Poopćene baždarne teorije

Grewcoe, Clay James

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Clay James Grewcoe

POOPĆENE BAŽDARNE TEORIJE

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: ISTRAŽIVAČKI

Clay James Grewcoe

Diplomski rad

Poopćene baždarne teorije

Voditelj diplomskog rada: Larisa Jonke

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem se cijelom Fizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta na pruženom obrazovanju i mentorici dr. Larisi Jonke na vodstvu i pomoći u izradi ovog rada.

Sažetak

Yang-Mills-Higgsova teorija opisuje bozonski sektor standardnog modela. Prvo objašnjavamo osnove Yang-Millsove teorije u komponentnoj notaciji u kojoj je ona najčešće korištena i opisujemo kako promjenom formalizma možemo prijeći u koordinatno nezavisni zapis preko diferencijalnih formi. Kao motivaciju dublje analize Yang-Millsove teorije opisujemo ključne matematičke korake u konstrukciji opće teorije relativnosti, nakon čega koristeći pojmove diferencijalne geometrije predstavljene kroz razvoj opće teorije relativnosti ponovno uvodimo Yang-Millsovu teoriju kao geometrijsku teoriju koneksija i zakrivljenosti. Motivirani prijelazom iz specijalne u opću teoriju relativnosti isti princip koristimo u vezanju Higgsovog i baždarnih polja zahtijevajući da koneksija ne mora nužno biti ravna. Nakon konstrukcije takve zakrivljene Yang-Mills-Higgsove teorije pokazujemo jednostavan Abelov primjer korištenja takve teorije na specifičnom modelu.

Generalized gauge theories

Abstract

Yang-Mills-Higgs theory describes the bosonic sector of the Standard model. We shall first exhibit the basics of the Yang-Mills theory in a formalism in which it is most often used and explain how by a change of notation we can rewrite it in a coordinate independent way using differential forms. As a motivation for a deeper analysis of the theory we show the key mathematical elements in the construction of the general theory of relativity, after which we shall reintroduce the Yang-Mills theory as a geometric theory of connections and curvature using the basics of differential geometry introduced through the construction of the general theory of relativity. Motivated by the step from special to general relativity we use the same principle in the coupling of gauge fields to the Higgs (the Yang-Mills-Higgs theory) by dropping the condition that the connection be flat. Having constructed such a curved Yang-Mills-Higgs theory we present a simple Abelian example of a model within such a framework.

Konvencije

- Indeksi $\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, \ldots$ označavaju prostorno-vremenske koordinate tj. koordinate Lorentzovog prostora i poprimaju vrijednosti od 0 do 3
- Indeksi $i, j, k, \ldots$ označavaju koordinate n-dimenzionalnog euklidskog prostora ili opće koordinate n-dimenzionalne mnogostrukosti i poprimaju vrijednosti $(1, \ldots, n)$
- Indeksi $a, b, c, \ldots$ označavaju nekoordinatne komponente prostora
- Signatura Minkowski metrike $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$
- Levi-Civita $\varepsilon_{0123} = 1$, $\varepsilon^{0123} = \pm 1$, $+$ za Euklidski prostor, $-$ za Minkowski
- Antisimetrizacija indeksa $A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$
- Simetrizacija indeksa $A_{(ab)} = \frac{1}{2}(A_{ab} + A_{ba})$
- Koristimo prirodni sustav jedinica u kojem je $c = \hbar = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$
- Parcijalnu derivaciju označavamo skraćeno sa zarezom prije indeksa $\partial_i A = A_{,i}$
- Kovarijantnu derivaciju označavamo skraćeno točkom sa zarezom $\nabla_i A = A_{;i}$

Sadržaj

Uvod

Što je baždarna teorija? Baždarna invarijantnost je invarijantnost fizikalne teorije na određenu redefiniciju tj. *baždarnu* transformaciju polja te teorije, što znači da je i koordinatna transformacija također posebna vrsta baždarne transformacije. Općenito, invarijantnost fizikalne teorije na neki oblik transformacije označava postojanje *simetrije* sistema, zato često kažemo da su to simetrijske transformacije i zato kažemo za sisteme s baždarnom invarijantnošću da posjeduju baždarnu simetriju. Simetrije mogu biti diskretne kao što je inverzija ili rotacija za određen kut ili kontinuirane kao što su translacija ili rotacija za proizvoljan parametar. Simetrije fizikalnih sistema matematički opisujemo grupama (*simetrijske grupe*), posebno, kontinuiranim Liejevim grupama. Kako je baždarna simetrija kontinuirana simetrija mi ćemo se dalje baviti isključivo njima. Simetrijska transformacija može biti globalna ili lokalna. Globalne transformacije su one kod kojih je parametar transformacije identičan u svakoj točci prostora (proizvoljan, ali isti u svakoj točci) kao što su Galilejeva translacija ili rotacija za neki kut. Uzmimo za primjer neki cilindrično simetrični sistem, on ima simetriju 2D rotacija u ravnini okomitoj na os cilindra za bilo koji kut dok god svaku točku zakrenemo jednako, no da smo imali šesterokutni presjek sustav bi bio simetričan samo na rotacije za točno $\pi/3$, $2\pi/3$, π itd. dakle samo za diskretne vrijednosti parametra rotacije. Lokalne, međutim, transformacije su one kod kojih je parametar ne samo različit pri svakoj transformaciji već i u svakoj točci, drugim riječima parametar je sada funkcija koordinata prostora. Lokalna baždarna invarijantnost je osnova baždarnih teorija. Uzmimo za primjer elektrodinamiku, upravo iz zahtjeva za lokalnom baždarnom invarijantnošću nekog polja slijedi minimalna supstitucija odnosno vezanje tog polja s fotonskim (tj. baždarnim). Čak je i opća teorija relativnosti, iako se ne naziva često baždarnom teorijom, posljedica lokalne invarijantnosti na opće koordinatne transformacije. Iako je simetrijska *grupa* ta koja opisuje baždarnu teoriju, najčešće se u računima koristi njoj pridružena Liejeva algebra, eksponencijacijom čijih elemenata dobijemo grupne elemente. Generatori grupe u Liejevoj algebri zatvaraju Liejevu zagradu ili komutator preko strukturnih konstanti. Drugim riječima, generatori i strukturne konstante definiraju vrstu baždarne simetrije tako, ako strukturne konstante iščezavaju, simetrijska je grupa Abelova pa onda cijelu pripadnu teoriju često skraćeno samo nazivamo Abelovom. To je slučaj elektrodinamike kojoj je U(1) simetrijska grupa. Iako je naziv baždarna teorija dosta širok pojam mi ćemo pod njim uglavnom misliti na općenitu Yang-Millsovu teoriju tj.

poopćenje elektrodinamike na ne-Abelove grupe.

Upravo s elektrodinamikom ćemo započeti prvo poglavlje (uglavnom bazirano na [2] koristeći također i [21] i [3]). Prvo izlažemo Maxwellove jednadžbe koje želimo zapisati u formalizmu diferencijalnih formi. Prednost takvog zapisa je da je on koordinatno nezavisan tj. s obzirom da je to beskomponentni zapis on se ne odnosi ni na koji specifični koordinatni sustav i time je općenitiji jer vrijedi za bilo kakav prostor, ne nužno ravan. Potom razmatramo slučaj kad strukturne konstante ne iščezavaju i to zahtijevajući upravo lokalnu baždarnu invarijantnost skalarnog polja. Na kraju poglavlja zapisujemo općenitu ne-Abelovu baždarnu teoriju u koordinatno nezavisnoj notaciji diferencijalnih formi. Zapis preko diferencijalnih formi je također važan jer nam omogućuje geometrijsku interpretaciju danu u drugom dijelu poglavlja 2.

Drugo poglavlje je posvećeno geometrijskom pristupu baždarnim teorijama (opća teorija relativnosti bazirana uglavnom na [6], [25], [8] i [9], a geometrijska interpretacija Yang-Millsove teorije na [22], [1], [7], [24], [14] i [23]). Naime, baždarne teorije se geometrijski mogu objasniti preko koncepta koneksije, zakrivljenja i svežnjeva. Najlogičniji uvod u zakrivljenje mnogostrukosti je preko opće teorije relativnosti. Uvodimo pojmove kao što su koneksija i paralelni transport pa ih razvijamo u zakrivljenost i svežnjeve. Pritom naglašavamo koji su ključni trenutci prijelaza iz specijalne u opću teoriju relativnosti. I konačno pokazujemo kako vrlo sličnim geometrijskim postavom možemo objasniti i Yang-Millsovu teoriju. Pokažemo da baždarno polje geometrijski odgovara koneksiji na vektorskom svežnju, a zakrivljenost jakosti polja. Upravo zato je bilo važno prvo objasniti geometrijske osnove opće teorije relativnosti kako bi se uočila analogija u opisu obje teorije u pripremi za treće poglavlje.

U trećem poglavlju pokušavamo idejom opće teorije relativnosti poopćiti Yang-Millsovu teoriju (temeljeno na [15], [4], [20], [16], [27], [12] uz pomoć [1], [13], [10], [11] i [19]). U standardnom modelu boznoski sektor čini Yang-Millsova baždarna teorija vezana na Higgsovo skalarno polje, kraće Yang-Mills-Higgsova teorija. Geometrijski gledano, Higgsova polja definiraju koordinate na jednoj novoj mnogostrukosti, nas zanima kako se teorija mijenja ako ta mnogostrukost nije ravna. Ispostavi se da je za konstrukciju konzistentne zakrivljene teorije potrebno ad hoc uvesti novu 2-formu u izraz jakosti polja. Nakon definicije nove jakosti polja definiramo konačnu akciju zakrivljene Yang-Mills-Higgsove teorije sa svim uvjetima koje pripadni tenzori moraju zadovoljavati. I za kraj je izložen jednostavan Abelov model ove teorije na kojem se vidi koliko trivijalno zakrivljenje čini teoriju kompleksnijom.

Na kraju je nekoliko matematičkih dodataka s definicijama matematičkih struktura korištenih u ovom radu. U dodatku A ([26], [25], [17] i [28]) su definirani osnovni pojmovi poput mnogostrukosti, vektora, tenzora i metrike. Diferencijalne forme i njihova algebra – vanjska algebra s pridruženim operatorima vanjske derivacije i Hodgeovog duala definirani su u dodatku B ([26], [2], [17] i [28]). Razliku između Levi-Civita tenzora i simbola i definiciju volumne forme smo pokušali razjasniti dodatkom C ([6] i [2]). Svežnjevi su esencijalni dio ovog rada pa smo nastojali iskazati sve formalne definicije u vezi svežnjeva potrebne za razumijevanje rada (dodatak D) ([26], [2] i [18]). Zadnji dodatak (E) ([19] i [20]) je dodan kako bi se objasnila struktura Liejevog algebroida koji se još uvijek relativno rijetko koristi. Dodacima smo pokušali zaokružiti rad kako ne bi bilo potrebno previše dopunske literature za shvaćanje metode i rezultata.

Poglavlje 1

Yang-Millsova baždarna teorija

Ovo poglavlje je posvećeno uvođenju formalizma diferencijalnih formi u elektrodinamiku tj. Abelovu baždarnu teoriju i kasnije u Yang-Millsovu teoriju tj. ne-Abelovu teoriju. Ovakav novi formalizam nam omogućuje koordinatno nezavisan zapis jednadžbi gibanja koji vrijedi u svim sustavima pa je stoga potpuno općenit.

1.1 Elektrodinamika formalizmom diferencijalnih formi

Počnimo od standardnih Maxwelovih jednadžbi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \vec{\jmath} \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{1.4}$$

gdje su $\vec{E}$ i $\vec{B}$ električno i magnetsko polje, a $\vec{\jmath}$ i ρ struja i gustoća naboja. Definirajmo sad Faradayev tenzor

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

kojeg, koristeći Minkowski metriku možemo zapisati i s gornjim indeksima

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je Faradayev tenzor antisimetričan. U dodatku B smo definirali diferencijalne forme (definicija 17) kao potpuno antisimetrične kovarijantne tenzore što znači da komponente Faradayevog tenzora definiraju 2-formu:

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu. \tag{1.6}$$

U istom dodatku smo definirali i (definicija 20) Hodgeov dual (B.2) diferencijalne forme. Kako bismo prešli u potpuno koordinatno nezavisan zapis korisno je vidjeti čemu odgovara Hodgeov dual Faradayeve 2-forme

$$*F = \frac{1}{2} * F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu,$$

s komponentama

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Po komponentama se Maxwellove jedandžbe mogu zapisati kao

$$\partial_\mu * F^{\mu\nu} = 0 \tag{1.8}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{1.9}$$

gdje je $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. Pogledajmo sada eksplicitan raspis Faradayeve 2-forme (1.6) po poljima $\vec{E}$ i $\vec{B}$

$$F = E_i\, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i - \frac{1}{2}B^i\varepsilon_{ijk}\, \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Djelovanjem operatora vanjske derivacije d (definicija 18) na F slijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F &= \left(\partial_k E_i - \frac{1}{2}\partial_0 B^j\varepsilon_{jik}\right) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k - \frac{1}{2}\partial_l B^i\varepsilon_{ijk}\, \mathrm{d}x^l \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_k E_i - \partial_i E_k - \partial_0 B^j\varepsilon_{jik}\right) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k - \partial_i B^i\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3,\end{aligned}$$

gdje su korišteni identiteti (detalji o volumnim formama su u dodatku C)

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ljk} = 2\delta_i^l \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k = \varepsilon^{ijk}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

Raspišimo i homogene Maxwellove jednadžbe (1.3) i (1.4) po komponentama polja $\vec{E}$ i $\vec{B}$

$$\partial_i B^i = 0 \qquad \text{i} \qquad \varepsilon^{ijk}\partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0 \Big/ \cdot \varepsilon_{ilm},$$

uz

$$\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_l^j\delta_m^k - \delta_m^j\delta_l^k,$$

(1.3) postaje

$$\partial_m E_l - \partial_l E_m - \partial_0 B^i\varepsilon_{ilm} = 0,$$

stoga je jasno da su obje homogene Maxwellove jednadžbe sadržane u

$$\mathrm{d}F = 0. \tag{1.10}$$

Napravimo sada isti postupak na dualnom tenzoru $*F$; ako usporedimo relacije (1.5) i (1.7) vidimo da prijelaz $F \to *F$ po komponentama odgovara prijelazu $\vec{B} \to \vec{E}$ i $\vec{E} \to -\vec{B}$, stoga je

$$*F = -B_i \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i - \frac{1}{2} E^i \varepsilon_{ijk} \,\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k.$$

Nehomogene Maxwellove jednadžbe glase

$$\partial_i E^i = \rho = j^0 \qquad \text{i} \qquad \partial_i B_k - \partial_k B_i - \partial_0 E^l \varepsilon_{lik} = j^l \varepsilon_{lik},$$

dual struje je

$$*j = \rho \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 - \frac{1}{2} j^l \varepsilon_{lik} \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k,$$

pa je vanjska derivacija onda

$$\begin{aligned} \mathrm{d}{*F} &= \frac{1}{2} \left(\partial_i B_k - \partial_k B_i - \partial_0 E^j \varepsilon_{jik}\right) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k - \partial_i E^i \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &= \frac{1}{2} j^l \varepsilon_{lik} \,\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^k - \rho \,\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &= - * j. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Dakle Maxwellove jednadžbe zapisane preko diferencijalnih formi glase

$$\mathrm{d}F = 0 \tag{1.10}$$

$$\mathrm{d}{*F} = - * j. \tag{1.11}$$

S obzirom da je F zatvorena forma (1.10) po Poincaréovoj lemi[1] slijedi da postoji 1-forma A takva da vrijedi

$$F = \mathrm{d}A, \tag{1.12}$$

tj. po komponentama

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Kako je $\mathrm{d}^2 = 0$ (po konstrukciji definicije 18) slijedi da A nije u potpunosti definiran odnosno postoji sloboda u odabiru A:

$$A_\Lambda = A + \mathrm{d}\Lambda,$$

[1]*Teorem.* [25] Neka je $\alpha \in \Omega^p(U)$ zatvorena p-forma tj.

$$\mathrm{d}\alpha = 0,$$

definirana na području mnogostrukosti $U \subseteq M$ i neka U ima diferencijabilno preslikavanje reda C^∞ na otvorenu kuglu u $\mathbb{R}^n$. Onda postoji $p-1$-forma β na U za koju vrijedi

$$\alpha = \mathrm{d}\beta.$$

gdje je Λ proizvoljna funkcija. Upravo ovo je baždarna sloboda elektrodinamike tj. sloboda U(1) baždarne simetrije. Tražimo pripadne 4-forme za članove akcije $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ i $A_\mu j^\mu$:

$$\begin{aligned} A \wedge *j &= A_\rho \frac{1}{3!} j^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \, \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma \\ &= A_\mu j^\mu \, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3, \end{aligned}$$

gdje su korištene relacije

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} = -3!\,\delta^\mu_\nu \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \wedge \mathrm{d}x^\gamma \wedge \mathrm{d}x^\delta = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

Za Lorentzovu mnogostrukost vrijedi

$$\begin{aligned} F \wedge *F &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \frac{1}{2} * F_{\alpha\beta} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \\ &= \frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta \\ &= -\frac{1}{8} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \, \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \left(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma - \delta^\nu_\rho \delta^\mu_\sigma \right) \mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 \\ &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \, \mathrm{d}^4 x. \end{aligned}$$

Po Noetherinom teoremu[2] (tj. teoremima) znamo da simetrijama (u ovom slučaju U(1)) uvijek odgovaraju sačuvane veličine, za elektrodinamiku je to struja. Djelujemo li operatorom $*\,\mathrm{d}$ na (1.11) dobijemo

$$*\,\mathrm{d}{*j} = 0,$$

međutim po komponentama operator $*\,\mathrm{d}*$ odgovara divergenciji do na predznak:

$$\begin{aligned} *\,\mathrm{d}{*j} &= *\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3!}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\mu \, \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \right) \\ &= *\left(\frac{1}{3!} \left(\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j^\mu\right)_{,\alpha} \mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \wedge \mathrm{d}x^\sigma \right) \\ &= \frac{1}{3!}\, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} j^\mu_{,\alpha} \, \mathrm{d}^4 x \\ &= -j^\alpha_{,\alpha} \, \mathrm{d}^4 x. \end{aligned}$$

Ovo je jednadžba kontinuiteta, dakle, j je Noetherina sačuvana struja. Konačno, ukupna akcija u koordinatno nezavisnoj formi je

$$\begin{aligned} S[A] &= \int \mathrm{d}^4 x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\mu j^\mu \right) \\ &= \int \left(-\frac{1}{2} F \wedge *F - A \wedge *j \right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Treba također primjetiti da je ona baždarno invarijantna zbog sačuvanja struje.

[2] *Teorem.* [5] Svaka kontinuirana simetrija akcije fizikalnog sistema ima pripadni zakon sačuvanja odnosno sačuvanu veličinu.

