=esd)

    return(output)

}
```

Funkcija **AggRatMig** vraća ukupan broj prijelaza među kreditnim razredima kroz m perioda (tzv. broj akumuliranih migracija), procijenjene agregatne vjerojatnosti prijelaza i vrijednost χ^2-statistika. Argumenti funkcije su niz matrica $\boldsymbol{c}$ dimenzija $(d-1) \times d \times m$ i koeficijent korelacije ***rho***. Interpretacija ulaznih parametara je kao i ranije − svaki element niza predstavlja matricu dimenzija $(d-1) \times d$ u kojoj je zapisan broj istovrsnih migracija među kreditnim razredima u periodu t, $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Parametar rho je nenegativni koeficijent korelacije među prosječnim povratima na imovinu iz normalnog modela s pragom. Ukoliko je $rho = 0$, funkcija računa standardne greške za slučaj nezavisnih kreditnih migracija.

Funkcija AggRatMig vraća listu ***output*** koja sadrži:

- ***cagg*** – broj akumuliranih migracija, matrica dimenzija $(d-1) \times d$ čije su komponente dane relacijom (12)

- ***etpagg*** – procijenjene agregatne vjerojatnosti prijelaza, matrica dimenzija $(d-1) \times d$ čije su komponente dane relacijom (14)

- ***esdagg*** – procijenjene agregatne standardne devijacije, matrica dimenzija $(d-1) \times d$ čije komponente dobijemo ako u relaciji (11) $\widehat{p}_{jk}$ zamijenimo s $\widehat{p}_{jk}^{+}$

- ***etp*** – procijenjene vjerojatnosti prijelaza za svaki od perioda t, $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$, niz dimenzija $(d-1) \times d \times m$

- ***esd*** – procijenjene standardne devijacije za svaki od perioda t, $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$, niz dimenzija $(d-1) \times d \times m$ čije komponente dobijemo ako u relaciji (11) $\widehat{p}_{jk}$ zamijenimo s $\widehat{p}_{jk}(t)$

- ***chi*** – matrica dimenzija $3 \times d$, u prvom retku sadrži realizacije χ^2-statistika danih relacijom (15) za $j = 1, \ldots, d-1$ i realizaciju χ^2-statistike dane relacijom (16). U drugom i trećem retku nalaze se broj stupnjeva slobode za svaku od statistika i pripadne p-vrijednosti, respektivno.

Kod:

```
AggRatMig <- function(c,rho){

  d <- dim(c)

  y <- RatMigRate(c, rho)

  etp <- y$estimated_transition_probabilities
  esd <- y$estimated_standard_deviations

  cagg <- matrix(0, nrow = d[1], ncol= d[2])

  for (m in 1:d[3]){

    tmp_counts <- as.matrix(c[,,m]);
    cagg <- cagg + tmp_counts;

  }

  cagg_array <- array(NA, dim=c(d[1],d[2],1))
  cagg_array[,,1] <- cagg
  yagg <- RatMigRate(cagg_array, rho)
```

```
etpagg <- yagg$estimated_transition_probabilities
etpagg <- as.matrix(etpagg[,,1])

esdagg <- yagg$estimated_standard_deviations
esdagg <- as.matrix(esdagg[,,1])



# chi-square test

chisq <- matrix(NA, nrow=3, ncol=d[2])

nstart <- y$portfolio_weights_before_migration

for (j in 1:d[1]) {

  sum <- 0

  for (k in 1:d[2]){
    for (t in 1:d[3]){

      if (etpagg[j,k] > 0){
        theoretical_freq <- nstart[j,1,t]*etpagg[j,k];
        sum <- sum + (c[j,k,t]-theoretical_freq)^2/theoretical_freq;
      }

    }
  }

  chisq[1,j] <- sum
  chisq[2,j] <- d[1]*(d[3]-1)
  chisq[3,j] <- pchisq(sum,d[1]*(d[3]-1),lower.tail=FALSE)

}

# combined hypothesis of homogeneity
chisq[1,d[2]] <- sum(chisq[1,1:d[1]])
chisq[2,d[2]] <- d[1]^2*(d[3]-1)
chisq[3,d[2]] <- 1-pchisq(sum(chisq[1,1:d[1]]),d[1]^2*(d[3]-1))


output <- list(aggregated_counts = cagg,
               estimated_aggregated_transition_probabilities = etpagg,
               estimated_aggregates_standard_deviations = esdagg,
               estimated_transition_probabilities_per_period = etp,
               estimated_standard_deviations_per_period = esd,
               chi_test = chisq)
```

