

Eksperimentalne provjere opće teorije relativnosti

Bažulić, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2016

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:114136>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-10**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Bažulić

EKSPERIMENTALNE PROVJERE OPĆE TEORIJE
RELATIVNOSTI

Diplomski rad

Zagreb, 2015.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: PROF. FIZIKE I INFORMATIKE

Ivan Bažulić

Diplomski rad

**Eksperimentalne provjere opće teorije
relativnosti**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2015.

Zahvaljujem se prije svega svom mentoru, doc.dr.sc. Ivici Smoliću, što je pristao biti moj mentor, hvala na mnogobrojnim konzultacijama, objašnjenjima i savjetima kojima je meni uvelike olakšao posao.

Zahvaljujem se svojim roditeljima Mariji i Davorinu Bažuliću, sestri Marini i bratu Franu, što su stajali uz mene u najteža vremena, što su mi stalno bili potpora i što su vjerovali u mene bez obzira na sve.

Zahvaljujem se svojim prijateljima Mariji, Kristini Š. i Kristini Č., Katarini, Nikolini N. i Nikolini P., Danijelu, Goranu S. i Goranu P., Anji, Sofiji, Ivi, Radi i svima drugima što su imali strpljenja za mene, što su mi pomogli da ne izgubim vjeru u svoj uspjeh i što su iznijeli sa mnom taj veliki posao i pri tome me pretvorili u bolju osobu.

Sažetak

Opću teoriju relativnosti, utemeljenu na geometrijskom prikazu gravitacije i formaliziranu tenzorskom jednačbom polja, postavio je Albert Einstein prije 100 godina. Ova gravitacijska teorija predviđa niz fizikalnih fenomena, kako onih koji donose "sitne" popravke u klasičnoj Newtonovskoj teoriji gravitacije, tako i onih kvalitativno novih. Tijekom proteklog stoljeća izvršen je niz pokusa s kojima su provjeravani osnovni principi i najvažnija predviđanja opće teorije relativnosti, među kojima su najpoznatiji jednakost inercijalne i tromne mase, zakretanje svjetlosnih zraka u blizini masivnih objekata, precesije orbita planeta i žiroskopa u orbiti oko Zemlje te razne vremenske dilatacije. Tim provjerama utvrđeno je veliko slaganje eksperimenta s teorijskim pretpostavkama koje daje opća teorija. U ovom ću diplomskom radu napraviti pregled navedenih fenomena te eksperimenata kojima su oni potvrđeni.

Experimental tests of general theory of relativity

Abstract

General theory of relativity, based on the geometrical view of gravity and formalized by a tensorial field equation, was established by Albert Einstein 100 years ago. This gravitational theory predicts various physical phenomena, from those that give only “small” corrections to the Newtonian theory to those that are qualitatively new. During the last century numerous experiments were done to check basic principles and most important predictions of the general theory such as the equality of inertial and gravitational mass, bending of light in close proximity of massive objects, various precessions (orbital and gyro precessions) and time dilatations. These experiments showed with great precision the validity of the general theory of relativity. In this thesis we will review the before-mentioned phenomena and the experiments by which their validity was proven.

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Povijesni pregled	2
1.2	Problemi klasične fizike	5
1.3	Princip ekvivalencije	6
1.4	Einsteinova jednačba	7
1.5	Geodezici	7
2	Schwarzschildova metrika	9
2.1	Schwarzschildovo rješenje	9
2.2	Geodezici u Schwarzschildovom rješenju	14
2.3	Merkurova putanja	17
2.4	Gravitacijska leća	21
3	Testovi Einsteinovog principa ekvivalencije	25
3.1	Gravitacijski crveni pomak	25
3.2	Shapirovo kašnjenje	28
4	Lense - Thirringov efekt	30
4.1	Teorijske pretpostavke	30
4.2	Gravity Probe-B	33
5	Kozmološka predviđanja	38
6	Alternativne teorije i parametrizirani post-Newtonovski formalizam	46
7	Metodički dio ili kako OTR predstaviti djeci?	48
7.1	Einsteinov princip ekvivalencije	50
7.2	Pokazni eksperiment	52
7.3	Prvi eksperimentalni dokazi	52
7.4	Kozmološka predviđanja	53
8	Zaključak	56
	Dodaci	58
A	Vektori i tenzori	58
B	Metrika	61
C	Korišteni Python programi	62

1 Uvod

Opća teorija relativnosti geometrijska je teorija gravitacije koju je razvio i objavio Albert Einstein 1915. godine [1]. Nastala je kao proširenje specijalne teorije relativnosti i Newtonovske teorije gravitacije, te se na njih svodi u nekim posebnim slučajevima. Posebno, Einstein je povezao zakrivljenost prostor-vremena s količinom energije (odnosno materije) koja se nalazi u tom prostor-vremenu; što je više energije, to je zakrivljenost prostor-vremena veća. Efekt ima izuzetno velike posljedice po putanje čestica koje možemo (matematički) opisati: same čestice više ne putuju po ravnim linijama, kao kod ravnih geometrija (poput Euklidske), već se gibaju po općenitim putanjama koje zovemo *geodezici*. Analiza rješenja Einsteinovih jednadžbi polja upućuje na posebne metričke koje opisuju fenomene poput crnih rupa (Schwarzschildovo rješenje, Kerrova metrika i druge), za koje danas vjerujemo kako postoje u jezgrama svih galaksija. Također, implicira i postojanje drugih fenomena poput precesija planeta, gravitacijske leće, ali i mnogih drugih efekata kojima se u ovom diplomskom radu neću baviti. Od 1915. godine do danas napravljen je niz eksperimenata kojima smo provjeravali validnost postulata opće teorije relativnosti; svi eksperimentalni podaci koje do sad imamo daju izuzetno slaganje s općom teorijom relativnosti. Ipak, pojava singulariteta unutar teorije daje naslutiti kako opća teorija relativnosti nije potpuna, te da nam za potpuni opis stvarnosti treba nadgradnja. Trenutna predviđanja govore kako bi takve singularitete mogla riješiti potpuna teorija kvantne gravitacije. Postoje neke teorije koje su na tragu rješenju, kao što je “loop” kvantna gravitacija (engl. *loop quantum gravity* ili LQG) ili teorija struna, no i one same donose nove probleme (primjerice, unutar LQG-a nije jasno kako iz kvantiziranog prostora izvući standardno prostor-vrijeme), a i ne postoji nikakav eksperiment koji bi opravdao ispravnost ijedne od te dvije teorije. Za objašnjenje tamne energije nam nužno ne treba teorija kvantne gravitacije, jer se taj fenomen (i njegove posljedice) mogu jednostavno ugraditi i objasniti postojećom teorijom. Iznimka bi bio neki efekt tamne energije za koji bi bilo nužno uključiti kvantnu mehaniku, što za sad izgleda malo vjerojatno.

Kroz ovaj diplomski rad koristit ću sljedeću notaciju:

- tiskanim malim i velikim slovima T, R, A, B, c označavat ću skalare.
- podebljanim slovima $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{V}, \mathbf{v}$ označavat ću vektore (vektori koji imaju 3 prostorne dimenzije, kao u Euklidskom prostoru).
- normalnim slovima s gornjim grčkim indeksom $A^\mu, V^\nu \dots$ označavat ću 4-vektore (vektori koji uz 3 prostorne dimenzije imaju i vremensku dimenziju i bazični su elementi u opisu opće teorije relativnosti), dok ću normalnim slovima s donjim grčkim indeksom $A_\mu, V_\nu \dots$ označavati njihove dualne vektore (1-forme).
- normalnim slovima s dva grčka indeksa $T_{\mu\nu}, A^\mu{}_\nu$ označavat ću tenzore višeg reda (gdje red tenzora ovisi o broju indeksa).

Ukoliko se umjesto grčkog slova koristi latinsko slovo za oznaku indeksa (primjerice $i, j, k \dots$), podrazumjeva se da se radi o klasičnim 3-vektorima. Također, kroz diplomski rad će se koristiti Einsteinova konvencija za sume: ako se dva indeksa s jedne strane jednakosti ponavljaju, to implicitno znači da se po tim indeksima sumira:

$$y = \sum_{i=1}^3 c_i x^i = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 = c_i x^i$$

Indeks i pri tome predstavlja tzv. slijepi indeks koji se može zamijeniti bilo kojim drugim indeksom, a da se smisao jednadžbe ne promijeni. Primjerice, mogli smo napisati i

$$y = c_j x^j$$

Konačno, koristit ću se prirodnim sustavom jedinica, u kojem je brzina svjetlosti $c = 1$, osim gdje nije posebno naznačeno. Detalji oko tenzorskog računa i objašnjenje metrike mogu se naći u dodatku.

1.1 Povijesni pregled

Postulati klasične (Newtonovske) teorije mogu se svesti na sljedeća dva principa:

1. Galilejev princip relativnosti koji kaže da su u svim inercijalnim sustavima zakoni fizike u svakom trenutku isti (jednadžbe gibanja imaju isti oblik) te da je svaki sustav koji se giba jednoliko u odnosu na neki drugi inercijalni sustav i sam inercijalan.
2. Newtonov princip determinizma (kauzalnosti) koji kaže da stanje sistema u nekom trenutku (skup svih položaja i brzina materijalnih točaka koji čine sistem) jednoznačno određuje gibanje sistema u budućnosti i u prošlosti.

Galilejev princip nam govori kako ćemo opisati gibanje nekog objekta u dva različita sustava koji se jedan naspram drugog gibaju brzinom v . Neka u sustavu \mathcal{S} imamo koordinate (t, x, y, z) a u sustavu \mathcal{S}' koordinate (t', x', y', z') . Gibanje sustava \mathcal{S}' je duž x -osi. U trenutku $t = t' = 0$ ishodišta oba sustava se podudaraju. Tada gibanje čestice u sustavu \mathcal{S}' možemo u potpunosti opisati sljedećim jednadžbama:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.1}$$

Prilikom transformacije brzine se (vektorski) zbrajaju: ako je brzina čestice u sustavu S jednaka u , a sustav S' se od sustava S odmiče brzinom v , onda je brzina čestice u sustavu S' vektorski zbroj te dvije brzine:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \quad (1.2)$$

iz čega izlazi da, prema pravilu o transformaciji, nema naznake o gornjoj granici brzine. Druga posljedica Newtonovskih postulata jest apsolutnost vremena, sva tijela koja se nalaze u inercijalnim sustavima doživljavaju isto vrijeme. Iz našeg iskustva, ovo nam se čini posvne razumnim, u svakodnevnom životu istovremenost događaja dolazi prirodno; na *našim skalama* (vremenskim odnosno prostornim) možemo s velikom sigurnošću odrediti kad su dva događaja istovremena.

Za sve praktične potrebe u svakodnevnom životu, korištenje Newtonovih postulata je sasvim dovoljno da bi se opisalo ponašanje objekata u pokretu (u odnosu, naravno, na neki inercijalni sustav). Pitanje je do kolikih brzina možemo ići, a da Galilejeve transformacije vrijede. Primjerice, bi li vrijedile i kad bi se radilo o brzini svjetlosti? Godinama su znanstvenici smatrali da je brzina svjetlosti beskonačna i da se svjetlost beskonačno brzo širi u svim smjerovima. Galileo je prvi koji je pokušao izmjeriti brzinu svjetlosti, no eksperiment mu nije uspio jer je razdaljina na kojem je mjerio brzinu svjetlosti bila premala. Tek je danski astronom Olaf Roemer 1676. godine, promatrajući putanju mjeseca Io oko Jupitera, uspio doći do zaključka da brzina svjetlosti nije beskonačna te ju je procijenio na oko 225 tisuća km/h što je, s obzirom na metodu mjerenja, vrlo dobar rezultat. Formulacijom klasične elektrodinamike krajem 19. stoljeća od strane Maxwella i pripadajućim eksperimentima sa svjetlošću došlo se do zaključka kako je svjetlost elektromagnetski val čija je brzina

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 2.99 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (1.3)$$

Problem je nastao kad su pokušali primijeniti Galilejeve transformacije na Maxwellove jednadžbe. Ono što je ustanovljeno jest da se Maxwellove jednadžbe nisu invarijantne na Galilejeve transformacije. Pretpostavka znanstvenika je bila da postoji tzv. eter koji obavija svu materiju, a koji bi bio taj preferirani inercijalni sustav u kojem bi Maxwellove jednadžbe bile očuvane na transformacije. Provedeni su mnogi eksperimenti no nikad nije utvrđeno postojanje etera. Najpoznatiji je Michelson-Moreleyev eksperiment iz 1887. godine koji je nedvosmisleno pokazao kako brzina svjetlosti *ne ovisi* o relativnoj brzini izvora i opažača, svjetlost se uvijek giba jednakom brzinom u nekom sredstvu. Eksperiment je pokazao kako je brzina svjetlosti najveća moguća brzina kojom se nešto može gibati. Iz toga slijedi kako su Galilejeve transformacije nepotpune i treba ih modificirati.

Krajem 19. stoljeća danski je fizičar Hendrik Lorentz zajedno s engleskim fizičarom Josephom Larmorom i francuskim fizičarom Jules Henri Poincareom došao do transformacija koje, primjenjene na Maxwellove jednadžbe, čuvaju njihov oblik pri-

likom promjene sustava (skok iz etera u neki sustav koji se giba jednoliko). Te su transformacije postale poznate kao Lorentzove transformacije. Bitna posljedica Lorentzovih transformacija jest ne samo da radimo promjenu u prostornim koordinatama, već moramo raditi promjenu i u vremenskoj koordinati, a da bi rezultati bili konzistentni. 1905. godine Einstein je na temelju postulata konstantnosti brzine svjetlosti i principa relativnosti (zakoni fizike isti su u svim inercijalnim sustavima, tj. sustavima koji se jedan u odnosu na drugog gibaju jednoliko) formirao specijalnu teoriju relativnosti; time se u potpunosti odbacila hipoteza o eteru. Posljedice ova dva postulata vrlo su značajne za kasniji razvoj opće teorije relativnosti:

- relativnost simultanosti: dva događaja koja su simultana u jednom inercijalnom sustavu ne moraju, općenito, biti simultani u drugom inercijalnom sustavu.
- dilatacija vremena: satovi koji se gibaju odbrojavaju vrijeme *sporije* nego satovi koji miruju.
- kontrakcija duljine: duljina objekta u gibanju je kraća od duljine istog tog objekta kad miruje (vrijedi samo za dimenziju u smjeru gibanja, dimenzije okomite na smjer gibanja nisu zahvaćene).

Lorentzove transformacije su generalizacija Galilejevih transformacija u specijalnoj teoriji relativnosti i svode se na Galilejeve ako je brzina objekta puno manja od brzine svjetlosti (oznaka c).

Neka ponovo imamo sustav \mathcal{S} s koordinatama (t, x, y, z) i \mathcal{S}' s koordinatama (t', x', y', z') . Neka se sustav \mathcal{S}' giba jednoliko brzinom v duž x -osi. Tada su koordinate u pojedinom sustavu vezane sljedećim transformacijama:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; & t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \tag{1.4}$$

Iz jedndažbe (1.4) možemo izraziti pravilo za zbrajanje brzina:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \tag{1.5}$$

gdje je w brzina čestice u sustavu \mathcal{S}' , u brzina čestice u sustavu \mathcal{S} i v brzina sustava \mathcal{S}' u odnosu na sustav \mathcal{S} . Ako je $v \ll c$ odnosno umnožak $uv \ll c^2$, tj. ako su brzine sustava i čestice jako male u odnosu na brzinu svjetlosti, transformacije se svode na Galilejeve.

1.2 Problemi klasične fizike

Promotrimo Newtonov zakon gravitacije: on kaže da između svake dvije mase postoji privlačna sila koja pada s kvadratom udaljenosti između masa. Primjerice, ako uzimamo sustav objekt - Zemlja, tada možemo napisati

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1.6)$$

gdje je G gravitacijska konstanta, M masa Zemlje, m masa objekta, a r udaljenost između centara mase oba objekta. S obzirom da je gravitacijska sila konzervativna, možemo silu izraziti kao gradijent potencijala

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi = -m\nabla\Phi \quad ; \quad \mathbf{a} = -\nabla\Phi \quad (1.7)$$

gdje je m gravitacijska masa. Promotrimo sad 2. Newtonov zakon koji kaže da je sila proporcionalna umnošku *inercijalne* mase i akceleracije. Ili, matematički rečeno:

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a} = -m_i \nabla\Phi \quad (1.8)$$

iz čega slijedi da je akceleracija jednaka

$$\mathbf{a} = \frac{m_i}{m} \mathbf{g} \quad (1.9)$$

gdje je m_i inercijalna masa, a \mathbf{g} ubrzanje gravitacijske sile. Izgleda da inercijalna masa vrši dvije uloge: s jedne strane, prema 2. Newtonovom zakonu, ona pomnožena s akceleracijom daje silu, a s druge strane vrši i ulogu gravitacijskog potencijala u Newtonovom zakonu gravitacije. Drugi problem je vezan uz beskonačnu brzinu širenja informacije o promjeni gravitacijskog polja. Ukoliko imamo dva objekta koji se nalaze razmaknuti na nekoj udaljenosti, oni osjećaju gravitacijsku privlačnost prema Newtonovom zakonu. Ukoliko sad jednu od masa naglo uklonimo, druga bi masa istog trena trebala osjetiti promjenu u gravitacijskoj privlačnosti, što krši odredbe specijalne teorije relativnosti (informacija se može širiti najviše brzinom c).

Treći problem s kojim se suočila Newtonova teorija gravitacije bilo je neslaganje izračuna Merkurove precesije. Svi planeti, gibajući se oko Sunca, precesiraju, to je normalna posljedica gravitacije i interakcija među planetima. Međutim, izmjerena precesija ne odgovara precesiji dobivenoj izračunom putem Newtonove teorije. Razlika između izmjerene i izračunate vrijednosti je 43 lučne sekunde po stoljeću. Da bi se objasnila razlika između Newtona i izmjerenih vrijednosti, razne su mogućnosti isprobane (vidjeti [2] za popis referenci), no sve su se pokazale neispravnima. Iz ovih je problema očito kako Newtonova teorija gravitacije nije potpuna, već da se moraju napraviti neke izmjene, odnosno proširenje.

1.3 Princip ekvivalencije

Prvi problem koji je bilo potrebno riješiti bio je odnos inercijalne i gravitacijske mase [3]. Kao što je pokazano u jednadžbi (1.9), akceleracija padajućeg tijela u gravitacijskom polju jednaka je umnošku gravitacijskog ubrzanja i faktora m_i/m (tzv. gravitacijski naboj). No, Galileo je davno pokazao da je odgovor gravitacije na masu univerzalan, tj. da svaki objekt u gravitacijskom polju pada jednakom brzinom neovisno o njegovoj masi. Iz toga direktno slijedi zaključak da su m_i i m jednaki, tj. da ne postoji razlika između inercijalne i gravitacijske mase. To također implicira da je način na koji se gibaju objekti u slobodnom padu univerzalan, da možemo bez smanjenja općenitosti, za opis gibanja tijela u slobodnom padu, napisati

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi \quad (1.10)$$

gdje je Φ gravitacijski potencijal. Ovakav princip zove se *slabi princip ekvivalencije* (engl. *weak equivalence principle* ili WEP). Promatrajući jednadžbu (1.10) možemo iskazati još jednu, ekvivalentnu, formu WEP-a: postoji cijela klasa *inercijalnih* trajektorija (čestice u “slobodnom padu”) po kojima se neakcelerirane čestice gibaju (akceleracija samo radi gravitacije). Iz toga vidimo da je gravitacija posebna, jer kod drugih sila ovo ne vrijedi. Primjerice, kod elektrostatske sile putanja čestice direktno ovisi o tome je li sila privlačna ili odbojna, što ovisi o naboju čestice. S druge strane, gravitacijski naboj je uvijek pozitivan, već smo ustanovili da su inercijalna masa i gravitacijska masa jednake za bilo koje tijelo koje pada u gravitacijskom polju.

Posljedica WEP-a je da mi lokalno ne možemo vidjeti razliku u putanji čestice kada se ista nalazi u gravitacijskom polju i kada se nalazi u jednoliko akcelerirajućem sustavu. Ako gledamo druge sile, primjerice elektrostatičku, razliku u putanji čestice možemo odmah vidjeti ukoliko analiziramo raznoimene naboje. Treba biti oprezan u donošenju ovakvih zaključaka, ako uzimamo u obzir preveliki dio prostor-vremena, postoji mogućnost da se gravitacijsko privlačenje u raznim dijelovima našeg volumena razlikuje. Ako uzmemo da cijeli volumen stalno uniformno akcelerira, u raznim dijelovima tog volumena bismo u načelu mogli primjetiti razliku između akceleracija. Stoga, WEP možemo preformulirati na način da uključimo i ovu ogradu:

U dovoljno malom volumenu prostor-vremena gibanje čestica koje slobodno padaju zbog utjecaja gravitacijskog polja *jednako* je gibanju čestica koje se nalaze u sustavu koji jednoliko akcelerira.

Einsteina WEP nije zadovoljio, on kaže da ne može postojati niti jedan eksperiment koji bi lokalno dao naslutiti da postoji razlika između akceleracije gravitacije i uniformne akceleracije sustava u kojem se čestice nalaze, te je formulirao novi princip, Einsteinov princip ekvivalencije (engl. *Einstein Equivalence Principle* ili EEP) koji kaže:

U dovoljno malom volumenu prostor-vremena svi zakoni fizike svode se na zakone specijalne teorije relativnosti.

Posljedica ovog principa je da izvodeći eksperimente lokalno (u tom dovoljno malom volumenu) ne možemo zaključiti postoji li gravitacijsko polje ili su putanje posljedica uniformne akceleracije sustava. Ako se uzme u obzir ovaj princip te se sjetimo da je za nas neakcelerirajući objekt onaj koji nema akceleraciju osim ako ona nije posljedica gravitacije (objekt u slobodnom padu), onda vidimo kako gravitacija više nije sila, već je univerzalan konstrukt od kojeg se ne može pobjeći. U tom slučaju, jedino rješenje koje zadovoljava sve pretpostavke je da je gravitacija posljedica zakrivljenosti prostor-vremena, što nam EEP i implicira.

1.4 Einsteinova jednadžba

Gravitacija je, dakle, posljedica zakrivljenosti prostor-vremena. Samu zakrivljenost opisujemo kao promjenu geometrije; u tom opisu uvelike nam pomaže tenzorski račun. Izvod Einsteinove jednadžbe može se napraviti na dva načina [3]:

- “na prste” (usporedbom sa Poissonovom jednadžbom i zamjenom parcijalnih derivacija kovarijantnim derivacijama, s obzirom da radimo s tenzorima)
- formalno (kroz analizu akcije).

Konačni izraz Einsteinove jednadžbe je

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

gdje $R_{\mu\nu}$ označava Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ metriku prostora, G gravitacijsku konstantu i $T_{\mu\nu}$ tenzor energije-momenta. Iz jednadžbe je vidljivo kako se zakrivljenost prostora mijenja onako kako se mijenja tenzor energije-momenta, što će reći da veća gustoća energije više zakrivljuje prostor-vrijeme. Također, ako je $T_{\mu\nu} = 0$, slijedi da je $R_{\mu\nu} = 0$ čime se vraćamo na zakone specijalne teorije relativnosti (ako je zakrivljenost 0, prostor je ravan).