1.2 Ne-Abelove teorije

Što ako, međutim, grupa simetrija nije Abelova? Pretpostavimo da je grupa G koja opisuje baždarnu simetriju kompaktna, polujednostavna Liejeva grupa npr. SO(N) ili SU(N). Započnimo razmatranje sa skalarnim lagranžijanom:

$$\mathcal{L}_\phi^0 = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi).$$

Neka je $g \in G$ u fundamentalnoj reprezentaciji, onda su transformacije skalarnog polja slijedeće:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= g(x)\phi(x) \\ \phi^{\dagger\prime}(x) &= g^{-1}(x)\phi^\dagger(x), \end{aligned}$$

gdje se u okolini identitete grupni element može izraziti kao

$$g(x) = e^{\Lambda(x)}, \qquad \Lambda(x) = \Lambda^a(x) T_a.$$

Λ poprima vrijednosti u Liejevoj algebri (*engl.* Lie algebra valued), a T_a su generatori Liejeve grupe G i elementi pripadne Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Kao elementi Liejeve algebre oni zadovoljavaju:

$$[T_a, T_b] = C_{ab}^c T_c, \tag{1.14}$$

gdje se koeficijenti C_{ab}^c nazivaju strukturne konstante. Odabiremo da su generatori antihermitski

$$T_a^\dagger = -T_a$$

i normalizirani na

$$\mathrm{Tr}\, T_a T_b = -\frac{1}{2}\delta_{ab}.$$

Ovakav odabir osigurava potpunu antisimetriju strukturnih konstanti. U slučaju da se radi o SU(2) ili SU(3) grupi onda su generatori dobro poznati,

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{1}{2i}\sigma_a \qquad \text{za SU(2)}, \\ T_a &= \frac{1}{2i}\lambda_a \qquad \text{za SU(3)}, \end{aligned}$$

gdje su σ_a poznate Paulijeve matrice a λ_a Gell-Mannove matrice. Kako T_a čine Liejevu algebru također vrijedi i Jacobijev identitet generatora

$$[T_a, [T_b, T_c]] + [T_b, [T_c, T_a]] + [T_c, [T_a, T_b]] = 0,$$

a stoga i strukturnih konstanti

$$C_{ab}^d C_{cd}^e + C_{bc}^d C_{ad}^e + C_{ca}^d C_{bd}^e = 0. \tag{1.15}$$

Vratimo se sada na početni skalarni lagranžijan, čija je transformacija

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0_\phi \to \mathcal{L}^{0\prime}_\phi &= (\partial_\mu\phi')^\dagger(\partial^\mu\phi') \\ &= \partial_\mu(g(x)\phi')^\dagger\partial^\mu(g(x)\phi') \\ &\neq (\partial_\mu\phi)^\dagger(\partial^\mu\phi).\end{aligned}$$

Uvedimo baždarno polje A_μ koje se transformira na slijedeći način:

$$A_\mu \to A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \tag{1.16}$$

naravno, $A_\mu = A^a_\mu T_a$ je element Liejeve algebre. Minimalna supstitucija (proces modifikacije lagranžijana kako bi postao lokalno baždarno invarijantan) uvodi kovarijantnu derivaciju

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu,$$

koja uzrokuje vezanje baždarnog A i skalarnog ϕ polja te se transformira kao

$$\begin{aligned}D_\mu \to D'_\mu &= \partial_\mu + A'_\mu \\ &= \partial_\mu + gA_\mu g^{-1} + g(\partial_\mu g^{-1}) \\ &= gD_\mu g^{-1}.\end{aligned}$$

Trivijalno slijedi da je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\phi \to \mathcal{L}'_\phi &= (D'_\mu\phi')^\dagger(D'^\mu\phi') \\ &= (gD_\mu\phi)^\dagger(gD^\mu\phi) \\ &= (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi),\end{aligned}$$

baždarno invarijantan. U analogiji s U(1) modelom možemo definirati tenzor jakosti polja $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

gdje je $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T_a$ također element Liejeve algebre, no nije baždarno invarijantan kao u Abelovom slučaju već kovarijantan na transformacije g:

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + [A'_\mu, A'_\nu] \\ &= g\partial_\mu A_\nu g^{-1} - g\partial_\nu A_\mu g^{-1} + [gA_\mu g^{-1}, gA_\nu g^{-1}] \\ &= gF_{\mu\nu}g^{-1}.\end{aligned}$$

Također treba pripaziti da ako kovarijantna derivacija D_μ djeluje na elemente reprezentacije grupe (tj. algebre) postoji dodatni komutator na drugom članu:

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \quad],$$

ovo zapravo samo znači da se gledano po komponentama, A_μ kontrahira preko strukturne konstante:

$$D_\mu\Lambda^a = \partial_\mu\Lambda^a + C^a_{bc}A^b\Lambda^c.$$

Kasnije će nam biti potrebno i infinitezimalno djelovanje grupnog elementa

$$g(x) = e^{\Lambda(x)} \cong \mathbf{1} + \Lambda(x),$$

na polja A_μ i jakosti polja $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \phi' &= (1+\Lambda)\phi && \Rightarrow && \delta\phi = \Lambda\phi, && (1.17) \\ A'_\mu &= (1+\Lambda)A_\mu(1-\Lambda) + (1+\Lambda)\partial_\mu(1-\Lambda) && \Rightarrow && \delta A_\mu = D_\mu\Lambda = \partial_\mu\Lambda + [\Lambda, A_\mu], && (1.18) \\ F'_{\mu\nu} &= (1+\Lambda)F_{\mu\nu}(1-\Lambda) && \Rightarrow && \delta F_{\mu\nu} = [\Lambda, F_{\mu\nu}]. && (1.19) \end{aligned}$$

Zgodno je primijetiti ova dva identiteta

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= F_{\mu\nu}, \\ [D_\mu, D_\nu]\Lambda &= [F_{\mu\nu}, \Lambda] \qquad (\Lambda(x) = \Lambda^a(x)T_a)\,. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Još jedna bitna relacija je Bianchijev identitet (u Abelovoj teoriji on odgovara homogenoj Maxwellovoj jednadžbi (1.10)):

$$D_\lambda F_{\mu\nu} + D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} = D_\mu * F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.21}$$

Konačno, kinetički član akcije tj. kinetički lagranžijan mora biti invarijantan pa ga moramo modificirati u odnosu na U(1) slučaj:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a = -\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_b \operatorname{Tr} T_a T^b = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.22}$$

gdje cikličnost traga osigurava baždarnu invarijantnost.

1.3 Ne-Abelova teorija preko diferencijalnih formi

U prošlom poglavlju je uvedena ne-Abelova baždarna teorija u standardnoj komponentnoj notaciji, sada ćemo sve bitne rezultate zapisati i u koordinatno nezavisnom obliku. Onda imamo: 1-formu baždarnog polja

$$A = A_\mu \, \mathrm{d}x^\mu,$$

2-formu jakosti polja

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\ &= \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] \end{aligned} \tag{1.23}$$

i kovarijantnu derivaciju

$$\mathrm{D} = \mathrm{d} + [A, \quad]. \tag{1.24}$$

Pogledajmo djelovanje operatora D^2. Pretpostavimo da je ω_p p-forma s vrijednostima u Liejevoj algebri,

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2\omega_p &= \mathrm{D}(\mathrm{d}\omega_p + [A,\omega_p]) \\ &= \mathrm{d}^2\omega_p + [\,\mathrm{d}A,\omega_p] - [A,\,\mathrm{d}\omega_p] + [A,\,\mathrm{d}\omega_p + [A,\omega_p]] \\ &= [\,\mathrm{d}A,\omega_p] + [A,[A,\omega_p]] \\ &= [F,\omega_p], \end{aligned}$$

u slaganju s relacijom (1.20). Još preostaje zapisati Bianchijev identitet koji raspisan po komponentama direktno slijedi u (1.21),

$$\mathrm{D}F = \,\mathrm{d}F + [A,F] = 0 \tag{1.25}$$

i na kraju kinetički član akcije

$$S_{\mathrm{YM}}[A] = \frac{1}{2}\int F^a \wedge *F_a = -\int \mathrm{Tr}\,F \wedge *F. \tag{1.26}$$

Ako bismo gledali punu akciju, dakle onu s članom s vanjskom strujom, Euler-Lagrangeova jednadžba baždarnog polja A daje

$$\mathrm{D}{*}F = -*j. \tag{1.27}$$

Ova jednadžba i Bianchijev identitet su jednadžbe gibanja 2-forme F i definiraju ne-Abelove analogone Maxwellovih jednadžbi.

Poglavlje 2

Geometrijski pristup

2.1 Osnove i ideje geometrije opće teorije relativnosti – prijelaz iz ravnog u zakrivljeni prostor

Ovim odjeljkom prikazujemo osnovne matematičke koncepte potrebne za opis Riemannovih (ili pseudo-Riemannovih) mnogostrukosti kojima se opisuje geometrija opće teorije relativnosti u prvom redu, ali i geometrija baždarnih teorija, stoga su elementarni za razumijevanje daljnjih analiza.

2.1.1 Paralelni transport, koneksija i kovarijantna derivacija

Počevši od općenite diferencijalne mnogostrukosti M (definicija 5 u dodatku A) prva stvar s kojom se susrećemo je činjenica da ne možemo direktno uspoređivati vektore u dvije različite točke jer, kao što znamo, vektori su definirani isključivo u pojedinim točkama. Dakle treba nam koncept "paralelnog" transporta, tj. način ili *pravilo* pomicanja vektora iz jedne točke u drugu kako bi ih se moglo uspoređivati. Ovakvo *pravilo* naziva se afina koneksija (kraće samo *koneksija*). U pravilu postoji beskonačno mnogo afinih koneksija koje se mogu pridijeliti mnogostrukosti. Pretpostavimo da imamo neku krivulju $\mathcal{C}$ na mnogostrukosti i koneksiju te uzmimo neki vektor $V \in T_P M$ u točci $P \in \mathcal{C}$. Znači da možemo definirati vektorsko polje na $\mathcal{C}$ paralelnim transportom V po krivulji. S obzirom da su po konstrukciji svi vektori ovog polja paralelni možemo definirati derivaciju po kojoj se polje V ne mijenja, *kovarijantnu derivaciju*. Ako je U tangentno vektorsko polje krivulje $\mathcal{C}$, a V paralelno transportirano duž $\mathcal{C}$ onda pišemo:

$$\nabla_U V = 0.$$

Naravno, kovarijantnu derivaciju možemo definirati i za ne-paralelna vektorska polja (ili polja 1-formi) kao razliku vektora u susjednim točkama krivulje $\mathcal{C}$ paralelno transportiranih u istu točku. Lako se vidi da kovarijantna derivacija zadovoljava zahtjeve kompatibilnosti s općenitim diferencijalnim operatorom odnosno linearnost i

Leibnizovo pravilo:

$$
\begin{aligned}
\nabla_U(fA) &= f\nabla_U A + A\nabla_U f \\
\nabla_U(A\otimes B) &= (\nabla_U A)\otimes B + A\otimes(\nabla_U B) \\
\nabla_U(\alpha, A) &= (\nabla_U \alpha, A) + (\alpha, \nabla_U A),
\end{aligned}
$$

gdje su A i B općenita vektorska polja, α općenito polje 1-forma, a $(\ ,\ )$ skalarni produkt (kontrakcija). Linearnost u vektorskom polju po kojemu se derivira:

$$\nabla_{fU+gV}W = f\nabla_U W + g\nabla_V W,$$

osigurava da za Euklidski slučaj kovarijantna derivacija odgovara običnoj usmjerenoj derivaciji ∂. Iz navedenog slijedi da je ∇V $\binom{1}{1}$ tenzor. Sada ćemo se usmjeriti na komponentni raspis kovarijantne derivacije.

Znamo da je $\nabla_U V$ vektor, stoga ga se može zapisati preko baznih vektora $\hat{e}_\mu$ pa definiramo komponente gradijenta baznih vektora:

$$\nabla_{\hat{e}_\mu}\hat{e}_\nu \equiv \nabla_\mu \hat{e}_\nu = \Gamma^\rho_{\nu\mu}\hat{e}_\rho. \tag{2.1}$$

Kako su bazne forme $\hat{\theta}^\mu$ dualne baznim vektorima $\hat{e}_\mu$ (u smislu skalarnog produkta $(\hat{\theta}, \hat{e}) = 1$) trivijalno slijedi i djelovanje na bazne 1-forme $\hat{\theta}^\mu$:

$$\nabla_{\hat{e}_\mu}\hat{\theta}^\nu \equiv \nabla_\mu \hat{\theta}^\nu = -\Gamma^\nu_{\rho\mu}\hat{\theta}^\rho.$$

Funkcije $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ se nazivaju Christoffelovi simboli i u potpunosti određuju koneksiju, često se sama ∇ naziva koneksija s obzirom da su kovarijantna derivacija i koneksija jednoznačno vezane. Jako važno za primijetiti je da Christoffelovi simboli nisu komponente tenzora. Može se pokazati da se $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ transformira s obzirom na opće koordinatne transformacije na slijedeći način:

$$\Gamma'^{\rho'}_{\nu'\mu'} = \Lambda^{\rho'}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\mu'}\Lambda^{\nu}_{\nu'}\Gamma^\rho_{\nu\mu} + \Lambda^{\rho'}_{\rho}\Lambda^{\mu}_{\mu'}\partial_\mu\Lambda^{\rho}_{\nu'}.$$

Sad kada imamo definirano djelovanje kovarijantne derivacije na bazne vektore možemo potražiti njeno djelovanje na općenito vektorsko polje:

$$
\begin{aligned}
\nabla_U V &= U^\mu \nabla_\mu (V^\nu \hat{e}_\nu) \\
&= U^\mu(\partial_\mu V^\nu)\hat{e}_\nu + U^\mu V^\nu \nabla_\mu \hat{e}_\nu \\
&= U^\mu(\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu}V^\rho)\hat{e}_\nu,
\end{aligned}
$$

dakle po komponentama

$$
\begin{aligned}
(\nabla V)^\nu_\mu \equiv V^\nu_{;\mu} &= \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\mu}V^\rho \\
&= V^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\rho\mu}V^\rho,
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

gdje je korišteno

$$\nabla_{e_\mu} f = \partial_\mu f = \hat{e}_\mu[f] \equiv f_{,\mu}.$$

Dok za polje 1-forma analogno slijedi

$$(\nabla\alpha)_{\mu\nu} \equiv \alpha_{\mu;\nu} = \alpha_{\mu,\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\alpha_{\rho}.$$

Kada znamo djelovanje na vektore i 1-forme onda je trivijalno izraziti djelovanje na opći tenzor:

$$A^{\mu\ldots\nu}_{\rho\ldots\sigma;\alpha} = A^{\mu\ldots\nu}_{\rho\ldots\sigma,\alpha} + \left(\Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}A^{\beta\ldots\nu}_{\rho\ldots\sigma} + \cdots + \Gamma^{\nu}_{\beta\alpha}A^{\mu\ldots\beta}_{\rho\ldots\sigma}\right) - \left(\Gamma^{\beta}_{\rho\alpha}A^{\mu\ldots\nu}_{\beta\ldots\sigma} + \cdots + \Gamma^{\beta}_{\sigma\alpha}A^{\mu\ldots\nu}_{\rho\ldots\beta}\right).$$

Još jedna zanimljiva veličina je torzija:

$$T = \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V]$$
$$T^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - [\hat{e}_{\mu}, \hat{e}_{\nu}]^{\rho},$$

ako je $\hat{e}_{\mu}$ koordinatna baza onda je $[\hat{e}_{\mu}, \hat{e}_{\nu}]^{\rho} = 0$,

$$T^{\rho}_{\mu\nu} = 2\Gamma^{\rho}_{[\mu\nu]}. \tag{2.3}$$

Ukoliko torzija iščezava Christoffelovi simboli postaju simetrični u donjim indeksima, ovakva koneksija se zove *simetrična koneksija*. Gotovo svi fizikalni modeli koriste simetričnu koneksiju pa ćemo je i mi pretpostaviti u nastavku.

Prelazimo sada na geodezike, krivulje koje se paralelno transportiraju same u sebe,

$$\nabla_U U = 0.$$

Ako je parametar geodezika τ, a $\{x^{\mu}\}$ neki koordinatni sustav onda je koordinatni zapis jednadžbe geodezika

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}U^{\nu}U^{\rho} = 0,$$

$U^{\mu}(x) = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$ dakle,

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\rho}}{d\tau} = 0. \tag{2.4}$$

Ovo je zapravo Newtonova jednadžba gibanja bez vanjskih sila, tj. jednadžba slobodnog gibanja koja je poznatija kao

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} = 0,$$

kada je $\Gamma = 0$, što odgovara jednolikom pravocrtnom gibanju. Međutim Γ ne iščezava nužno u ravnom prostoru, to ovisi o odabiru koordinatnog sustava[1]. Upravo ovo je ključni korak u prelasku iz specijalne teorije relativnosti u opću jer zahtjev da Γ odgovara koneksiji ravnog prostora više ne mora biti zadovoljen. U slijedećem odjeljku ćemo vidjeti što je kriterij zakrivljenosti prostora, s obzirom da iščezavanje Γ nije nužan.

[1] *Primjer.* U 2D Euklidskom prostoru u polarnom koordinatnom sustavu oni iznose

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -r$$
$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = 1/r,$$

i upravo je njihovo neiščezavanje je osiguralo pojavu inercijalnih (*prividnih*) sila.

2.1.2 *Riemannov tenzor i metrička koneksija*

Prije nego pređemo na analizu Riemannovog tenzora zgodno je primijetiti da uvijek možemo odabrati koordinatni sustav baziran na geodeziku takav da je $\Gamma = 0$ u pojedinoj točki. Takve koordinate zovu se normalne. Ovo se lako vidi iz jednadžbe geodezika (2.4) jer su sve točke na geodeziku $x^\mu = \tau U^\mu(P)$ s time da je u točci P konvencionalno $\tau = 0$. Stoga je $d^2x^\mu/d\tau^2 = 0$ pa slijedi da je $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P)U^\rho(P)U^\nu(P) = 0$, no kako je $U^\mu(P)$ proizvoljan mora vrijediti $\Gamma^\mu_{\nu\rho}(P) = 0$.