```
  return(output)

}
```

Funkcija **multi_period_transition_matrix** računa sve $t = 1, 2, \ldots, m$ višeperiodne matrice prijelaza na temelju jednoperiodne prijelazne matrice $\boldsymbol{p}$ dimenzija $d \times d$. Argument funkcije je i skalar $\boldsymbol{m}$ kojim specificiramo broj perioda. Funkcija vraća niz matrica $\boldsymbol{q}$ dimenzija $d \times d \times m$ u kojem su zapisane višeperiodne matrice prijelaza. Uočimo da zahtijevamo da je ulazna matrica $\boldsymbol{p}$ kvadratna kako bi potenciranje bilo dobro definirano, no to nam ne predstavlja nikakvu restrikciju: obzirom da pretpostavljamo da je stanje defaulta apsorbirajuće, zadnji redak prijelazne matrice nam je poznat pa prije poziva funkcije možemo proširiti matricu, ukoliko je dimenzija $(d-1) \times d$.

Kod:

```
multi_period_transition_matrix <- function(p,m){

  q <- array(NA, dim=c(dim(p),m))

  q[,,1] <- p

  if(m==1) return(q)

  for (t in 2:m) q[,,t] <- q[,,t-1]%*%p

  return(q)

}
```

Funkcija **RatMigRate_bootstrap** implementira bootstrap proceduru – generira bootstrap uzorak prijelaznih matrica na temelju matrice ***counts***, dimenzija $(d-1) \times d$ u kojoj su pobrojane istovrsne migracije među kreditnim razredima. Od preostalih argumenata, potrebno je zadati skalar $\boldsymbol{m}$ koji predstavlja broj perioda i skalar $\boldsymbol{B}$ koji označava broj ponavljanja bootstrap procedure.

Funkcija RatMigRate_bootstrap vraća listu ***output*** koja sadrži:

- ***btm*** – niz dimenzija $(d-1) \times d \times B$ u kojem su zapisane m-periodne prijelazne matrice dobivene u svakoj od bootstrap iteracija. Komponente matrica izračunate su prema relacijama (20) i (21)

- ***etm*** – m-periodna matrica prijelaza dimenzija $(d-1) \times d$, izračunata prema relaciji (19)
- ***stm*** – procijenjene standardne devijacije m-periodnih stopa prijelaza, matrica dimenzija $(d-1) \times d$ čije su komponente dane relacijom (22)

Kod:

```
RatMigRate_bootstrap <- function(counts, m, B=250){

  dim <- dim(counts);

  if (B < 1) stop("Broj iteracija B ne smije biti manji od 1!");

  if (m < 1) stop("Broj perioda m ne smije biti manji od 1!");

  if (ncol(counts) != (nrow(counts) + 1))
    stop("c mora biti niz dimenzija (d-1)*d");

  for (t in 1:dim[length(dim)])
    if (!isTRUE(all(counts[,1,t] >= 0)))
      stop("Elementi matrice c moraju biti nenegativni cijeli brojevi!")

  for (t in 1:dim[length(dim)])
    if (!isTRUE(all(counts[,1,t] == floor(counts[,1,t]))))
      stop("Elementi matrice c moraju biti nenegativni cijeli brojevi!")


  p <- RatMigRate(counts, rho=0)
  etp <- p$estimated_transition_probabilities
  n <- p$portfolio_weights_before_migration

  etp_aux <- matrix(NA, nrow=dim[2], ncol=dim[2])
  etp_aux <- rbind(etp[,,1],c(rep(0,dim[1]),1))

  etm <- matrix(NA, nrow=dim[1], ncol=dim[2])
  etm <- (multi_period_transition_matrix(etp_aux,m))[-dim[2],,m]

  boot <- array(NA, c(dim[1],dim[2],B))

  for (b in 1:B){
    for (j in 1:dim[1]){
      boot[j,,b] <- t(rmultinom(1,size=n[j,1,1],prob=etp[j,,1]))/n[j,1,1]
    }
  }

  m_boot <- array(NA, c(dim[1],dim[2],B))
  tm <- matrix(NA, nrow=dim[2], ncol=dim[2])
```