1.5 Geodezici

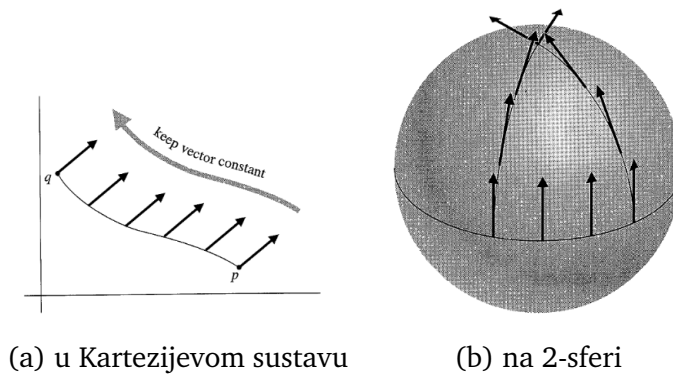
Sad kad znamo kako se mijenja prostor-vrijeme u prisutstvu energije i uzimajući u obzir EEP, možemo se pitati kako izgledaju putanje neakceleriranih čestica (čestica u “slobodnom padu”) u zakrivljenoj geometriji. Evidentno je kako te putanje neće biti isključivo ravne linije. Ako putanju čestice parametriziramo po nekom parametru $x^\mu(\lambda)$ gdje je λ parametar, putanju čestice u ravnom prostoru možemo opisati jednadžbom

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad (1.12)$$

U ravnom prostoru, ova će jednadžba dati ispravno rješenje koje će imati dvije komponente: kako putanja evoluira prostorno te kako evoluira vremenski. S obzirom da mi radimo u zakrivljenom prostoru, ovu jednadžbu moramo pretvoriti u tenzorsku, što činimo tako da zamjenjujemo parcijalne derivacije kovarijantnom derivacijom. Opći oblik kovarijantne derivacije je

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda} \quad (1.13)$$

gdje je V^{μ} neko vektorsko polje. Vidimo da uz parcijalnu derivaciju kovarijantna derivacija sadrži i tzv. Christoffelov simbol $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ koji opisuje način kako se vektori paralelno transportiraju pod mnogostrukostima raznih metrika. Pod “paralelnim transportom” podrazumjevamo situaciju gdje vektor pomičemo po nekoj putanji na način da sami vektor bude konstantan. U ravnom prostoru Christoffelova veza nam ne treba, jer nam je intuitivno jasno što znači paralelno transportirati vektor. S druge strane, to *nije* intuitivno kad pričamo o zakrivljenim prostorima, rezultat paralelnog transportiranja vektora u zakrivljenom prostoru ovisi o putu transporta (slika 1.1 [3]).



Slika 1.1: Paralelni transport vektora

Iz slike 1.1b vidimo kako isti vektor, paralelno transportiran na dva različita načina, izgleda potpuno drugačije u krajnjoj točki. Christoffelov simbol u jednadžbi (1.13) nije tenzor, jer se ne transformira kao tenzor. Zato ćemo ga zvati objektom.

Jednadžba (1.12) nam, dakle, opisuje evoluciju trajektorije čestice u ravnom prostoru. Zamijenimo li parcijalne derivacije kovarijantnom derivacijom, dobit ćemo

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0 \quad (1.14)$$

koju zovemo *geodezijska jednadžba*. Ona je generalizacija Newtonove jednadžbe gibanja u općoj teoriji relativnosti. Primjetimo da ako imamo ravni prostor, onda je $\Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} = 0$ pa se jednadžba svodi na jednadžbu (1.12).

2 Schwarzschildova metrika

2.1 Schwarzschildovo rješenje

Nekoliko mjeseci nakon objave opće teorije relativnosti 1915. godine Karl Schwarzschild našao je prvo egzaktno rješenje Einsteinove jednačbe [5] za sferno simetrično gravitacijsko polje. Schwarzschildovo je rješenje specifično rješenje Einsteinove jednačbe, ono u sebi sadrži neke pretpostavke:

1. pretpostavljamo da je naše prostor-vrijeme *sferno-simetrično* (invarijantno na rotaciju i na zrcaljenje) što implicira korištenje sfernog koordinatnog sustava.
2. pretpostavljamo da imamo *statično prostor-vrijeme* što znači da su sve komponente metrike neovisne o vremenskoj koordinati t što implicira iščezavanje vremenske derivacije metrike (tj. $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$) i da je geometrija prostor-vremena invarijantna na promjenu vremenskog toka $t \rightarrow -t$.
3. tražimo *vakuumsko rješenje*, tj. tražimo rješenje Einsteinove jednačbe u kojoj je $T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu} = 0$. To također implicira da je Riccijev skalar $R = 0$.

Metriku Minkowskog u polarnim koordinatama (t, r, θ, φ) možemo napisati u obliku

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.1)$$

gdje je $d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$. Da bismo sačuvali sfernu simetričnost potencijala, treba očuvati član uz $d\Omega^2$. Ostale članove metrike možemo pomnožiti s bilo kojim faktorom, dok god on ovisi samo o radijalnoj komponenti:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + e^{2\gamma(r)} r^2 d\Omega^2 \quad (2.2)$$

gdje su $\alpha(r), \beta(r), \gamma(r)$ neke funkcije. Radijalnu koordinatu metrike možemo redefinirati tako da uključimo doprinos funkcije $\gamma(r)$. Time nećemo ništa promijeniti u samoj metrici jer s definiranjem metrike moramo definirati i koordinatni sustav u kojem će vrijediti:

$$\bar{r} = e^{\gamma(r)} \quad \Rightarrow \quad d\bar{r} = e^{\gamma} dr + e^{\gamma} r dr = \left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right) e^{\gamma} dr \quad (2.3)$$

iz čega slijedi

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + \left(1 + \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{2\beta(r)-2\gamma(r)} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \quad (2.4)$$

čime smo kompletnu ovisnost o radijalnoj komponenti r zamijenili ovisnošću o komponenti \bar{r} . S obzirom da je \bar{r} samo oznaka i označava istu radijalnu komponentu kao i r , možemo napraviti sljedeću zamjenu:

$$\bar{r} \rightarrow r \quad (2.5)$$

$$\left(1 + r \frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} \exp[2\beta(r) - 2\gamma(r)] \rightarrow e^{2\beta} \quad (2.6)$$

Uz ovako definirane koordinate metrika postaje

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (2.7)$$

što izgleda jako slično kao i početna metrika u jednadžbi (2.2), s tim da smo se riješili koeficijenta $e^{2\gamma(r)}$. Einsteinovu jednadžbu ćemo sad iskoristiti da bismo riješili uvjete na funkcije $\alpha(r)$ i $\beta(r)$. Prije svega, izračunat ćemo Christoffelove simbole. S obzirom da Christoffelovi simboli imaju 3 indeksa, ukupan broj simbola je 64. Od tih 64, što zbog simetrije, a što zbog toga što su neki identički 0, otpada njih 55, što nas ostavlja s 9 neišczavajućih komponenti:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \partial_r \alpha, & \Gamma_{tt}^r &= e^{2(\alpha-\beta)} \partial_r \alpha, & \Gamma_{rr}^r &= \partial_r \beta \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r e^{-2\beta}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Iz ovih koneksija možemo izračunati neišczavajuće komponente Riemannovog tenzora:

$$\begin{aligned} R_{rtr}^t &= \partial_r \alpha \partial_r \beta - \partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 \\ R_{\theta t\theta}^t &= -r e^{-2\beta} \partial_r \alpha \\ R_{\phi t\phi}^t &= -r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \alpha \\ R_{\theta r\theta}^r &= r e^{-2\beta} \partial_r \beta \\ R_{\varphi r\varphi}^r &= r e^{-2\beta} \sin^2 \theta \partial_r \beta \\ R_{\varphi\theta\varphi}^\theta &= (1 - e^{-2\beta}) \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Kontrakcijom Riemannovog tenzora možemo naći Riccijev tenzor:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right] \\ R_{rr} &= -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \beta \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1 \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned} \quad (2.10)$$

S obzirom na uvjet $\Gamma_{\mu\nu} = 0$, očito je kako svaka komponenta Riccijevog tenzora mora iščezavati. Iz tog uvjeta kombiniranjem komponenti R_{tt} i R_{rr} dobivamo jednadžbu

$$\frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta) = 0 \quad (2.11)$$

čije je rješenje

$$\alpha = -\beta + c \quad (2.12)$$

gdje je c neka integracijska konstanta. Te se konstante možemo riješiti tako da napravimo reskaliranje vremenske koordinate $t \rightarrow e^{-ct}$ što onda vodi na $\alpha = -\beta$. Pogledajmo sad komponentu $R_{\theta\theta} = 0$. Uz ogradu $\alpha = -\beta$, komponenta postaje

$$R_{\theta\theta} = e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1 \quad (2.13)$$

čije je rješenje, nakon malo manipuliranja, jednako

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad \Rightarrow \quad e^{2\beta} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} \quad (2.14)$$

gdje je R_s neka nedefinirana konstanta. S ovim izračunatim vrijednostima funkcija $\alpha(r)$ i $\beta(r)$ možemo zapisati konačni oblik metrike:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.15)$$

Vrijednost R_s je proizvoljan, bilo koja vrijednost parametra R_s zadovoljava jednadžbe $R_{tt} = 0$ i $R_{rr} = 0$. Da bismo došli do fizikalne interpretacije konstante R_s pretpostavit ćemo da se nalazimo u aproksimaciji slabog polja. U takvoj aproksimaciji, metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ tretiramo kao zbroj metričkog tenzora Minkowskijevog prostora i neke male perturbacije:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

Takva aproksimacija zove se *linearizacija gravitacije* i može koristiti za opis Newtonove gravitacije na zakrivljenom prostor-vremenu, uz pretpostavku da se čestice gibaju sporo u odnosu na brzinu svjetlosti:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$$

Znamo da čestice u zakrivljenom prostor-vremenu putuju po geodezicima. Uz aproksimaciju da se čestice gibaju jako sporo u odnosu na brzinu svjetlosti, geodezijska se jednadžba gibanja za takvu česticu može napisati kao

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (2.17)$$

gdje smo izbacili prvu derivaciju svih koordinata osim vremenske po svojstvenom vremenu τ . Christoffelova koneksija dodatno se pojednostavljuje zbog uvjeta da je polje statično:

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}g_{00} \quad (2.18)$$

Invertirajući metriku iz izraza (2.16) i uvrštavajući je u izraz za Christoffelov simbol dobivamo da je on jednak

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \quad (2.19)$$

te je stoga geodezijska jednadžba jednaka

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\partial_{\lambda}h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \quad (2.20)$$

S obzirom da je vremenska derivacija metrike $\partial_0 h_{00} = 0$ zbog činjenice da je polje statično, dobivamo da je promjena vremena u odnosu na promjenu vlastitog vremena jednaka konstanti tj.

$$\frac{dt}{d\tau} = \text{const.} \quad (2.21)$$

Prostorni dio metrike Minkowskog je jediničan, sve ostale komponente su 0. Također, vidimo da možemo obje strane jednadžbe podijeliti s izrazom $(dt/d\tau)^2$ čime na lijevoj strani jednakosti prelazimo s derivacije po svojstvenom vremenu na derivaciju po normalnoj vremenskoj koordinati. Geodezijska jednadžba sad postaje

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (2.22)$$

što izgleda kao jednadžba gibanja u Newtonovom gravitacijskom polju ako identificiramo $h_{00} = -2\Phi$ iz čega slijedi da je $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$. Ako je Φ običan Newtonov gravitacijski potencijal, onda je usporedbom vremenske komponente metrike (2.15) i izraza $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$ možemo identificirati konstantu R_s

$$R_s = 2GM \quad (2.23)$$

tako da je krajnja forma Schwarzschildove metrike jednaka

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.24)$$

Parametar M se odnosi na klasičnu Newtonovsku masu. Iz oblika Schwarzschildove metrike možemo zaključiti nekoliko stvari. Prije svega, ako prostor-vrijeme ne sadrži masu/energiju, Schwarzschildova se metrika pretvara u metriku Minkowskog, što i očekujemo: gravitacija je posljedica zakrivljenosti prostor-vremena, a uzrok zakrivljenosti je postojanje mase/energije. Drugo, ako pustimo da $r \rightarrow \infty$, vidimo da se metrika sve više i više približava metrici Minkowskog. Ovakvo ponašanje metrike

zove se *asimptotska ravnost* (engl. *asymptotic flatness*). Takvo ponašanje metrike također je očekivano, budući da je zakrivljenost prostora vrlo mala daleko od izvora zakrivljenosti. Iz oblika metrike (tj. komponenti metrike) možemo također vidjeti kako postoje dva singulariteta u kojima metrika nije definirana:

- Za $r = 0$ zakrivljenost postaje beskonačno velika te takav singularitet zovemo *gravitacijski singularitet*.
- S $r = R_s$ definiramo plohu u kojoj metrika također nije definirana te kojom odvajamo rješenja za $r > R_s$ i $r < R_s$. Tu plohu zovemo *horizont događaja*. U ovakvoj metrici očito je kako horizont događaja kauzalno odvaja dva rješenja. Ovaj singularitet nije fizikalni, takav singularitet zovemo *koordinatni singularitet* te se promjenom koordinatnog sustava on može ukloniti [6].

Schwarzshildova metrika opisuje posebnu klasu svemirskih objekata koje nazivamo *crnim rupama*. Pod tim podrazumjevamo objekt čija je gravitacija toliko jaka da niti svjetlost ne može pobjeći, što očito vrijedi uvijek kad je $r < R_s$. Ako pretpostavimo da su zvijezde homogeni objekti iz kojih nastaju crne rupe te su one uniformne gustoće, iz Einsteinove jednadžbe moguće je pokazati da u općoj teoriji relativnosti ne može postojati zvijezda čija bi masa bila:

$$M = \frac{4}{9}R \quad (2.25)$$

gdje je R radijus zvijezde [7]. Kolaps zvijezde i moguće formiranje crne rupe ovisi samo o početnoj masi zvijezde. Ako je masa bijelog patuljka (dakle, zvijezde koja je završila svoju evoluciju kao zvijezda glavnog slijeda) manja od Chandresekharove granice [8]

$$M_{\text{bijeli patuljak}} \approx 1.4 \cdot M_{\odot}$$

gdje je M_{\odot} masa Sunca, tlak elektronskog plina dovoljan je da se spriječi daljnji gravitacijski kolaps. Ukoliko je ta masa veća, tlak elektrona ne može osigurati stabilnost te se zvijezda i dalje steže, pod utjecajem vlastite gravitacije. Zbog daljnjeg stezanja, elektroni i protoni se poništavaju (β^- raspad) stvarajući neutrone i neutrine. Rezultat je neutronska zvijezda, izuzetno velike gustoće i radijusa desetak km. Ako je masa neutronske zvijezde manja od Tolman-Oppenheimer-Volkoffove granice, evolucija zvijezde staje na neutronske zvijezdi. Trenutna predviđanja [9] postavljaju granicu na $1.5 - 3.0 M_{\odot}$. Točnu granicu nemoguće je odrediti zbog toga što još uvijek ne znamo kako se ponašaju jednadžbe stanja u situacijama izuzetno velikih gustoća, kakve su u neutronske zvijezdama. Ako je masa neutronske zvijezde veća od te granice, zvijezda se stišće i dalje te na koncu postaje crna rupa. Kolaps neutronske zvijezde i formiranje crne rupe traje u prosjeku jedan dan [11].

Crne rupe nisu odmah bile prihvaćene kao realnost, iako je njihov matematički koncept detaljno objašnjen Schwarzschildovom metrikom. Tek je fizičar John Archibald Wheeler popularizirao naziv “crna rupa” u znanstvenoj zajednici. Danas crne rupe dijelimo u nekoliko kategorija, od stelarnih crnih rupa (čije su mase usporedive s masom Sunca) do super-masivnih crnih rupa (čije mase idu do nekoliko milijardi masa Sunca). Smatra se da se u centru svake galaksije nalazi super-masivna crna rupa. Promatranja galaktičkog centra naše galaksije iz 2002. godine dala su vrlo čvrste dokaze da se u centru galaksije nalazi super-masivna crna rupa Sgr A* [12] čija je masa procijenjena na $(3.7 \pm 1.5) \cdot 10^6 \cdot M_{\odot}$. Dodatni eksperimentalni dokazi za postojanje crnih rupa mogu se naći u članku Andreasa Mullera iz 2007. godine [10].

2.2 Geodezici u Schwarzschildovom rješenju

Sferna simetričnost Schwarzschildove metrike utječe na geodezijske krivulje po kojima se gibaju čestice. Kao i ranije, radimo u sfernom koordinatnom sustavu s koordinatama (t, r, θ, φ) . Christoffelovi simboli (2.8) uz uvjete iz jednadžbe (2.14) te uvrštenom konstantom R_s ubačeni u jednadžbu (1.14) daju 4 vezane diferencijalne jednadžbe koje opisuju gibanje čestice:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r(r-2GM)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} &= 0 \\
\frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^3} (r-2GM) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r(r-2GM)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \\
-(r-2GM) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \right] &= 0 \\
\frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 &= 0 \\
\frac{d\varphi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0 \tag{2.26}
\end{aligned}$$

Schwarzschildova metrika je simetrična, što znači da rješavanjem jednadžbi gibanja možemo dobiti konstante gibanja koje su očuvane veličine duž geodezijske putanje kojom se čestica giba. Ako je λ parametar kojim smo parametrizirali putanju x^μ , postojanje konstante gibanja znači da sljedeći identitet vrijedi:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = 0$$

Veličinu K_μ nazivamo *Killingov vektor*. Dakle, proučavanjem ponašanja Killingovih vektora možemo na jednostavniji način doći do rješenja kompliciranog problema, jer se naša analiza svodi na traženje konstanti gibanja (odnosno simetrija). Schwarzschildova metrika sadrži 4 Killingova vektora: 1 koji opisuje invarijantnost na vremensku evoluciju (što vodi na zakon očuvanja energije) te 3 koji opisuju invarijantnost na

prostorne rotacije (što vodi na zakon očuvanja kutne količine gibanja). Očuvanje iznosa kutne količine gibanja znači da će se čestica gibati u ravnini, stoga bez smanjenja općenitosti možemo izabrati da je kut $\theta = \pi/2$. Preostaju nam dva Killingova vektora, K^μ i R^μ , koji će nam opisati ostale dvije očuvane veličine:

$$K^\mu = (\partial_t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$R^\mu = (\partial_\varphi)^\mu = (0, 0, 0, 1)$$

čije su kovarijantne komponente jednake

$$K_\mu = \left(- \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right), 0, 0, 0 \right)$$

$$R_\mu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta)$$

Ako su E i L očuvana energija i kutna količina gibanja, onda slijedi

$$E = -K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2Gm}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} \quad (2.27)$$

$$L = R_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (2.28)$$

Iz geodezijske jednadžbe možemo vidjeti kako postoji još jedna očuvana veličina:

$$\epsilon = -g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (2.29)$$

gdje za parametar ϵ uzimamo ili $\epsilon = 0$ (za bezmasene čestice) ili $\epsilon = 1$ (za masivne čestice). Proširenjem jednadžbe (2.29) te uvrštavanjem pokrata koje smo dobili pomoću Killingovih vektora i sređivanjem dobijemo da čestica u Schwarzschildovoj metrici ima ukupnu **energiju** jednaku

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} = \frac{1}{2}E^2 \quad (2.30)$$

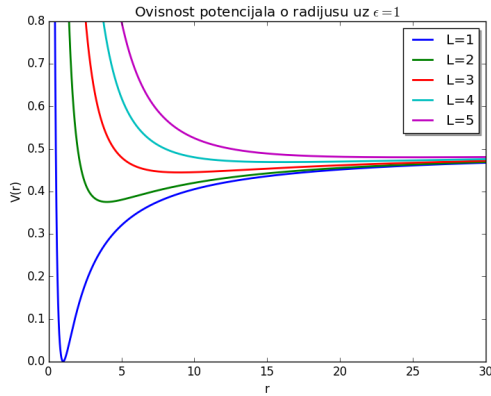
gdje su potencijali jednaki

$$V_{\text{nerel}}(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} \quad (2.31)$$

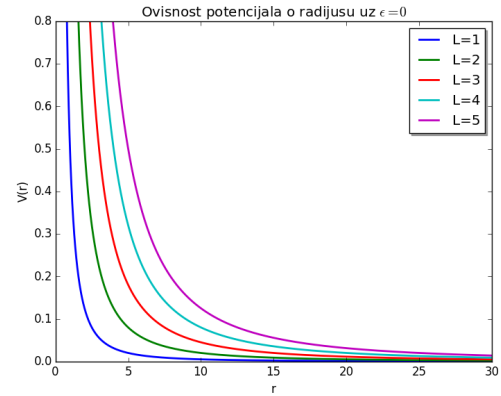
$$V_{\text{rel}}(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (2.32)$$

Jednadžba (2.30) daje nam “energiju” klasične čestice koja se giba u klasičnom 1D potencijalu $V(r)$. Slike 2.1 i 2.2 prikazuju izgled potencijala za masene i bezmasene čestice ($\epsilon = 1$ i $\epsilon = 0$) uz $L = 1 \dots 5$. Za obje slike uzeto je $GM = 1$.

Iz oblika nerelativističkih potencijala vidljivo je kako postoje dvije vrste orbita:

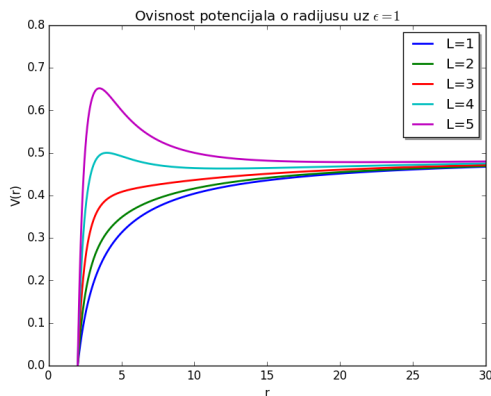


(a) za masene čestice

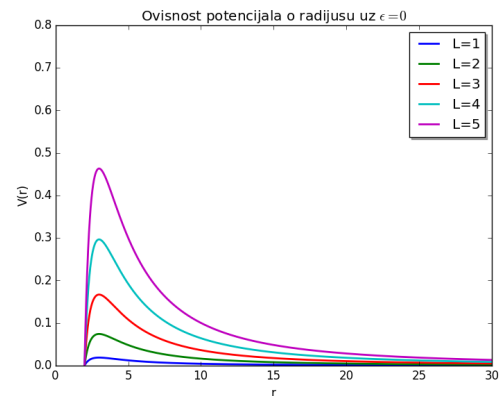


(b) za bezmasene čestice

Slika 2.1: Izgled nerelativističkog potencijala za razne čestice



(a) za masene čestice



(b) za bezmasene čestice

Slika 2.2: Izgled relativističkog potencijala za razne čestice

- omeđene orbite (slika 2.1a) za čestice čije se energije nalaze unutar potencijalne jame i čije su orbite elipse. Čestice s energijom koja odgovara minimumu potencijala imaju stabilne kružne orbite. Klasične točke obrata definiraju se kao točke gdje je $E = V(r)$.
- neomeđene orbite (slika 2.1a i 2.1b) za čestice čije su energije takve da imaju samo jednu točku obrata, dok im je druga u beskonačnosti. Takve su orbite hiperbole ili parabole. Iz slika se vidi da fotoni, kao bezmasene čestice, nemaju omeđenih putanja već se uvijek gibaju po hiperbolama. Kod masenih čestica maksimalna energija koju mogu imati, a da orbita bude omeđena, uvelike ovisi o kutnoj količini gibanja.