Definirajmo operator R :

$$R(U,V) \equiv [\nabla_U, \nabla_V] - \nabla_{[U,V]}, \tag{2.5}$$

međutim može se pokazati da R djeluje potpuno multiplikativno (tj. ne djeluje kao diferencijalni operator):

$$\begin{aligned} R(U,V)fW &= fR(U,V)W \\ R(fU,V)W &= fR(U,V)W, \end{aligned}$$

dakle R je tenzor. S obzirom da je $R(U,V)$ $\binom{1}{1}$ tenzor, ako uzmemo i U i V kao varijable onda R postaje zapravo $\binom{1}{3}$ tenzor. Po komponentama:

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu}\hat{e}_\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\hat{e}_\rho - \nabla_{[\hat{e}_\mu,\hat{e}_\nu]}\hat{e}_\rho,$$

pa iskoristimo li onda (2.1) slijedi eksplicitan izraz za komponente Riemannovog tenzora u koordinatnoj bazi

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\rho\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\nu}. \tag{2.6}$$

Direktna svojstva Riemannovog tenzora su:

- antisimetričnost u zadnja dva indeksa

$$R^\lambda_{\rho(\mu\nu)} = 0, \tag{2.7}$$

- antisimetrizacija donjih indeksa

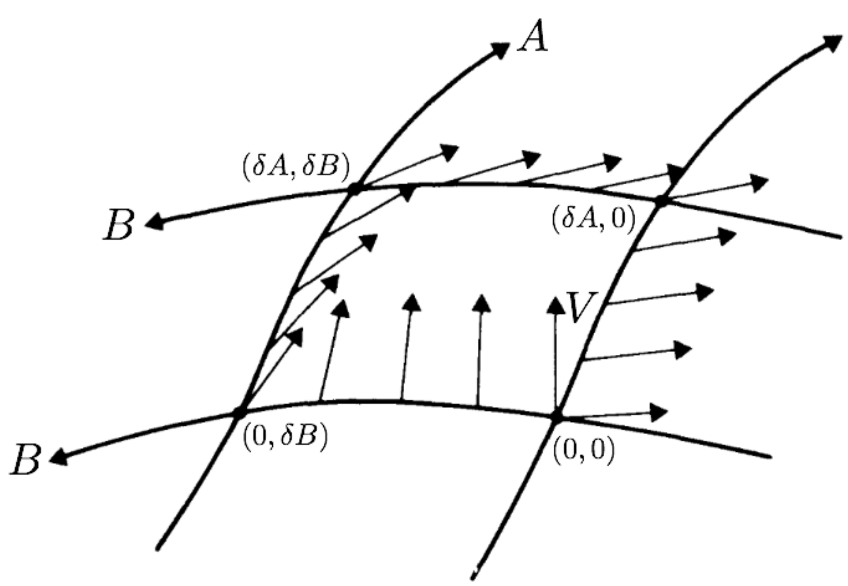
$$R^\lambda_{[\rho\mu\nu]} = 0, \tag{2.8}$$

- Bianchijev identitet – posljedica Jacobijevog identiteta za kovarijantne derivacije

$$R^\lambda_{\rho[\mu\nu;\alpha]} = 0. \tag{2.9}$$

Pogledamo li, iz geometrijskog stajališta, paralelni transport nekog vektora V^μ po infinitezimalnoj zatvorenoj petlji omeđenoj geodezicima tangencijalnih vektorskih polja A i B (slika 2.1) za razliku dobijemo:

$$\delta V^\mu = (\delta A)(\delta B)V^\nu R^\mu_{\nu\rho\lambda}A^\rho B^\lambda,$$



Slika 2.1: Paralelan transport vektora V po infinitezimalnoj zatvorenoj petlji, gdje je δA (δB) infinitezimalan pomak parametra geodezika polja A (B).

dakle mjera zakrivljenosti je Riemannov tenzor. Stoga se on često naziva samo *zakrivljenost*.

Dosadašnja razmatranja nisu pretpostavljala postojanje metrike, međutim ako mnogostrukost ima pridjeljen i metrički tenzor, treba pripaziti da se on slaže tj. da je konzistentan s već definiranim koneksijskim strukturama. Ovo se naziva kompatibilnost metrike i koneksije. Želimo li da paralelan transport čuva skalarni produkt vektorskih polja definiran metrikom $g(A, B)$, slijedi da je uvjet kompatibilnosti

$$\nabla g = 0 \tag{2.10}$$

ili ekvivalentno

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\lambda\nu,\rho} + g_{\lambda\rho,\nu} - g_{\nu\rho,\lambda}). \tag{2.11}$$

Simetrične metričke koneksije (također zvane Levi-Civita koneksije), stoga, imaju više svojstava tj. uvjeta (ograničenja) na Riemannov tenzor od općih simetričnih afinih koneksija.

2.1.3 Vielbein i spinska koneksija

Zadnja, ali jako važna tema je formalizam tzv. *vielbeina*. Sada radimo analizu zakrivljenosti kao u prošlom poglavlju samo ćemo koristiti nekoordinatnu bazu tj. bazu koja se ne može zapisati kao parcijalna derivacija $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ po nekim koordinatama x^{μ}. Osnovno svojstvo nekoordinatne baze jest nekomutativnost baznih vektora:

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] \neq 0.$$

Posljedica ovakvog izbora baze će biti malo drugačija perspektiva koneksije i zakrivljenosti (Riemannovog tenzora), puno pogodnija za analizu baždarnih teorija kasnije. Do sada smo za bazu T_PM imali prirodnu bazu parcijalnih derivacija po koordinatama u točci P, $\hat{e}_\mu = \partial_\mu$, dok za bazu 1-formi T_P^*M, $\hat{\theta}^\mu = \mathrm{d}x^\mu$. Pretpostavimo da M ima već pridijeljenu metriku $g_{\mu\nu}$, tada biramo nekoordinatnu bazu $\hat{e}_a$ takvu da su bazni vektori ortonormirani u smislu

$$g(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \eta_{ab}, \tag{2.12}$$

gdje je η_{ab} kanonski oblik metrike, dakle za Lorentzove prostore Minkowski metrika, a za Riemannove Euklidska metrika. Ovako odabrani skup baznih vektora $\hat{e}_a$ naziva se *vielbein* ili *tetrada*. Nadalje, možemo vidjeti vezu koordinatne baze $\hat{e}_\mu$ i vielbeina:

$$\hat{e}_\mu = e^a_\mu \hat{e}_a, \tag{2.13}$$

gdje e^a_μ čine komponente invertibilne matrice s inverzom e^μ_a. Najčešće ćemo pod nazivom *vielbein* misliti upravo na komponente (2.13). Vrijedi

$$e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \qquad e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b, \qquad g_{\mu\nu} e^\mu_a e^\nu_b = \eta_{ab} \quad \text{i} \quad g_{\mu\nu} = e^a_\mu e^b_\nu \eta_{ab}.$$

Istu konstrukciju baze možemo napraviti i za 1-forme: $\hat{\theta}^a$ koje odabiremo tako da budu kompatibilni s baznim vektorima $\hat{e}_a$

$$\hat{\theta}^a\left(\hat{e}_b\right) = \delta^a_b,$$

iz čega direktno slijedi

$$\hat{\theta}^\mu = e^\mu_a \hat{\theta}^a \qquad \text{i} \qquad \hat{\theta}^a = e^a_\mu \hat{\theta}^\mu.$$

Stoga uz pomoć vielbeina i inverznog vielbeina možemo prelaziti iz koordinatne baze u ortonormiranu i obrnuto. Sada možemo komponente nekog općeg vektora $V = V^a \hat{e}_a = V^\mu \hat{e}_\mu$ prikazati u obje baze

$$V^a = e^a_\mu V^\mu, \qquad V^\mu = e^\mu_a V^a.$$

Vidimo da nam vielbein omogućava prijelaz komponenta iz jedne baze u drugu tj. promjenu latiničnih u grčke indekse i obrnuto. S obzirom da latiničnim indeksima odgovara ravna metrika η_{ab}, a grčkima $g_{\mu\nu}$ kažemo za $a, b, \ldots$ da su *ravni* indeksi a, $\mu, \nu, \ldots$ *zakrivljeni*.

Sada moramo vidjeti kako se tenzori transformiraju u novoj bazi vielbeina. Naime, kako vielbein nije koordinatna baza, transformacija koordinata ne implicira promjenu baze već su te dvije transformacije neovisne. Jedino moramo paziti da se očuva ortonormiranost (2.12), dakle dozvoljene transformacije su za euklidski prostor rotacije, a za Lorentzov Lorentzove transformacije:

$$\hat{e}_a \to \hat{e}'_{a'} = \Lambda_{a'}{}^a(x) \hat{e}_a, \tag{2.14}$$

gdje je ${\Lambda_{a'}}^{a}(x)$ (inverzna) lokalna Lorentzova transformacija za koju vrijedi:

$$ {\Lambda_{a'}}^{a}{\Lambda_{b'}}^{b}\eta_{ab} = \eta_{a'b'}. $$

Dakle, opći tenzor i sa zakrivljenim i s ravnim indeksima se najopćenitije transformira kao:

$$ T^{a'\mu'}{}_{b'\nu'} = \Lambda^{a'}{}_{a}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\Lambda^{a'}{}_{a}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}T^{a\mu}{}_{b\nu}. $$

Prelazimo sada na derivacije tenzora u ortonormiranoj bazi. Prvo promotrimo kovarijantnu derivaciju (2.2), ona se sastoji od parcijalne derivacije i člana korekcije (za tenzore s n indeksa korekcija ima n članova) koji sadrži koneksiju. U nekoordinatnoj bazi jedina razlika će biti u koneksijskim koeficijentima odnosno $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ će biti zamijenjen s $\omega^{a}_{\mu b}$ tzv. *spinskom koneksijom*. Nađimo vezu između Γ i ω:

$$ \begin{aligned} \nabla X &= (\nabla_\mu X^\mu)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \\ &= \left(\partial_\mu X^\mu + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}X^\lambda\right)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu \\ \nabla X &= (\nabla_\mu X^a)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \hat{e}_a \\ &= \left(\partial_\mu X^a + \omega^{a}_{\mu b}X^b\right)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \hat{e}_a \\ &= \left(\partial_\mu (e^{a}_{\nu}X^\nu) + \omega^{a}_{\mu b}e^{b}_{\lambda}X^\lambda\right)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes (e^{\sigma}_{a}\partial_\sigma) \\ &= e^{\sigma}_{a}\left(e^{a}_{\nu}\partial_\mu X^\nu + X^\nu\partial_\mu e^{a}_{\nu} + \omega^{a}_{\mu b}e^{b}_{\lambda}X^\lambda\right)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\sigma \\ &= \left(\partial_\mu X^\nu + (e^{\nu}_{a}\partial_\mu e^{a}_{\lambda} + e^{\nu}_{a}e^{b}_{\lambda}\omega^{a}_{\mu b})X^\lambda\right)\,\mathrm{d}x^\mu \otimes \partial_\nu, \end{aligned} $$

dakle:

$$ \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = e^{\nu}_{a}\partial_\mu e^{a}_{\lambda} + e^{\nu}_{a}e^{b}_{\lambda}\omega^{a}_{\mu b}, \qquad \omega^{a}_{\mu b} = e^{a}_{\nu}e^{\lambda}_{b}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - e^{\lambda}_{b}\partial_\mu e^{a}_{\lambda}, $$

ili u drugom zapisu

$$ \nabla_\mu e^{a}_{\nu} = 0, $$

što je poznato pod nazivom *postulat tetrade*. Baš kao i Christoffelovi simboli, spinska koneksija se ne transformira kao pravi tenzor, ali samo pri Lorentzovim transformacijama ravnih indeksa

$$ \begin{aligned} \omega^{a'}_{\mu b'} &= \Lambda^{a'}{}_{a}{\Lambda_{b'}}^{b}\omega^{a}_{\mu b} - {\Lambda_{b'}}^{c}\partial_\mu\Lambda^{a'}{}_{c} \\ \omega^{a'}_{b'} &= \Lambda^{a'}{}_{a}{\Lambda_{b'}}^{b}\omega^{a}_{b} - {\Lambda_{b'}}^{c}\,\mathrm{d}\Lambda^{a'}{}_{c}, \end{aligned} \tag{2.15} $$

jer pri općoj transformaciji zakrivljenih indeksa, ω se transformira kao 1-forma. Zato možemo spinsku koneksiju promatrati kao 1-formu. Ovaj način promatranja objekta s miješanim indeksima možemo proširiti pa pravi tenzor oblika X^{a}_{μ} shvaćamo kao 1-formu vektora (engl. *vector valued 1-form*) ili općenitije $A^{a}_{[\mu\nu]b}$ kao 2-formu $\binom{1}{1}$ tenzora (engl. $\binom{1}{1}$ *tensor valued 2-form*). Stoga bilo koji tenzor potpuno antisimetričan u grčkim indeksima možemo smatrati diferencijalnom formom koja poprima vrijednosti u tenzorskom svežnju (detaljnije u dodatku D, definicija svežnja 26). Pogledajmo sada djelovanje vanjske derivacije na tenzor X^{a}_{μ}

$$ (\mathrm{d}X^a)_{\mu\nu} = \partial_\mu X^{a}_{\nu} - \partial_\nu X^{a}_{\mu}. $$

Ovaj objekt se transformira kao 2-forma u odnosu na grčke indekse, međutim ne transformira se dobro u odnosu na ravni indeks a. Odstupanje od dobre transformacije u odnosu na Lorentzove transformacije možemo popraviti članom s koneksijom:

$$(\mathrm{d}X^a)_{\mu\nu} + (\omega \wedge X^a)_{\mu\nu} = \partial_\mu X^a_\nu - \partial_\nu X^a_\mu + \omega^a_{\mu b} X^b_\nu - \omega^a_{\nu b} X^b_\mu. \tag{2.16}$$

Ovakav oblik će nam koristiti da rekonstruiramo zakrivljenost i torziju kao dobre tenzore. S obzirom da je zakrivljenost antisimetrična u zadnja dva indeksa (2.7) slijedi da je ona 2-forma $\binom{1}{1}$ tenzora, $R^a_{b\mu\nu}$. U skladu s (2.6) i koristeći (2.16) slijedi

$$R^a_b = \mathrm{d}\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \tag{2.17}$$

pri čemu je zanimljivo da, unatoč tome što ω^a_b nije tenzor, zakrivljenost je. Za torziju (2.3) slijedi

$$T^a = \mathrm{d}e^a + \omega^a_b \wedge e^b. \tag{2.18}$$

Izrazi (2.17) i (2.18) se zovu Maurer-Cartanove strukturne jednadžbe. Možemo još provjeriti svojstva Riemannovog tenzora (2.7)-(2.9): (2.7) slijedi po konstrukciji, (2.8) glasi

$$\mathrm{d}T^a + \omega^a_b \wedge T^b = R^a_b \wedge e^b,$$

a Bianchijev identitet (2.9) postaje

$$\mathrm{d}R^a_b + \omega^a_c \wedge R^c_b - R^a_c \wedge \omega^c_b = 0. \tag{2.19}$$

Pogledajmo što metrička kompatibilnost (2.10) implicira. Zapišemo li metriku $g_{\mu\nu}$ preko komponenti η_{ab} kao uvjet kompatibilnosti dobijemo (s obzirom da je η_{ab} ravna metrika $\partial_\mu \eta_{ab} = 0$):

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \eta_{ab} = 0 &= \partial_\mu \eta_{ab} - \omega^c_{\mu a} \eta_{cb} - \omega^c_{\mu b} \eta_{ac} \\ &= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba}, \end{aligned}$$

dakle 1-forma koneksije mora biti antisimetrična kako bi bila metrički kompatibilna (antisimetrija ima smisla jedino ako su oba indeksa gore ili oba dolje). Posljednje što možemo vidjeti je da, ako torzija (2.18) iščezava, koneksiju možemo zapisati isključivo preko vielbeina:

$$\omega^a_b \wedge e^b = -\,\mathrm{d}e^a.$$

2.2 Yang-Mills kao geometrijska teorija koneksija i zakrivljenosti

Sada moramo malo preciznije razmotriti strukture kojima smo se do sada bavili. Dakle, do sada smo promatrali koncepte poput koneksije i zakrivljenosti, ali nismo naglasili nad kojom su strukturom oni definirani jer je bilo implicitno da se radi o tangentnom svežnju (definicija 33) tj. svežnju gdje je *vlakno* prostor tangencijalnih vektora. Nadalje, pri uvođenju vielbein formalizma ovo dolazi još više do izražaja jer su razdvojene baze baznog prostora i vlakna uvođenjem druge, nove (ortonormirane) baze tangentnog prostora. Vidjeli smo da s obzirom da se radilo o tangentnim prostorima, svakom vlaknu je prirodno bila pridijeljena Lorentzova grupa simetrije SO(1,3). U slijedećem odjeljku ćemo pokušati ovo poopćiti.

2.2.1 E-svežanj, G-svežanj i koneksije

Konstruirajmo sada novi svežanj. Neka je vlakno općeniti vektorski prostor, dakle ne nužno iste dimenzije kao i bazna mnogostrukost M. Takav svežanj naziva se *vektorski svežanj* (definicija 31) i označavat ćemo ga s E. *Prerez* (engl. *section*, definicija 32) ćemo definirati kao funkciju $s(x)$ koja svakoj točci baznog prostora x pridjeljuje vektor – element vlakna u x. Za formalne definicije svežnjeva vidjeti dodatak D.

Prisjetimo li se kako smo uveli kovarijantnu derivaciju, primijetit ćemo da je ona uvijek djelovala na vektor ili 1-formu; to je zato što smo radili s tangentnim svežnjem. Međutim, sada imamo svežanj koji ima opće vektore pridjeljene svakoj točci pa trebamo primijetiti da sad moramo govoriti o kovarijantnoj derivaciji prereza jer on sada igra ulogu vektorskog polja[2]. Drugim riječima, bavimo se "paralenim transportom" prereza, dakle, koneksija je specifična za svežanj kojim se bavi. Motivirani analogijom s formalizmom vielbeina definiramo koneksiju E-svežnja $A^a_{\mu b}$[3]:

$$\nabla s = (\partial_\mu s^a + A^a_{\mu b} s^b)\, \mathrm{d}x^\mu \otimes \hat{e}_a$$
$$\nabla_\mu s = \partial_\mu s + A_\mu s,$$

gdje indeksi a i b odgovaraju komponentama u nekoj bazi vlakna $\hat{e}_a$.

Pri konstrukciji svežnja treba pripaziti da on nije nužno direktan produkt baznog prostora i vlakna, tj. on je direktan produkt, ali samo lokalno. Odnos susjednih lokalnih okolina determinira *strukturna grupa* pa na svaku trivijalnu okolinu djeluje jedan element te grupe. Glavni ili G-svežanj (definicija 30) ima pridružen vektorski svežanj E sa strukturnom grupom G u reprezentaciji vlakna svežnja. G ćemo još nazivati i baždarna grupa. Dakle $g(x) \in G$ će djelovati na vlakno V_x i nazivat ćemo ga baždarna transformacija.

2.2.2 Zakrivljenost, vanjska kovarijantna derivacija i endomorfizmi

Nastavljajući idejom odjeljka 2.1.3 trebamo definirati forme koje poprimaju vrijednosti u E-vektorskom svežnju (engl. *E-valued p-forms*). Kako bismo ovo napravili

[2] I prije su to bili prerezi, samo prerezi tangencijalnog svežnja što su tangencijalna vektorska polja pa je to bilo implicitno.

[3] Treba primijetiti da su u vielbeinu i $\hat{e}_a$ i ∂_μ odnosno $\hat{\theta}^a$ i $\mathrm{d}x^\mu$ oboje bili baze istog prostora (tangentnog odnosno kotangentnog) što ovdje nije slučaj.

definiramo novi svežanj kao tenzorski produkt E-svežnja i vektorskog svežnja formi s vlaknima $\Lambda^p(T_x^*M)$: $E \otimes \Omega^p(M)$. Prerez ovakvog svežnja je onda upravo polje forma s vrijednostima u E-svežnju. Sada možemo, opet u analogiji s običnim formama, definirati vanjsku kovarijantnu derivaciju D. Neka je $s \in \Gamma(E \otimes \Omega^p(M))$

$$s = s_{\mu_1 \dots \mu_p} \, \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p},$$

onda definiramo vanjsku kovarijantnu derivaciju (kovarijantna derivacija (1.24) je zapravo vanjska kovarijantna derivacija):

$$\mathrm{D}s = \nabla_\mu s_{\mu_1 \dots \mu_p} \, \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}.$$

Zakrivljenost je definirana relacijom (2.5), promatramo njeno djelovanje na prerez svežnja

$$F(\partial_\mu, \partial_\nu)s = F_{\mu\nu}s = (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)s \tag{2.20}$$

$$= F^a_{\mu\nu b} s^b = (\partial_\mu A^a_{\nu b} - \partial_\nu A^a_{\mu b} + [A_\mu, A_\nu]^a_b) s^b, \tag{2.21}$$

gdje treba pripaziti da su koneksijski koeficijenti A općenito matrice pa komutator ne iščezava osim za slučaj Abelove strukturne grupe. Također treba primijetiti da je zakrivljenost 2-forma (2.17)

$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A, \tag{2.22}$$

ali ne s vrijednostima u E-svežnju već u novom kojeg tek treba definirati.