```
  for (b in 1:B){
    tm <- rbind(boot[,,b],c(rep(0,dim[1]),1))
    m_boot_tm <- multi_period_transition_matrix(tm,m)[-dim[2],,m]
    m_boot[,,b] <- m_boot_tm
  }

  mean <- matrix(NA, nrow=dim[1], ncol=dim[2])

  for (j in 1:dim[1]){
    for (k in 1:dim[2]){
      sum_aux <- 0
      for (b in 1:B) sum_aux <- sum_aux + m_boot[j,k,b]
      mean[j,k] <- sum_aux/B
    }
  }

  std <- matrix(NA, nrow=dim[1], ncol=dim[2])

  for (j in 1:dim[1]){
    for (k in 1:dim[2]){
      sum_aux <- 0
      for (b in 1:B) sum_aux <- sum_aux + (m_boot[j,k,b] - mean[j,k])^2
      std[j,k] <- sqrt(sum_aux/(B-1))
    }
  }

  output <- list(bootstraped_m_period_transition_probabilities = m_boot,
                 m_period_transition_rates = etm,
                 estimated_standard_deviations = std)

  return(output)

}
```

Na temelju podataka o dugoročnim obveznicama čiju je kreditnu kvalitetu ocjenjivala agencija Moody's u periodu od 1970. do 1997. godine izračunali smo u poglavlju 2.2.3 prijelazne matrice i pripadne standardne devijacije, koristeći pritom funkciju *RatMigRate*. Nadalje, provodeći Pearsonov χ^2-test homogenosti pomoću funkcije *AggRatMig*, pokazali smo da pretpostavka o vremenskoj stabilnosti prijelazne matrice nije opravdana.

U poglavlju 2.3.3 na primjeru promjena kreditnog rejtinga njemačkih malih i srednjih poduzeća u razdoblju od siječnja 1992. do prosinca 1996. godine izračunali smo višeperiodne vjerojatnosti prijelaza među razredima i odstupanje od danih $\widehat{p}_{jk}^{(m)}$ procjenitelja bootstrap procedurom. Za to su nam trebala tri poziva funkcije *RatMigRate_bootstrap*, obzirom da je izračun dan u slučaju $m = 1, 5, 10$ perioda.

Literatura

[1] S. Asmussen, Peter W. Glynn, *Stohastic Simulation: Algorithms and Analysis*, Springer-Verlag New York, 2007.

[2] I. V. Basawa, T. A. Green, W. P. McCormick, R. L. Taylor, *Asymptotic bootstrap validity for finite Markov chains*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 19 (1990), 1493-1510.

[3] Basel Committee on Banking Supervision, *The Internal Ratings-Based Approach*, Consultative Document, 2001.

[4] Y. M. M. Bishop, S. E. Fienberg, P. W. Holland, *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*, MIT Press, Cambridge, 1975.

[5] M. R. Chernick, R. A. LaBudde, *An Introduction to Bootstrap Methods with Applications to R*, Wiley, New Jersey, 2011.

[6] J. Davidson, *Stochastic Limit Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1994.

[7] C. C. Finger, *Extended "constant correlations" in CreditManager 2.0*, CreditMetrics Monitor, 1998., 5-8.

[8] G. M. Gupton, C. C. Finger, M. Bhatia, *CreditMetrics-Technical Document*, J.P. Morgan, 1997.

[9] W. Härdle, T. Kleinow and G. Stahl, *Applied Quantitative Finance*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.

[10] S. Huschens, H. Locarek-Junge, *Konzeptionelle und statistische Grundlagen der portfolioorientierten Kreditrisikomessung*, Kreditrisikomanagement - Portfoliomodelle und Derivate (A. Oehler), Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 2000., 25-50.

[11] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, PMF-MO, 2006.

[12] J. Jacod, P. Protter, *Probability Essentials*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[13] J. Kim, *Conditioning the transition matrix*, Risk: Credit Risk Special Report, October (1999), 37-40.

[14] E. L. Lehmann, J. P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, Springer-Verlag New York, 2005.

[15] A. Machauer, M. Webber, *Bank behavior based on internal credit ratings of borrowers*, Journal of Banking & Finance, 22 (1998), 1355-1383.

[16] K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby, *Multivariate Analysis*, Academic Press, London, 1979.

[17] P. Nickell, W. Perraudin, S. Varotto, *Stability of rating transitions*, Journal of Banking & Finance, 24 (2000), 203-227.

[18] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[19] A. Saunders, *Credit Risk Measurement: New Approaches to Value at Risk and Other Paradigms*, Wiley, New York, 1999.