Iz uvjeta $dV/dr = 0$ moguće je dobiti radijus kružne putanje kod nerelativističkog potencijala:

$$r_{\text{kružno}} = \frac{L^2}{\epsilon GM}$$

iz čega se vidi kako za bezmasene čestice ($\epsilon = 0$) nemamo kružnih putanja. I kod relativističkog potencijala imamo omeđene i neomeđene putanje (slike 2.2a i 2.2b), no zbog člana s ovisnošću $1/r^3$ mijenja se izgled potencijala za $r \rightarrow 0$. Za $r \rightarrow \infty$ izgled je isti kao i u slučaju nerelativističkog potencijala jer dominira član $1/r$. Na horizontu događaja $r = 2GM$ potencijal je 0. Uvjet za kružnu putanju dobije se iz derivacije potencijala:

$$r_{\text{kružno}} = 3GM \quad (2.33)$$

Ova orbita fotona oko crne rupe nije stabilna, jer se nalazi u maksimumu potencijala. Bilo kakva perturbacija u energiji fotona će poslati foton ili prema centru crne rupe ili u beskonačnost. Kod masivnih čestica stabilnost kružne putanje ovisi o kutnoj količini gibanja L . Sređivanjem derivacije potencijala može se pokazati da za $L \rightarrow \infty$ možemo naći dva radijusa koja bi odgovarala kružnim putanjama:

$$r_{\text{kružno}} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12G^2M^2L^2}}{2GM} \quad (2.34)$$

čime se dobivaju rješenja

$$r_{\text{kružno}} \in \left\{ \frac{L^2}{GM}, 3GM \right\} \quad (2.35)$$

Nestabilno je rješenje analogno nestabilnom rješenju kod fotona. Diskriminanta iz jednadžbe (2.34) iščezava kada je $L = \sqrt{12}GM$ i za taj L dobivamo radijus kruženja

$$r_{\text{kružno}} = 6GM \quad (2.36)$$

što predstavlja minimalni radijus za stabilnu kružnu orbitu u Schwarzschildovoj metriki za masene čestice. Za $3GM < r < 6GM$ imamo nestabilne kružne putanje. Akcelerirajuće čestice mogu ući unutar područja $3GM$ i svejedno pobjeći utjecaju crne rupe, no samo ako ne prijeđu Schwarzschildov radijus $2GM$.

2.3 Merkurova putanja

Povijesno gledano, precesija Merkurove putanje prvi je direktan dokaz ispravnosti opće teorije relativnosti. Precesija nije samo relativistički efekt, već se ona javlja i kod Newtonove gravitacije. U takvom režimu, do precesije dolazi zbog gravitacijskog utjecaja drugih planeta na planet kojeg promatramo. Dakle, možemo reći kako za Newtonovu precesiju moramo imati barem 3 tijela u analizi (Sunce, planet koji promatramo i planet koji perturbira orbitu). S druge strane, kod opće teorije relativnosti precesija je posljedica samo interakcije između Sunca i planeta, što je bitna

razlika. Zato su analizom Merkurove putanje uočene velike razlike između Newtonom predviđene precesije i izmjerenih vrijednosti. Samu precesiju možemo podijeliti na tri doprinosa:

- gravitacijska privlačnost ostalih tijela iz sunčevog sustava
- kvadrupolni moment Sunca
- doprinos opće teorije relativnosti

Tablica 2.1 sadrži njihove odnose [13, 14, 21].

Iznos precesije (arcsec/stoljeće)	Uzrok
531.63 ± 0.69 [13]	gravitacijska privlačnost ostalih planeta
0.0254 [21]	kvadrupolni moment Sunca
42.98 ± 0.04 [14]	doprinos opće teorije relativnosti
574.64 ± 0.69	Ukupno
574.10 ± 0.65	Izmjerena vrijednost

Tablica 2.1: Iznosi precesije Merkurove putanje.

Putanje planeta oko sunca općenito su eliptične putanje, te se njihovo kruženje može općenito napisati u parametarskom obliku u polarnim koordinatama kao

$$r(\theta) = \frac{p_0}{1 + e \sin(\theta - \theta')}$$

gdje je p_0 udaljenost fokusa do elipse i e ekscentricitet [16], θ' početni kut. O ekscentricitetu općenito ovisi vrsta putanje:

- $e > 1$: hiperbola
- $e = 1$: parabola
- $e < 1$: elipsa
- $e = 0$: kružnica

S obzirom da je ekcentricitet Merkura relativno velik i iznosi otprilike 0.205 [17] (ekscentricitet Zemljne putanje je otprilike 0.016 [18]), Merkurova je putanja najpogodnija za analizu precesije perihela. U matematičkom opisu precesije slijedit ćemo rezoniranje koje Carroll koristi u svojoj knjizi [3].

Jednadžba (2.30) opisuje kako se mijenja ukupna energija. Naš će cilj biti izraziti r u ovisnosti o φ (izborom da se gibamo u ravnini već imamo $\theta = \pi/2$). Ako tu jednadžbu pomnožimo s faktorom

$$\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^{-2} = \frac{r^4}{L^2} \quad (2.37)$$

dobit ćemo diferencijalu jednadžbu koja opisuje r u ovisnosti o φ :

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{r^4}{L^2} - \frac{2GM}{L^2}r^3 + r^2 - 2GMr = \frac{2\mathcal{E}}{L^2}r^4 \quad (2.38)$$

Supstitucijom $x = L^2/Gmr$ te derivacijom po komponenti φ dobivamo jednadžbu gibanja za $x(\varphi)$:

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} - 1 + x = \frac{3G^2M^2}{L^2}x^2 \quad (2.39)$$

gdje Newtonovom rješenju odgovara slučaj kad je desna strana jednakosti jednaka 0. Rješenje ove jednadžbe možemo podijeliti na sumu Newtonovog rješenja i male perturbacije:

$$x = x_0 + x_1 \quad (2.40)$$

tako da se jednadžbe za svako pojedino rješenje mogu napisati u obliku

$$\frac{d^2x_0}{d\varphi^2} - 1 + x_0 = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{d^2x_1}{d\varphi^2} + x_1 = \frac{3G^2M^2}{L^2}x_0^2 \quad (2.42)$$

čija su rješenja

$$x_0 = 1 + e \cos \varphi \quad (2.43)$$

$$x_1 = \frac{3G^2M^2}{L^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + e\varphi \sin \varphi - \frac{1}{6}e^2 \cos(2\varphi) \right] \quad (2.44)$$

Rješenje za x_0 je rješenje za običnu elipsu čiji je ekscentricitet e (gdje $e^2 = 1 - b^2/a^2$), dok je rješenje za x_1 perturbativno rješenje za najniže doprinose. Kombinirajući rješenja za $x(\varphi)$, sastavljeno od neperturbiranog rješenja x_0 i smetnje x_1 , možemo konačno rješenje izraziti preko jednadžbe

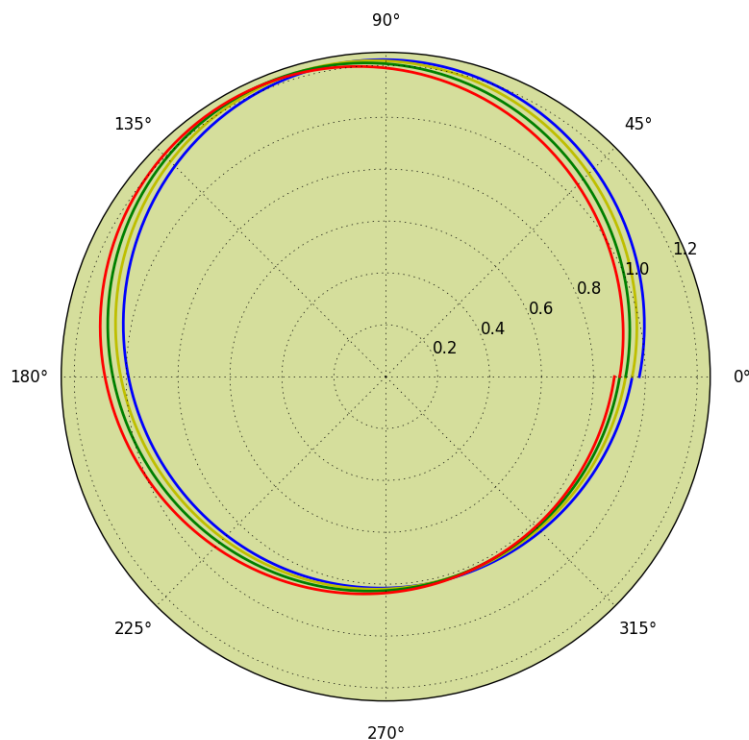
$$x = 1 + e \cos \varphi + \frac{3G^2M^2e}{L^2} \varphi \sin \varphi \quad (2.45)$$

Jednadžba (2.45) opisuje gibanje po elipsi čiji period nije točno 2π . Stoga jednadžbu gibanja možemo napisati i u obliku

$$x = 1 + e \cos[(1 - \alpha)\varphi] \quad (2.46)$$

gdje je $\alpha = 3G^2M^2/L^2$. Vidimo kako je jednadžba (2.46) ekvivalentna jednadžbi (2.45) ako faktor uz \cos razvijemo u red potencija oko $\alpha = 0$. Nakon perioda 2π početni i konačni položaj perihela razlikuju se za kut

$$\Delta\varphi = 2\pi\alpha = \frac{6\pi G^2M^2}{L^2} \quad (2.47)$$



Slika 2.3: Izgled Merkurove putanje za 5 orbita. Svaka orbita označena je drugačijom bojom. S obzirom na jako mali efekt precesije, prilikom izračuna je faktor perturbacije reskaliran $3 \cdot 10^5$ puta radi vidljivosti efekta.

Opća jednadžba elipse zadovoljava jednadžbu

$$r = \frac{(1 - e^2)a}{1 + e \cos \varphi} \quad (2.48)$$

gdje je e ekscentricitet (opet, $e^2 = 1 - b^2/a^2$), a a velika poluos. Iz jednadžbe za neperturbirano rješenje x_0 i definicije $x = L^2/(GMr)$ kutnu količinu gibanja možemo aproksimirati kao

$$L^2 \approx GM(1 - e^2)a \quad (2.49)$$

Uz takvu definiciju aproksimacije vidimo kako je precesija perihela jednaka

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a} \quad (2.50)$$

c je brzina svjetlosti. Isti rezultat možemo dobiti i analizirajući direktno Keplerove zakone za putanju planeta [19]. Uvrštavajući vrijednosti u jednadžbu (2.50) dobivamo kako je pomak perihela Merkura jednak

$$\Delta\varphi_{\text{Merkur}} = 43 \frac{\text{arc sec}}{\text{stoljeće}} \quad (2.51)$$

što odgovara manjku kojeg smo još u tablici 2.1 predvidjeli kao korekciju od opće teorije relativnosti. Merkurova precesija može se vidjeti na slici 2.3.

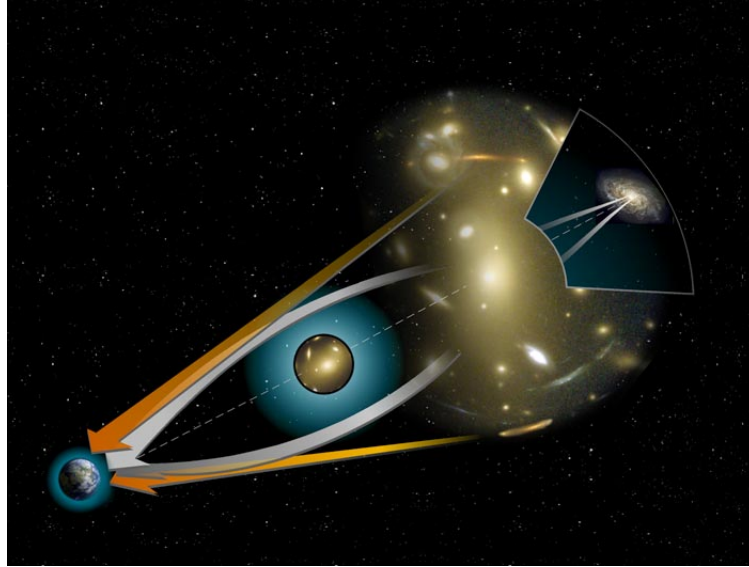
2.4 Gravitacijska leća

Druga velika potvrda Einsteinove teorije bilo je otkriće kako velike mase mogu zakriviti putanje fotona kad oni, iz dalekog izvora, putuju prema opažaču. Veza između akceleriranih sustava i gravitacije (princip ekvivalencije) naveo je Einsteina na zaključak kako bi se zrake svjetlosti morale zakretati u blizini velikih masa. Izračunao je da bi kut otklona oko Sunca trebao biti 0.875 lučnih sekundi [28]. Einstein je predložio da se efekt izmjeri prilikom potpune pomrčine Sunca; budući da gravitacijska leća pomiče položaj zvijezda, usporedbom njihovog položaja za vrijeme pomrčine i noći može se izračunati koliko masa Sunca utječe na putanje fotona. Problem kod takvog mjerenja predstavlja atmosfera, gdje se zbog turbulencija može dogoditi otklon koji je usporediv s otklonom koji bi dala opća teorija relativnosti. Srećom, s obzirom da su turbulencije nasumična pojava, veliki broj mjerenja efektivno eliminira njen utjecaj. Eddington je 1919. godine prvi proveo takvo mjerenje; prema njegovom mjerenju zakretanje svjetlosti zbog Sunca iznosi (1.60 ± 0.31) lučnu sekundu, što je (0.91 ± 0.18) puta više od Einsteinove pretpostavke [25, 29]. Ekspedicija u Sobralu izmjerila je zakretanje od 1.98 ± 0.12 lučnih sekundi, odnosno 1.13 ± 0.07 puta više od predviđene vrijednosti [29]. Sveučilište u Texasu je 1973. godine organiziralo mauritansku ekspediciju za vrijeme potpune pomrčine suca radi provjere Eddingtonovih rezultata. Tijekom 6 minuta pomrčine snimljeno je oko 150 slika (od 1000 planiranih, ostale su slike bile neupotrebljive zbog pješćane oluje) koje su analizirane na GALAXY sustavu na Greenwich opservatoriju. Njihovo mjerenje dalo je rezultat (0.95 ± 0.11) puta veći od Einsteinovog predviđanja [30].

Prilikom prolaska blizu izvora gravitacije, svjetlost se, zbog utjecaja gravitacije koja djeluje i na fotonske geodezike, zakrivljuje oko mase koja je privlači (slika 2.4). Analizu problema možemo geometrijski predočiti slikom 2.5. Iz te slike vidimo kako bi zraka svjetlosti, da putuje po pravcu koji povezuje opažača i izvor, prešla udaljenost $D_S = D_L + D_{LS}$. Promatramo stoga zraku svjetlosti koja putuje iz izvora i pada na ravninu leće te se na njoj lomi pod kutem α . Kut θ označava kut između pravca koji povezuje izvor i opažača te izlomljene zrake. Vektorom $\eta = D_S \beta$ označit ćemo pomak točke \mathbf{S} od ravnine, dok ćemo vektorom $\zeta = -D_{LS} \alpha$ označiti pravac koji povezuje izvor \mathbf{S} sa slikom \mathbf{I} . Vektorsko zbrajanje nam daje vezu između vektora θ i ova dva vektora:

$$D_S \theta = \eta + \zeta \quad (2.52)$$

α je u ovom slučaju vektor izvijanja (engl. *deflection vector*) kojeg definiramo kao



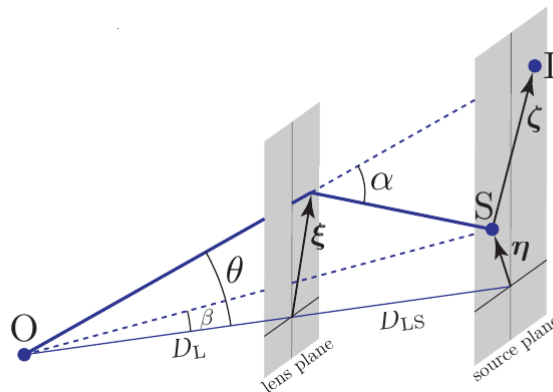
Slika 2.4: Shematski prikaz kako funkcionira gravitacijska leća. Narančasta linija prikazuje prividni položaj izvora svjetla, dok bijele linije prikazuju stvarne putanje fotona oko izvora gravitacije [26].

[25,27]

$$\alpha(\xi) = -\frac{4G}{c^2} \int \Sigma(\xi') \frac{\xi - \xi'}{|\xi - \xi'|^2} d^2\xi' \quad (2.53)$$

gdje je $\Sigma(\xi')$ projekcija gustoće mase leće na ravninu leće. Iz jednadžbe (2.52) možemo izraziti jednadžbu leće kao ovisnost vektora β o vektorima θ i α :

$$\beta = \theta + \frac{D_{LS}}{D_S} \alpha \quad (2.54)$$



Slika 2.5: Geometrijski prikaz svjetlosnih zraka i njihov lom. Sa slovom **O** označen je opažatelj, **S** je izvor, a **I** je položaj slike [25].

Za sferno-simetričnu česticu mase M (biramo najjednostavniji slučaj) vektor izvijanja

α možemo, nakon integracije, napisati kao

$$\alpha(\xi) = -\frac{4GM}{c^2} \frac{\xi}{\xi^2} \quad (2.55)$$

Ubacivanjem relacije (2.55) u jednadžbu (2.54) te definiranjem $\xi = D_L\theta$, dobivamo kvadratnu jednadžbu za kut θ čija su rješenja

$$\theta_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2} \right) \quad (2.56)$$

gdje smo s θ_E označili *Einsteinov kut*

$$\theta_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S D_L} \quad (2.57)$$

Udaljenost ξ_E naziva se *Einsteinov radijus*:

$$\xi_E = D_L \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S}} \quad (2.58)$$

Kompletan matematički izvod može se naći u knjizi “Gravitational lensing [27].

Gravitacijska leća nije predviđena samo općom teorijom relativnosti, već se ona može izračunati i pomoću Newtonove teorije. U tom slučaju, rezultati su točno polovica onoga što predviđa opća teorija, što se i pokazalo eksperimentima [25, 29, 30]. Gravitacijska leća uvelike je pomogla oko otkrivanja i razumijevanja vrlo udaljenih objekata, poput kvazara. Tako su 1979. godine astronomi Dennis Walsh, Robert Carswell i Ray Weymann otkrili “dvostruki kvazar” Q0957 + 561; dvije slike kvazara¹ udaljene samo oko 6 lučnih sekundi jedna od druge, sa vrlo sličnim gravitacijskim pomakom ($z = 1.41$). S obzirom na njihovu udaljenost, vrlo je mala vjerojatnost da se dva kvazara, skoro istog crvenog pomaka i vrlo sličnih spektara, nađu jedan do drugog. Iz toga slijedi kako obje slike ustvari pokazuju na isti objekt, te da su slike posljedica gravitacijske leće [32]. Najrecentniji primjer korištenja gravitacijske leće u astronomiji bilo je otkriće eksplozije supernove čija je svjetlost, zbog skretanja pod utjecajem eliptične galaksije MACS J1149.6 + 2223, tvorila 4 slike u konfiguraciji tzv. Einsteinovog križa [33]. Analiza putanja ovih svjetlosnih zraka mogla bi se koristiti i za mjerenje ekspanzije svemira. Hipotezu o tome postavio je Refsdal u svojem članku iz 1964. [34]. Gravitacijska se leća može koristiti i za otkrivanje ekstrasolarnih planeta, analizirajući skretanje svjetlosti zvijezda u ekstrasolarnim sustavima. Na taj način je 2003. godine otkriven ekstrasolarni planet otprilike 1.5 puta veći od Jupitera koji se nalazi na udaljenosti 3 AU od zvijezde od koje orbitira [35]. Istraživanja pokazuju kako bi geostacionarni sateliti mogli detektirati paralakse planeta veličine Jupitera, dok bi sateliti u niskoj Zemljinoj orbiti mogli biti iskorišteni za otkrivanje

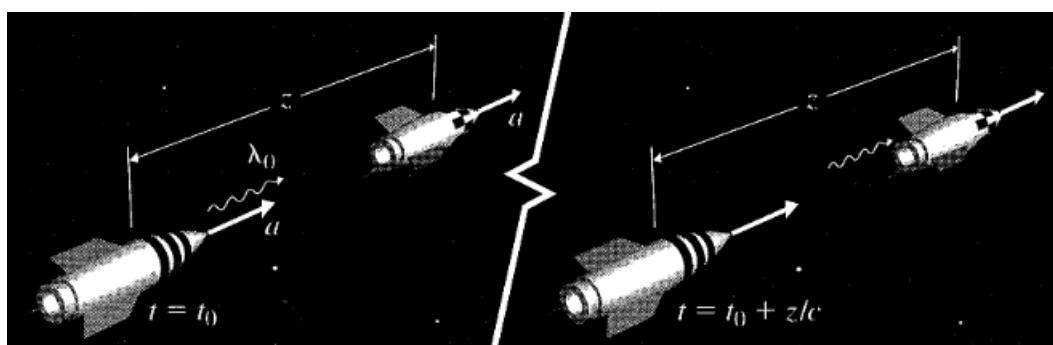
¹Kvazari su vrlo udaljeni i vrlo svijetli astronomski objekti, koji spadaju u klasu objekata nazvanu aktivne galaktičke jezgre [engl. active galactic nuclei (AGN)]. Primarna metoda otkrivanja kvazara je putem “Sloan Digital Sky Survey” projekta. Do sad je otkriveno oko 200.000 kvazara, s udaljenostima od 600 milijuna do 13 milijardi svjetlosnih godina [31].

planeta mase slične Zemljinoj, koji ne pripadaju niti jednom zvjezdanom sustavu (engl. *free floating planet*) [36]. Efekt gravitacijske leće može se također iskoristiti u mjerenju mase koja zakreće svjetlost. Tako su znanstvenici uspješno izmjerili mase objekata OGLE-2015-BLG-1268 i OGLE-2015-BLG-0763 analizirajući paralaksu svjetlosti na oba objekta. Prvi objekt je identificiran kao smeđi patuljak mase $47 \pm 7 M_J$, gdje je M_J masa Jupitera, na udaljenosti 5.4 ± 1.0 kpc, dok je drugi objekt zvijezda mase $0.50 \pm 0.04 M_\odot$ na udaljenosti 6.9 ± 1.0 kpc [37].

3 Testovi Einsteinovog principa ekvivalencije

Einstein je nakon objave opće teorije relativnosti predložio tri eksperimentalna testa kojima bi se teorija mogla testirati, od kojih smo dva već obradili: objašnjenje precizije Merkurove putanje i zakretanje svjetlosti u blizini velikih masa. Treći eksperimentalni test tiče se osnove pretpostavke od koje smo krenuli: Einsteinovog principa ekvivalencije. On nam govori o geometrijskoj prirodi prostor-vremena; svi zakoni fizike se u dovoljno malom volumenu prostor-vremena svode na zakone specijalne teorije relativnosti. U tako malom volumenu svejedno je govorimo li o akceleraciji zbog gravitacije ili govorimo o akceleraciji samog sustava. S tim smo napravili redefiniciju pojma “neakceleriran”: u općoj teoriji relativnosti taj pojam označava svaki objekt koji “slobodno pada” (odnosno, ili nema akceleraciju, ili je ukupna akceleracija samo posljedica gravitacije).

3.1 Gravitacijski crveni pomak



Slika 3.1: Dopplerov pomak dvije rakete koje ubrzavaju jednakom akceleracijom a [3].