Definiramo *endomorfizam* kao linearno preslikavanje iz nekog vektorskog prostora u samog sebe. Konstruiramo sada novi vektorski svežanj $\mathrm{End}(E)$ čega su vlakna endomorfizmi na V_x (vlakna E-svežnja). Stoga prerez $\mathrm{End}(E)$ jednostavno pridjeljuje neki endomorfizam svakoj točci bazne mnogostrukosti M. Znači da je zakrivljenost zapravo 2-forma s vrijednostima u $\mathrm{End}(E)$. Međutim, mi imamo koneksiju definiranu jedino na E, a ne i na $\mathrm{End}(E)$. Stoga ju treba definirati. Pogledajmo djelovanje kovarijantne derivacije na Ts gdje je $T \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$ a $s \in \Gamma(E)$, iz Leibnizovog pravila slijedi:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(Ts) &= (\nabla_\mu T)(s) + T(\nabla_\mu s) \\ &\Downarrow \\ (\nabla_\mu T)(s) &= \nabla_\mu(Ts) - T(\nabla_\mu s) \\ &= \partial_\mu(Ts) + A_\mu Ts - T\partial_\mu s - TA_\mu s, \end{aligned} \tag{2.23}$$

dakle slijedi, s obzirom da je s proizvoljan, koneksija na $\mathrm{End}(E)$:

$$\nabla_\mu T = \partial_\mu T + [A_\mu, T]. \tag{2.24}$$

Korisno je primijetiti da iz (2.23) slijedi

$$\nabla_\mu T = [\nabla_\mu, T]. \tag{2.25}$$

Treba napomenuti, također, da je zbog jednostavnosti korištena ista oznaka ∇ za koneksiju na E i $\mathrm{End}(E)$ svežnjevima iako one nisu isti objekti.

2.2.3 *Bianchijev identitet i baždarne transformacije*

Izračunajmo sad Bianchijev identitet tj. prvu Yang-Millsovu jednadžbu

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}F &= \nabla_\mu F_{\nu\rho}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \\
&= \frac{1}{3}\big(\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu}\big)\ \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \\
&= \frac{1}{3}\big([\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]] + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]] + [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\big)\ \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^\rho \\
&= 0,
\end{aligned}$$

gdje su bile korištene relacije (2.20) i (2.25) i Jacobijev identitet trojke linearnih operatora. Vratimo se na baždarne transformacije kojima smo započeli cijelo razmatranje. Dakle, znamo da je svakom vlaknu V_x pridjeljen jedan grupni element strukturne grupe G u reprezentaciji vektorskog prostora V_x, pa imamo prerez $g(x)$, $g \in \Gamma(G)$, grupnih elemenata koji djeluju na vlakno V_x. Prerez $s(x)$ se transformira na grupni element na slijedeći način:

$$s(x) \to s'(x) = g(x)s(x),$$

∇s je također prerez pa se mora transformirati na isti način a $\nabla' s' = (\nabla s)'$ stoga mora slijediti da se kovarijantna derivacija transformira na slijedeći način:

$$\nabla' = g\nabla g^{-1}. \tag{2.26}$$

Preostaje još provjeriti da je ∇' i dalje kovarijantna derivacija

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu(s) &= g(\partial_\mu(g^{-1}s) + A_\mu g^{-1}s) \\
&= \partial_\mu s + \big(g(\partial_\mu g^{-1}) + gA_\mu g^{-1}\big)\ s.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dakle ∇' zaista je kovarijantna derivacija s koneksijskim koeficijentima:

$$A'_\mu = g(\partial_\mu g^{-1}) + gA_\mu g^{-1}.$$

Sada vidimo zašto je transformacija (1.16) u prvom poglavlju imala upravo takav oblik, jer je ona, geometrijski gledano, koneksija.

2.2.4 *Zaključak*

Vidjeli smo da su rezultati dobiveni u ovom poglavlju u potpunom slaganju s rezultatima iz prvog poglavlja. Sada vidimo da su mnoga svojstva dobivena u prvom poglavlju kao posljedice zahtjeva za lokalnom baždarnom invarijantnošću lagranžijana zapravo posljedice geometrijske podloge Yang-Millsove teorije. Mnoge *ad hoc* uvedene definicije zapravo imaju svoj direktni slijed iz geometrijske strukture teorije. Ono što je važno je da smo vidjeli kako idejom i formalizmom opće teorije relativnosti možemo u potpunosti doći do baždarnih teorija i to će nam biti glavna motivacija za rad u trećem poglavlju gdje ćemo istu ideju zakrivljenosti i koneksija svežnjeva primijeniti na svežnjeve Higgsove mnogostrukosti.

Poglavlje 3

Zakrivljene Yang-Mills-Higgsove teorije

U ovom poglavlju bavimo se temeljem bozonskog sektora standardnog modela, tj. Yang-Mills-Higgsovom (YMH) teorijom. Prvo ćemo rezimirat standardnu YMH teoriju uvedenu u prošlim poglavljima, a zatim ju pokušati poopćiti. Naime, prostor Higgsovih polja možemo shvaćati kao Riemannovu mnogostrukost M koja je do sada uvijek bila implicitno pretpostavljena ravnom, međutim što ako nije nužno ravna? Okvir ovakve *zakrivljene* Yang-Mills-Higgsove teorije (CYMH od engl. *curved Yang-Mills-Higgs theories*) ćemo proučiti ovim poglavljem.

3.1 Pregled standardne Yang-Mills-Higgsove teorije

Kao što znamo iz poglavlja 1 i 2 baždarna polja tj. Yang-Millsove koneksije su 1-forme – elementi Liejeve algebre d-dimenzionalne Lorentzove mnogostrukosti Σ (mnogostrukosti prostor-vremena):

$$A = A^a\,\hat{e}_a \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}).$$

S obzirom da želimo da ta polja budu propagirajuća imamo kinetički član u koordinatno nezavisnom obliku (1.26) dobivenom u odjeljku 1.3

$$S_{YM}[A] = \int\limits_{\Sigma} \frac{1}{2}\kappa_{ab} F^a \wedge *F^b, \tag{3.1}$$

gdje je κ metrika na $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, a $*$ Hodgeov dualni operator induciran metrikom h na Σ. Jakost polja ili Yang-Millsova zakrivljenost je dana relacijom (1.23) ili (2.22) tj.:

$$\begin{aligned} F^a_{\text{YM}} &= \mathrm{d}A^a + (A \wedge A)^a \\ &= \mathrm{d}A^a + A^b \wedge A^c\,\frac{1}{2}[\hat{e}_b, \hat{e}_c]^a \\ &= \mathrm{d}A^a + \frac{1}{2}C^a_{bc}\,A^b \wedge A^c, \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje su C^a_{bc} strukturne konstante $\mathfrak{g}$:

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = C^a_{bc}\, \hat{e}_c. \tag{3.3}$$

Ovo je standardna Yang-Millsova teorija kakvu smo upoznali do sada, preostaje uvesti još Higgsovo skalarno polje i interakciju kako bismo dobili Yang-Mills-Higgsovu teoriju.

Higgsova polja odgovaraju preslikavanju $X : \Sigma \to M$ gdje je M n-dimenzionalna Riemannova mnogostrukost s pripadnom metrikom g. Pretpostavimo da g ima netrivijalnu grupu izometrije G, onda infinitezimalno slijedi da ako je ρ_a reprezentacija $\hat{e}_a$ na tangentnom prostoru $\rho_a \in \Gamma(TM)$:

$$\pounds_{\rho_a} g = 0. \tag{3.4}$$

Odaberemo li koordinatni sustav x^i na M, povlaka (definicija 11 dodatka A) s X definira n skalarnih polja

$$X^i = X^* x^i \in C^\infty(\Sigma).$$

Koristeći definiciju 20 Hodgeovog duala i normalizacije Levi-Civita tenzora iz definicije 25, lagranžijan skalarnog polja možemo također zapisati na koordinatno nezavisan način

$$\begin{aligned} \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j &= \frac{1}{3!} D_\mu X^i \varepsilon_{\alpha\nu\rho\lambda} D^\alpha X^j \, \mathrm{d}\sigma^\mu \wedge \mathrm{d}\sigma^\nu \wedge \mathrm{d}\sigma^\rho \wedge \mathrm{d}\sigma^\lambda \\ &= -\frac{1}{3!} D_\mu X^i D^\alpha X^j \varepsilon_{\alpha\nu\rho\lambda} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} \, \mathrm{d}^4\sigma \\ &= D_\mu X^i D^\mu X^j \, \mathrm{d}^4\sigma. \end{aligned}$$

Osim kinetičkih članova akcija ima i potencijalni član definiran skalarnom funkcijom V na M tzv. Higgsov potencijal, analogno

$$*V = V \, \mathrm{d}^4\sigma.$$

Higgsova akcija je onda,

$$S_{\text{Higgs}}[X, A] = \int_\Sigma \frac{1}{2} g_{ij}(X) \, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j + *V(X) \tag{3.5}$$

$$S_{\text{YMH}}[X, A] = S_{\text{YM}}[A] + S_{\text{Higgs}}[X, A], \tag{3.6}$$

gdje D označava vanjsku kovarijantnu derivaciju (kovarijantnu, naravno, u odnosu na Yang-Mills koneksiju A):

$$\mathrm{D}X^i = \mathrm{d}X^i - \rho^i_a(X) A^a, \tag{3.7}$$

kojom osiguravamo da je prethodno navedena G-simetrija upravo baždarna simetrija (minimalna supstitucija ili minimalno vezanje). Znači, sad imamo kinetičke članove baždarnih A i Higgsovih X polja, njihovu interakciju kroz kovarijantnu derivaciju D i Higgsov potencijal V. Zahtjev baždarne invarijantnosti akcije povlači tri uvjeta invarijantnosti objekata koji se pojavljuju u definiciji akcije (3.6):

- ad-invarijantnost metrike κ:

$$C^c_{ad}\kappa_{cb} + \kappa_{ac}C^c_{bd} = 0, \tag{3.8}$$

- invarijantnost metrike g, tj. da su ρ_a Killingova polja (ovaj uvjet je već po konstrukciji zadovoljen (3.4)):

$$\pounds_{\rho_a} g = 0, \tag{3.9}$$

- invarijantnost Higgsovog potencijala V:

$$\rho^i_a \partial_i V = 0. \tag{3.10}$$

Ovime je izložena ravna Yang-Mills-Higgsova teorija. U slijedećim odjeljcima bavit ćemo se zahtjevima i posljedicama zakrivljenja vektorskog svežnja $E = M \times \mathfrak{g} \to M$. Vidjet ćemo kako se izrazi za akciju (3.1) i (3.5) te prethodna tri uvjeta modificiraju s obzirom na zakrivljenu koneksiju koju ćemo uvesti. Na kraju ćemo promotriti primjenu ove zakrivljene teorije na jednostavan model.

3.2 Zakrivljenje teorije

Kao što smo vidjeli u odjeljku 2.1.1 prošlog poglavlja, prijelaz iz specijalne u opću teoriju relativnosti događa se u jednadžbi slobodnog gibanja (2.4) zahtjevom da koneksijski koeficijenti Γ odgovaraju *zakrivljenoj* koneksiji ∇ tj. da $R_\nabla \neq 0$. Ovu motivaciju i pristup ćemo primijeniti na Yang-Mills-Higgsovu teoriju. Cilj će nam biti kovarijantizirati teoriju u odnosu na transformacije baze strukturne algebre $\mathfrak{g}$ ovisne o Higgsovim poljima. Takva transformacija će inducirati koneksiju ∇ koja može biti ravna ili zakrivljena što u slučaju ravne koneksije teorija odgovara standardnoj Yang-Mills-Higgsovoj teoriji iskazanoj u prošlom odjeljku.

3.2.1 Zakrivljenje M i Liejev algebroid

Definiramo (lokalno) vektorski svežanj

$$E = M \times \mathfrak{g} \to M. \tag{3.11}$$

Svaki element Liejeve algebre možemo shvatiti kao prerez ovog E-svežnja pa je transformacija baze E-svežnja:

$$\hat{e}_a \to M^b_a(x)\hat{e}_b. \tag{3.12}$$

Promjena baze E odgovara transformaciji baždarnog polja A^a takvoj da $A = A^a\,\hat{e}_a$ ostaje invarijantno, dakle:

$$A^a \to (M^{-1})^a_b A^b. \tag{3.13}$$

Vidimo da oblik (3.7) a onda i (3.5) ostaje nepromjenjen, međutim (3.2), pa stoga i (3.1), se drastično mijenjaju, κ_{ab} i C^a_{bc} postaju funkcije X. Pretpostavimo da prije transformacije E ima prirodno ravnu koneksiju $\nabla \hat{e}_a = (\omega_0)^b_a\, \hat{e}_b = 0$. Nakon transformacije, onda, koneksija

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

poprima (3.12) komponente:

$$\begin{aligned}
\nabla \hat{e}'_a &= (\nabla M^b_a)\hat{e}_b + M^b_a \nabla \hat{e}_b \\
&= \left(\mathrm{d}M^b_a + (\omega_0)^c_a M^b_c\right)\hat{e}_b \\
&= \left((M^{-1})^d_b\, \mathrm{d}M^b_a + (\omega_0)^d_a\right)(M^f_d\, \hat{e}_f) \\
&= (M^{-1})^d_b\, \mathrm{d}M^b_a\, \hat{e}'_d,
\end{aligned}$$

gdje treba primijetiti da je M^a_b endomorfizam tj. prerez $\mathrm{End}(E)$ pa je korišten izraz za koneksiju $\mathrm{End}(E)$ svežnja (2.23). Dakle u novoj bazi imamo

$$\nabla \hat{e}_a = \omega^b_a\, \hat{e}_b \tag{3.14}$$

$$\omega^a_b = (M^{-1})^a_c\, \mathrm{d}M^c_b. \tag{3.15}$$

Počnemo li od (3.15) možemo izračunati transformaciju koneksije,

$$\begin{aligned}
\omega^a_b \to\; & (M^{-1})^a_d (M^{-1})^d_c\, \mathrm{d}(M^e_b M^c_e) \\
=\; & (M^{-1})^a_d (M^{-1})^d_c M^e_b\, \mathrm{d}M^c_e + (M^{-1})^a_d (M^{-1})^d_c M^c_e\, \mathrm{d}M^e_b \\
=\; & (M^{-1})^a_d M^e_b \omega^d_e + \omega^a_b,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

što je upravo transformacija (2.15) koju smo dobili formalizmom vielbeina. Dakle, koneksijski koeficijenti (3.15) zaista dobro opisuju definiranu koneksiju ∇ nad E (uzevši u obzir prirodno ravnu koneksiju $(\omega_0)^a_b$ i definiciju djelovanja koneksijskih komponenti na bazu (3.14)). Koneksiji ∇ (3.14) možemo pridjeliti zakrivljenost po relaciji (2.17):

$$\begin{aligned}
(R_\nabla)^a_b \;&=\; \mathrm{d}\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b \\
(R_\nabla)^a_{bij} \;&\overset{(B.1)}{=}\; 2\omega^a_{b[j,i]} + 2\omega^a_{c[i}\omega^c_{j]b}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ovu zakrivljenost ćemo koristit pri karakterizaciji Yang-Mills-Higgs teorije kao ravne, $R_\nabla = 0$, ili zakrivljene.

Pogledajmo sad kako se C^a_{bc} transformira. Koristimo relaciju (3.3) u reprezentaciji ρ:

$$[\rho_a, \rho_b] = \rho^j_a \rho_{b,j} - \rho^j_b \rho_{a,j} = \; C^c_{ab}\rho_c, \tag{E.2}$$

za transformirana polja ρ'

$$\begin{aligned}
[\rho_a, \rho_b]^i \to & \ [\rho'_a, \rho'_b]^i \\
= & \ \left[M_a^c \rho_c, M_b^d \rho_b\right]^i \\
= & \ M_a^c \rho_c^j (M_b^d \rho_d^i)_{,j} - M_b^d \rho_d^j (M_a^c \rho_c^i)_{,j} \\
= & \ M_a^c \rho_c^j (M_{b,j}^d \rho_d^i + M_b^d \rho_{d,j}^i) - M_b^d \rho_d^j (M_{a,j}^c \rho_c^i + M_{a,j}^c \rho_{c,j}^i) \\
= & \ M_a^c M_b^d \rho_c^j \rho_{d,j}^i - M_b^d M_a^c \rho_d^j \rho_{c,j}^i + M_a^c M_{b,j}^d \rho_c^j \rho_d^i - M_b^d M_{a,j}^c \rho_d^j \rho_c^i \\
= & \ M_a^c M_b^d (\rho_c^j \rho_{d,j}^i - \rho_d^j \rho_{c,j}^i) + 2M_{[a}^c M_{b],j}^d \rho_c^j \rho_d^i \\
= & \ M_a^c M_b^d C_{cd}^e \rho_e^i + 2M_{[a}^c M_{b],j}^d \rho_c^j \rho_d^i \\
= & \ M_a^c M_b^d C_{cd}^e (M^{-1}M)_e^f \rho_f^i + 2M_{[a}^c M_{b],j}^d \rho_c^j (M^{-1}M)_e^f \rho_d^i \\
= & \ \left[(M^{-1})_e^g M_a^c M_b^d C_{cd}^e + 2(M^{-1})_d^g M_{[a}^c M_{b],j}^d \rho_c^j\right] M_g^f \rho_f^i \\
= & \ C'^{d}_{ab} \rho'^{i}_{d}.
\end{aligned}$$

dakle strukturne konstante su postale *strukturne funkcije* $C_{bc}^a(x)$. Što znači da je E, umjesto pridruženog svežnja, poopćenje tj. $\hat{e}_a$ i $C_{bc}^a(x)$ definiraju *Liejev algebroid* s poopćenim Jacobijevim identitetom (1.15) (za detalje o Liejevom algebroidu vidi dodatak E):

$$C_{ad}^e C_{bc}^d + \rho_a^i C_{bc,i}^e + C_{bd}^e C_{ca}^d + \rho_b^i C_{ca,i}^e + C_{cd}^e C_{ab}^d + \rho_c^i C_{ab,i}^e = 0. \tag{E.1}$$