[20] I. Šošić, *Primijenjena statsitika*, Školska knjiga, Zagreb, 2004.

Sažetak

Kreditni rizik jest rizik nepodmirenja obveza, odnosno mogućnost da se uložena sredstva neće pravodobno i/ili u potpunosti vratiti te da se neće vraćati planiranom dinamikom. Kreditni rejting predstavlja mišljenje o kreditnom riziku u narednom periodu i podrazumijeva procjenu sposobnosti i spremnosti dužnika da pravovremeno i u potpunosti podmiruje svoje obveze prema kreditorima. Promjena kreditnog rejtinga reflektira procjenu o poboljšanju ili pogoršanju kreditne kvalitete dužnika.

Glavni cilj ovog rada jest modeliranje kreditnog rizika financijskih institucija procjenom vjerojatnosti promjene rejtinga i prognoziranjem vjerojatnosti defaulta, odnosno stanja neispunjavanja dužnikovih novčanih obveza, u jednom ili više narednih perioda.

Polazeći od klasifikacije rizičnosti dužnika na rejting skali, pokazan je put od opaženih promjena kreditnog rejtinga do procijenjenih vjerojatnosti prijelaza i dana procjena za odstupanje od stvarnih prijelaznih stopa. Zbog međuovisnosti dužnika koji tvore portfelj, poseban je naglasak stavljen na normalni model s pragom s jednim parametrom unutar kojeg možemo na konzistentan način modelirati zavisne migracije. Obzirom da je vremenska stabilnost prijelaznih matrica jedan od ključnih elemenata za procjenu kreditnog rizika, sljedeći korak bio je predstaviti statističke testove o homogenosti i ilustrirati ih konkretnim primjerima. Potom smo analizirali višeperiodne prijelaze među kreditnim razredima, oslanjajući se na teoriju Markovljevih lanaca i bootstrap istih, dok je u konačnici uzeta u obzir i promjena u sastavu i rizičnosti kreditnog portfelja izazvana rejting migracijama.

Summary

Credit risk is the risk that the counterparty will not settle its liability i.e. the possibility that invested funds will not be recovered in full or within the planned schedule. Credit rating is a forward-looking opinion about credit risk and an assessment of the ability and willingness of an issuer to meet its financial obligations in full and on time. A change in a rating reflects the assessment that the obligor's credit quality has improved (upgrade) or deteriorated (downgrade).

The main goal of this graduate thesis is modeling credit risk of financial institutions by assessing the rating migration probabilities and predicting the probability of default, i.e. of obligor's failure to meet the legal obligations or conditions of debt repayment, in one or more upcoming periods.

Starting from classification of debtor's riskiness on rating scale, the way from the observed data to the estimated transition probabilities is shown and estimates for the standard deviations of the transition rates are given. Due to interdependencies of borrowers that compose a portfolio, particular emphasis is placed on framework of a threshold normal model with a single parameter which allows us to model dependent rating migrations in consistent way. Regarding time stability of transition matrices, which is one of the major issues for credit risk estimation, next step was to present statistical tests of homogeneity and give proper illustration by an example. Afterwards, multi-period rating transitions are discussed, relying on Markov chain theory and bootstrap methods for Markov chains. Finally, the change of the composition and riskiness of a credit portfolio caused by rating migrations is considered.

Životopis

Reamare Novko rođena je 21. listopada 1993. godine u Dubrovniku. Nakon završene osnovne škole „Vela Luka", pohađala je opću gimnaziju „Vela Luka" u Veloj Luci na otoku Korčuli. Akademske godine 2012./2013. upisuje Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu, na kojem 2015. godine stječe akademski naziv sveučilišne prvostupnice matematike (bacc. univ. math.). Iste godine upisuje Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike. Na završnoj godini studija zapošljava se u Privrednoj banci Zagreb, u Sektoru za upravljanje rizicima, gdje trenutno radi.