Pretpostavimo da imamo dvije rakete u dubokom svemiru, daleko od bilo kakvog gravitacijskog polja (slika 3.1). Rakete su razmaknute za udaljenost z te se gibaju po istom pravcu jedna za drugom brzinom v (puno manjom od c). U momentu t_0 obje rakete počnu akcelerirati istom akceleracijom a u istom smjeru po kojem su se do tad gibale. S obzirom da je akceleracija obje rakete ista, nema promjene udaljenosti među raketama. U tom istom vremenu t_0 prateća raketa pošalje svjetlosni signal raketi ispred. U okolnostima gdje akceleracije nema, fotonu koji kreće s prateće rakete treba z/c vremena da dođe do vodeće rakete, no s obzirom da vodeća raketa akcelerira, njena brzina, kad foton stigne do rakete, je povećana za iznos $\Delta v = a\Delta t = az/c$. Foton dakle treba prijeći put veći od z da bi stigao prednju raketu, što znači da će njegova valna duljina biti pomaknuta prema crvenom spektru: njegova krajnja valna duljina bit će manja za tu razliku u brzinama. Taj efekt je dobro poznat iz klasične fizike i zove se *Dopplerov efekt*. Za naš foton, odnos promjene valne duljine i početne valne duljine jednak je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{az}{c^2}$$

Ako vrijedi Einsteinov princip ekvivalencije, odnosno ako ne možemo, u dovoljno malom volumenu prostor-vremena, razlučiti akceleraciju sustava od akceleracije zbog posljedice gravitacije, onda bi se isti efekt trebao moći opaziti i u gravitacijskom polju. Zamislimo, stoga, da smo u Parizu, na vrh Eiffelovog tornja (visina z), stavili znanstvenika u kupolu koja nema prozora. Na kupoli postoji samo jedan detektor kojim znanstvenik može očitati valnu duljinu upadnog fotona. Direktno ispod kupole gdje se nalazi naš znanstvenik stoji drugi znanstvenik s laserom koji ima vrlo striktno određenu valnu duljinu. Znanstvenik ispušta puls laserskog svjetla prema detektoru u kupoli. Ako je a_g ubrzanje gravitacijske sile, onda prema analogiji s prethodnim primjerom možemo odmah zaključiti kako je Dopplerov pomak u valnoj duljini svjetlosti jednak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{a_g z}{c^2}$$

Ova jednadžba opisuje suštinu *gravitacijskog crvenog pomaka*, gdje smo do tog zaključka došli samo preko geometrijskog opisa, formalni izračun preko opće teorije nije bio potreban.

Ako je gravitacijski crveni pomak posljedica Einsteinovog principa ekvivalencije, onda bi se on formalno morao moći izvesti iz Einsteinovih jednadžbi. Promatramo stoga opažača s 4-brzinom U^μ koji miruje u Schwarzschildovim koordinatama ($U^i = 0$, miruje prostorno, no vremenski evoluira). 4-brzina je normirana i zadovoljava uvjet $U_\mu U^\mu = -1$. U računu, kao i ranije, pretpostavljamo da je $c = 1$. Iz jednadžbe (2.24) i uvjeta normiranja možemo direktno izraziti 0. komponentu brzine kao

$$U^0 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

gdje je G gravitacijska konstanta, M masa, a r definiran s $r = \sqrt{A/4\pi}$, A je površina sfere oko singulariteta. Takav prostorno mirni opažatelj mjeri frekvenciju fotona koji se giba po parametriziranoj krivulji $x^\mu(\lambda)$ koja je jednaka

$$\omega = -g_{\mu\nu} U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = -g_{00} U^0 \frac{dx^0}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{d\lambda} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} E \quad (3.2)$$

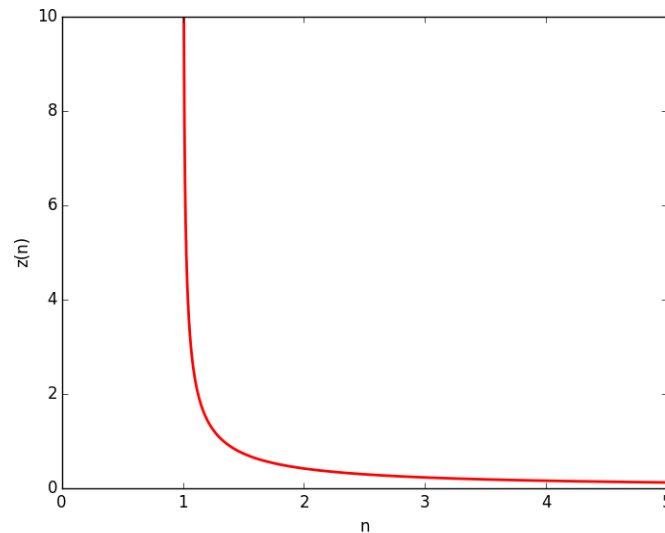
gdje smo s E označili energiju kao u jednadžbi (2.27). S obzirom da je energija očuvana, foton će na različitim radijusima r imati različite frekvencije. Konkretno, ako su R_1 i R_2 radijusi gdje mjerimo frekvenciju, onda se odnos frekvencija može napisati kao

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{R_1}}{1 - \frac{2GM}{R_2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.3)$$

Ako se nalazimo na velikoj udaljenosti od singulariteta (ako je $r \gg 2GM$), onda izraz (3.3) možemo razviti u red, te napisati kao

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{GM}{R_1} + \frac{GM}{R_2} = 1 + \Phi_1 - \Phi_2 \quad (3.4)$$

gdje smo s Φ označili klasični Newtonov potencijal. Iz (3.4) možemo zaključiti kako se frekvencija fotona povećava kako izlazimo iz potencijalne jame (crveni pomak), dok pada kako ulazimo dublje u potencijalnu jamu (plavi pomak). Odnos frekvencija $\omega_2/\omega_1 - 1$ označava se slovom z , čiji graf je prikazan na slici 3.2.



Slika 3.2: Dopplerov pomak z u ovisnosti o $n \cdot R_S$ gdje je R_S klasični Schwarzschildov radijus. Radi jednostavnosti, uzeto je da je umnožak $GM = 1$. Vidimo kako se Dopplerov pomak, kako se radijus približava R_S drastično povećava, te je na granici $r = R_S$ beskonačan.

Pretpostavku o gravitacijskom Dopplerovu efektu potvrdio je eksperiment izveden 1959. godine na Harvardu, od strane Roberta Pounda i Glena Rebka mlađeg [46]. Osnova eksperimenta bio je kvantno-mehanički efekt gdje pobuđeni atom prilikom prijelaza iz pobuđenog u osnovno stanje emitira foton specifične energije (pa stoga i specifične valne duljine, odnosno frekvencije). Ukoliko takav specifični foton pogodi atom koji je, po svojim svojstvima, jednak atomu koji je foton poslao, onda će taj atom apsorbirati taj foton i skočiti iz osnovnog u pobuđeno stanje. S druge strane, ako poslani foton nije apsorbiran, onda to znači da se taj foton razlikuje u energiji od fotona koji je apsorbiran, što se događa zbog gravitacijskog crvenog pomaka gdje se valna duljina fotona mijenja kako foton prolazi kroz gravitacijsko polje Zemlje.

Efekt je moguće neutralizirati ako se atom koji odašilje foton giba relativno u odnosu na atom koji prima foton baš onom brzinom čiji bi Dopplerov efekt eliminirao gravitacijski crveni pomak. Dakle, mjerenjem te relativne brzine možemo izmjeriti i

efekt grav. crvenog pomaka. S obzirom da je eksperiment rađen na Zemlji, korištena je aproksimacija slabog polja i gravitacija je linearizirana (na isti način kako je pokazano ranije). Scintilacijski detektor za detekciju γ zraka energije 14.4 keV postavljen je iznad radioaktivnog željeza koji je služio i kao transmitter i kao absorber. Pad u broju detektiranih zraka značio je da je brzina kojom se neutralizira gravitacijski crveni pomak pronađena.

Da bi se smanjila interakcija između fotona i zraka, između izvora i detektora nalazi se cilindar ispunjen helijem. Prilikom skoka iz pobuđenog u nepobuđeno stanje, zbog zakona očuvanja količine gibanja, atom transmitter skoči u smjeru suprotnom od gibanja fotona (slično kao što top skoči kad se ispucava tane). S obzirom da se atom nalazi vezan u kristalnoj rešetci, energija trzaja atoma prilikom otpuštanja fotona disipira se u obliku vibracija cijele kristalne rešetke. Masa kristalne rešetke puno je veća od mase individualnog atoma, pa je ta disipacija izuzetno mala. Ovaj se efekt događa i prilikom apsorpcije fotona u detektoru, a s obzirom na izuzetno malu disipaciju energije, promjena valne dužine fotona je zanemariva. Ovaj efekt poznat je pod imenom Mossbauerov efekt.

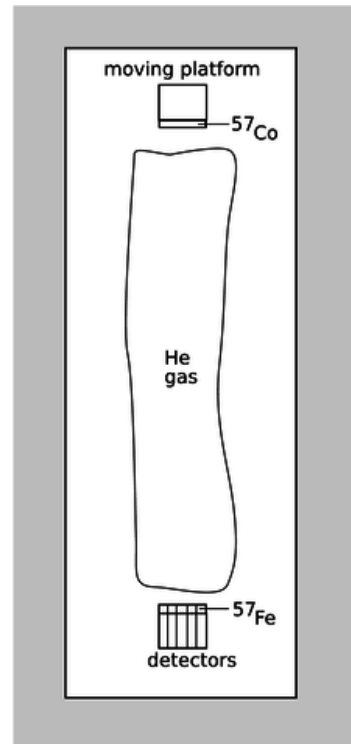
Za visinu od 22 metra, preko principa ekvivalencije možemo izračunati kako je predviđeni gravitacijski crveni pomak u frekvenciji jednak $2.46 \cdot 10^{-15}$ [47] dok je eksperimentom utvrđena promjena u frekvenciji jednaka [47]

$$(2.56 \pm 0.25) \cdot 10^{-15}, \quad R \approx 9.76\% \quad (3.5)$$

što je vrlo blisko ($\approx 10\%$) teorijski predviđenoj vrijednosti.

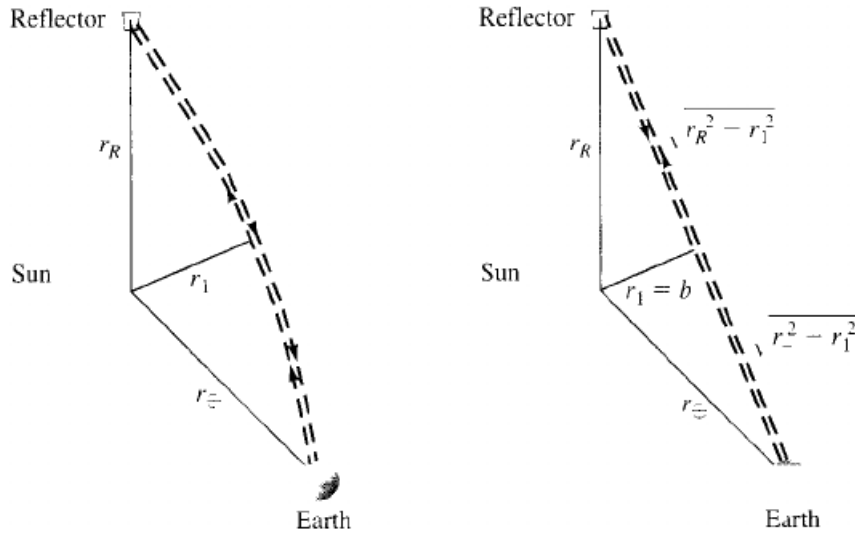
3.2 Shapirovo kašnjenje

Gravitacijski crveni pomak posljedica je gravitacije, gdje foton koji prolazi pokraj nekog izvora polja mora stalno prelaziti sve veći i veći put. Međutim, iz oblika Schwar-



Slika 3.3: Shematski prikaz Pound-Rebka eksperimenta. γ zračenje iz izvora (u ovom slučaju to je kobalt, u eksperimentu je korišteno radioaktivno željezo) prolazi kroz komoru s helijem i detektira se na detektoru. Detektor i izvor su jedan iznad drugog. [47].

zshildove metrike pokazuje se da vrijeme koje doživljavamo teče sve sporije kako se približavamo Schwarzschildovom radijusu. Dakle, što smo bliže izvoru potencijala (što smo dublje u “gravitacijskom bunaru”), vrijeme sve sporije i sporije teče. Prema tome, satovi na raznim visinama doživljavaju različito vrijeme; ta se razlika u vremenu može i mjeriti atomskim satovima, a i direktno je pokazana Pound-Rebkinim eksperimentom: vrijeme je inverzna funkcija frekvencije, ako se frekvencija mijenja kako se nalazimo na raznim visinama, onda je očito kako se i vrijeme mijenja.



Slika 3.4: Usporedba putanja svjetlosnih zraka: na desnoj slici prikazana je putanja u ravnoj, Euklidskoj geometriji. Vidi se da su svjetlosne zrake pravci. S druge strane, na lijevoj slici, zrake su zakrivljene zbog prisutstva Sunca, pa prema tome prelaze veći put nego na desnoj slici, te im zbog toga treba više vremena da prođu cijeli put [49].

Tu pojavu nazivamo *gravitacijska dilatacija vremena* i možemo je opisati formulom

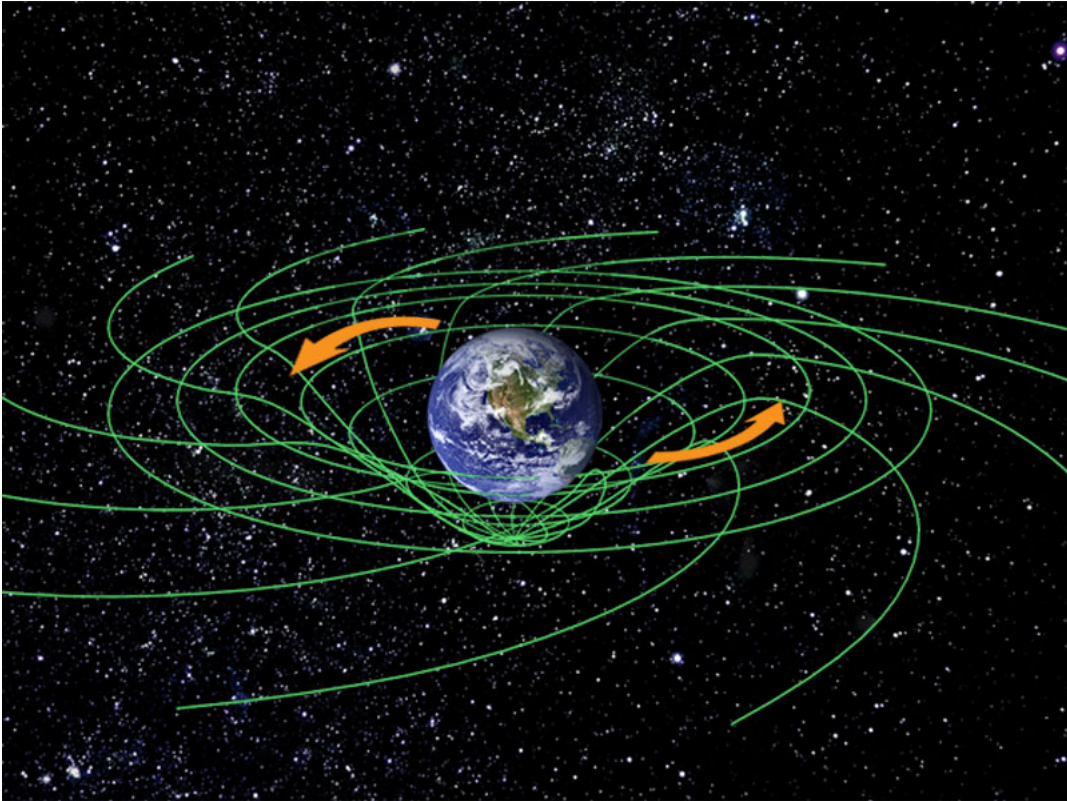
$$t_0 = t_f \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \quad (3.6)$$

gdje je t_0 vlastito vrijeme (izmjereno vrijeme kad su opažatelj i događaj na istoj dubini unutar gravitacijskog potencijala), a t_f vrijeme koje mjerimo na beskonačnoj udaljenosti od izvora polja. Gravitacijska dilatacija vremena izuzetno je bitna za rad GPS sustava, čija preciznost u mjerenju uvelike ovisi o opisanom fenomenu [48]. Shapirov efekt ili Shapirovo kašnjenje direktno je povezano sa gravitacijskom dilatacijom vremena. Nazvana je po Irwinu Shapiru koji ju je prvi predvidio, opisao i dao eksperimentalni test kako bi se efekt mogao mjeriti. Predložio je da se pošalju radarski valovi prema Veneri i Merkuru, te da se mjeri vrijeme dok se signal ne vrati. Shapiro je proračunao kako bi kašnjenje radi Sunca trebalo biti oko $200 \mu s$ [50], što je i potvrđeno eksperimentima na MIT-u koji su izvršeni 1966. i 1967. godine [51].

4 Lense - Thirringov efekt

4.1 Teorijske pretpostavke

Precesija Merkurove putanje nije jedina precesija koja se javlja radi utjecaja gravitacije. Opća teorija relativnosti predviđa još neke vrste precesije koje su posljedica rotacije planeta ili zvijezde koju promatramo. Ta vrtnja je razlog efekta kojeg zovemo *povlačenje sustava* (engl. “frame dragging”), slika 4.1.



Slika 4.1: Zakretanje prostor-vremena zbog vrtnje masivnog objekta [38]. Strelice pokazuju smjer vrtnje planeta. Vidi se na slici kako je “mreža” linija deformirana zbog vrtnje planeta.

Gibanje čestice u bilo kojem gravitacijskom polju možemo napisati preko geodezijske jednadžbe (1.14). U našem ćemo se razmatranju ograničiti na točkaste čestice bez spina te na režim slabe gravitacije. S tim ograničenjima, jednadžba gibanja se u vektorskoj notaciji može napisati kao [40]

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla U + \mathbf{F} - 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (\nabla \times \mathbf{h}) \quad (4.1)$$

gdje je ∇U Newtonovski doprinos, \mathbf{F} predstavlja sve nelinearne doprinose potencijalu U koje uzrokuju, primjerice, precesiju perihela. Zadnji doprinos zove se gravitomagnetski doprinos koji je posljedica vrtnje planeta, $\nabla \times \mathbf{h}$ je kutna brzina, \mathbf{h} je vektor s komponentama $h_i = -g_{0i}/2$. Ime “gravitomagnetski” je možda malo var-

ljiv: doprinos nije posljedica gravitacijskog i magnetskog vezanja, već je posljedica činjenice da se uz određene aproksimacije može uspostaviti analogija između opće teorije relativnosti i Maxwellovih jednadžbi. Konkretno, ako radimo u režimu gdje je gravitacija relativno slaba te brzine kojima se čestice gibaju relativno male u odnosu na c , onda uz definiranje skalarnog potencijala $\Phi = \frac{1}{2}(g_{00} - 1)c^2$ i vektorskog potencijala $A_i = g_{0i}c^2$ možemo dobiti ekvivalentno gravitoelektrično polje $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{4c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ i gravitomagnetsko polje $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ koji zadovoljavaju gravitacijske Maxwellove jednadžbe [39]:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi G\rho \quad (4.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (4.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 4 \left(-4\pi G \frac{\rho\mathbf{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4.2d)$$

Ovdje izraz $G\rho\mathbf{v}$ ima ulogu gustoće struje naboja (u ovom slučaju gustoće masenog naboja), analogna veličina u Maxwellovim jednadžbama bi bila veličina \mathbf{J} (klasična gustoća struje). Iz oblika jednadžbi (4.2a)-(4.2d) vidimo kako postoje određene razlike između ovih i klasičnih Maxwellovih jednadžbi. Prije svega, gravitacija je po svojoj prirodi privlačna sila, dok je elektromagnetska sila privlačna i odbojna (ovisno o paritetu čestica). Iz tog razloga imamo “-” predznak u jednadžbi (4.2a) i (4.2d). Drugo, faktor 4 u jednadžbi (4.2d) posljedica je tenzorskog karaktera gravitacije. Treće, Faradayev zakon indukcije nema svojeg ekvivalenta u gravitacijskim Maxwellovim jednadžbama (za detalje samog izvoda vidjeti [39]). Gravitomagnetski član u jednadžbi (4.1) zaslužan je za precesiju vektora kutne količine gibanja satelita koji su u Zemljinoj orbiti. Sateliti u ovom slučaju predstavljaju žiroskop.

Promjena spina žiroskopa u Zemljinoj orbiti u vremenu τ može se napisati kao [40]

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{S} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S} \quad (4.3)$$

gdje je $\boldsymbol{\Omega}$ jednak

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{v} \times \left(-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\nabla U \right) + \nabla \times \mathbf{h} \quad (4.4)$$

Član $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ je doprinos specijalne teorije relativnosti koji nazivamo *Thomasova precesija* (vrlo bitna precesija u atomskoj fizici, koja opisuje spin-orbit vezanje elektrona s atomskom jezgrom). Drugi član u jednadžbi, $\mathbf{v} \times (\nabla U)$, zove se gravitacijski inducirana Thomasova precesija ili *de Sitterova precesija*. To je jedini član u jednadžbi koji sadrži Newtonov potencijal U . Treći član, $\nabla \times \mathbf{h}$, označava *Lense-Thirringovu precesiju*.

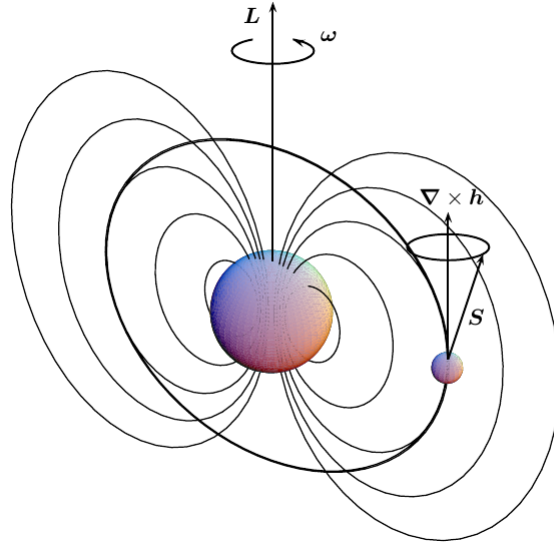
S obzirom da radimo u režimu slabe gravitacije, možemo iskoristiti već poznati model gdje zakrivljenost predstavljamo perturbacijom ravnog Minkowskijevog prostora. U takvoj perturbaciji moguće je pokazati da su komponente metrike, ako je sustav izoliran i velike su udaljenosti između tijela, jednake [40]

$$U = G\frac{M}{r}, \quad h_i = -\frac{G}{2} \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{L})_i}{r^3} \quad (4.5)$$

gdje je M masa, a L kutna količina gibanja tijela koje orbitira. S takvom definicijom, jednadžba gibanja za žiroskop koji orbitira svodi se na

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{r^3}GM\mathbf{r} + \frac{2G}{c^2r^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \left(\mathbf{L} - \frac{3(\mathbf{L} \cdot \mathbf{r})}{r^2}\mathbf{r} \right) \quad (4.6)$$

Opet, M je masa tijela koje orbitira, a L je kutna količina gibanja. Da bismo izračunali iznose de Sitterove i Lense-Thirringove precesije, slijedit ćemo postupak opisan u [40]: definirat ćemo koordinatni sustav Σ čija će z -os biti paralelna s vektorom kutne količine gibanja \mathbf{L} . Pretpostavljamo da je smjer vektora fiksna, tj. ne mijenja se, u odnosu na vrlo udaljene zvijezde. Time smo definirali inercijalni sustav. x -os sustava Σ leži u orbitalnoj ravnini za koju vrijedi $y = 0$.



Slika 4.2: Lense-Thirringova precesija: čestica se giba u gravitacijskom polju Zemlje koja rotira kutnom brzinom ω i ima kutnu količinu gibanja L . Zbog te vrtnje, spin S žiroskopa, koji se giba oko Zemlje po podebljanoj crnoj liniji, precesira oko smjera koji je definiran s $\nabla \times \mathbf{h}$ [40].