Treba, također, primjetiti da se strukturne funkcije $C_{bc}^a(x)$ ne transformiraju tenzorski

$$C_{bc}^a \to (M^{-1})_d^a M_b^e M_c^f C_{ef}^d + 2(M^{-1})_d^a M_{[b}^e M_{c],i}^d \rho_e^i, \tag{3.18}$$

zbog nehomogenog drugog člana. Njega možemo zapisati preko koneksijskih koeficijenata (3.14):

$$\begin{aligned}
2M_{[b}^e M_{c],i}^d \rho_e^i &= M_b^e M_{c,i}^d \rho_e^i - M_c^e M_{b,i}^d \rho_e^i \\
&= M_b^e \rho_e \, \mathrm{d}M_c^d - M_c^e \rho_e \, \mathrm{d}M_b^d \\
2(M^{-1})_d^a M_{[b}^e M_{c],i}^d \rho_e^i &= M_b^e \rho_e \omega_c^a - M_c^e \rho_e \omega_b^a \\
&= \rho'_b \omega_c^a - \rho'_c \omega_b^a \\
&= 2\rho'_{[b} \omega_{c]}^a.
\end{aligned}$$

Kako strukturne funkcije $C_{bc}^a(x)$ nisu tenzori možemo definirati tenzorski analogon strukturne funkcije $C_{bc}^a(x)$, $t \in \Gamma(E \otimes \Lambda^2 E^*)$ s komponentama:

$$t_{bc}^a = C_{bc}^a - 2\rho_{[b}^i \omega_{c]i}^a. \tag{3.19}$$

3.2.2 Baždarne transformacije polja X i A

Pozornost sada prebacujemo na baždarne transformacije tj. varijacije pri čemu želimo da varijacije budu kovarijantne s obzirom na transformaciju (3.12). Baždarna transformacija skalarnog polja X je poznata otprije (1.17) i već je trivijalno kovarijantna:

$$\delta X^i = \varepsilon^a \rho_a^i(X). \tag{3.20}$$

Varijacija baždarnog polja A (1.18),

$$\delta A^a_{\text{YM}} = \mathrm{d}\varepsilon^a + C^a_{bc} A^b \varepsilon^c, \tag{3.21}$$

nije, zbog netenzorskog oblika transformacije strukturnih funkcija $C^a_{ab}(x)$. Stoga ju trebamo kovarijantizirati, odnosno naći oblik u kojemu se ona transformira dobro s obzirom na (3.12). Korisne će nam biti neke kontrakcije koneksijskih koeficijenata (3.15):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(M^{-1}M)^a_b = 0 &= (M^{-1})^a_c \, \mathrm{d}M^c_b + M^a_c \, \mathrm{d}(M^{-1})^c_b \\
(M^{-1})^c_b \omega^a_c &= (M^{-1})^c_b M^a_d \, \mathrm{d}(M^{-1})^d_c \\
&= -(M^{-1})^a_d M^d_c \, \mathrm{d}(M^{-1})^c_b \\
&= - \mathrm{d}(M^{-1})^a_b.
\end{aligned}$$

Varijacija je diferencijalni operator pa za nju također vrijedi Leibnizovo pravilo, stoga, kako je $M^a_b(X)$ također funkcija X, za transformaciju varijacije vrijedi:

$$\begin{aligned}
\delta A^a &\xrightarrow{M} \delta\left((M^{-1})^a_b A^b\right) \\
&= \quad (M^{-1})^a_b \, \delta A^b + \delta(M^{-1})^a_b \, A^b.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Za varijaciju transformacije M se dobije

$$\delta(M^{-1})^a_b = \left(\mathrm{d}(M^{-1})^a_b\right)_i \delta X^i = -(M^{-1})^c_b \omega^a_{ci} \varepsilon^d \rho^i_d. \tag{3.23}$$

Sad kada znamo kako transformacija mora izgledati, pogledajmo kako se transformira standardna varijacija baždarnog polja A (3.21):

$$\begin{aligned}
\delta A^a \xrightarrow{M} \; & \mathrm{d}((M^{-1})^a_b \varepsilon^b) + (M^{-1})^a_d M^e_b M^f_c C^d_{ef} (M^{-1})^b_g A^g (M^{-1})^c_h \varepsilon^h \\
& + \rho_e M^e_{[b} \omega^a_{c]} (M^{-1})^b_g A^g (M^{-1})^c_h \varepsilon^h \\
= \quad & \varepsilon^b \, \mathrm{d}(M^{-1})^a_b + (M^{-1})^a_b \, \mathrm{d}\varepsilon^b + (M^{-1})^a_d C^d_{ef} A^e \varepsilon^f + \rho_e A^e (M^{-1})^c_h \varepsilon^h \omega^a_c \\
& - \rho_e \varepsilon^e (M^{-1})^b_g A^g \omega^a_b \\
= \quad & - \varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_c + (M^{-1})^a_b \, \mathrm{d}\varepsilon^b + (M^{-1})^a_b C^b_{cd} A^c \varepsilon^d + \varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_c \rho_e A^e \\
& - (M^{-1})^c_b \omega^a_c \rho_d \varepsilon^d A^b \\
\overset{(3.7)}{=} \quad & - \varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_{ci} \, \mathrm{D}X^i + (M^{-1})^a_b \left(\mathrm{d}\varepsilon^b + C^b_{cd} A^c \varepsilon^d \right) - (M^{-1})^c_b \omega^a_c \rho_d \varepsilon^d A^b,
\end{aligned}$$

ovdje vidimo kako zadnja dva člana odgovaraju dobroj transformaciji (3.22) s (3.23), međutim prvi član daje nehomogenost. To nas motivira da dodamo još jedan član varijaciji (3.21):

$$\omega^a_{bi} \varepsilon^b \, \mathrm{D}X^i. \tag{3.24}$$

Pogledajmo njegovu transformaciju

$$
\begin{aligned}
\omega^a_{bi}\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i \xrightarrow[(3.16)]{M} & (M^{-1})^a_d M^e_b (M^{-1})^b_c \varepsilon^c \omega^d_{ei}\,\mathrm{D}X^i + (M^{-1})^b_c \varepsilon^c \omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i \\
= \quad & (M^{-1})^a_b \omega^b_{ci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i + \varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_{ci}\,\mathrm{D}X^i,
\end{aligned}
$$

vidimo da će dodatni član (3.24) točno popraviti nehomogeni prvi član:

$$
\begin{aligned}
(\delta A^a)' = & -\varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_{ci}\,\mathrm{D}X^i + (M^{-1})^a_b \left(\mathrm{d}\varepsilon^b + C^b_{cd} A^c \varepsilon^d\right) - (M^{-1})^c_b \omega^a_c \rho_d \varepsilon^d A^b \\
& + \varepsilon^b (M^{-1})^c_b \omega^a_{ci}\,\mathrm{D}X^i + (M^{-1})^a_b \omega^b_{ci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i \\
= & \ (M^{-1})^a_b \left(\mathrm{d}\varepsilon^b + C^b_{cd} A^c \varepsilon^d + \omega^b_{ci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\right) + \delta (M^{-1})^a_b\, A^b,
\end{aligned}
$$

dakle imamo novu varijaciju polja A:

$$
\delta A^a = \mathrm{d}\varepsilon^a + C^a_{bc} A^b \varepsilon^c + \omega^a_{bi}\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i. \tag{3.25}
$$

Ukoliko je svežanj ravan, $R_\nabla = 0$, uvijek možemo izabrati sustav takav da koneksijski koeficijenti iščezavaju i relacija poprimi stari oblik (3.21). S obzirom na diferencijalno djelovanje opreatora varijacije δ, možemo izračunati varijacije koje će nam dalje biti potrebne: varijacija kovarijantne derivacije Higgsovog polja $\mathrm{D}X^i$,

$$
\begin{aligned}
\delta\,\mathrm{D}X^i \quad = \quad & \mathrm{d}\delta X^i - \delta(\rho^i_a(X) A^a) \\
\overset{(3.20)}{=} \ & \rho^i_a\,\mathrm{d}\varepsilon^a + \varepsilon^a \rho^i_{a,j}\,\mathrm{d}X^j - \rho^i_a(\mathrm{d}\varepsilon^a + C^a_{bc} A^b \varepsilon^c + \omega^a_{bi}\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i) - A^a \rho^i_{a,j}\varepsilon^b \rho^j_b \\
\overset{(E.2)}{=} \ & \varepsilon^a (\rho^i_{a,j} - \omega^b_{aj}\rho^i_b)\,\mathrm{D}X^j,
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

i varijacije koneksije i strukturne funkcije:

$$
\begin{aligned}
\delta C^a_{bc} &= C^a_{bc,i}\delta X^i = C^a_{bc,i}\varepsilon^d \rho^i_d \\
\delta \omega^a_{bi} &= \omega^a_{bi,j}\delta X^j = \omega^a_{bi,j}\varepsilon^c \rho^j_c.
\end{aligned}
$$

Sada kad smo konstruirali novu transformaciju baždarnog polja želimo da se ono zatvara *off-shell* tj. identički bez nužnog zadovoljenja jednadžbi gibanja. Dakle zahtijevamo:

$$
[\delta_\varepsilon, \delta_\eta] A^a = \delta_{\varepsilon\times\eta} A^a, \tag{3.27}
$$

gdje je $\varepsilon\times\eta$ neki novi parametar transformacije, linearna kombinacija ε i η. Računamo dvostruku transformaciju:

$$
\begin{aligned}
\delta_\eta\left(\delta_\varepsilon A^a\right) \quad = \quad & A^b \varepsilon^c \delta_\eta C^a_{bc} + C^a_{bc}\varepsilon^c \delta_\eta A^b + \varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i \delta_\eta \omega^a_{bi} + \omega^a_{bi}\varepsilon^b \delta_\eta\,\mathrm{D}X^i \\
\overset{(3.26)}{=} \ & A^b \varepsilon^c C^a_{bc,i}\eta^d \rho^i_d + C^a_{bc}\varepsilon^c (C^b_{de} A^d \eta^e + \omega^b_{di}\eta^d\,\mathrm{D}X^i) + \varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i \omega^a_{bi,j}\eta^c \rho^j_c \\
& + \omega^a_{bi}\varepsilon^b \eta^c (\rho^i_{c,j} - \omega^d_{cj}\rho^i_d)\,\mathrm{D}X^j.
\end{aligned}
$$

Prvi i drugi član možemo zamijeniti koristeći poopćeni Jacobijev identitet (E.1):

$$
\begin{aligned}
& C^a_{bc} C^c_{ed} \varepsilon^b A^d \eta^e + \rho^i_d C^a_{be,i}\varepsilon^e A^b \eta^d \\
& \qquad = (C^a_{bc} C^c_{ed} + \rho^i_e C^a_{db,i})\varepsilon^b A^d \eta^e \\
& \qquad = -(C^a_{ec} C^c_{db} + C^a_{dc} C^c_{be} + \rho^i_d C^a_{be,i} + \rho^i_b C^a_{ed,i})\varepsilon^b A^d \eta^e.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Komutator koji razmatramo (3.27) u ovom izrazu odgovara antisimetrizaciji u indeksima e i b zadnjeg reda (naravno bez normalizacije) pa prvi i zadnji član prelaze u srednja dva člana ponovnim korištenjem (E.1):

$$\begin{aligned} C^a_{ec}C^c_{db} - C^a_{bc}C^c_{de} + \rho^i_b C^a_{ed,i} - \rho^i_e C^a_{bd,i} \\ &= C^a_{ec}C^c_{db} + C^a_{bc}C^c_{ed} + \rho^i_b C^a_{ed,i} + \rho^i_e C^a_{db,i} \\ &= - C^a_{dc}C^c_{be} - \rho^i_d C^a_{be,i}, \end{aligned}$$

gdje je korištena antisimetričnost donjih indeksa C^a_{bc}. Dakle komutator varijacija (3.28) iznosi:

$$\begin{aligned} (-C^a_{c[b}C^c_{e]d} - \rho^i_{[e}C^a_{b]d,i})\varepsilon^b A^d \eta^e &= (C^a_{dc}C^c_{be} + \rho^i_d C^a_{be,i} - 2C^a_{dc}C^c_{be} - 2\rho^i_d C^a_{be,i})\varepsilon^b A^d \eta^e \\ &= -(C^a_{dc}C^c_{be} + \rho^i_d C^a_{be,i})\varepsilon^b A^d \eta^e. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Pogledajmo sad članove uz $\mathrm{D}X^i$:

$$\begin{aligned} \Big(\omega^a_{bi,j}\rho^j_c + C^a_{db}\omega^d_{ci} + \omega^a_{bj}\rho^j_{c,i} - \omega^a_{bj}\omega^d_{ci}\rho^j_d\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &= \Big(\omega^a_{bi,j}\rho^j_c + \omega^d_{ci}t^a_{db} + 2\omega^d_{ci}\rho^j_{[d}\omega^a_{b]j} + \omega^a_{bj}\rho^j_{c,i} - \omega^a_{bj}\omega^d_{ci}\rho^j_d\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &= \Big(\omega^a_{bi,j}\rho^j_c + \omega^d_{ci}t^a_{db} - \omega^a_{dj}\omega^d_{ci}\rho^j_b + \omega^a_{bj}\rho^j_{c,i}\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Korisna relacija je

$$2\omega^a_{[b}\rho_{c],i} = 2\rho^j_{[b}\omega^a_{c]j,i} - (C^a_{bc} - t^a_{bc})_{,i}. \tag{3.31}$$

Zajedno članovi (3.29) i (3.30) daju ukupni komutator varijacija:

$$\begin{aligned} [\delta_\varepsilon, \delta_\eta]A^a &= (C^a_{dc}C^c_{be} + \rho^i_d C^a_{be,i})\varepsilon^b A^d \eta^e \\ &\quad - \Big(2\rho^j_{[c}\omega^a_{b]i,j} + 2t^a_{d[b}\omega^d_{c]i} - 2\rho^j_{[b}\omega^d_{c]i}\omega^a_{dj} + 2\omega^a_{j[b}\rho^j_{c],i}\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &\overset{(3.31)}{=} C^a_{dc}A^d\sigma^c + C^a_{be,i}\varepsilon^b\eta^e\rho^i_d A^d + C^a_{bc,i}\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &\quad - \Big(4\rho^j_{[c}\omega^a_{b][i,j]} + t^a_{bc,i} + 2\omega^d_{i[b}t^a_{c]d} + 2\rho^j_{[c}\omega^d_{b]i}\omega^a_{dj}\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i, \end{aligned}$$

cijelu zagradu identificiramo s $-S^a_{bci} + C^d_{cb}\omega^a_{di}$,

$$\begin{aligned} &= C^a_{bc}A^b\sigma^c + C^a_{bc,i}\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{d}X^i - \Big(-S^a_{bci} + C^d_{cb}\omega^a_{di}\Big)\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &= \mathrm{d}\sigma^a + C^a_{bc}A^b\sigma^c + \omega^a_{bi}\sigma^b\,\mathrm{D}X^i + S^a_{bci}\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i \\ &= \delta_\sigma A^a + S^a_{bci}\varepsilon^b\eta^c\,\mathrm{D}X^i, \end{aligned}$$

gdje je σ ona linearna kombinacija transformacijskih parametara koju smo označili s $\varepsilon \times \eta$:

$$\sigma^a = C^a_{bc}\varepsilon^b\eta^c \equiv (\varepsilon \times \eta)^a.$$

Dakle baždarne transformacije polja A se zatvaraju ako i samo ako vrijedi

$$S^a_{bci} = 0.$$

S, međutim, možemo zapisati u drukčijem obliku:

$$
\begin{aligned}
S^a_{bci} &= -t^a_{bc,i} - 2\omega^d_{i[b}t^a_{c]d} + 4\rho^j_{[c}\omega^a_{b][j,i]} - 2\rho^j_{[c}\omega^d_{b]i}\omega^a_{dj} + C^d_{cb}\omega^a_{di} \\
&\left[4\rho^j_{[c}\omega^d_{b][j}\omega^a_{i]d} = \cdots = C^d_{cb}\omega^a_{di} - t^d_{cb}\omega^a_{di} - 2\rho^j_{[c}\omega^d_{b]i}\omega^a_{dj} \right] \\
&= -t^a_{bc,i} - \omega^a_{di}t^d_{bc} - 2\omega^d_{i[b}t^a_{c]d} + 4\rho^j_{[c}\omega^a_{b][j,i]} + 4\rho^j_{[c}\omega^d_{b][j}\omega^a_{i]d} \\
&\overset{(3.17)}{=} -\nabla_i t^a_{bc} + 2\rho^j_{[c}R^a_{b]ij},
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

stoga uvjet postaje

$$
\nabla_i t^a_{bc} = 2\rho^j_{[b}R^a_{c]ji}. \tag{3.33}
$$

S obzirom da R_∇ u potpunosti određuje zakrivljenost teorije možemo viditi što predstavlja ovaj uvjet u slučaju standardne ravne teorije, $R_\nabla = 0$. Naime, ako zakrivljenost iščezava to znači da možemo uvijek izabrati sustav u kojemu koneksijski koeficijenti iščezavaju pa onda $\omega^a_b = 0$ po relaciji (3.19) implicira da t^a_{bc} prelazi u strukturne funkcije C^a_{bc}, međutim (3.33) osigurava da one moraju biti konstantne funkcije. Dakle upravo ovaj uvjet osigurava da struktura Liejevog algebroida prelazi u algebru za slučaj ravne Yang-Mills-Higgsove teorije.

3.2.3 Baždarna transformacija jakosti polja F

Sada sličan postupak prošlog odjeljka primjenjujemo na jakost polja F. Prvo kovarijantiziramo (3.2) u odnosu na transformaciju baze (3.12):

$$
\begin{aligned}
F^a_{\text{YM}} &= \mathrm{d}A^a + \frac{1}{2}C^a_{bc}\,A^b \wedge A^c \\
&= \mathrm{d}A^a + \frac{1}{2}t^a_{bc}\,A^b \wedge A^c + \rho^i_{[b}\omega^a_{c]i}\,A^b \wedge A^c.
\end{aligned}
$$

Drugi član se dobro transformira jer su svi objekti tenzori u indeksima $a, b, \ldots$ dakle preostaje nam provjeriti transformacijska pravila ostalih dvaju članova, prvi:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\big((M^{-1})^a_b A^b\big) &= \mathrm{d}(M^{-1})^a_b \wedge A^b + (M^{-1})^a_b\,\mathrm{d}A^b \\
&= -(M^{-1})^c_b\,\omega^a_c \wedge A^b + (M^{-1})^a_b\,\mathrm{d}A^b,
\end{aligned}
$$

(primijetimo tenzorsku transformaciju drugog člana) i drugi:

$$
\begin{gathered}
\rho^i_{[b}\omega^a_{c]i} \xrightarrow[(3.16)]{M} (M^{-1})^a_d M^e_b M^f_c \rho^i_{[e}\omega^d_{f]i} + \rho^i_d M^d_{[b}\omega^a_{c]i} \\
\Downarrow \\
\rho^i_{[b}\omega^a_{c]i}\,A^b \wedge A^c \xrightarrow{M} (M^{-1})^a_d \rho^i_{[b}\omega^d_{c]i}\,A^b \wedge A^c + \rho^i_c\omega^a_{bi}(M^{-1})^b_d\,A^c \wedge A^d,
\end{gathered}
$$

gdje prvi član ima dobru transformaciju. Zbrojimo li sve članove i grupiramo zajedno one koji se dobro transformiraju dobijemo:

$$
\begin{aligned}
F^a_{\text{YM}} &\xrightarrow{M} (M^{-1})^a_b F^b_{\text{YM}} - (M^{-1})^c_b\,\omega^a_c \wedge A^b + (M^{-1})^b_d\omega^a_{bi}\rho^i_c\,A^c \wedge A^d \\
&= (M^{-1})^a_b F^b_{\text{YM}} - (M^{-1})^b_d\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i \wedge A^d.
\end{aligned}
$$

Ovakav rezultat nas, kao i u slučaju baždarnog polja A, motivira da dodamo član

$$\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b$$

definiciji jakosti F, onda je transformacija:

$$\begin{aligned}
F^a \xrightarrow{M} &(M^{-1})^a_d\Big(\mathrm{d}A^d+\frac{1}{2}C^d_{bc}\,A^b\wedge A^c\Big)-(M^{-1})^b_d\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^d\\
&+(M^{-1})^a_d M^e_b\omega^d_{ei}(M^{-1})^b_c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^c+(M^{-1})^b_c\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^c\\
= \quad &(M^{-1})^a_d\Big(\mathrm{d}A^d+\frac{1}{2}C^d_{bc}\,A^b\wedge A^c+\omega^d_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b\Big).
\end{aligned}$$

Stoga je kovarijantizirana jakost polja F^a:

$$F^a = \mathrm{d}A^a+\frac{1}{2}C^a_{bc}(X)\,A^b\wedge A^c+\omega^a_{bi}(X)\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b \tag{3.34}$$

$$= (\mathrm{D}_\omega A)^a+\frac{1}{2}t^a_{bc}(X)\,A^b\wedge A^c \tag{3.35}$$

$$(\mathrm{D}_\omega A)^a = \mathrm{d}A^a+\omega^a_{bi}(X)\,\mathrm{d}X^i\wedge A^b, \tag{3.36}$$

gdje smo uveli vanjsku kovarijantnu derivaciju koneksiji ∇, D_ω.

Prelazimo na varijaciju jakosti polja, želimo da se varijacija zatvara u smislu (1.19) pa računamo:

$$\begin{aligned}
\delta F^a &= \delta\,\mathrm{d}A^a+\delta\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+\omega^a_{bi}\,\delta\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+\omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge\delta A^b\\
&+\frac{1}{2}\delta C^a_{bc}\,A^b\wedge A^c+C^a_{bc}\,\delta A^b\wedge A^c.
\end{aligned}$$

Varijacija kao diferencijalni operator komutira s vanjskom derivacijom d:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\delta A^a &= C^a_{bc,i}\varepsilon^c\,\mathrm{d}X^i\wedge A^b+C^a_{bc}\varepsilon^c\,\mathrm{d}A^b-C^a_{bc}\,A^b\wedge\,\mathrm{d}\varepsilon^c+\omega^a_{bi,j}\varepsilon^b\,\mathrm{d}X^j\wedge\,\mathrm{D}X^i\\
&+\omega^a_{bi}\,\mathrm{d}\varepsilon^b\wedge\,\mathrm{D}X^i-\omega^a_{bi}\varepsilon^b\rho^i_{c,j}\,\mathrm{d}X^j\wedge A^c-\omega^a_{bi}\varepsilon^b\rho^i_c\,\mathrm{d}A^c.
\end{aligned}$$

Raspisivanjem varijacije svakog člana dobijemo

$$\begin{aligned}
\delta F^a = &C^a_{bc,i}\varepsilon^c\,\mathrm{d}X^i\wedge A^b+C^a_{bc}\,\mathrm{d}A^b\varepsilon^c+\omega^a_{bi,j}\varepsilon^b\,\mathrm{d}X^j\wedge\,\mathrm{D}X^i-\omega^a_{bi}\varepsilon^b\rho^i_{c,j}\,\mathrm{d}X^j\wedge A^c\\
&-\omega^a_{bi}\varepsilon^b\rho^i_c\,\mathrm{d}A^c-S^a_{bci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+C^d_{cb}\omega^a_{di}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b-C^a_{db}\omega^d_{ci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b\\
&-C^a_{bc,i}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+\omega^a_{bi}C^b_{de}\varepsilon^e\,\mathrm{D}X^i\wedge A^d+\omega^a_{bi}\omega^b_{cj}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j\\
&+\frac{1}{2}C^a_{bc,i}\varepsilon^d\rho^i_d\,A^b\wedge A^c+C^a_{bc}C^b_{de}\varepsilon^e\,A^d\wedge A^c+C^a_{bc}\omega^b_{di}\varepsilon^d\,\mathrm{D}X^i\wedge A^c\\
&+\omega^a_{ci,j}\rho^j_b\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+C^a_{dc}\omega^d_{bi}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b+\omega^a_{cj}\rho^j_{b,i}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b\\
&-\omega^a_{cj}\omega^d_{bi}\rho^j_d\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b,
\end{aligned}$$

vidimo da se pojavio član s tenzorom S^a_{bci} (3.32). Ovaj izrazito nekompaktni izraz možemo jako pojednostaviti koristeći identitete:

$$\begin{aligned}
\omega^a_{cj}\rho^i_d\rho^j_{b,i}\varepsilon^c\,A^d\wedge A^b &= \omega^a_{cj}\rho^i_{[d}\rho^j_{b],i}\varepsilon^c\,A^d\wedge A^b\\
&= \frac{1}{2}\omega^a_{cj}[\rho_d,\rho_b]^j\varepsilon^c\,A\wedge A^b=\frac{1}{2}\omega^a_{cj}C^e_{db}\rho^j_e\varepsilon^c\,A^d\wedge A^b,
\end{aligned}$$

$$C^a_{bc,i}\varepsilon^c\,\mathrm{d}X^i\wedge A^b - C^a_{bc,i}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b + \frac{1}{2}C^a_{bc,i}\varepsilon^d\rho^i_d\,A^b\wedge A^c + C^a_{bc}C^b_{de}\varepsilon^e\,A^d\wedge A^c$$
$$= \frac{1}{2}C^a_{bc}C^b_{de}\varepsilon^c\,A^d\wedge A^e$$

i

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}R^a_{bij}\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j &= (\omega^a_{b[j,i]} + \omega^a_{c[i}\omega^c_{j]b})\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j\\ &= (\omega^a_{bj,i} + \omega^a_{ci}\omega^c_{bj})\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j.\end{aligned}$$

Varijacija tada postaje

$$\begin{aligned}\delta F^a &= \frac{1}{2}C^a_{bc}C^b_{de}\varepsilon^c\,A^d\wedge A^e + C^a_{bc}\,\mathrm{d}A^b\varepsilon^c + \omega^a_{bj,i}\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j - \omega^a_{bi}\varepsilon^b\rho^i_c\,\mathrm{d}A^c\\ &\quad - S^a_{bci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b + \omega^a_{bi}\omega^b_{cj}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j + C^a_{dc}\omega^d_{bi}\rho^j_d\varepsilon^c\\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^a_{cj}C^e_{db}\rho^j_e\varepsilon^c\,A^d\wedge A^b - \omega^a_{cj}\omega^d_{bi}\rho^j_d\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b\\ &= \big(C^a_{bc} - \omega^a_{ci}\rho^i_b\big)\varepsilon^c F^b + \frac{1}{2}R^a_{bij}\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j - S^a_{bci}\varepsilon^c\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b,\end{aligned}\tag{3.37}$$

S^a_{bci} već zbog uvjeta zatvorenosti varijacije A iščezava, stoga je nužan i dovoljan uvjet zatvaranja varijacije F ravnost koneksije: $R_\nabla = 0$. Dakle, želimo li zadržati mogućnost zakrivljenja, moramo modificirati definiciju jakosti polja.

Definiramo novu jakost G kao stara jakost F plus zasada proizvoljna 2-forma B:

$$G^a = \,\mathrm{d}A^a + \frac{1}{2}C^a_{bc}\,A^b\wedge A^c + \omega^a_{bi}\,\mathrm{D}X^i\wedge A^b + \frac{1}{2}B^a_{ij}\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j.\tag{3.38}$$

2-formu B fiksiramo uvjetom zatvaranja varijacije jakosti što je i bio razlog njenog uvođenja:

$$\begin{aligned}\delta G^a &= \delta F^a + \frac{1}{2}\delta B^a_{ij}\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j + B^a_{ij}\,\delta\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j\\ &= \delta F^a + \frac{1}{2}B^a_{ij,k}\varepsilon^b\rho^k_b\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j + B^a_{ij}\varepsilon^b(\rho^i_{b,k} - \rho^i_c\omega^c_{bk})\,\mathrm{D}X^k\wedge\,\mathrm{D}X^j\\ &= (C^a_{bc} - \omega^a_{ci}\rho^i_b)\varepsilon^c G^b\\ &\quad + \left(\frac{1}{2}C^a_{bc}B^c_{ij} + \frac{1}{2}\rho^k_c\omega^a_{bk}B^c_{ij} + B^a_{ij}\rho^i_{b,k} + \frac{1}{2}B^a_{ij,k}\rho^k_b + B^a_{ij}\rho^i_c\omega^c_{bk} + \frac{1}{2}R^a_{bij}\right)\\ &\qquad\cdot\varepsilon^b\,\mathrm{D}X^i\wedge\,\mathrm{D}X^j,\end{aligned}$$

dakle uvjet na zakrivljenost prelazi u ograničenje B. Uvjet u zagradi možemo zapisati i u koordinatno nezavisnoj formi:

$$\begin{aligned}\pounds_{\rho_b} B^a &= \,\mathrm{d}(B^a_{ij}\rho^i_b\,\mathrm{d}x^j) + \frac{1}{2}\imath_{\rho_b}(B^a_{ij,k}\,\mathrm{d}x^k\wedge\,\mathrm{d}x^i\wedge\,\mathrm{d}x^j)\\ &= B^a_{ij}\rho^i_{b,k}\,\mathrm{d}x^k\wedge\,\mathrm{d}x^j + B^a_{,k}\rho^k_b,\\ \omega^c_b\wedge(\imath_{\rho_c}B^a) &= -B^a_{ij}\rho^i_c\omega^c_{bk}\,\mathrm{d}x^j\wedge\,\mathrm{d}x^k,\\ \imath_{\rho_b}(\omega^a_c)B^c &= \frac{1}{2}\rho^k_b\omega^a_{ck}B^c_{ij}\,\mathrm{d}x^i\wedge\,\mathrm{d}x^j,\\ t^a_{bc}B^c &= \left(\frac{1}{2}C^a_{bc}B^c_{ij} - \frac{1}{2}\rho^k_b\omega^a_{ck}B^c_{ij} + \frac{1}{2}\rho^k_c\omega^a_{bk}B^c_{ij}\right)\mathrm{d}x^i\wedge\,\mathrm{d}x^j,\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$R^a_b + \pounds_{\rho_b} B^a - \omega^c_b \wedge \imath_{\rho_c} B^a + \imath_{\rho_b}(\omega^a_c) B^c + t^a_{bc} B^c = 0. \tag{3.39}$$

Vidimo da srednja tri člana čine *kovarijantiziranu* Liejevu derivaciju $\{\mathrm{D}_\omega, \imath_\rho\}$ na B:

$$R^a_b + (\{\mathrm{D}_\omega, \imath_\rho\} B)^a_b + t^a_{bc} B^c = 0.$$

Definicija jakosti G je ključni moment zakrivljenja Yang-Mills-Higgsove teorije, ono je jedino moguće uvođenjem 2-forme

$$B^a = \frac{1}{2} B^a_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j, \qquad B = B^a\, \hat{e}_a \in \Gamma(\Lambda^2 T^* M \otimes E).$$

3.2.4 Zakrivljena, baždarno invarijantna akcija

Baždarno invarijantni funkcional akcije definiramo analogno relaciji (3.1) koristeći novu jakost polja G (3.38):

$$S_{\text{CYMH}}[X, A] = \int_\Sigma \frac{1}{2} \kappa_{ab}(X)\, G^a \wedge *G^b + \frac{1}{2} g_{ij}(X)\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j + *V(X). \tag{3.40}$$

Moramo provjeriti uvjete (3.8)-(3.10) na metrike g na M i κ na vlaknu svežnja E za ovu novu akciju. Analogon uvjeta (3.8) možemo dobiti na dva načina, kovarijantizacijom starog uvjeta ili iz definicije uvjeta tj. zahtijevajući baždarnu invarijantnost. Kovarijantiziramo prvo,

$$\begin{aligned}
(\pounds_{\rho_a} g)_{ij} &= \rho^k_a g_{ij,k} + 2\rho_{a(i,j)} = 0 && (3.8)\\
&\left[\rho'_a = M^b_a \rho_b \quad \rho_a = (M^{-1})^b_a \rho'_b\right] \\
(\pounds_{\rho'_a} g)_{ij} &= M^b_a \rho^k_b g_{ij,k} + 2(M^b_a \rho^k_b)_{(,j} g_{i)k} \\
&= M^b_a(\rho^k_b g_{ij,k} + 2\rho_{b(i,j)}) + 2M^b_{a(,j}\rho_{i)b} \\
&= 2(M^{-1})^c_b M^b_{a(,j}\rho'_{i)c} \\
&= 2\omega^b_{a(j}\rho'_{i)b} \\
\Rightarrow \quad (\pounds_{\rho_a} g)_{ij} &= 2\omega^b_{a(i}\rho_{j)b} = \omega^b_a \vee \imath_{\rho_b} g. && (3.41)
\end{aligned}$$

Ovaj uvjet i ostala dva ćemo sada naći razmatrajući varijaciju akcije. Označimo tri člana akcije s redom I, II i III. Pogledajmo prvo varijaciju drugog člana:

$$\begin{aligned}
\delta \mathrm{II} &= \frac{1}{2}\delta g_{ij}\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j + \frac{1}{2} g_{ij}\, \delta\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j + \frac{1}{2} g_{ij}\, \mathrm{D}X^i \wedge *\delta\, \mathrm{D}X^j \\
&= \frac{1}{2} g_{ij,k}\rho^k_a \varepsilon^a\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j + \frac{1}{2} g_{ij}\varepsilon^a(\rho^i_{a,k} - \rho^i_b \omega^b_{ak})\, \mathrm{D}X^k \wedge * \mathrm{D}X^j \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{ij}\varepsilon^a(\rho^j_{a,k} - \rho^j_b \omega^b_{ak})\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^k \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^a\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j (g_{ij,k}\rho^k_a + g_{kj}(\rho^k_{a,i} - \rho^k_b \omega^b_{ai}) + g_{ik}(\rho^k_{a,j} - \rho^k_b \omega^b_{aj})) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon^a\, \mathrm{D}X^i \wedge * \mathrm{D}X^j (g_{ij,k}\rho^k_a + 2\rho_{a(i,j)} - 2\omega^b_{a(i}\rho_{j)b})
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad (\pounds_{\rho_a} g)_{ij} = 2\omega^b_{a(i}\rho_{j)b}, \tag{3.41}$$

što je rezultat koji smo dobili kovarijantizacijom. Zgodno je primijetiti geometrijsku interpretaciju ove relacije, naime, ona odgovara proširenoj (engl. *extended*) Killingovoj jednadžbi

$$\rho_{a(i;j)} = 0,$$

gdje se kovarijantna derivacija odnosi i na koneksiju E-svežnja i na Levi-Civita koneksiju M (2.11). Treći član ima trivijalnu varijaciju

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{III} &= *\delta V = *(V_{,i}\rho^i_a \varepsilon^a) \\ \Longrightarrow \qquad & \rho^i_a V_{,i} = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

pa uvjet ostaje isti. Iz aspekta kovarijantizacije ovo je jasno jer kako se ρ transformira dobro na (3.12), a u originalnom uvjetu (3.10) se ne javlja pod derivacijom pa je izraz kovarijantan bez modifikacije. Varijacijom prvog člana dobivamo uvjet na metriku vlakna κ. No prvo moramo definirati tzv. E-*koneksiju*, to je koneksija ${}^E\nabla$ koju izgradimo iz standardne koneksije ∇ preko *sidrišnog* preslikavanja $\rho(\hat{e}_a) = \rho^i_a \partial_i$.[1] Neka su $s, \tilde{s} \in \Gamma(E)$ onda je djelovanje E-koneksije:

$${}^E\nabla_s \tilde{s} = [s, \tilde{s}] - \nabla_{\rho(s)}\tilde{s},$$

gdje je zagrada ona pridjeljena Liejevom algebroidu (Više u dodatku E). E-koneksijske koeficijente onda lako nađemo pomoću sidrišne mape $\rho : E \to TM$:

$${}^E\Gamma^c_{ab} = C^a_{bc} - \rho^i_a \omega^c_{ib}.$$

Sad računamo varijaciju:

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{I} &= \frac{1}{2}\delta\kappa_{ab}\, G^a \wedge *G^b + \frac{1}{2}\kappa_{ab}\,\delta G^a \wedge *G^b + \frac{1}{2}\kappa_{ab}\, G^a \wedge *\delta G^b \\ &= \frac{1}{2}\kappa_{ab,i}\rho^i_c \varepsilon^c\, G^a \wedge *G^b + \frac{1}{2}\kappa_{ab}(C^a_{cd} - \omega^a_{di}\rho^i_c)\varepsilon^d\, G^c \wedge *G^b \\ &\quad + \frac{1}{2}\kappa_{ab}(C^b_{cd} - \omega^b_{di}\rho^i_c)\varepsilon^d\, G^a \wedge *G^c \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^d\, G^a \wedge *G^b \left(\kappa_{ab,i}\rho^i_d + \kappa_{cb}(C^c_{ad} - \omega^c_{di}\rho^i_a) + \kappa_{ac}(C^c_{bd} - \omega^c_{di}\rho^i_b)\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^d\, G^a \wedge *G^b \left(\kappa_{ab,i}\rho^i_d + {}^E\Gamma^c_{bd}\kappa_{ac} + {}^E\Gamma^c_{ad}\kappa_{cb}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^d\, G^a \wedge *G^b \left({}^E\nabla_d \kappa\right)_{ab} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad {}^E\nabla\kappa = 0, \tag{3.42}$$

dakle uvjet baždarne invarijantnosti akcije na κ prelazi u uvjet da je κ E-kovarijantno konstantna. Geometrijski, također, iz relacije

$$[{}^E\nabla_{e_a}, {}^E\nabla_{e_b}] = C^c_{ab}(x)\,{}^E\nabla_{e_c},$$

[1]Zanimljivo je primijetiti da strukturni tenzor t definiran relacijom (3.19) geometrijski odgovara torziji definiranoj u odjeljku 2.1.1 E-koneksije s koneksijskim koeficijentima ${}^E\Gamma^c_{ab} = \rho^i_a \omega^c_{ib}$.

vidimo da zakrivljenost ove E-koneksije iščezava. Međutim, E-zakrivljenost je

$$ {}^{E}R^{d}_{abc} = \rho^{i}_{c} S^{d}_{iab}, $$

što je konzistentno s uvjetom (3.33) koji smo dobili zahtijevajući zatvaranje varijacije A.