Žiroskop se giba po zadebljanoj crnoj liniji, u xz -ravnini, što znači da položaj \mathbf{r} možemo u komponentom zapisu napisati kao

$$\mathbf{r} = (r \cos(\omega_0 t), 0, r \sin(\omega_0 t)) \quad (4.7)$$

gdje je r udaljenost žiroskopa od Zemlje, a ω_0 orbitalna kutna brzina definirana kao

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4.8)$$

Ukupna precesija Ω može se također napisati u komponentnom obliku:

$$\Omega = \left(\frac{3GL}{2r^3c^2} \sin(2\omega_0 t), \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}} \frac{GM}{2r^3c^2}, \frac{GL}{2r^3c^2} (1 - 3 \cos(2\omega_0 t)) \right) \quad (4.9)$$

Izbor koordinatnog sustava Σ odvojio je de Sitterov doprinos od Lense-Thirring-ovog doprinosa: Ω_x i Ω_z su Lense-Thirringovi doprinosi, dok je Ω_y de Sitterov doprinos. Nakon linearizacije i izračuna vremenskog prosjeka po komponentama vektora Ω dobivamo da je ukupna precesija dana s [40]

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \Omega_y = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{GM}{r}} \frac{GM}{r^2c^2} \quad (4.10a)$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \bar{\Omega}_z^t = \frac{GL}{2r^3c^2} \quad (4.10b)$$

gdje su M masa žiroskopa, G gravitacijska konstanta, r radijus orbite žiroskopa, L kutna količina gibanja planeta ili zvijezde. Za slučaj na slici 4.2, radijus polarne orbite je $r = 7021$ km. Kutna količina gibanja Zemlje može se izračunati preko izraza

$$L = 0.3306MR^2\omega \quad (4.11)$$

gdje je 0.3306 moment inercije Zemlje [41], $R = (6378.140 \pm 0.005)$ km je radijus Zemlje, $M = (5.974 \pm 0.004) \cdot 10^{27}$ g je masa zemlje, $\omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ kutna brzina rotacije Zemlje oko svoje osi. S ovim podacima, precesije su jednake

$$\text{de Sitterova precesija: } \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 6.6 \text{ lučnih sekundi/godina} \quad (4.12)$$

$$\text{Lense-Thirringova precesija: } \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 0.041 \text{ lučnih sekundi/godina} \quad (4.13)$$

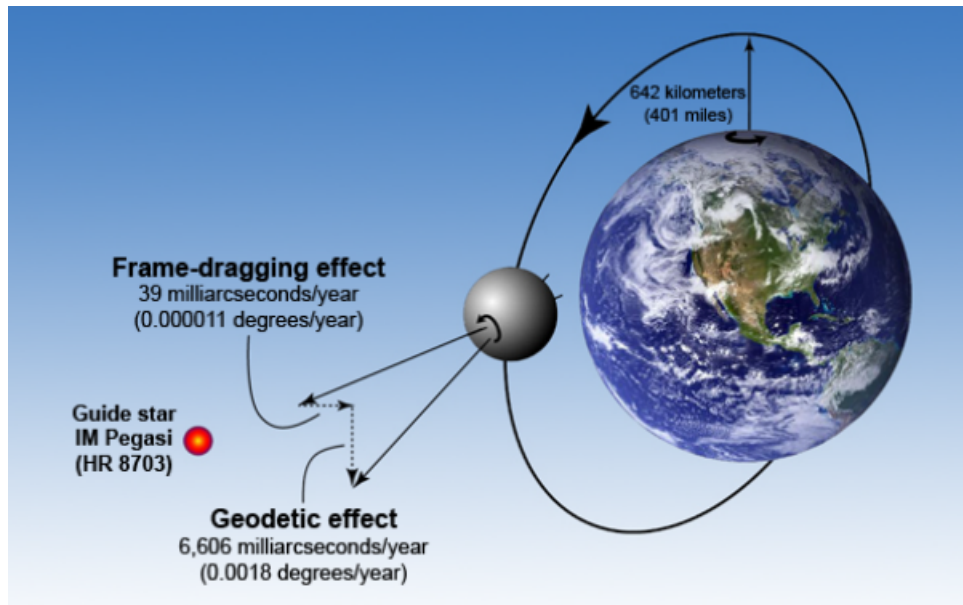
4.2 Gravity Probe-B

Projekt *Gravity Probe-B* započeo je još sredinom 60. godina na Sveučilištu Stanford, kada je Schiff pokazao da bi idealni žiroskop u Zemljinoj orbiti doživljavao dvije relativističke precesije, s obzirom na neki jako udaljeni inercijalni sustav [42]:

- geodetski drift zbog putovanja kroz prostor-vrijeme koje je zakrivljeno radi Zemljine mase. Ova precesija identificirana je s de Sitterovom precesijom, predviđenom 1916. godine.
- precesija zbog “frame dragging” efekta koji je posljedica Zemljine rotacije. Ova precesija identificirana je s Lense-Thirringovom precesijom.

Will [43] navodi kako je trebalo 47 godina i 750 milijuna dolara da bi se projekt realizirao.

Gravity Probe-B je sonda (satelit) sastavljen od 4 gotovo idealna žiroskopa, na visini od 640 km u polarnoj orbiti oko Zemlje (slika 4.3).



Slika 4.3: Shematski prikaz vrtnje sonde GPB oko Zemlje [42, 43].

Glavni dio sonde čini 0.92 metra velika silikatna struktura u kojoj se nalaze četiri žiroskopa čija je struktura prikazana na slici 4.4. Uz žiroskope montiran je i teleskop koji služi za praćenje zvjezdanog svoda. Cijeli je uređaj uronjen u Dewar kontejner volumena 2840 l ispunjen superfluidnim helijem na temperaturi od 1.8 K. Baza svakog žiroskopa je kvarcna sfera na koju je nanesen niobij, koji se ponaša kao supravodič: prilikom vrtnje struje unutar niobija stvaraju magnetski moment čiji je smjer paralelan sa spinom koji se onda pomoću SQUID² magnetometra očitava. S obzirom da je osjetljivost SQUID magnetometra izuzetno velika, pretpostavka je da bi se pomoću takvog magnetometra, za dovoljno dugo razdoblje, mogla uočiti (i izmjeriti) čak i tako mali efekt precesije, kakav je Lense- Thirringov efekt. Magnetometri na sondi bili su sposobni mjeriti promjenu od 1 mas tokom 10 sati mjerenja [42].

Na startu misije, žiroskopi su bili poravnati s optičkom osi koja je povezivala teleskop na sondi i zvijezdu Im Pegazi u našoj galaksiji. Kako bi se spriječila sistematska pogreška u mjerenju koja bi bila posljedica raznih momenata, sonda se vrtila oko svoje osi s periodom od 77.5 s. Tražena točnost bila je 0.5 mas/godina. Zbog toga, navedeni momenti nisu bili jedini izvori greške, prije pokretanja misije u analizi identificirano je 133 različita uzroka pogreške [42]. S obzirom na traženu visoku razinu preciznosti, potrebno je bilo izvršiti 46 dana kalibracija, od kojih su se neke kalibra-

²Engl. *superconducting quantum interference device*, SQUID se koristi za mjerenje izuzetno malih magnetskih polja, čak i do 5 aT ($5 \cdot 10^{-18}$ T), tokom nekoliko dana mjerenja.



Slika 4.4: Izgled žiroskopa [43].

cije izvodile dok je satelit već bio u orbiti. To se, primjerice, odnosi na kalibraciju SQUID magnetometra i izlaznog signala kojeg on daje. Eliminacija greške od skoro 21 lučne sekunde napravljena je korištenjem aberacije svjetlosti zvijezda.

Tri efekta nisu mogla biti eliminirana i utjecala su na ukupnu preciznost mjerenja. Prije svega, kvarcne sfere u žiroskopima nisu savršene sfere već su sferoidi s periodom od nekoliko sati. Zbog nesavršenosti oblika, glavne osi žiroskopa rotiraju oko spinske osi tvoreći tzv. *polhode* krivulju³. Uočeno je i da taj efekt slabi, izmjerena je disipacija od < 1 pW (gubitak kinetičke energije rotora). Greška je uočena nakon što je letjelici naređeno da se postavi na ranije definirane pozicije (pod ranije definiranim kutevima) prema zvijezdi vodilji. Drugi efekt koji je utjecao na preciznost jesu naizgled nasumični skokovi u orijentaciji žiroskopa, čak do 100 mas u periodu od 1 – 2 dana. Ti su skokovi posljedica rezonancije između polhode vrtnje i vrtnje satelita. Poseban je problem činjenica što nisu svi rotori bili jednako zahvaćeni, već su neki rotori skakali više, a neki manje. Treći je efekt uočen pred kraj kalibracija i posljedica je tzv. “spin-to-roll” odstupanja. Izmjereni momenti su bili 200 – 500 puta veći od onoga što su znanstvenici predvidjeli prije početka eksperimenta.

Iz kalibracijskih testova također se pokazalo kako se neke od tih grešaka mogu iskoristiti. Uočeno je da žiroskopi zadržavaju dio magnetskog toka, koji onda daje

³Engl. termin za gibanje vektora kutne količine gibanja ω po elipsi koja je posljedica rotacije glavnih osi inercije tijela.

periodičku korekciju na SQUID signal. Sam se signal može predočiti formulom

$$z(t) = C_g(t)[(\tau_{\text{NS}} - s_{\text{NS}}) \cos(\phi_r + \delta\phi) + (\tau_{\text{WE}} - s_{\text{WE}}) \sin(\phi_r + \delta\phi)] + \text{greška} + \text{šum} \quad (4.14)$$

gdje su $C_g(t)$ tzv. “gyro readout scale” faktor (koji je dobiven kalibracijom u svemiru pomoću aberacije svjetlosti), r_{NS} de Sitterov doprinos, r_{WE} Lense-Thirringov doprinos, $\tau_{\text{NS}} - s_{\text{NS}}$ i $\tau_{\text{WE}} - s_{\text{WE}}$ su projekcije necentriranog vektora $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{s}$ u smjeru sjever-jug i smjeru zapad-istok, $\delta\phi$ je faza u vrtnji satelita. Preko te periodičke korekcije bilo je moguće izračunati fazu vrtnje i “polhode” kut svakog žiroskopa posebno. Iz tih informacija modelirane su elektrostatičke interakcije između rotora i statora, iz čega se vidjelo kako su upravo te interakcije uzrokovale čudno ponašanje žiroskopa i njihove skokove. Iako je vrtnja satelita oko svoje osi trebala spriječiti te momente, s obzirom da je jačina momenata bila podcijenjena, sama vrtnja nije bila dovoljna da se efekt eliminira. Dobiveni rezultati nalaze se u tablici 4.1.

Žiroskop	r_{NS} (mas)	r_{WE} (mas)
1	-6588.6 ± 31.7	-41.3 ± 24.6
2	-6707.0 ± 64.1	-16.1 ± 29.7
3	-6610.5 ± 43.2	-25.0 ± 12.1
4	-6588.7 ± 33.2	-49.3 ± 11.4
Ukupno	-6601.8 ± 18.3	-37.2 ± 7.2
OTR predviđanje	-6606.1	-39.2

Tablica 4.1: Izmjereni podaci za precesiju tokom 12 mjeseci rada Gravity Probe-B eksperimenta zajedno s usporedbom s teorijski predviđenim vrijednostima [42].

Rezultati pokazuju jako dobro slaganje predviđenih podataka s teorijom. Lense-Thirringov efekt, s obzirom na greške koje su popisane, pokazuje manju preciznost mjerenja nego što je to bilo na početku očekivano. Izračunata relativna pogreška za Lense-Thirringov efekt ($\approx 20\%$) gotovo u potpunosti je rezultat činjenice da je za modeliranje efekta bilo potrebno izuzetno puno parametara. Posebno se to odnosi za žiroskop 2, kod njega su bili uočeni najveći skokovi u precesiji. Rezultati su svejedno konzistentni jer bez obzira na relativno veliku nepreciznost mjerenja, sva 4 žiroskopa su iskusila promjenu u precesiji, što je signifikantan rezultat i direktna potvrda i de Sitterove i Lense-Thirringove precesije.

Gravity Probe-B nije jedini eksperiment koji se bavio Lense-Thirringovom i de Sitterovom precesijom. *Laser Geodynamics Satellites* ili LAGEOS je eksperiment, prvi put lansiran u srednju orbitu oko Zemlje 1970. godine, sastavljen od dvije aluminijem presvučene mjedene kugle, koje se nalaze u vrlo stabilnoj orbiti oko Zemlje i koje služe kao pasivni reflektori za laserske zrake.



Slika 4.5: Izgled LAGEOS satelita [44].

Mjerenje se izvodi tako da se u satelite usmjere pulsni laseri. Jednom kad se puls pošalje, mjeri se vrijeme koje je potrebno da puls stigne do satelita i vrati se natrag. S obzirom da je na površinu satelita postavljeno mnogo refleksnih površina (426 tzv. “cube corner” retroreflektora, od kojih je 422 napravljeno od silikatnog stakla, dok je 4 na bazi germanija, radi mjerenja u IR području), moguće je u isto vrijeme mjeriti refleksiju zraka s više mjesta na Zemlji, što povećava preciznost mjerenja. Također, zbog poznatih efekata precesije, očekivalo se da orbita satelita precesira otprilike 30 mas/god u smjeru Zemljine rotacije. Dobiveni rezultati zaista su pokazali da postoji precesija u vektoru $\mu = 1.1 \pm 0.3$, dok je teorijski predviđeno $\mu = 1$, što daje pogrešku od $\approx 30\%$ [45]. Kasnije misije (poput GRACE-a) spustile su pogrešku na $\approx 10\%$.

5 Kozmološka predviđanja

Prema definiciji Nacionalne znanstvene akademije, znanstvena je teorija utemeljeno objašnjenje nekog aspekta prirode koje je dobiveno korištenjem znanstvene metode i pokazano na velikom broju eksperimenata i opažanja [53]. Zadaća teorije je objasniti trenutno poznate pojave, ali i predvidjeti efekte koji možda još nisu otkriveni. S ovog aspekta, opća je teorija relativnosti u potpunosti zadovoljila uvjete. Međutim, postoji još jedan aspekt opće teorije koji do sad nismo spominjali. Opća teorija relativnosti opisuje što se događa s prostorom i vremenom, ta dva aspekta prepliću, tvoreći od njih jedinstveno prostor-vrijeme u kojem se odvija evolucija svih makroskopskih objekata (poput planeta, zvijezda ili galaksija). Stoga je prirodno pitati može li se opća teorija relativnosti iskoristiti za istraživanje duboko u prošlost, odnosno u budućnost. Kakvo bi bilo rješenje Einsteinove jednadžbe koje bi opisivalo prostor-vrijeme u kojem se nalazimo, odnosno koje rješenje opisuje naš svemir ili bar neki idealizirani model svemira? Da bismo realizirali naš model svemira, nužno je pretpostaviti dva uvjeta:

- homogenost - zakoni fizike su isti u bilo kojem dijelu Svemira. Bez obzira na relativni položaj u Svemiru, mi bismo se, u načelu, morali ponašati po istim fizikalnim zakonima kako ih osjećamo sad.
- izotropnost - nema preferiranog smjera u kojem možemo gledati. Ukoliko gledamo dovoljno daleko, morali bi izmjeriti (odnosno vidjeti) iste stvari bez obzira u kojem smjeru gledali. Mjerenja napravljena od strane WMAP kolaboracije, posebice otkriće i mjerenje CMB⁴ zračenja, daju jake eksperimentalne dokaze u korist ove tvrdnje [54, 55].

Uz ovakve pretpostavke, moguće je pokazati kako postoje samo tri moguće metrike koje bi opisivale naš svemir danas [3, 7]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \end{cases} \quad (5.1)$$

Jednadžba (5.1) označava *Robertson-Walkerov* kozmološki model, koji opisuje tri različite varijante prostor-vremena: zatvoreni svemir (svemir je oblika 3-sfere u prostoru \mathbb{R}^4), ravni svemir, te hiperboloidni ili “otvoreni” svemir. Faktor $a(t)$ je faktor skaliranja (primjetimo, pritom, kako skaliranje radimo isključivo na prostornim komponentama, dok vremensku koordinatu ostavljamo na miru).

Da bismo mogli riješiti Einsteinovu jednadžbu, uz metriku potrebno je opisati i kakva se materija nalazi u našem svemiru. To radimo pomoću tenzora $T_{\mu\nu}$. Materija

⁴Engl. Cosmic Microwave Background radiation, zračenje čija je temperatura (2.72548 ± 0.00057) K [54].

u svemiru se sastoji od barionske tvari (od koje se sastoje svi makroskopski objekti) i od zračenja. Takav svemir najjednostavnije je opisati kao idealni fluid, što znači da cijeli svemir možemo modelirati preko njegove gustoće u mirnom sustavu ρ i izotropnog pritiska p . Iz ovakve definicije je jasno da u sugibajućim koordinatama (engl. *comoving coordinates*) fluid miruje. 4-brzina je tada

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (5.2)$$

dok se tenzor $T_{\mu\nu}$ može napisati u obliku

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (5.3)$$

Odnos gustoća materije i zračenja određivat će kakav će naš svemir biti. Današnji svemir je uglavnom ispunjen materijom, iako se smatra da je rano u povijesti svemira dominantno bilo zračenje [3, 7]. Postoji još jedan doprinos ukupnoj gustoći energije, to je *energija vakuuma* čija je jednadžba stanja⁵ jednaka $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Gustoća energije je konstantna, tj. $\rho_\Lambda \propto a^0$, i takav svemir nazivamo *vakuumski svemir*.

Einsteinovu jednadžbu možemo napisati kao

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (5.4)$$

Da bismo si dodatno pojednostavili izračun, koristit ćemo ravnu R-W metriku s bez-dimenzijskim faktorom skaliranja [3]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

gdje je κ faktor koji određuje kakav je svemir. Ako je svemir maksimalno simetričan (simetričan i u vremenskoj i u prostornim koordinatama), onda se model svemira za koji vrijedi $\kappa > 0$ (pozitivna zakrivljenost) zove *de Sitterov svemir*, dok se svemir s $\kappa < 0$ (negativna zakrivljenost) zove *anti de Sitterov svemir*. Specifičnost de Sitterovog i anti de Sitterovog svemira jest da su oni vakuumska rješenja Einsteinove jednadžbe, te zbog toga ne odgovaraju našem svemiru (koji je ispunjen materijom i zračenjem). Sad možemo izračunati Christoffelove simbole za ovu metriku uz definiciju $\dot{a} \equiv da/dt$:

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - \kappa r^2}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2}, \quad \Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \quad (5.5)$$

$$\Gamma_{33}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{02}^2, \quad \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \quad (5.6)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r(1 - \kappa r^2), \quad \Gamma_{33}^1 = -r(1 - \kappa r^2) \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad (5.7)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \quad (5.8)$$

⁵Jednadžba stanja je jednadžba kojom dovodimo u vezu gustoću i izotropni tlak. Općenito, u OTR-u se ta jednadžba može napisati kao $p = w\rho$, gdje je w neka konstanta.

dok su komponente Riccijevog tenzora dane s

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (5.9)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} \quad (5.10)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \quad (5.11)$$

$$R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 \theta \quad (5.12)$$

Iz oblika Riccijevog tenzora vidimo kako imamo samo dijagonalne komponente, što odgovara činjenici da i u tenzoru momenta-energije s desne strane jednakosti također imamo samo dijagonalne komponente (dok su ostale komponente 0). Rješenje ćemo podijeliti na vremenski dio i na prostorni dio. Ukoliko su $\mu\nu = 00$, onda vrijedi

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (5.13)$$

U prostornim komponentama imamo jednu jednadžbu gibanja:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) \quad (5.14)$$

Nakon sređivanja, jednadžbe se mogu napisati kao

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} \quad (5.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (5.16)$$

Ove dvije jednadžbe zovu se *Friedmannove jednadžbe* i opisuju evoluciju R-W svemira. Iz jednadžbe (5.16) možemo odmah vidjeti da svemir nije statičan. Naime, druga derivacija funkcije $a(t)$ je uvijek negativna, ako uzmemo da su gustoća i tlak uvijek pozitivne veličine. To znači kako se svemir ili širi (ako je $\dot{a} > 0$) ili skuplja (ako je $\dot{a} < 0$). Naravno, pri tom mislimo samo na skaliranje prostornih koordinata, dok vrijeme uvijek teče normalno. Svemir može biti statičan samo onda kad \dot{a} prelazi iz pozitivne vrijednosti u negativnu i obratno. Odnos \dot{a}/a koji nam govori o brzini širenja naziva se *Hubbleov parametar*, koji nije konstanta i ovisi o svemirskoj epohi koju razmatramo. *Današnja* vrijednost Hubbleovog parametra naziva se Hubbleova konstanta i označava s H_0 . Tokom godina napravljena su mnoga mjerenja Hubbleove konstante (primjerice [55,56]), no najprecizniji rezultat izmjeren je 2013. godine od strane Planckove kolaboracije [56]:

$$H_0 = (67.80 \pm 0.77) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (5.17)$$

Vidimo da se brzina udaljenih galaksija (čija je udaljenost veća od 1 Mpc) može izračunati pomoću formule

$$v = H_0 \cdot D \quad (5.18)$$

gdje je D vlastita udaljenost (engl. *proper distance*) između promatrača i galaksije. Jednadžba (5.18) naziva se *Hubbleov zakon*.

Einsteinu se nije sviđala ideja o svemiru koji se može širiti, htio je statični svemir, jer se u tom slučaju Einsteinova jednadžba može (u slučaju malih masa i brzina) svesti na Newtonovu gravitaciju. Međutim, Friedmannovo rješenje za Robertson-Walkerovu metriku te Lemaitreova i Hubbleova mjerenja pokazala su da je dinamički svemir ne samo teorijski predviđeno rješenje, već da postoje eksperimentalni dokazi koji potvrđuju tezu da se svemir širi. Drugi problem je bio u činjenici da je izvor gravitacije cijeli tenzor momenta i energije, što znači da uz doprinose od materije i zračenja imamo i doprinos vakuumske energije. Tenzor energije i momenta možemo podijeliti na ta dva doprinosa, tako da se Einsteinova jednadžba može napisati kao

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T^{(M)}_{\mu\nu} - \rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu}) \quad (5.19)$$

odnosno

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.20)$$

Konstanta Λ naziva se *kozmoška konstanta*. Izbor konstante Λ nije jednoznačan, za više izbora Λ možemo dobiti statični svemir. Najjednostavnija mogućnost je izbor $\Lambda = 0$ s kojim se modificirana Einsteinova jednadžba svodi na jednadžbu (1.11).

S kozmoškom konstantom, u kontekstu opće teorije, postoje dva fundamentalna problema. Prije svega, Einsteinova se jednadžba s dodanom kozmoškom konstantom ne svodi na Newtonovu jednadžbu za male brzine i male mase. Točnije, svodi se na modificiranu Newtonovu jednadžbu gdje dodatni član predstavlja član s kozmoškom konstantom:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\phi - \Lambda\phi = 4\pi G\rho$$

gdje je $\Lambda\phi$ novi član u Newtonovom potencijalu (otuda vidimo da izborom $\Lambda = 0$ ili ako je Λ dovoljno mala, onda se jednadžba svodi direktno na klasičnu Newtonovu gravitaciju). Drugi problem vezan je uz veličinu kozmoške konstante. Naime, kozmoška konstanta se može povezati s gustoćom ρ_{vac} preko relacije

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

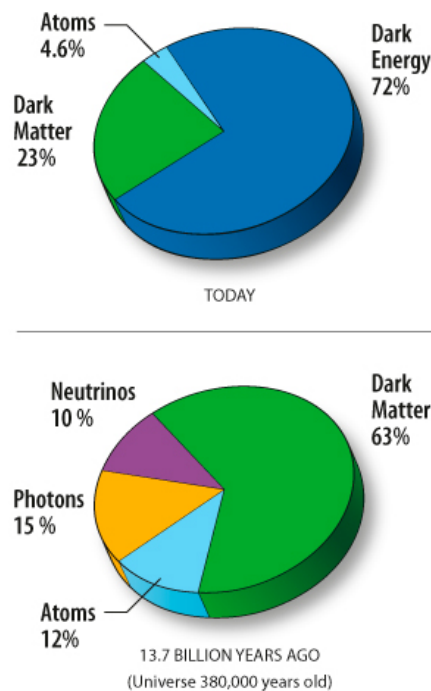
Međutim, ρ_{vac} se može izračunati i kvantno-mehanički. Takav izračun daje izuzetno veliko neslaganje s eksperimentom, dobivene gustoće se razlikuju za 120 redova veličine, što je definitivno presedan. Problem najvjerojatnije leži u činjenici što je tako velika kvantno-mehanička gustoća na razini Planckove skale na kojima svi efekti (partikularno efekti kvantne gravitacije, čija teorija još uvijek ne postoji) nisu poznati.