3.3 Primjer Abelove teorije

Do sada smo formirali okvir unutar kojeg se partikularna teorija gradi, a sada ćemo pokazati jednostavan, Abelov, primjer eksplicitne teorije unutar okvira zakrivljenih Yang-Mills-Higgsova teorija (CYMH). Dakle, kako bismo izgradili teoriju, moramo definirati:

(*a*) pseudo-Riemannovu mnogostrukost prostor vremena Σ,

(*b*) Riemannovu mnogostrukost M,

(*c*) Liejev algebroid $E \to M$,

(*d*) koneksiju ∇ na E,

(*e*) funkciju (potencijal) V,

(*f*) 2-formu s vrijednostima u E-svežnju,

(*g*) metriku g na M,

(*h*) metriku κ na E.

Teoriju gradimo na 4D prostoru Minkowskog $\mathbb{R}^{1,3}$ i 2D prostoru Higgsovih polja (time definiramo (*a*) i (*b*)) i kao što smo rekli biramo Abelovu baždarnu grupu simetrija i 1D vlakna svežnja E (dakle (*c*)). Sad kada su osnove izgrađene možemo definirati i ostale elemente teorije. Biramo polje po kojemu baždarimo tj. reprezentaciju baze E, ρ:

$$ \rho = \frac{\partial}{\partial y}; \qquad \rho^{x} = 0, \quad \rho^{y} = 1 \tag{3.43} $$

i (*g*) metriku Higgsove mnogostrukosti M, g, neka je:

$$ g = (\mathrm{d}x)^2 + e^{\lambda xy} (\mathrm{d}y)^2. \tag{3.44} $$

Liejeva derivacija metrike g je:

$$ \begin{aligned} \pounds_{\partial_y} g &= 2(\pounds_{\partial_y} \mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x + (\pounds_{\partial_y} e^{\lambda xy})\,(\mathrm{d}y)^2 + 2e^{\lambda xy}(\pounds_{\partial_y} \mathrm{d}y)\,\mathrm{d}y \\ &\left\{ \pounds_{\partial_i} \mathrm{d}x^j = 0 \right\} \\ &= \lambda x e^{\lambda xy}\,(\mathrm{d}y)^2, \end{aligned} $$

pa iz (3.41) slijedi da je koneksija

$$
\begin{gathered}
(\pounds_{\partial_y} g)_{yy} = 2\omega_y e^{\lambda xy} \\
\Downarrow \\
\omega = \frac{\lambda x}{2}\,\mathrm{d}y\,; \qquad \omega_x = 0, \quad \omega_y = \frac{\lambda x}{2}.
\end{gathered}
$$

Ovim koneksijskim koeficijentima definiramo koneksiju (*d*). Prije nego definiramo B, izračunajmo zakrivljenost R_∇:

$$
\begin{aligned}
R_\nabla &= \mathrm{d}\omega = \omega_{j,i}\,\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\
&= \omega_{y,x}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

Neka je B (definiramo (*f*)):

$$
B = -\frac{\lambda y}{2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\,; \qquad B_{xy} = -\frac{\lambda y}{2}, \tag{3.46}
$$

provjerimo da li je ograničenje (3.39) zadovoljeno. Računamo, članovi s Liejevom derivacijom:

$$
\begin{aligned}
\pounds_{\partial_y} B &= \mathrm{d}\big(\imath_{\partial_y} B\big) + \imath_{\partial_y}(\mathrm{d}B), \\
\mathrm{d}B &= 0, \\
\imath_{\partial_y} B &= B_{yx}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda y}{2}\,\mathrm{d}x, \\
\pounds_{\partial_y} B &= \mathrm{d}\big(\imath_{\partial_y} B\big) = \partial_y \frac{\lambda y}{2}\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

i ostali:

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge \imath_{\partial_y} B &= -\frac{\lambda^2 xy}{4}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \\
\imath_{\partial_y}\omega = \frac{\lambda x}{2} \;\Rightarrow\; \imath_{\partial_y}\omega B &= -\frac{\lambda^2 xy}{4}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Zbrojeno dobijemo

$$
\begin{aligned}
&R + \pounds_{\partial_y} B + \imath_{\partial_y} B \wedge \omega + \imath_{\partial_y}\omega B = \\
&= \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\lambda}{2}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \frac{\lambda^2 xy}{4}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - \frac{\lambda^2 xy}{4}\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,
\end{aligned}
$$

gdje smo uzeli u obzir da je u Abelovom slučaju $C^a_{bc} = t^a_{bc} = 0$. Prelazimo sada na odabir metrike κ (*h*):

$$
\kappa = e^{\lambda xy}. \tag{3.47}
$$

Može se vidjeti da se ovakav odabir slaže s uvjetom (3.42), *E-koneksijski* koeficijenti su

$$
{}^{E}\Gamma = -\rho^i \omega_i = -\frac{\lambda x}{2},
$$

slijedi

$$
\begin{aligned}
{}^{E}\nabla\kappa &= \kappa_{,y} + 2\,{}^{E}\Gamma\kappa \\
&= \lambda x e^{\lambda xy} - \lambda x e^{\lambda xy} = 0.
\end{aligned}
$$

I konačno preostaje odrediti (*e*), potencijal V. Iz (3.10) i činjenice da ρ ima samo y komponentu slijedi da $V \neq V(y)$ pa biramo standardni potencijal:

$$
V(x) = -mx^2 + vx^4. \tag{3.48}
$$

Prije nego možemo napisati punu akciju ovog modela potrebno je još izračunati jakost polja G (3.38):

$$
\begin{aligned}
(\omega_i \,\mathrm{D}X^i \wedge A)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\lambda X D_{[\mu} Y A_{\nu]}, \\
\frac{1}{2}(B_{ij}\,\mathrm{D}X^i \wedge \mathrm{D}X^j)_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\lambda Y D_{[\mu} Y \partial_{\nu]} X, \\
G_{\mu\nu} &= 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} + \frac{1}{2}\lambda\big(X\partial_{[\mu}YA_{\nu]} + YD_{[\mu}Y\partial_{\nu]}X\big),
\end{aligned} \tag{3.49}
$$

gdje je

$$
D_\mu X = \partial_\mu X, \qquad\qquad D_\mu Y = \partial_\mu Y - A_\mu.
$$

Sada imamo sve što nam treba da zapišemo konačnu punu akciju modela raspisanu eksplicitno (3.40):

$$
\begin{aligned}
S[X,A] = \int\limits_{\mathbb{R}^{1,3}} \Bigg[&\frac{e^{\lambda XY}}{4}\Big(2\partial_{[\mu}A_{\nu]} + \frac{1}{2}\lambda(X\partial_{[\mu}YA_{\nu]} + Y\partial_{[\mu}Y\partial_{\nu]}X - YA_{[\mu}\partial_{\nu]}X)\Big)^2 \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu X\partial^\mu X + e^{\lambda XY}\partial_\mu Y\partial^\mu Y + e^{\lambda XY}A_\mu A^\mu - 2e^{\lambda XY}A_\mu\partial^\mu Y\Big) \\
&- mX^2 + vX^4\Bigg]\,\mathrm{d}^4\sigma.
\end{aligned} \tag{3.50}
$$

Zanimljivo je iz ove akcije izračunati jednadžbe gibanja baždarnog polja za usporedbu sa standardnim Maxwellovim jednadžbama poglavlja 1. Računamo članove Euler-Lagrangeove jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = \frac{e^{\lambda XY}}{4}\Big(&2\lambda X\partial_\mu Y\partial^{[\mu}A^{\alpha]} + 2\lambda Y\partial_\mu X\partial^{[\mu}A^{\alpha]} + \frac{1}{2}\lambda^2X^2\partial_\mu Y\partial^{[\mu}YA^{\alpha]} \\
&+ \frac{1}{2}\lambda^2XY\partial_\mu Y\partial^{[\mu}Y\partial^{\alpha]}X - \frac{1}{2}\lambda^2XY\partial_\mu YA^{[\mu}\partial^{\alpha]}X \\
&- \frac{1}{2}\lambda^2XY\partial_\mu XA^{[\mu}\partial^{\alpha]}Y - \frac{1}{2}\lambda^2Y^2\partial_\mu X\Big(\partial^{[\mu}X\partial^{\alpha]}Y - \partial^{[\mu}XA^{\alpha]}\Big)\Big) \\
- e^{\lambda XY}\,&\mathrm{D}^\alpha Y,
\end{aligned}
$$

gdje prepoznajemo jakost polja G (3.49) što značajno pojednostavljuje izraze:

$$
\begin{aligned}
&= \lambda \frac{e^{\lambda XY}}{4} G^{\mu\alpha}(X\partial_\mu Y - Y\partial_\mu X) - e^{\lambda XY}\,\mathrm{D}^\alpha Y, \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= \frac{e^{\lambda XY}}{4}\left(4\partial^{[\alpha}A^{\beta]} + \lambda X\partial^{[\alpha}Y A^{\beta]} + \lambda Y\partial^{[\alpha}Y\partial^{\beta]}X + \lambda Y\partial^{[\alpha}X A^{\beta]}\right) \\
&= \frac{e^{\lambda XY}}{2} G^{\alpha\beta},
\end{aligned}
$$

slijedi da je jednadžba gibanja

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= \lambda \frac{e^{\lambda XY}}{4} G^{\mu\alpha}(X\partial_\mu Y - Y\partial_\mu X) - e^{\lambda XY}\,\mathrm{D}^\alpha Y - \frac{1}{2}\partial_\mu\big(e^{\lambda XY}G^{\mu\alpha}\big) \\
&= 0 \\
&\Downarrow \\
\partial_\mu G^{\mu\alpha} &= -2\,\mathrm{D}^\alpha Y - \frac{1}{2}\, G^{\mu\alpha}\partial_\mu e^{\lambda XY}.
\end{aligned}
$$

Ili jezikom diferencijalnih formi

$$
\,\mathrm{d}{}G = 2\,\mathrm{D}Y + \frac{1}{2}\, G\,\mathrm{d}e^{\lambda XY}, \tag{3.51}
$$

slijedi da je zbog nilpotentnosti operatora $*\,\mathrm{d}*$ sačuvana struja

$$
j = -2\,\mathrm{D}Y - \frac{1}{2}\, G\,\mathrm{d}e^{\lambda XY}.
$$

Istim postupkom se za standardnu U(1) Yang-Mills-Higgsovu teoriju može pokazati da je struja jednaka prvom članu prethodnog izraza. Dakle modifikacija teorije je sadržana u drugom članu. Još nam preostaje da nađemo analogon Bianchijevog identiteta koji u elektrodinamici predstavlja prvu Maxwellovu jednadžbu. Zapišimo prvo jakost polja G (3.49) koristeći diferencijalne forme

$$
\begin{aligned}
G &= \mathrm{d}A + \frac{\lambda}{2} X\,\mathrm{D}Y \wedge A - \frac{\lambda}{2} Y\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{D}Y \\
&= \mathrm{d}A + \frac{1}{2}\lambda X\,\mathrm{d}Y \wedge A - \frac{1}{2}\lambda Y\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y + \frac{1}{2}\lambda Y\,\mathrm{d}X \wedge A,
\end{aligned}
$$

računamo vanjsku derivaciju

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}G &= \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge A - X\,\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}A + \mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}X \wedge A - Y\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}A) \\
&= \frac{1}{2}\lambda(X\,\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}Y + Y\,\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}X),
\end{aligned}
$$

također vrijedi

$$
\begin{aligned}
\omega \wedge G &= \frac{1}{2}\lambda X\,\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}A + \frac{1}{4}\lambda^2 XY\,\mathrm{d}Y \wedge \mathrm{d}X \wedge A \\
\imath_{\partial_y} B \wedge G &= \frac{1}{2}\lambda Y\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}A + \frac{1}{4}\lambda^2 XY\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y \wedge A,
\end{aligned}
$$

stoga možemo zapisati Bianchijev identitet

$$\mathrm{d}G + (\omega + \imath_{\partial_y} B) \wedge G = \mathrm{D}_\omega G + \imath_{\partial_y} B \wedge G = 0. \tag{3.52}$$

Treba primijetiti da svi dosadašnji izrazi prelaze u standardne relacije elektrodinamike u interakciji sa skalarnim poljem kada $\lambda \to 0$, a kako je λ direktan parametar zakrivljenosti (3.45) primjećujemo da je nova teorija u potpunosti kompatibilna sa starom (ravnom) teorijom. Također, jednadžbe gibanja baždarnog polja su i dalje linearne iako netrivijalno vezane na skalarna polja X i Y čije će jednadžbe gibanja, odmah vidljivo iz akcije, zasigurno biti nelinearne. Dakle čak i u najjednostavnijem, U(1), slučaju skalarna polja postaju značajno kompliciranija.

3.4 Zaključak i budućnost teorije

Istraživali smo modifikacije Yang-Mills-Higgsove teorije ukoliko zahtijevamo kovarijantnost svežnja Higgsovih polja M u analogiji s općom teorijom relativnosti. Baš kao što je specijalna teorija relativnosti limes opće kada zakrivljenost iščezava, tako se i standardna Yang-Mills-Higgsova teorija može shvatiti kao specijalan slučaj *zakrivljene*-YMH teorije. To nam osigurava uvjet kompatibilnosti (3.33) zbog kojeg se slučaj $R_\nabla = 0$ svodi na standardnu teoriju. Kako bismo mogli konstruirati konzistentnu teoriju, morali smo modificirati definiciju jakosti polja koja ulazi u izraz za akciju, dodavši novu 2-formu B. U prošlom odjeljku 3.3 smo točkama (*a*)–(*h*) eksplicitno pokazali kako se gradi model unutar ove teorije. Također je bio prezentiran i jednostavan model u okviru ove nove teorije koji pokazuje kakve velike posljedice na same jednadžbe gibanja ima neiščezavanje zakrivljenosti E-svežnja. Ovakva teorija je pokazala da je za zakrivljenje teorije nužno uvođenje Liejevog algebroida kao generalizacije Liejeve algebre. Dakle pripadna baždarna simetrija više ne bi nužno odgovarala nekoj Liejevoj grupi već generalizaciji, Liejevom grupoidu. S obzirom na jako učestalu pojavnost Liejevih grupa u opisu prirode logično je za očekivati će se u prirodi pojavljivati i općenitiji konstrukt.

Međutim, naše razmatranje je bilo isključivo ograničeno na klasičan slučaj. Prvi korak u nastavku razvoja *zakrivljene*-Yang-Mills-Higgsove teorije treba biti kvantizacija te bi tek u tom slučaju mogli istražiti posljedice na realne sisteme. Nakon kvantizacije valja provjeriti renormalizabilnost koju će biti netrivijalno pokazati jer transformacija (3.13) narušava mogućnost provjere prividnom renormalizabilnosti. Kvantizacijom se također mogu javljati i simetrijske anomalije koje treba ukloniti prije nego teorija može biti konzistentna, baš kao što se one sve međusobno poništavaju u standardnom modelu. I konačno, ovo je samo bozonski sektor onoga što sačinjava standardni model. Kako bi ovo postala potpuna teorija materije, u razmatranje treba integrirati i fermionska polja.

Dodaci

Dodatak A

Mnogostrukost i tenzori

Definicija 1. *Neka je $\mathcal{T}$ familja podskupova skupa X, onda $\mathcal{T}$ nazivamo* ***topologijom*** *na X ako:*

i. $\varnothing \in \mathcal{T}$ *i* $X \in \mathcal{T}$,

ii. *za konačno ili beskonačno podskupova* $\{O_{i_k}\}$ *vrijedi da je unija* $\bigcup_k O_{i_k} \in \mathcal{T}$,

iii. *za konačno podskupova* $\{O_{i_k}\}$ *vrijedi da je presjek* $\bigcap_k O_{i_k} \in \mathcal{T}$.

Ako je $\mathcal{U}$ topologija onda X ili par $(X, \mathcal{U})$ nazivamo ***topološkim prostorom****. O_{i_k} nazivamo* ***otvoreni*** *podskup.*

Definicija 2. *Neka je X topološki prostor. Podskup $U \subset X$ nazivamo* ***okolina*** *točke $x \in X$ ako i samo ako je x sadržan u otvorenom podskupu U.*

Definicija 3. *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ nazivamo* ***Hausdorffovim*** *prostorom ako i samo ako se bilo koje dvije točke mogu razdvojiti okolinama tj. ako i samo ako*

$$\forall x \neq y \in X, \quad \exists U, V \in \mathcal{T} \quad | \quad (x \in U) \wedge (y \in V) \wedge (U \cap V = \varnothing).$$

Definicija 4. *Neka su $(X_1, \mathcal{T}_1)$ i $(X_2, \mathcal{T}_2)$ topološki prostori. Za bijekciju $\varphi : X_1 \to X_2$ kažemo da je* ***homeomorfizam*** *ako su i φ i inverz φ^{-1} neprekidna preslikavanja.*

Definicija 5. *n-dimenzionalna* ***mnogostrukost*** *je Hausdorffov prostor takav da svaka točka ima otvorenu okolinu homeomorfnu otvorenom podskupu $\mathbb{R}^n$.*
Otvoreni podskup U prostora M zajedno s homeomorfizmom $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$ nazivamo ***karta****.*
Za dvije karte (U_1, φ_1) i (U_2, φ_2) kažemo da su ***C^r-kompatibilne*** *ako je homeomorfizam $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ r-puta derivabilan.*
C^r-atlas *na mnogostrukosti M je skup C^r-kompatibilnih karti takvih da im domene prekrivaju M.*
C^r-mnogostrukost *je mnogostrukost s pridruženom klasom ekvivalencije C^r-atlasa.*
Diferencijalna mnogostrukost *je C^∞-mnogostrukost.*

Definicija 6. *Tangentni vektor u nekoj točki $p \in M$ je preslikavanje $v_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, za koje, za sve $f, g \in C^\infty(M)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vrijedi:*

i. linearnost $v_p(\alpha f + \beta g) = \alpha v_p(f) + \beta v_p(g)$,

ii. Leibnizovo pravilo $v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f)$.

Vektorski prostor svih vektora točke p označavamo s T_pM. Pridružimo li svakoj točci p mnogostrukosti vektor v_p definirali smo ***vektorsko polje*** *v, skup svih vektorskih prostora T_pM označavamo s TM.*

Definicija 7. *Kovektor, dualni vektor ili* ***1-forma*** *ω_p u točki p je linearno preslikavanje $\omega : T_pM \to \mathbb{R}$. Skup svih 1-formi točke p označavamo s T^*M i nazivamo kotangentni (vektorski) prostor. Analogno vektorskom polju definiramo i* ***polje 1-formi*** *čiji prostor označavamo s T^*M.*

Definicija 8. *Označimo s $\{\hat{e}_i\}$ bazu tangentnog prostora T_pM. Imamo li koordinatni sustav $\{x^i\}$ u okolini točke p on generira* ***koordinatnu bazu****:*

$$\hat{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Neka baza $\{\hat{e}_i\}$ je koordinatna ako i samo ako elementi baze komutiraju:

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = 0.$$

Koordinatna baza T_p^*M je

$$\hat{\theta}^i = \mathrm{d}x^i.$$

Definicija 9. *$\binom{k}{l}$-**tenzor** u točki $p \in M$ je multilinearno preslikavanje:*

$$T : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k} \times \underbrace{T_p^*M \times \cdots \times T_p^*M}_{l} \to \mathbb{R}.$$

Baza tenzora je direktan produkt bazi T_pM i T_p^*M:

$$\partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_l},$$

gdje je oznaka direktnog produkta najčešće implicitna.