U kozmologiji se često, umjesto kozmoške konstante, koriste parametri koji opisuju gustoće raznih vrsta energija. Tako parametar Ω_M opisuje gustoću materije, dok Ω_Λ opisuje gustoću povezanu s kozmoškom konstantom, kolokvijalno nazvanu

gustoća tamne energije. Ukupna gustoća energije je povezana s Hubbleovom konstantom te se definira preko relacije

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}} \quad (5.21)$$

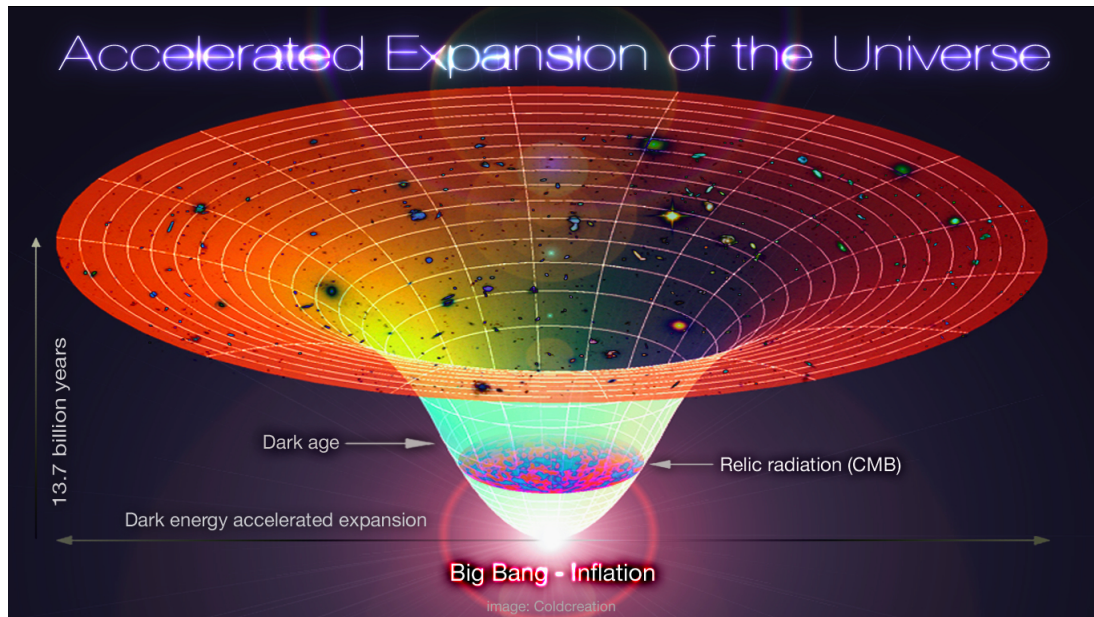
gdje je ρ_{crit} kritična gustoća i jednaka je $\rho_{\text{crit}} = 3H^2/8\pi G$, a Ω je tzv. parametar gustoće o kojem ovisi kakvu R-W metriku moramo iskoristiti da bismo opisali naš svemir. Ako je gustoća svemira ρ manja od kritične gustoće, onda će parametar gustoće Ω biti manji od 1, što vodi do otvorenog svemira. S druge strane, ako je gustoća ρ veća od kritične gustoće, onda je parametar gustoće Ω veći od 1, što znači da je svemir zatvoren. Jedino kada su gustoće jednake, Ω je jednak 1 i svemir je ravan. Trenutna mjerenja govore kako u našem svemiru dominira gustoća tamne energije, dok je ukupna gustoća jednaka 1, što bi odgovaralo ravnom svemiru koji se nekontrolirano širi [56]. Treba napomenuti kako odnosi (barionske) gustoće materije, tamne materije i gustoće tamne energije nisu uvijek bili ovakvi, oni su se vremenom mijenjali. Tako se širenjem svemira barionska i nebarionska gustoća smanjivala, dok je gustoća tamne energije rasla (graf 5.1).



Slika 5.1: Odnos materije i tamne energije: gornji graf prikazuje današnje stanje, dok donji graf prikazuje stanje kakvo je bilo kad je svemir bio star 380000 godina [57].

Bez obzira kakve početne uvjete uzeli za Friedmannove jednadžbe, jedno je sigurno: Friedmannove jednadžbe sadrže singularitet kad je faktor skaliranja $a(t) = 0$. Dakle, sva materija je bila koncentrirana u jednoj točki, gustoća materije (a time i zakrivljenost prostor-vremena) bila je beskonačna. Tu točku u vremenu kolokvijalno nazivamo *veliki prasak*, početak prostora kao takvog. Ovakav model svemira, opisan

ovdje, sa Friedmann-Robertson-Walker metrikom te tamnom materijom i tamnom energijom zove se Λ CDM model⁶ i predstavlja trenutno važeći kozmološki model (slika 5.2).



Slika 5.2: Λ CDM model svemira: vremenska linija se širi prema van od velikog praska do danas [58].

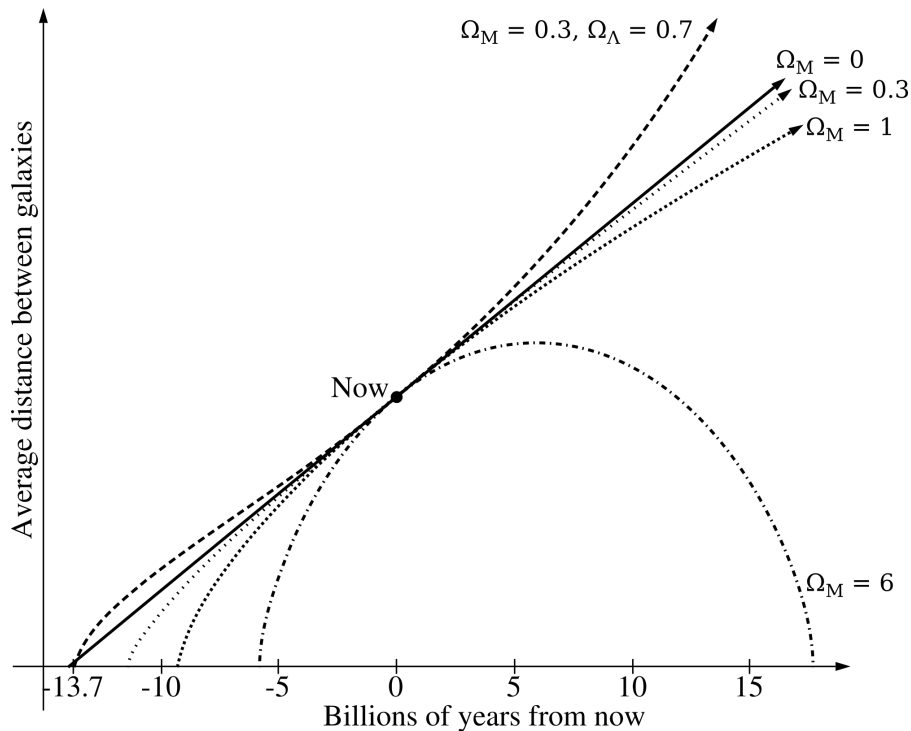
Starost svemira se također može izračunati iz trenutne vrijednosti Hubbleove konstante. Hubbleovo vrijeme definira se kao recipročna vrijednost Hubbleove konstante odnosno

$$t_H = \frac{1}{H_0} = \frac{1 \text{ s Mpc}}{67.8 \text{ km}} \quad (5.22)$$

gdje je 1 Mpc jednak $3.086 \cdot 10^{19}$ km. Ubacimo li to u jednadžbu za Hubbleovo vrijeme, dobit ćemo da je starost svemira $\approx 1.44 \cdot 10^{10}$ godina, odnosno oko 14.4 milijarde godina što je nešto veća vrijednost od izmjerene vrijednosti [56] od (13.799 ± 0.021) milijardi godina. Razlog tomu je pretpostavka o linearnosti Hubbleove konstante, što nije slučaj: Hubbleova konstanta je odnos brzine širenja svemira i trenutne vrijednosti parametra skaliranja. S obzirom da se brzina širenja svemira mijenjala (širenje se akcelerira) s protokom vremena, tako se i Hubbleova konstanta mijenjala kako je vrijeme prolazilo.

Odnosi ova četiri navedena parametra (gustoće materije Ω_M , gustoće zračenja Ω_r , gustoće tamne energije Ω_Λ te Hubbleove konstante) su nam potrebni ne samo da vidimo koliko je svemir star, kako je evoluirao do sad, već i kako će evoluirati u budućnosti. Prema trenutno važećem modelu, postoji nekoliko mogućnosti kako će svemir završiti svoju evoluciju, a koji su prikazani na grafu 5.3.

⁶Skraćenica od Λ Cold Dark Matter.



Slika 5.3: Sudbina svemira u ovisnosti o parametrima Ω_M i Ω_Λ . Graf trenutnih vrijednosti parametara prikazan je iscrtkano [59].

Kako trenutno izgleda, svemir je euklidski (ravni) te se širi. Štoviše, kako se vidi iz grafa, to širenje se ubrzava, ubrzanje direktno ovisi o odnosu gustoće materije (barionske i nebarionske) te gustoće tamne energije. Ukoliko dođe do sve veće razlike između tih oblika energije, akceleracija svemira će se povećavati, te će svemir doživjeti jednu od tri mogućnosti:

- tzv. “Big freeze” - ovaj scenarij pretpostavlja širenje svemira toliko dugo dok se temperatura svemira ne približi temperaturi apsolutne nule (asimptotsko približavanje). U takvom bi se svemiru formiranje zvijezda nastavilo još neki dogledni period dok se ne bi potrošio sav materijal za izgradnju novih zvijezda. Jednom kad se takav materijal potroši, postojeće zvijezde bi gorile dok ne bi potrošile svoje zalihe goriva, te bi se i one naposljetku ugatile. Svemir bi postao izuzetno hladno i izuzetno tamno mjesto. Ovakav scenarij je trenutno najizgledniji [55] i na grafu 5.3 je označen crtkano..
- tzv. “Heat death” - ovaj scenarij je scenarij maksimalne entropije. U takvom svemiru je sve potpuno jednako distribuirano, nema nikakvih gradijenata, pa život nije moguć.
- tzv. “Big rip” - scenarij u kojem se odnos tamne energije te barionske i nebarionske materije i dalje povećava, gdje gustoća tamne energije sve više i više raste. U takvom scenariju, širenje svemira se događa sve brže i brže, a Hubble-ova konstanta se sve više i više povećava. Konačno, akceleracija širenja svemira

dovoljno je velika da čak ni nuklearne veze u jezgrama atoma nisu dovoljno jake da se suprotstave sili koja protone i neutrone u jezgri želi raspršiti [60].

Svi ovi modeli su spekulativne prirode, osim modela velikog hlađenja, za koji trenutno postoji konsenzus znanstvene zajednice. Druga mogućnost je tzv. “big crunch” ili “veliko sažimanje” gdje na kraju ipak prevlada maseni parametar (u odnosu na parametar tamne energije). Iz grafa se vidi kako taj model svemira najkraće traje. U tom slučaju, u jednom momentu u budućnosti bi svemir trebao zaustaviti svoje sažimanje te bi počela era inflacije. Ovakav model dopušta tzv. cikličnost svemira, tj. jednom kad se svemir sažme ponovo u singularitet, nova ekspanzija može ponovo odmah nakon toga početi. Trenutna predviđanja govore kako do velikog sažimanja neće doći, no mora se uzeti u obzir relativno kratko vrijeme mjerenja ovih podataka, pa stoga ne možemo isključiti mogućnost da se nešto u budućnosti ne promijeni. Izračuni pokazuju kako se kolaps svemira ne očekuje još najmanje 42 milijarde godina [61].

6 Alternativne teorije i parametrizirani post-Newtonovski formalizam

Iako je opća teorija relativnosti prošla veliki broj testova i eksperimentalno je pokazana na velikom broju primjera, postoji uvijek mogućnost da se teorija proširi, odnosno da se reformulira (posebice ako se, kojim slučajem, u budućnosti pojavi eksperiment kojeg opća teorija ne može objasniti). Postoji jako puno alternativnih teorija općoj teoriji relativnosti, koje se mogu podijeliti u nekoliko glavnih kategorija:

1. gravitacijske skalarne teorije - postoji dodatno skalarno vezanje koje se veže uz zakrivljenost, a ne samo uz metriku. Jedna od prvih takvih teorija je Brans-Dickeova teorija koja uvodi konstantu vezanja ω .
2. postojanje viših dimenzija - ove teorije su poznate pod nazivom Kaluza-Klein teorije. Više dimenzije u ovom kontekstu ne znači samo da opću teoriju relativnosti promatramo kroz više dimenzije, već da cijela teorija ima $4 + d$ dimenzija, gdje je d broj viših dimenzija.
3. teorije u kojima uključujemo članove višeg reda u akciji.
4. teorije koje uključuju ne-Christoffelove koneksije.

Sve alternativne teorije se eksperimentalno uspoređuju s podacima koji su dobiveni kroz formalizam nazvan *parametrizirani post-Newtonovski formalizam* ili *PPNF*. Svrha tog formalizma jest pojednostaviti opću teoriju relativnosti (tj. njene nelinearne jednadžbe) na način da se ona može izraziti kao minimalna devijacija od Newtonovog zakona. Pri tome se pretpostavlja da će se raditi u režimu slabog gravitacijskog polja te s brzinama koje su daleko manje od c . Također, u PPN formalizmu, metrički tenzor je uvijek simetričan i brzina svjetlosti je konstanta. Formalizam se može koristiti ne samo za testiranje alternativnih teorija, već se pokazao i kao vrlo koristan alat za testiranje raznih predviđanja opće teorije relativnosti (od Merkurove precesije pa do gravitacijske leće). Sam formalizam se može zapisati u dva oblika: ili u obliku $\beta - \Delta$ notacije ili u obliku $\alpha - \zeta$ notacije [23, 24, 62]. Navedeni parametri mogu se vidjeti u tablici ?? [62].

Parametrizirani post-Newtonovski formalizam daje konkretne vrijednosti pojedinih parametara. Vrijednosti parametara su potvrđeni na mnogo eksperimenata te se izmjereni parametri u odnosu na teorijski predviđene vrijednosti malo razlikuju [62], čak i na galaktičkim skalama [63]. Također je ustanovljeno da se sve alternativne teorije mogu svesti na opću teoriju relativnosti ili se mogu odbaciti zato što ne mogu objasniti neki od efekata koje opća teorija relativnosti predviđa. Primjerice, Brans-Dickeova teorija je u opću teoriju relativnosti uvela konstantu vezanja ω . Analizom teorije je ustanovljeno kako parametar γ možemo opisati preko konstante vezanja [62]:

Parametar	Što mjeri?	Vrijednost u OTR-u
γ	Kolika je zakrivljenost koju proizvodi jedinica mase?	1
β	Kolika se nelinearnost manifestira prilikom superpozicije gravitacije?	1
ξ	Koliki je efekt “preferirane lokacije”?	0
α_1	Koliki je efekt “preferiranog vremena”?	0
α_2		0
α_3		0
α_3	Kršenje zakona očuvanja količine gibanja?	0
ζ_1		0
ζ_2		0
ζ_3		0
ζ_4		0

Tablica 6.1: Tablica PPN parametara.

$$\gamma = \frac{1 + \omega}{2 + \omega}$$

S obzirom da je $\gamma = 1$, da bi jednakost vrijedila, ω mora težiti u beskonačnost; veliku vrijednost konstante ω pokazali su i eksperimenti provedeni u sunčevom sustavu (posebice sonda Cassini-Huygens koja je izvela do sad najpreciznije mjerenje parametra γ). Iz ovog argumenta vidljivo je kako je popravka Brans-Dickeove teorije u odnosu na opću teoriju izuzetno mala ili ne postoji, te se njeni rezultati zapravo svode na rezultate opće teorije. Postoji cijela lista alternativnih teorija koje su odbačene zato što nisu mogle objasniti neke od efekata opće teorije. Popis takvih teorija može se naći na Wikipediji [64].

7 Metodički dio ili kako OTR predstaviti djeci?

Opća teorija relativnosti je matematički zahtjevna teorija, te se ne može na jednostavan način predstaviti u srednjoj školi. To se poglavito odnosi na konkretna rješenja Einsteinove jednadžbe te matematičke implikacije tih rješenja. Bez obzira na to, opća se teorija ipak može predstaviti nizom tzv. *gedanken* eksperimenata, misaonih eksperimenata gdje se razmišljanjem (i jednostavnijim demonstracijama) može doći barem do okvirnih zaključaka koje opća teorija daje. Prema trenutno dostupnim dokumentima sa stranice Nacionalnog centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, opća je teorija predviđena kao nastavna cjelina u 3. razredu gimnazijskog programa fizike [66] no u dostupnim udžbenicima se vrlo malo spominje. Trenutno je u procesu pisanje novih predmetnih kurikuluma, te nije poznato hoće li i na koji način opća teorija relativnosti biti zastupljena u novom kurikulumu. Također, iako je ona predviđena za 3. razred gimnazije, prema dostupnim udžbenicima ona se redovito radi u 4. razredu kao dio teme koja obrađuje specijalnu teoriju relativnosti. S obzirom na takav manjak izvora podataka, a i činjenice da je sama teorija matematički zahtjevna, temu neću obraditi kao tipičnu pripremu za nastavni sat, već ću je probati predstaviti kao nekoliko seminara.

Seminari se okvirno mogu podijeliti u nekoliko kategorija:

1. Einsteinov princip ekvivalencije, kroz koji se ističe ekvivalentnost gravitacijskog ubrzanja s uniformnim ubrzanjem cijelog sustava, što vodi na geometrijsku prirodu gravitacije.
2. demonstracija zakrivljenosti prostora ubacivanjem mase, gdje se eksperimentalno može utvrditi kako se ponašaju putanje čestica.
3. opis poznatih efekata te eksperimentalnih dokaza kojima se pokazala validnost opće teorije relativnosti (Merkurova precesija, Shapirov efekt).
4. pitanja vezana uz kozmologiju, od početka („Big Bang“) do mogućih krajeva.

Ove teme su dovoljno opširne, a u isti mah dovoljno jednostavne, da se mogu od strane učenika 4. razreda gimnazije na kvalitetan način provjeriti i reproducirati. Također, izbor širine teme (posebice što se tiče opisa poznatih efekata te pitanja kozmologije i kozmoloških modela) daje mogućnost obrade teme ne samo kao seminarski rad učenika tokom godine (kao prezentaciju ili eksperiment), već se može iskoristiti i kao samostalna tema za maturalni rad ili za izradu plakata. Dodatno, u slučaju da se radi o plakatu ili seminarskom radu, teme predviđaju grupni rad učenika, čime se potiče njihova socijalizacija kroz rad u grupama.

S obzirom da su teme seminarskog tipa, ishode koje učenici trebaju zadovoljiti možemo podijeliti na više kategorija:

a) **ishodi vezani uz izradu seminara:**

- *materijalni ishodi*: objasniti i iskazati Einsteinov princip ekvivalencije, razumjeti zašto je gravitacijska sila posebna, u odnosu na druge sile (primjerice, elektromagnetsku), identificirati akceleraciju gravitacijske sile s uniformnom akceleracijom sustava, povezati i usporediti gibanja u raznim sustavima, objasniti što znači ravni prostor, uočiti promjene između specijalne teorije relativnosti i opće teorije uvođenjem mase, demonstrirati i uočiti razlike u putanjama čestica u ravnom i zakrivljenom prostoru, objasniti „na prste“ Merkurovu precesiju te uočiti razliku između efekta opće teorije i Newtonove teorije, navesti druge efekte koji su u međuvremenu izmjereni (gravitacijski crveni pomak i Shapirovo kašnjenje), objasniti što je „veliki prasak“ i navesti osnovne postulate našeg modela svemira (izotropnost i homogenost), objasniti razvoj svemira do danas, objasniti i demonstrirati širenje svemira pomoću jednostavnog modela s balonom, te navesti moguće ishode kako bi svemir mogao završiti.
- *funkcionalni ishodi*: razvijati apstraktno razmišljanje i zaključivanje, razvijati istraživačke sposobnosti, razvijati sposobnost ocjene relevantnosti izvora informacija te način selekcije.
- *odgojni ishodi*: sposobnost rada u grupi (predviđeno je da na seminarima radi više djece, s obzirom na opširnost teme).

b) ishodi vezani uz izlaganje seminara:

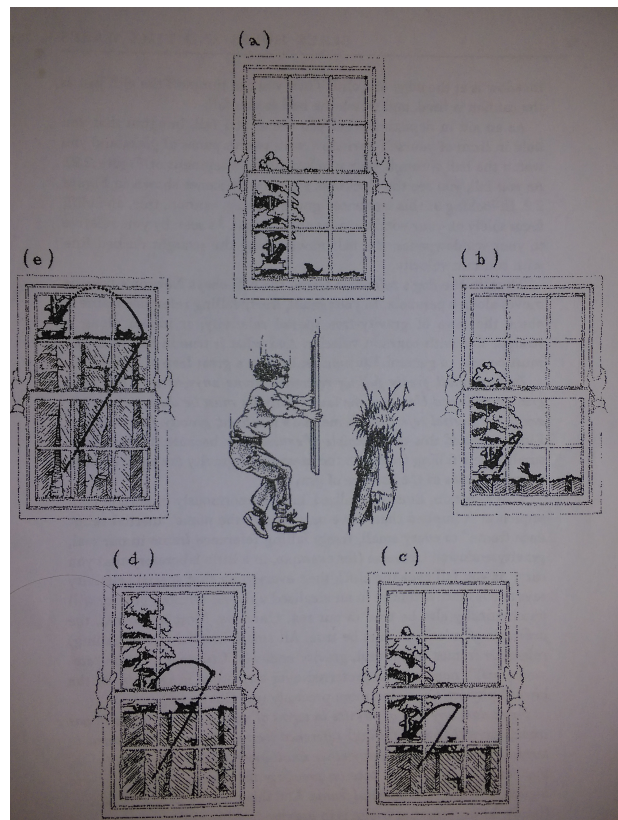
- *funkcionalni ishodi*: razvijati sposobnosti vezane uz javne nastupe (kako smanjiti tremu, ispravno govorenje, steći osjećaj za bitno u izlaganju, razvijati uvjerljivost u javnom nastupu, razvijati dikciju i govor tijela).
- *odgojni ishodi*: razvijanje sposobnosti vezane uz diskusiju, razvijati uvažavanje tuđeg mišljenja, razvijanje sposobnosti argumentacije.

Obrada teme na ovakav način (a ne samim izlaganjem profesora) je puno zanimljivija. Prije svega, teme se nastavljaju prirodno jedna na drugu te sve zajedno tvore jednu zatvorenu cjelinu. Drugi razlog je što se interakcija preko seminarskih radova i prezentacija premalo koristi u srednjoj školi, gdje se od djece već može očekivati jedan viši kognitivni nivo i u načinu zaključivanja i u samostalnom radu i u argumentaciji stavova. Poseban problem trenutno predstavlja tzv. javni nastup. I na fakultetu smo se susreli na mnogo mjesta s mogućnošću javnog nastupa, prilikom izlaganja raznih seminara, te smo bili svjedoci gdje je studentima bio velik problem izaći pred svoje kolege i izložiti problem koji su obrađivali te argumentirano obraniti svoje zaključke. Stoga je itekako pozitivno da se djecu što je ranije pokuša motivirati na javne nastupe, jer dikcija, govor tijela, argumentacija i nastup mogu u budućnosti itekako odlučivati o njihovom kasnijem zapošljavanju. Za seminare je dovoljno koristiti kao izvor Wikipediju i druge popularno-znanstvene Internet sadržaje (jednostavne JAVA

demonstracije, Youtube filmove i slične multimedijalne dodatke) i stranice, za srednju školu je nepotrebno ulaziti puno dublje u matematiku koja stoji iza.

7.1 Einsteinov princip ekvivalencije

Glavni zaključak opće teorije relativnosti je da je gravitacija posljedica geometrije prostor-vremena. Prema tome, gravitacijska sila, kao pojam, više nije sila, već je ono što osjećamo kao ubrzanje gravitacijske sile posljedica masa koje se nalaze u našem prostoru. Takav zaključak može se dobiti iz jednostavnog misaonog eksperimenta prikazanog na slici 7.1.



Slika 7.1: Ekvivalentnost gravitacijskog ubrzanja tijela i uniformne akceleracije

Na slici 7.1a prikazan je prozor kroz koji se vidi top. Top se nalazi na površini Zemlje i ispucava topovsko tane pod kutom α nekom početnom brzinom v . Ta brzina ima dvije komponente, u smjeru koordinatnih osi, gdje je x os usmjerena u horizontalnom, a y os u vertikalnom smjeru. Na topovsko tane u $-y$ smjeru djeluje gravitacijska sila (smjer joj je prema središtu Zemlje). Ako je naš opažatelj na Zemlji, tj. stoji u sustavu u kojem je i top, putanja koju tane opisuje je parabola, poznato rješenje iz Newtonove mehanike. Kosi se hitac može rastaviti na dva neovisna gibanja u x i y smjeru; ukupno opisano gibanje ima oblik parabole okrenute prema dolje. Pretpostavimo sad da smo u sustavu koji, u odnosu na sustav u kojem top miruje, pada jednoliko akcelerirajući za iznos gravitacijskog ubrzanja. U odnosu na

onaj prethodni slučaj, s obzirom na to da naš cijeli sustav akcelerira, putanja koju topovsko tane opisuje u našem sustavu više nije parabola. Ta razlika dolazi zbog promjene sustava: sustav više nije inercijalan i nama se čini kao da na topovsko zrno djeluje sila koja daje akceleraciju u y smjeru, a koja je magnitudom jednaka gravitacijskom ubrzanju prema dolje. Dakle, ako smo vezani uz sustav zemlje, onda prema Newtonu moramo opaziti gibanje topovskog taneta kao parabolu. S druge strane, u našem malom djeliću prostor-vremena (dakle, u sustavu koji jednoliko akcelerira prema dolje), mi ne možemo opaziti gibanje taneta po paraboli, već opažamo gibanje taneta kao gibanje po pravcu.

Ako smo na taj način eliminirali gravitaciju, onda smo zapravo sveli gibanje topovskog taneta na gibanje koje se može opisati zakonima specijalne teorije relativnosti (specijalna teorija relativnosti opisuje gibanja onih tijela koja se nalaze daleko od ikakvih izvora gravitacije). Zaključak bi se mogao sumirati kroz sljedeću izjavu:

U bilo kojem malom, slobodno-padajućem referentnom sustavu u našem stvarnom, gravitacijom ispunjenom svemiru, zakoni fizike moraju biti **isti** kao i u idealnom svemiru u kojem gravitacija ne postoji.

Ovaj se princip zove *Einsteinov princip ekvivalencije*, on izjednačava slobodno-padajuće referentne sustave s onim sustavima koji miruju u situacijama kada nema gravitacije. Ono što je posljedica ovog principa jest da se gravitacija mora opisati drugačije, ako postoji korespondencija između ove dvije stvari, onda gravitacija mora biti geometrijski problem. Također, mora se uočiti kako se s ovako formuliranim principom ne krši načelo relativnosti: svaki ovakav mali referentni sustav koji slobodno pada mora biti **ekvivalentan** bilo kojem drugom malom referentnom sustavu koji slobodno pada. To znači da ovakav princip vrijedi bez obzira nalazili se mi na Zemlji, ili se nalazili u dubokom Svemiru.

Prilikom izlaganja problema, učenici bi se morali prvo prisjetiti i izložiti kakve sve sustave imamo. To podrazumijeva razjašnjavanje što je to inercijski sustav, što je neinercijski sustav, trebali bi napraviti jednostavne dijagrame sila za oba sustava te pokazati što su to prividne sile i kako se javljaju kod neinercijskih sustava. Glavni dio seminara odnosi se na sliku 7.1: preko te sile i opisa što se događa trebalo bi napraviti jednadžbe gibanja u oba sustava te vidjeti da se zaista gravitacijsko ubrzanje u jednom sustavu „poništava“ padanjem drugog sustava. Ovaj dio seminara bi predstavljao najveći problem učenicima jer je realno kognitivno najteži. Nakon izlaganja problema i matematičke analize, trebalo bi pristupiti diskusiji oko problema i doći do zaključka koji je izražen u Einsteinovom principu ekvivalencije. Ukoliko je moguće, učenici bi kroz svoje izlaganje trebali natuknuti da je gravitacija geometrijski problem, te da je ta sila posljedica zakrivljenosti prostora. Takav je zaključak bitan radi eksperimenta koji bi se izvodio kao drugi seminar.

7.2 Pokazni eksperiment

Da je gravitacija posljedica geometrije, najlakše je vidjeti na eksperimentu s platnom gdje se na vrlo jednostavan način može dovesti zakrivljenost u vezu s gravitacijskom silom. Eksperiment se može vidjeti na sljedećoj poveznici: <https://www.youtube.com/watch?v=MTY1Kje0yLg>, a ovdje ćemo ukratko opisati ideju pokusa. Uzmemo relativno veliko platno ili plahtu koje prostremo tako da mu površina bude ravna. Primjerice, rubove platna mogu držati ostali učenici. Zatim, nakon što smo prostrli platno, po njemu puštamo pikule ili druge glatke, okrugle objekte te bilježimo kakve će putanje tih čestica biti. Ako je platno dobro razvučeno, odnosno ako je ravnomjerno nategnuto, putanje tih čestica bi trebale biti ravne linije, u skladu s pretpostavkama specijalne teorije relativnosti. Sada na sredini platna stavimo jedan uteg koji deformira platno. Ponovo puštamo kuglice na platno raznim brzinama te ponovo bilježimo njihove putanje. Rezultat će biti zakrivljene putanje, no ono što je bitno za uočiti jest kako putanja čestice uvelike ovisi o njihovoj početnoj brzini, čestice koje su manjih brzina će prije pasti u rupu u sredini, dok će čestice veće brzine dulje kružiti oko rupe ili će, ako im je brzina dovoljno velika, u potpunosti pobjeći utjecaju rupe. Sada možemo povećati masu u sredini te ponovo gledati kako se ponašaju pojedine čestice i ponovo napraviti analizu putanja. S obzirom da ne možemo u beskonačnost povećavati masu koju stavljamo u sredinu, jer bi platno puklo, možemo postaviti pitanje postoji li takva rupa gdje, ma koliko brzi bili, nikako ne možemo pobjeći utjecaju te rupe već uvijek padamo u nju.

Smisao ovog eksperimenta je zaključak kako gravitacija mijenja prostor-vrijeme, zakrivljuje ga, što znači da se gravitacija može, zajedno s Einsteinovim principom ekvivalencije, svesti na provjeru geometrije, što nam je i bio cilj. Također, ovakav eksperiment otkriva mogućnost postojanja crnih rupa, objekata čija je gravitacija toliko velika da čak niti svjetlost ne može pobjeći njenom utjecaju (crne su rupe jedan od fenomena koji je i predviđen općom teorijom relativnosti, a ovim se eksperimentom uspostavlja odlična analogija).

7.3 Prvi eksperimentalni dokazi

Opća teorija relativnosti iza sebe ima 100 godina eksperimentalnih dokaza i provjera. Od učenika se ne očekuje da napravi pregled svih 100 godina, već da se koncentrira na dva ili tri konkretna eksperimenta kojima je pokazana valjanost teorije. Pri tome učenik treba, ako za to postoje izvori, osvrnuti se i na eksperimente i mjerenja koja su dovela do propitkivanja Newtonove teorije kao potpune teorije gravitacije. S obzirom na svoju eksperimentalnu važnost i posljedice koje opća teorija predviđa, nužno je obraditi dva efekta (Merkurovu precesiju i gravitacijski crveni pomak), dok je učeniku ostavljeno na izbor da obradi i više od nužnog minimuma (učenik može uz ova dva efekta izabrati i treći efekt poput gravitacijske leće, crne rupe, gravitacijskih valova itd. no bitno je da vodi računa o vremenu koje je predviđeno za izvođenje seminara).

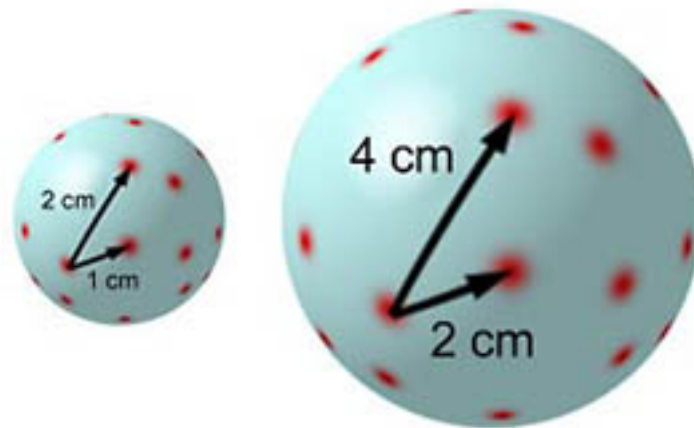
Ne očekuje se od učenika, kao ni kod drugih seminara, da ulazi u matematičku dubinu izračuna tih efekata, već se očekuje da da kvalitativne argumente te informacije o istraživanjima koja su potvrdila postojanje tih efekata. Također je nužno da se kod gravitacijskog crvenog pomaka spomene i gravitacijska dilatacija vremena, tj. efekt gdje satovi mjere različito vrijeme koliko se duboko nalaze u gravitacijskom potencijalu. Taj je efekt izuzetno bitan za modernog čovjeka, posebice u kontekstu GPS sustava (engl. Global Positioning System) čija preciznost ovisi o točnom mjerenju vremena.

Iako postoji mogućnost da ovaj seminar ispadne suhoparan te da se svede samo na ponavljanje činjenica i eksperimenata, bitan moment u ovoj raspravi je fokus na uzroke zbog čega je bilo potrebno napraviti proširenje Newtona. To se vrlo dobro vidi baš kod precesije Merkura, jer je precesija planeta Newtonovski efekt, za koji su ljudi znali i ranije. Međutim, razlika između te dvije precesije je što za Newtonovsku precesiju moramo imati više tijela. Gravitacijske interakcije tih planeta onda utječu da orbita planeta kojeg promatramo precesira. Ono što je posljedica opće teorije jest da za precesiju nije potrebno više planeta, već se precesija događa čak i ako imamo interakciju samo jednog planeta i Sunca. Oko takvih bi se fundamentalnih razlika trebala diskusija voditi i to bi trebalo biti u fokusu analize učenika. Isto se svodi i na gravitacijski crveni pomak, odnosno na gravitacijsku dilataciju vremena. S jedne strane, Dopplerov efekt je dobro poznati klasični efekt gdje zbog gibanja izvora dolazi do promjene u njegovoj valnoj duljini. Promjena postoji bez obzira giba li se izvor jednoliko ili akcelerira u odnosu na promatrača. S druge strane, gravitacijski crveni pomak posljedica je akceleracije u gravitacijskom polju, gdje je pomak prema crvenom tim veći što se nalazimo dublje unutar polja. Iako se isto zovu, ta dva efekta nemaju iste uzroke. Što se tiče gravitacijske dilatacije vremena, ona je povezana s gravitacijskim crvenim pomakom; trebalo bi istaknuti razliku između tog efekta i dilatacije vremena iz specijalne teorije relativnosti. Opet, efekt u STR-u posljedica je gibanja brzinom blizu brzine svjetlosti, dok je u OTR-u efekt posljedica gravitacije.

7.4 Kozmološka predviđanja

Rasprava o općoj teoriji relativnosti ne bi bila potpuna bez rasprave o kozmologiji, o postanku i svršetku svemira. S obzirom na popularnost znanstvene fantastike, pretpostavka je da bi ova tema izazvala najviše pozornosti: mnogo toga o kozmologiji ni danas ne znamo pa su mogućnosti za diskusiju i za istraživanje velike te se tema može podijeliti na nekoliko malih podtema, ako bi za to bilo zainteresiranih. Ipak, postoji nekoliko stvari u kozmologiji koje bi učenici trebali obavezno obraditi. Prije analize svemira, učenici bi trebali objasniti što podrazumijevamo kad kažemo da je svemir izotropan i homogen (homogen znači da u svim smjerovima izgleda isto, a izotropan da isti zakoni fizike vrijede kako na Zemlji tako i u dubokom svemiru). Tek nakon toga možemo reći kako se pretpostavlja da je svemir nastao u jednoj velikoj eksplo-

ziji koju nazivamo „veliki prasak“. Ako je svemir nastao u „velikom prasku“, onda je logično pitanje širi li se svemir i kako. Tu treba obavezno spomenuti Hubbleovu konstantu i iskazati njen iznos, te spomenuti kako se, prema današnjim mjerenjima, svemir širi. Iz Hubbleove konstante može se izračunati i starost svemira. Širenje svemira se može demonstrirati jednostavnim pokusom s balonom prikazanim na videu na sljedećoj poveznici: https://www.youtube.com/watch?v=_PVitVku_C0. Uzmemo balon žute (ili neke slične boje, radi bolje vidljivosti efekta) te ga malo napušemo. Zatim permanentnim markerom na njemu nacrtamo galaksije tako da ih označimo malo većim točkama. Nakon crtanja počnemo ponovo napuhavati balon. Rezultat je da se balon povećava, pa se zbog njegovog povećavanja povećavaju i udaljenosti između galaksija, no same galaksije ostaju jednako velike (slika 7.2).



Slika 7.2: Širenje svemira [67].

Učenici moraju doći do zaključka da se povećavaju samo udaljenosti među galaksijama, te da se ta udaljenost može povećavati neovisno o tome gibaju li se galaksije u nekom smjeru jedna u odnosu na drugu ili se ne gibaju. Ta posljedica širenja svemira vrlo je bitna i za njegov možebitni završetak, o čemu se također mora razviti diskusija. Uz profesora kao moderatora, diskusija može ići u tri smjera: što ako se svemir nastavi širiti kako se širi, što ako se akceleracija širenja svemira povećava, te što ako se svemir počne stezati. Treba definitivno spomenuti i trenutni znanstveni konsenzus, da se svemir širi i da će se nastaviti širit u beskonačnost.

Kozmološka pitanja predstavljaju možda najzanimljiviji dio od ova 4 seminarra koji su navedeni. To je zbog toga što je sama tema velika, postoji mnogo interesantnih ideja oko kojih bi se mogla razviti diskusija i doći do kvalitetnih zaključaka. Pitanja koja su ovdje sažeto istaknuta predstavljaju najbitnije posljedice opće teorije, a koji se tiču modela našeg svemira, u kojem se događa evolucija svih objekata. Kao što je navedeno, ovo nisu jedine teme, a u kozmologiji se uvijek može napraviti, ako bude zainteresiranih učenika, dodatna tema koja bi zadovoljila učenike. Primjerice, jedna

od mogućih tema je poveznica sa znanstvenom fantastikom (posebice sa svemirom iz poznate američke znanstveno-fantastične serije Star Trek), putovanjem brže od brzine svjetlosti (što u okviru specijalne teorije teorije relativnosti ne možemo, ako u kontekstu opće teorije možemo), rasprave o crvotočinama i putovanju kroz njih itd. Smisao ovakvih seminara nije da se učenika dodatno optereti uz sve obveze koje ima, već da ga se jedan interesantan način potakne da razmisli o prirodi i o svojstvima prirode. S obzirom na činjenicu kako je moderna kozmologija relativno mlada (svi navedeni fenomeni su predviđeni općom teorijom relativnosti, a ona je stara 100 godina), ne možemo tvrditi da nešto od ovog što je navedeno kao dodatna tema neće biti aktualno u budućnosti. Na ovaj način ne samo da potičemo učenika da se bavi fundamentalnim svojstvima prirode već i potičemo njegovu ili njezinu kreativnost, što bi trebala biti jedna od osnovnih zadaća škole (uz standardni obrazovni proces).

8 Zaključak

Opća teorija relativnosti doživjela je svoj 100. rođendan u 11. mjesecu 2015. godine. Tokom stogodišnje povijesti, pokazala se kao jedna od najbolje testiranih teorija, jer se u svim eksperimentima do sada pokazala iznimno točnom. Teorijski predviđene vrijednosti potvrđivane su iz eksperimenta u eksperiment, bez obzira radi li se o lokalnom mjerenju (mjerenju unutar sunčevog sustava) ili galaktičnom. Koristeći Einsteinove postulate došli smo do zaključaka o tome kakav je naš svemir, koliko je star, kako će eventualno završiti. Stoga se sa sigurnošću može tvrditi kako opća teorija relativnosti spada u osnovne teorije razumijevanja prirode.

Ipak, postoje problemi koji se unutar opće teorije relativnosti ne mogu riješiti ili ih mi ne znamo riješiti. Prije svega, postoji problem anizotropije kod pozadinskog kozmičkog zračenja. Nemamo suvisli odgovor što bi bio uzrok anizotropije, tim više što unutar opće teorije pretpostavljamo da je svemir homogen i izotropan. Charles Misner je prvi uvidio kako bi svemir trebao biti još anizotropniji nego što se čini. Još uvijek se ne zna konkretna uloga tamne materije, ne zna se niti uzrok barionske asimetrije. U ovom diplomskom radu spomenuo sam problem kozmološke konstante, ona je premala u odnosu na ono što bi odgovaralo energiji vakuuma, pa se možemo pitati što je poništava. Ne postoji teorija kvantne gravitacije, primarno zato što opća teorija nije renormalizabilna, što znači da na kvantnom nivou ne znamo mnogo. Primjerice, što se događa s informacijom kad je pošaljemo u crnu rupu? Ako ona ostaje u crnoj rupi i ako crna rupa isparava (kako se čini, putem Hawkingovog zračenja), što se događa s informacijom kad crna rupa ispari? Ne znamo točno kako će svemir završiti, postoji nekoliko hipoteza i trenutno postoji znanstveni konsenzus oko moguće sudbine svemira, no to ne znači da se predviđanje, u kontekstu novih otkrića, ne može promijeniti.

U predviđene fenomene spadaju i gravitacijski valovi. Iako su oni teorijski potpuno opisani te znamo kako bi trebali utjecati na materiju, do sad nije opažen njihov utjecaj. Primarno je to zbog činjenice da je amplituda gravitacijskih valova vrlo mala (reda veličine 10^{-20} m što je puno manje od promjera atoma). Da bi se mogla mjeriti tako mala amplituda, eksperimenti poput LISA i eLISA (engl. *evolved*) *Laser Interferometer Space Antenna*) te LIGO (engl. *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) koriste interferenciju lasera da bi detektirali te minijaturne promjene u njihovoj valnoj duljini. 1993. godine Nobelova nagrada za fiziku dodijeljena je američkim fizičarima Russellu Alanu Hulseu i Josephu Hootonu Tayloru Jr. za njihovo otkriće nove vrste binarnog sustava (u njihovu čast nazvanu Hulse-Taylorov sustav) s kojim su neizravno potvrdili postojanje gravitacijskih valova. Usprkos tome, gravitacijski valovi još uvijek nisu izravno opaženi. Početkom su godine znanstvenici sa Sveučilišta Arizona javili kako je na LIGO eksperimentu detektiran kandidat za gravitacijske valove, no zbog izuzetne osjetljivosti eksperimenta tek treba vidjeti je li to bio lažni alarm ili je došlo do zaista velikog otkrića.

Sva ova neriješena pitanja daju naslutiti kako opća teorija relativnosti nije još uvijek kompletna teorija, kako se teorija može (i mora) dalje razvijati. Napredak u razvoju eksperimenata te još preciznija i sveobuhvatnija mjerenja u kozmologiji i astrofizici sigurno će se nastaviti tokom 21. stoljeća što će dovesti i do novih teorija i do novih teorijskih mogućnosti proširenja opće teorije. Nema sumnje da nam i 21. stoljeće donosi pregršt zanimljivosti. Na kraju bi se apsolutno složio s Carrollom, opća teorija relativnosti zaista jest jedna od najljepših fizikalnih teorija.

Dodaci

Dodatak A Vektori i tenzori

Osnova matematike opće teorije relativnosti su vektori i njihove dualne forme, te tenzori. Prostor-vrijeme samo po sebi je četverodimenzionalno (jedna vremenska, te tri prostorne koordinate), pa se stoga vektori u općoj teoriji, kao i u specijalnoj teoriji, nazivaju **4-vektori** ili **četverovektori**. Svakoju točki prostora p pridružujemo vektorski tangentni prostor T_p : skup svih tangentnih vektora koji se mogu provući kroz točku p . Svaki vektor u prostoru T_p linearna je kombinacija vektora baze tog prostora, odnosno

$$A = A^\mu \hat{e}_{(\mu)} \quad (\text{A.1})$$

gdje su A^μ komponente vektora A . Standardni primjer vektora u prostor-vremenu je vektor tangente na krivulju. Ako je krivulja opisana jednadžbom $x^\mu(\lambda)$ gdje je λ parametar, tada su komponente tangentnog vektora na tu krivulju jednake

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \quad (\text{A.2})$$

Vektori sami po sebi su invarijantni na Lorentzove transformacije; prilikom transformacije mijenjaju se i komponente i vektori baze prema sljedećim pravilima:

$$V^\mu \rightarrow V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} V^\nu \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{e}_{(\mu)} = \Lambda^{\nu'}_{\mu} \hat{e}_{(\nu')} \quad (\text{A.4})$$

gdje $\Lambda^{\mu'}_{\nu}$ označava Lorentzovu transformaciju. Svakoju točki prostora p možemo pridružiti i **dualni vektorski prostor**, zvan još i kotangentni prostor i označava se sa zvjezdicom T_p^* . Dualni prostor je prostor koji sadrži sve dualne vektore, mape koje preslikavaju originalni vektorski prostor u prostor realnih brojeva. Ako je $\omega \in T_p^*$, tada vrijedi

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

Elementi od T_p ponekad se zovu **kontravarijantni vektori**, dok se elementi od T_p^* zovu **kovarijantni vektori**. Svaki se dualni vektor može napisati u bazi koja obrazuje dualni prostor:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (\text{A.6})$$

Primjetimo da su indeksi u odnosu na vektore iz prostora T_p obrnuti. Dualni vektori također su očuvani na Lorentzove transformacije; kod njih se također transformiraju i komponente i vektori baze po sljedećim pravilima:

$$\omega_{\mu'} = \Lambda^{\nu}_{\mu'} \omega_{\nu} \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{\theta}^{\rho'} = \Lambda^{\rho'}_{\sigma} \hat{\theta}^{(\sigma)} \quad (\text{A.8})$$

Primjer dualnog vektora u prostor-vremenu je gradijent skalarne funkcije:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \hat{\theta}^{(\mu)}$$

Tenzori su generalizacija vektora i dualnih vektora. Tenzor T ranga (ili tipa) (k, l) je multilinearne mapa s Kartezijevog umnoška vektorskih i dualnih prostora na \mathbb{R} :

$$T : \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{k \text{ puta}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{l \text{ puta}} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.9})$$

Multilinearost u ovom slučaju znači da tenzor djeluje linearno na sve argumente. Tenzor ranga $(0, 0)$ je skalar, tenzor ranga $(1, 0)$ je vektor, ranga $(0, 1)$ je dualni vektor. Direktni produkt dva tenzora daje novi tenzor: ako je tenzor T ranga (k, l) , a tenzor S ranga (m, n) , onda je njihov produkt novi tenzor $T \otimes S$ ranga $(k + m, l + n)$. Prostor tenzora također obrazuje bazu; svaki se tenzor može napisati kao linearna kombinacija vektora baze. Također, tenzori se mogu transformirati, pri čemu se svaka komponenta transformira u skladu s indeksom: sve komponente s gornjim indeksom transformiraju se kao vektori, dok se sve komponente s donjim indeksom transformiraju kao dualni vektori:

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}_{\mu_1} \dots \Lambda^{\mu'_k}_{\mu_k} \Lambda^{\nu_1}_{\nu'_1} \dots \Lambda^{\nu_l}_{\nu'_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \quad (\text{A.10})$$

Treba napomenuti kako su tenzori *neovisni* o koordinatnom sustavu u kojem radimo, no njegove komponente jesu. Također, kod tenzora je bitan redoslijed indeksa. Metrika prostora $\eta_{\mu\nu}$ posebna je vrsta $(0, 2)$ tenzora. Drugi primjer je Kroneckerova δ koja ima iste komponente u svim koordinatnim sustavima:

$$\delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Nad tenzorima možemo vršiti razne matematičke operacije:

- **kontrakcija vektora:** pretvara tenzor ranga (k, l) u tenzor $(k - 1, l - 1)$, to je operacija sumiranja preko jednog gornjeg i jednog donjeg indeksa:

$$S^{\mu\rho}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}_{\nu\sigma} \quad (\text{A.12})$$

Kontrakcija po različitim indeksima općenito ne daje isti tenzor:

$$T^{\mu\nu\rho}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}_{\sigma\nu} \quad (\text{A.13})$$

- **podizanje i spuštanje indeksa** djelovanjem metrike na tenzor:

$$T^{\alpha\beta\mu}_{\delta} = \eta^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \quad (\text{A.14})$$

$$T^{\beta}_{\mu\gamma\delta} = \eta_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \quad (\text{A.15})$$

Primjetimo kako prilikom dizanja i spuštanja indeksa nema promjene pozicije indeksa u odnosu na druge indekse. Na isti način možemo vektore pretvoriti u dualne vektore i obratno, trebamo samo djelovati metrikom na njih da im promijenimo poziciju indeksa.

Za tenzor kažemo da je *simetričan* ako se on ne mijenja na zamjenu bilo koja dva indeksa. Za primjer ćemo uzeti tenzor ranga 3. Ukoliko vrijedi

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\mu\rho\nu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\rho\nu\mu} \quad (\text{A.16})$$

kažemo da je $S_{\mu\nu\rho}$ simetričan u svim indeksima. Primjer simetričnog tenzora je metrika $\eta_{\mu\nu}$. Ukoliko simetrija vrijedi samo za neki par indeksa, onda kažemo da je tenzor simetričan s obzirom na zamjenu ta dva indeksa. Slično, tenzor je **antisimetričan** ako se prilikom zamjene bilo kojeg indeksa tenzoru promijeni predznak:

$$S_{\mu\nu\rho} = -S_{\nu\mu\rho} \quad (\text{A.17})$$

Primjer antisimetričnog tenzora je elektromagnetski tenzor $F_{\mu\nu}$. Općenito, tenzor ranga 2 može biti niti simetričan niti antisimetričan. U tom slučaju, tenzor se može rastaviti na svoj simetrični i svoj antisimetrični dio. Svaki tenzor se može *simetrizirati*, tj. učiniti ga simetričnim na zamjenu bilo koja dva indeksa. Simetrizacija se radi pomoću formule

$$S_{(\mu_1 \dots \mu_n)} = \frac{1}{n} \sum_{\pi} T_{\mu_{\pi(1)} \mu_{\pi(2)} \dots \mu_{\pi(n)}} \quad (\text{A.18})$$

Slično, bilo koji tenzor možemo *antisimetrizirati* tj. učiniti ga antisimetričnim na zamjenu bilo koja dva indeksa, pomoću formule

$$S_{[\mu_1 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} T_{\mu_{\pi(1)} \mu_{\pi(2)} \dots \mu_{\pi(n)}} \quad (\text{A.19})$$

Indeksi koji se simetriziraju stavljaju se u okrugle zagrade $()$, dok se indeksi koji se antisimetriziraju stavljaju u uglate zagrade $[\]$. Ukoliko indeksi koji se (anti)simetriziraju nisu jedan do drugog, oni se često odvajaju okomitom crtom. Primjerice, za općeniti tenzor ranga 4 vrijedi:

$$T_{(\alpha|\beta\gamma|\delta)} = \frac{1}{2} (T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\delta\beta\gamma\alpha}) \quad (\text{A.20})$$

Ako kontrahiramo tenzor ranga $(1, 1)$, dobit ćemo skalar

$$X = X^{\lambda}_{\lambda} \in \mathbb{R} \quad (\text{A.21})$$

pri čemu skalar X nazivamo *tragom* tenzora. U općoj teoriji relativnosti često se susrećemo s metrikom, koja je tenzor ranga $(0, 2)$ ili $(2, 0)$ (ima dva gornja ili dva donja indeksa). Da bismo našli trag takvog tenzora, prvo moramo podići ili spustiti jedan od indeksa i onda možemo napraviti kontrakciju.

Dodatak B Metrika

Metrika je tenzor ranga 2 (ima dva donja indeksa). U specijalnoj teoriji relativnosti metrika se označava s grčkim slovom $\eta_{\mu\nu}$ dok je u općoj teoriji oznaka $g_{\mu\nu}$. Metrika je simetrični tenzor, invarijantna je na zamjenu indeksa. Inverzna metrika je također tenzor ranga 2, ali s dva gornja indeksa. Umnožak metrike i inverzne metrike jednak je

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (\text{B.1})$$

Specijalno, ako je metrika dijagonalna, onda se inverzna metrika može izračunati tako da se uzmu recipročne vrijednosti komponenti metrike, tj:

$$g^{\mu\mu} = \frac{1}{g_{\mu\mu}} \quad (\text{B.2})$$

Djelovanjem metričkog tenzora na neki arbitrarni tenzor možemo tom tenzoru podignuti ili spustiti indeks:

$$g_{\mu\nu}T^{\mu}_{\alpha\beta} = T_{\nu\alpha\beta} \quad , \quad g^{\mu\nu}T^{\alpha}_{\mu\beta} = T^{\alpha\nu}_{\beta} \quad (\text{B.3})$$

Vrijede također i sljedeće relacije:

$$\delta^{\mu}_{\nu} = g^{\nu\alpha}g_{\mu\beta}\delta_{\alpha}^{\beta} = g^{\nu\alpha}g_{\mu\alpha} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (\text{B.4})$$

$$g_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\mu} = n, \quad n \text{ je broj dimenzija} \quad (\text{B.5})$$

Komponente metričkog tenzora se transformiraju prilikom promjene koordinata, a prema sljedećem pravilu:

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu} \quad (\text{B.6})$$

Ukoliko se metrički tenzor promatra kao matrica čiji su elementi komponente metričkog tenzora, a komponente transformacije kao elemente neke matrice Λ , onda se ova transformacija može napisati kao umnožak triju matrica, odnosno

$$g' = \Lambda^T g \Lambda \quad (\text{B.7})$$

gdje je Λ matrica transformacije, a Λ^T njena transponirana matrica. Matrica metrike g može se dijagonalizirati, tj. može se svesti na oblik gdje matrica ima samo

dijagonalne komponente koje su jednake ± 1 , dok su sve nedijagonalne komponente jednake 0. Takva matricna forma naziva se *kanonska forma*. Broj pozitivnih i negativnih vrijednosti u kanonskoj formi ne može se promijeniti nikakvom koordinatnom transformacijom. U tablici B.1 navedeni su neki primjeri metrika koje se često koriste.

Metrika	Naziv	Komponente
$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$	euklidska	$g_{xx} = g_{yy} = g_{zz} = 1$ $g_{xy} = g_{yz} = g_{zx} = 0$
$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$	Minkowski	$\eta_{tt} = -1$ $\eta_{xx} = \eta_{yy} = \eta_{zz} = 1$ $\eta_{xy} = \eta_{yz} = \eta_{zx} = 0$
$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$	†	$g_{\theta\theta} = R^2, g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2\theta$ $g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$

Tablica B.1: Neke tipične metrike.

†: metrika sfere S^2 uronjena u realni prostor \mathbb{R}^3 .

Dodatak C Korišteni Python programi

- plotanje Newtonovog potencijala kako je definirano u jednadžbi 2.31:

```
import scipy
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = np.arange(0.001, 100, 0.001)
epsilon = 0

potencijal1 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r) + (1**2)/(2*r**2) # -(1**2/r**3)
potencijal2 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r) + (2**2)/(2*r**2) # -(2**2/r**3)
potencijal3 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r) + (3**2)/(2*r**2) # -(3**2/r**3)
potencijal4 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r) + (4**2)/(2*r**2) # -(4**2/r**3)
potencijal5 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r) + (5**2)/(2*r**2) # -(5**2/r**3)

fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(r, potencijal1, label='L=1', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal2, label='L=2', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal3, label='L=3', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal4, label='L=4', linewidth = 2.0)
```

```

ax.plot(r, potencijal5, label='L=5', linewidth = 2.0)

legend = ax.legend(loc='upper right', shadow=True)
for label in legend.get_texts():
    label.set_fontsize('large')

for label in legend.get_lines():
    label.set_linewidth(2.0)
plt.title('Ovisnost potencijala o radijusu uz  $\epsilon=0$ ')
ax.axis([0, 30, 0, 0.8])
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('V(r)')
plt.show()

```

- plotanje relativističkog potencijala iz jednadžbe (2.32):

```

import scipy
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

r = np.arange(0.001, 100, 0.001)
epsilon = 0

potencijal1= (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r)+(1**2)/(2*r**2)-(1**2/r**3)
potencijal2 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r)+(2**2)/(2*r**2) -(2**2/r**3)
potencijal3 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r)+(3**2)/(2*r**2)-(3**2/r**3)
potencijal4 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r)+(4**2)/(2*r**2)-(4**2/r**3)
potencijal5 = (1/2)*epsilon - epsilon*(1/r)+(5**2)/(2*r**2)-(5**2/r**3)

fig, ax = plt.subplots()

ax.plot(r, potencijal1, label='L=1', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal2, label='L=2', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal3, label='L=3', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal4, label='L=4', linewidth = 2.0)
ax.plot(r, potencijal5, label='L=5', linewidth = 2.0)

legend = ax.legend(loc='upper right', shadow=True)
for label in legend.get_texts():
    label.set_fontsize('large')

for label in legend.get_lines():

```

```

    label.set_linewidth(2.0)
plt.title('Ovisnost potencijala o radijusu uz  $\epsilon=0$ ')
ax.axis([0, 30, 0, 0.8])
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('V(r)')
plt.show()

```

- plot izgleda Merkurove precesije [65]:

```

import numpy as np
from matplotlib.pyplot import figure, show, rc

G = 6.67e-11 # gravitation constant
c = 3e8      # speed of light
M = 1.99e30  # mass of sun
ScM = 3e5    # mass scale factor to make effect visible

Ty = 0.241   # period of Mercury's orbit (Earth years)
A = 5.79e10  # semi-major axis (m)
e = 0.205    # eccentricity of orbit

T = Ty * (365 * 24 * 3600) # orbital period (seconds)
v = A * (2*np.pi/T)       # average velocity (m/sec)
h = A * v                  # angular momentum constant L/m
a = G*M/(h**2)             # orbital constant
b = 3 * G * ScM * M / (c * c * a) # perturbation constant

def rad(theta):
    '''Compute orbit radius at cumulative angle theta'''
    x = (1 - a*a*b) * theta
    r = 1/(1 - e*np.sin(x) + a*a*b*(1 + e*e/2 + (e*e/6)*np.cos(2*x)) )
    return r

theta1 = np.linspace(0, 2*np.pi, 200)
theta2 = np.linspace(2*np.pi, (4)*np.pi, 200)
theta3 = np.linspace((4)*np.pi, (6)*np.pi, 200)
theta4 = np.linspace(6*np.pi, 8*np.pi, 200)

r1 = rad(theta1)
r2 = rad(theta2)
r3 = rad(theta3)

```

```

r4 = rad(theta4)

fig = figure(figsize=(10, 10))
ax = fig.add_axes([0.1, 0.1, 0.8, 0.8], projection='polar',
                  axisbg='#d5de9c')

a = np.where(r1 == r1.min())
print(r1[a])

b = np.where(r2 == r2.min())
print(r1[b])

c = np.where(r3 == r3.min())
print(r1[c])

ax.plot(theta1, r1, color='b', linewidth=2.0)
ax.plot(theta2, r2, color='y', linewidth=2.0)
ax.plot(theta3, r3, color='g', linewidth=2.0)
ax.plot(theta4, r4, color='r', linewidth=2.0)
ax.grid(True)

show()

```

- plot krivulje $z(r)$:

```

import scipy
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = np.arange(1, 5, 0.001)
c = 3e8

z = 1/np.sqrt(1-2/(2*n))-1

plt.plot(n, z, linewidth=2.0, color='r')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('z(n)')
plt.axis([0, 5, 0, 10])
plt.show()

```

Literatura

- [1] Einstein, Albert: Die Feldgleichungen der Gravitation [The Field Equations of Gravitation], Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, Max Planck Institute for the History of Science, 1915.
- [2] Weinberg, Steven: Gravitation and Cosmology, Principles and applications of the General Theory of Relativity, Wiley and sons, 1972.
- [3] Carroll, Sean: Spacetime and Geometry, An introduction to General Relativity, Addison-Weasley 2004.
- [4] Griffiths, David J.: Introduction to Electrodynamics, Prentice-Hall, 1999.
- [5] Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 7: 189–196
- [6] Hughston, L.P.; Tod, K.P. An introduction to general relativity. Cambridge University Press., 1990.
- [7] Wald, Robert M.: General relativity, The University of Chicago Press, 1984.
- [8] Chandrasekhar, S.: The Density of White Dwarf Stars, Philosophical Magazine (7th series) 11 (1931).
- [9] Bombaci I.: "The Maximum Mass of a Neutron Star". Astronomy and Astrophysics 305: 871–877.
- [10] Muller, Andreas: Experimental evidence of Black Holes, Max–Planck–Institut für extraterrestrische Physik, 2007. arxiv <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0701228v1.pdf>
- [11] Oppenheimer, Snyder: On Continued Gravitational Contraction, Phys. Rev. 56, 1939., <http://journals.aps.org/pr/pdf/10.1103/PhysRev.56.455>
- [12] Shodel, R. et al: Closest Star Seen Orbiting the Supermassive Black Hole at the Centre of the Milky Way, 2002., Arxiv <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0210426v1.pdf>
- [13] Clemence, G. M. (1947). "The Relativity Effect in Planetary Motions". Reviews of Modern Physics 19 (4): 361–364
- [14] Standish, Myles: Jet Propulsion Laboratory (1998), <http://bit.ly/20V00ki>
- [15] Vankov, Anatoli Andrei: General relativity problem of Mercury's perihelion advance revisited, 2010., Arxiv <http://arxiv.org/abs/1008.1811>

- [16] Goldstein, Poole, Safko: Classical mechanics, third edition, Addison Weasley, 2001.
- [17] NASA Goddard Space Flight Center: "Mercury Fact Sheet", 2007.
- [18] Simon, J.L. et al: "Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and planets". Astronomy and Astrophysics 282, 1994.
- [19] Pollock, Chris: Mercury's perihelion, University of Toronto, 2003., www.math.toronto.edu/~colliand/426_03/Papers03/C_Pollock.pdf
- [20] Fitzpatrick, Richard: Perihelion precession of the planets, University of Texas, 2011., <http://bit.ly/21bvSkQ>
- [21] Fitzpatrick, Richard: An Introduction to Celestial Mechanics. Cambridge University Press. p. 69. ISBN 978-1-107-02381-9, 2012.
- [22] Will, Clifford M.: Was Einstein right? Testing relativity at the centenary, Department of physics, Washington University, 2005., Arxiv <http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0504086.pdf>
- [23] Will, Clifford M.: Was Einstein right? A centenary assessment, Department of physics, University of Florida, 2014., Arxiv <http://arxiv.org/pdf/1409.7871.pdf>
- [24] Will, Clifford M.: Theory and experiment in gravitational physics, Cambridge University Press, 1993.
- [25] Will, Clifford M.: The 1919. measurement of the deflection of light, Department of physics, University of FLorida, 2015., Arxiv <http://arxiv.org/abs/1409.7812>
- [26] Wikipedia: Gravitational lens, https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_lens
- [27] Schneider, Kochanek, Wambsganss: Gravitational lensing: Strong, Weak and Micro: Saas-Fee Advanced Course 33, Springer Berlin Heidelberg, New York, 2006., <http://bit.ly/1TkGecR>
- [28] Einstein, A.: Annalen der Physik 340 898–908, 1911., Wiley.
- [29] Dyson, Eddington, Davidson: A determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of Max 29. 1919., Royal Society Publishing, 1919., <http://bit.ly/1RefkUP>
- [30] Brune, Cobb, Dewitt, Dewitt-Morette, Evans et al: Gravitational deflection of light: solar eclipse of 30 June 1973 I. Description of procedures and final result., Astronomical Journal, Vol. 81, p. 452 - 454, <http://bit.ly/1XAfUvT>

- [31] Mortlok, Daniel J. et al: A luminous quasar at a redshift of $z = 7.085$, Nature, 2011., Arxiv <http://arxiv.org/abs/1106.6088>
- [32] Walsh, D.; Carswell, R. F.; Weymann, R. J.: 0957 + 561 A, B - Twin quasistellar objects or gravitational lens, Nature, 1979.
- [33] Kelly, Rodney, Treu, Foley et al.: Multiple Images of a Highly Magnified Supernova Formed by an Early-Type Cluster Galaxy Lens, arXiv:1411.6009 [astro-ph.CO], <http://arxiv.org/abs/1411.6009>
- [34] Refsdal, S.: On the possibility of determining Hubble's parameter and the masses of galaxies from the gravitational lens effect, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 128, p.307, <http://bit.ly/1jr7fP4>
- [35] Bond, Udalski, Jaroszynski, Rattenbury et al: OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A planetary microlensing event, Astrophys.J.606:L155-L158, 2004., arXiv:astro-ph/0404309 <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0404309>
- [36] Mogavero, Beaulieu: Microlensing planet detection via geosynchronous and low Earth orbit satellites, neobjavljeno, arXiv:1510.04917v2 <http://arxiv.org/abs/1510.04917>
- [37] Zhu et al: Mass Measurements of Isolated Objects from Space-based Microlensing, neobjavljeno, arXiv:1510.02097v1 [astro-ph.SR] <http://arxiv.org/abs/1510.02097>
- [38] Gravity Probe B: Testing Einstein's Universe, Stanford University, <https://einstein.stanford.edu/>
- [39] Chashchina, Iorio, Silagadze: Elementary derivation of the Lense-Thirring precession, Acta Phys.Polon.B40:2363-2378,2009, arXiv:0808.0397v2 <http://arxiv.org/abs/0808.0397>
- [40] Lammerzahl, Neugebauer: The Lense-Thirring Effect: From the basic notions to the observed effects, University of Bremen, https://www.zarm.uni-bremen.de/uploads/tx_sibibtex/2001LaemmerzahlNeugebauer.pdf
- [41] Williams, J.: Contributions to the Earth's obliquity rate, precession, and nutation. The Astronomical Journal 108: 711. 1994.
- [42] Everitt, DeBra, Parkinson, Turneure et al: Gravity Probe B: Final results of a space experiment to test general relativity, PhysRevLett.106.221101, <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.106.221101>
- [43] Will, Clifford M: Finally, results from Gravity Probe B, Physics 4, 43, 2011.

- [44] Image of LAGEOS satellite, courtesy of NASA (therefore PD), <https://en.wikipedia.org/wiki/LAGEOS#/media/File:LAGEOS-NASA.jpg>
- [45] Ciufolini, Chiappa, Lucchesi, Vespe: Test of Lense - Thirring orbital shift due to spin, Classical and Quantum Gravity, Volume 14, Number 10, <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/14/10/003/pdf>
- [46] Pound, Rebka Jr.: Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance. Physical Review Letters 3 (9): 439–441., 1959.
- [47] Crowell, B.: General Relativity, HTML version, <http://bit.ly/1Y48So0>
- [48] Smolic, I: Fizikalna kozmologija - bilješke s vježbi, radna verzija, <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/FKv.pdf>
- [49] Hartle J: Gravity - an introduction to Einstein's General Relativity, Addison Wesley, 2003.
- [50] Shapiro: Fourth Test of General Relativity. Physical Review Letters 13 (26): 789–791.
- [51] Shapiro, Pettengill, Ash, Stone et al.: Fourth Test of General Relativity: Preliminary Results. Physical Review Letters 20 (22): 1265–1269.
- [52] Reardon, Hobbs, Coles, et al.: Timing analysis for 20 millisecond pulsars in the Parkes Pulsar Timing Array, arXiv:1510.04434v1 [astro-ph.HE], <http://arxiv.org/abs/1510.04434>
- [53] National Academy of Sciences, <http://www.nap.edu/read/6024/chapter/2#2>
- [54] Fixsen D.J.: The Temperature of the Cosmic Microwave Background, Astrophys.J.707:916-920,2009, arXiv:0911.1955v2 [astro-ph.CO] <http://arxiv.org/abs/0911.1955>
- [55] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, NASA, <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [56] Planck collaboration: Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, arXiv:1303.5062v2 [astro-ph.CO], <http://arxiv.org/abs/1303.5062>
- [57] NASA WMAP pie chart: Content of the Universe, <http://map.gsfc.nasa.gov/media/080998/index.html>
- [58] Wikipedia: Λ CDM model, https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model
- [59] Wikipedia: Ultimate fate of the universe, https://en.wikipedia.org/wiki/Ultimate_fate_of_the_universe

- [60] Caldwell, Kaminonkowski, Weinberg: Phantom Energy and Cosmic Doomsday, Phys.Rev.Lett. 91 (2003) 071301, arXiv:astro-ph/0302506, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302506>
- [61] Wang, Kratochvil, Linde, Shmakova: Current Observational Constraints on Cosmic Doomsday, JCAP 0412:006,2004, arXiv:astro-ph/0409264v2, arxiv.org/abs/astro-ph/0409264
- [62] Will, Clifford M.: The Confrontation between General Relativity and Experiment, Living Rev. Relativity 17 (2014), 4, arXiv:1403.7377v1 [gr-qc], <http://arxiv.org/abs/1403.7377>
- [63] Bolton, Rappaport, Burles: Constraint on the Post-Newtonian Parameter γ on Galactic Size Scales, Phys.Rev. D74 (2006) 061501, arXiv:astro-ph/0607657v2, <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0607657>
- [64] Wikipedia: Alternatives to general relativity, https://en.wikipedia.org/wiki/Alternatives_to_general_relativity
- [65] Python: Merkurova precesija, <http://sprunge.us/TFhU>
- [66] Nacionalni centar za vanjsko vrednovanje obrazovanja, <http://www.ncvvo.hr/drzavnamatura/web/public/dokumenti>
- [67] Physics World, http://www.hk-phy.org/articles/univexpand/univexpand_e.html