Definicija 10. *Ako je M diferencijalna mnogostrukost onda definiramo* ***metriku*** *ili metrički tenzor kao $\binom{0}{2}$ tenzor sa svojstvima:*

i. simetričnost, $g(u, v) = g(v, u), \quad \forall u, v \in TM$,

ii.a. pozitivna definitnost $g(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in TM$, gdje $g(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

ii.b. ako u p vrijedi $g(u, v) = 0, \quad \forall u \in T_pM \Rightarrow v = 0$.

Metrički tenzor sa svojstvom ii.a. nazivamo Riemannov, a onaj sa svojstvom ii.b. pseudo-Riemannov. Slijedi da metrika uspostavlja 1-na-1 vezu vektora i 1-formi. Mnogostrukost s pridjeljenom (pseudo-) Riemannovom metrikom nazivamo ***(pseudo-) Riemannova mnogostrukost****.*

Definicija 11. *Neka su M i N mnogostrukosti, $F : M \to N$ glatko preslikavanje i $f : N \to \mathbb{R}$ realna funkcija na N. Definiramo* ***povlaku*** *ili povlačenje (engl.* pullback*)*

$$F^* f \equiv f \circ F : M \to \mathbb{R}.$$

Dodatak B

Diferencijalne forme

Definicija 12. ***Liejevu zagradu*** *(komutator) vektorskih polja* $X, Y \in TM$ *definiramo kao vektorsko polje s djelovanjem na glatku funkciju* $f : M \to \mathbb{R}$*:*

$$[X, Y]f = X[Y(f)] - Y[X(f)].$$

Liejeva zagrada je linearna u oba argumenta, antisimetrična sa svojstvom ***Jacobijevog identiteta****:*

$$[X, [Y, Z] + [Y, [Z, X] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

i Leibnizovog pravila

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y,$$
$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X.$$

Definicija 13. ***Liejeva derivacija*** *duž krivulje generirane vektorskim polje* X *vektorskog polja* Y *dana je Liejevom zagradom polja* X *i* Y*:*

$$\pounds_X Y = [X, Y].$$

Definicija 14. *Vektorsko polje* K *nazivamo* ***Killingovim*** *ako vrijedi:*

$$\pounds_K g = 0,$$

gdje je g *metrički tenzor mnogostrukosti* M.

Definicija 15. ***Vanjska*** *ili* ***Grassmannova algebra*** $\Lambda(V)$ *nad vektorskim prostorom* V *je asocijativna algebra razapeta* V *s pridjeljenom operacijom* ***vanjskog produkta*** *(engl.* wedge product*) definiranom s*

$$v \wedge v = 0, \quad v \in \Lambda(V).$$

Definicija 16. ***Gradirana algebra*** *je algebra s dekompozicijom u direktnu sumu* $\mathcal{A} = \bigoplus_{p\in P} \mathcal{A}_p$ *za neku Abelovu grupu* P *kompatibilna s produktom tj.* $\mathcal{A}_p \cdot \mathcal{A}_q \subseteq \mathcal{A}_{p+q}$. *Slijedi da je* $\Lambda(V) = \bigoplus_p \Lambda^p(V)$, $\Lambda^1 \cong V$ $\mathbb{Z}$*-gradirana algebra s* $\Lambda^i \neq \{0\} \Leftrightarrow 0 \leq i \leq \dim V$. *Vrijedi onda za elemente* $v \in \Lambda^p(V)$ *i* $u \in \Lambda^q(V)$*:*

$$v \wedge u = (-1)^{pq} u \wedge v.$$

Definicija 17. *Elementi vanjske algebre nad kotangentnim prostorom točke* $x \in M$, $\Lambda^p_x M \equiv \Lambda^p(T^*_x M)$ *su potpuno antisimetrični kovarijantni tenzori i zovu se* ***diferencijalne forme*** *reda* p *ili kraće* p*-forme. Polja diferencijalnih formi se definiraju analogno vektorskim poljima i pripadaju prostoru koji se označava s* $\Lambda^p M$. p*-formu* ω *možemo zapisati po komponentama:*

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{i_1 \dots i_p}\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}$$

onda vanjski produkt postaje:

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!q!}\alpha_{i_1 \dots i_p}\beta_{i_{p+1} \dots i_{p+q}}\,\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_{p+q}} \in \Lambda^{p+q}M, \quad \forall\, \alpha \in \Lambda^p M \,\wedge\, \beta \in \Lambda^q M.$$

Definicija 18. *Definiramo operator* ***vanjske derivacije*** *kao linearno preslikavanje* $\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ *sa svojstvima:*

i. $\mathrm{d}f(X) = X(f), \quad f \in C^\infty(M)$

ii. $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^{pq}\,\omega \wedge \mathrm{d}\eta, \quad \forall\, \omega \in \Omega^p(M) \,\wedge\, \eta \in \Omega^q(M)$

iii. $\mathrm{d}^2 = 0$

gdje je $\Omega^p(M)$ *prerez* $\Lambda^p M$ *svežnja (vidi dodatak D). Po komponentama vanjska derivacija djeluje na* p*-formu* ω *na sljedeći način:*

$$(\mathrm{d}\omega)_{i \dots jk} = (-1)^p(p+1)\omega_{[i \dots j,k]}. \tag{B.1}$$

Definicija 19. ***Kontrakcija*** *vektorom* X, $\imath_X : \Omega^p \to \Omega^{p-1}$

$$(\imath_X\omega)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(X, (v_1, \dots, v_{p-1})$$

$$(\imath_X\omega)_{i_1 \dots i_{p-1}} = X^j\omega_{j i_1 \dots i_{p-1}}.$$

Vrijedi $\imath_X^2 = 0$.

Definicija 20. *Definiramo operator,* ***Hodgeov dual*** $* : \Omega^p \to \Omega^{n-p}$ *gdje je* n *dimenzija mnogostrukosti* M*:*

$$*\omega = \frac{1}{p!(n-p)!}\,\varepsilon_{i_1 \dots i_n}\omega^{i_1 \dots i_p}\,\mathrm{d}x^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge \mathrm{d}x^{i_n} \tag{B.2}$$

gdje su indeksi p*-forme* ω *dignuti koristeći metriku* g, *a* ε *Levi-Civita tenzor (vidi dodatak C). Svojstva duala su:*

$$*1 = \varepsilon, \quad *^2 = (-1)^{p(n-p)}\,\mathrm{sgn}\det g.$$

Liejevu derivaciju diferencijalne forme možemo zapisati koristeći vanjsku derivaciju i kontrakciju:

$$\pounds_X\,\omega = (\mathrm{d}\imath_X + \imath_X\,\mathrm{d})\,\omega.$$

Definicija 21. *Neka su M i N (pseudo-) Riemannove mnogostrukosti s metrikama redom g i h. Injektivno preslikavanje $F : M \to N$ nazivamo* ***izometrijom*** *ako F zadovoljava:*

$$g(X, Y) = h(F(X), F(Y)), \quad \forall\, X, Y \in \Gamma(TM).$$

Definicija 22. *Neka je (M, g) (pseudo-) Riemannova mnogostrukost.* ***Grupa izometrija*** *je skup svih bijektivnih izometrija $F : M \to M$ s grupnom operacijom kompozicijom funkcija i identitetom, funkcijom identiteta.*

Dodatak C

Levi-Civita tenzor

Definicija 23. *Definiramo **Levi-Civita simbol** kao*

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1, & \operatorname{sgn} \sigma(i_1 \dots i_n) = 1 \\ -1, & \operatorname{sgn} \sigma(i_1 \dots i_n) = -1 \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases}$$

Opća koordinatna transformacija Levi-Civita simbola je

$$\epsilon_{i'_1 \dots i'_n} = \left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right| \epsilon_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_n}}{\partial x^{i'_n}},$$

gdje je $\left| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right|$ *Jacobijan. Dakle Levi-Civita simbol je tenzorska gustoća težine 1.*

Definicija 24. *Definiramo **Levi-Civita tenzor***

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} &= \sqrt{\det g}\, \epsilon_{i_1 \dots i_n}, \\ \varepsilon^{i_1 \dots i_n} &= \operatorname{sgn} g \, \frac{1}{\sqrt{\det g}}\, \epsilon_{i_1 \dots i_n}. \end{aligned}$$

*Mnogostrukosti na kojima se može definirati Levi-Civita tenzor nazivaju se **orijentabilnim mnogostrukostima**.*

Definicija 25. *Tradicionalna pokrata volumnog elementa je*

$$\mathrm{d}^n x = \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$$

*međutim ovo je gustoća. Stoga definiramo **volumnu formu**:*

$$\varepsilon = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = \frac{1}{n!} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_n},$$

s normalizacijom:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} = (\operatorname{sgn} \det g)\, n!,$$

koja je invarijantna na koordinatne transformacije.

Dodatak D

Svežnjevi

Definicija 26. ***Svežanj*** *je uređena petorka* (E, π, B, F, G) *koju sačinjavaju:*

i. *topološki prostor* E *–* ***totalni protor,***

ii. *topološki prostor* X *–* ***bazni prostor,***

iii. *neprekidna surjekcija* ***projekcija*** $\pi : E \to X$*,*

iv. *topološki prostor* F *–* ***standardno vlakno****. Ono je homeomorfno svim inverznim slikama* $\pi^{-1}(x) = F_x,\ x \in X$*;* F_x *često nazivamo samo* ***vlakno*** *u točci* x*, dalje*

v. *grupu* G *–* ***stukturnu grupu*** *– homeomorfizama* F*,*

vi. *otvoreni skup pokrivanja* $\{O_\alpha\}$ *baznog prostora* X *s homeomorfizmima* ϕ_α *takvim da*

$$\forall O_\alpha\, \exists \phi_\alpha : \pi^{-1}(O_\alpha) \to O_\alpha \times F, \quad \pi\phi_\alpha^{-1}(x, f) = x, \quad x \in O_\alpha,\ f \in F$$

ϕ_α *se naziva* ***lokalna trivijalizacija****.*

Definicija 27. *Grupa* G *se javlja pri prijelazu iz jednog skupa lokalnih koordinata svežnja* (O_α, ϕ_α) *u drugi* (O_β, ϕ_β)*. Pretpostavimo da* O_α *i* O_β *imaju neprazan presjek* $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$*. Promotrimo neprekidno i invertibilno preslikavanje*

$$t_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (O_\alpha \cap O_\beta) \times F \to (O_\alpha \cap O_\beta) \times F.$$

Fiksiranjem $x \in O_\alpha \cap O_\beta$*, preslikavanje* $t_{\alpha\beta} : F \to F$ *preslikava neku točku vlakna u drugu točku vlakna pa se naziva* ***prijelazna*** *ili* ***tranzicijska funkcija****. One zadovoljavaju:*

$$\begin{aligned} t_{\alpha\alpha} &= \mathbf{1}, \\ t_{\alpha\beta} &= t_{\beta\alpha}^{-1}, \\ t_{\alpha\beta} t_{\beta\gamma} &= t_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

Definicija 28. *Skup svih prijelaznih funkcija* t *generiraju* ***strukturnu grupu***

$$G = \{t_{\alpha\beta}\}.$$

Definicija 29. ***Trivijalni svežanj*** *je svežanj kod kojeg je totalni prostor direktni produkt baznog prostora i vlakna*

$$E = B \times F.$$

Sve prijelazne funkcije trivijalnog svežnja odgovaraju funkciji identiteti

$$t_{\alpha\beta} = \mathbf{1} \equiv \mathrm{id}.$$

Definicija 30. ***Glavni*** *ili* ***G-svežanj*** $P(X, G)$ *je svežanj čije je vlakno sama strukturna grupa* $F \equiv G$.

Definicija 31. ***Vektorski svežanj*** *je svežanj čije je vlakno vektorski prostor s reprezentacijom* ρ *strukturne grupe* G *na vektorskom prostoru* F. *Kaže se da je* ***pridružen glavnom svežnju*** *ako su pripadne prijelazne funkcije slika djelovanja* ρ *na prijelazne funkcije glavnog svežnja.*

Definicija 32. ***Prerez*** *ili* ***globalni prerez*** *svežnja* E *je neprekidno preslikavanje*

$$s : X \to E, \quad (\pi \circ s)(x) = \pi s(x) = \mathrm{id}_X x = x, \quad \forall x \in X.$$

Ako je prerez definiran samo na otvorenom skupu $O \subset X$ *onda se on naziva* ***lokalni prerez****. Skup svih prereza označavamo s* $\Gamma(E)$*, a lokalnih prereza na otvorenom skupu* O *s* $\Gamma(O, E)$.

Definicija 33. ***Tangentni svežanj*** *je posebna vrsta vektorskog svežnja na mnogostrukosti* M *u kojemu su vlakna* $F_x \equiv T_x M$:

$$E = TM \equiv \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

Dakle, svako vlakno je homeomorfno s $\mathbb{R}^n$*, a strukturna grupa je* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. *Analogno definiramo* ***kotengentni svežanj*** *s vlaknom* $F_x \equiv T_x^* M$.

Definicija 34. ***Vektorsko polje*** *je prerez tangentnog svežnja* TM*, pa je vektorsko polje* $v(x) \in \Gamma(TM)$. ***Polje diferencijalnih formi*** *reda* p *je prerez svežnja* $\Lambda^p M$*, dakle polje* p*-formi* $\omega \in \Gamma(\Lambda^p M) \equiv \Omega^p(M)$.

Dodatak E

Liejev algebroid

Definicija 35. *Neka je M diferencijalna mnogostrukost i (E, π, M) vektorski svežanj na M.* ***Struktura Liejevog algebroida*** *na svežnju E je onda definirana s:*

i. operacijom $(s_1, s_2) \mapsto [s_1, s_2]$ na prostoru $\Gamma(E)$ glatkih presjeka čime $\Gamma(E)$ postaje Liejeva algebra,

ii. glatkim preslikavanjem $\rho : E \to TM$, takvim da za svaki par (s_1, s_2) glatkih presjeka E i svaku glatku funkciju $f : M \to \mathbb{R}$ vrijedi Leibnizovo pravilo

$$[s_1, fs_2] = f[s_1, s_2] + \pounds_{\rho\circ s_1} fs_2,$$

gdje za Liejevu derivaciju funkcije možemo zapisati

$$\pounds_{\rho\circ s_1} f = \imath_{\rho\circ s_1} \mathrm{d}f.$$

Vektorski svežanj (E, π, M) s pripadnom strukturom Liejevog algebroida nazivamo ***Liejev algebroid*** i *označavamo s (E, π, M, ρ), $\rho : E \to TM$ nazivamo* ***sidrišnim preslikavanjem****. Preslikavanje $s \mapsto \rho \circ s$ je homomorfizam tj. vrijedi*

$$[\rho \circ s_1, \rho \circ s_2] = \rho \circ [s_1, s_2], \quad \forall s_1, s_2 \in \Gamma(E).$$

Izaberemo li lokalne koordinate $\{x^i\}$ na M i bazu $\Gamma(E)$, $\{\hat{e}_a\}$, zagrada i sidrišno preslikavanje poprime oblik

$$[\hat{e}_a, \hat{e}_b] = C^c_{ab}\hat{e}_c, \qquad \rho(\hat{e}_a) = \rho^i_a \partial_i, \qquad C^c_{ab}, \rho^i_a \in C^\infty(M).$$

Funkcije C^c_{ab} i ρ^i_a zadovoljavaju poopćeni Jacobijev identitet

$$C^e_{ad}C^d_{bc} + \rho^i_a C^e_{bc,i} + C^e_{bd}C^d_{ca} + \rho^i_b C^e_{ca,i} + C^e_{cd}C^d_{ab} + \rho^i_c C^e_{ab,i} = 0 \tag{E.1}$$

i strukturu

$$\rho^j_a \rho_{b,j} - \rho^j_b \rho_{a,j} = \ C^c_{ab}\rho_c, \tag{E.2}$$

što slijedi iz činjenice da je ρ homomorfizam. Sada ove funkcije u potpunosti određuju Liejev algebroid.

Jednostavni primjeri Liejevih algebroida su Liejeva algebra gdje je bazna mnogostrukost točka i sidrišno preslikavanje $\rho = 0$ i tangentni svežanj TM neke opće mnogostrukosti M s komutatorom vektorskih polja kao zagradom i id_{TM} kao sidrišnim preslikavanjem.

Bibliografija

[1] Baez, J.; Muniain, J. P. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.

[2] Bertlmann, R. A. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 1996.

[3] Bleecker, D. *Gauge Theory and Variational Principles*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[4] Bojowald, M.; Kotov, A.; Strobl, T. *Lie algebroid morphisms, Poisson Sigma Models, and off-shell closed gauge symmetries*. Journal of Geometry and Physics Vol. 54, 04(2005). arXiv:math/0406445 [math.DG]

[5] Brading, K.; Brown, H. R. *Noether's Theorems and Gauge Symmetries*. arXiv:hep-th/0009058.

[6] Carol, S. M. *Lecture Notes on General Relativity*. arXiv:gr-qc/9712019.

[7] Catren, G. *Geometric Foundations of Classical Yang-Mills Theory*. Studies in History and Philosophy of Modern Physics Vol. 39, No. 03, (2008), pages 511-531.

[8] Cvitanović, P. *Differential Calculus on Manifolds*, `http://www.cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-6124-12/StGoChap11.pdf`, 9.6.2016.

[9] Cvitanović, P. *Vectors and Tensors*, `http://www.cns.gatech.edu/~predrag/courses/PHYS-6124-12/StGoChap10.pdf`, 9.6.2016.

[10] Gallier, J.; Quaintance, J. *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*, `http://www.seas.upenn.edu/~jean/diffgeom.pdf`, 1.8.2016.

[11] Geis, M. L.; *Notes on the Riemannian geometry of Lie groups*. Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal Vol. 15, No. 02, (2014).

[12] Grützmann, M.; Strobl, T. *General Yang-Mills type gauge theories for p-form gauge fields: From physics to mathematics*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 12, No. 01, 1550009 (2015).

[13] Henneaux, M.; Teitelboim, C. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 1991.

[14] Kobayashi, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Springer-Verlag Berlin, 1972.

[15] Kotov, A.; Strobl, T. *Curving Yang-Mills-Higgs Gauge Theories*. Physical Review D Vol. 92, No. 08, (2015).

[16] Kotov, A.; Strobl, T. *Gauging without initial symmetry*. Journal of Geometry and Physics Vol. 99, 01(2016), pages 184-189. arXiv:1403.8119 [hep-th]

[17] Kreuzer, M. *Lecture notes: Geometry, Topology and Physics I*, `http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/inc/gtp1.pdf`, 3.4.2016.

[18] Kreuzer, M. *Lecture notes: Geometry, Topology and Physics II*, `http://hep.itp.tuwien.ac.at/~kreuzer/inc/gtp2.pdf`, 3.4.2016.

[19] Marle, C. M. *Calculus on Lie algebroids, Lie groupoids and Poisson manifolds*. arXiv:0806.0919 [math.DG].

[20] Mayer, C.; Strobl, T. *Lie Algebroid Yang Mills with Matter Fields*. Journal of Geometry and Physics Vol. 59, 12(2009), pages 1613-1623. arXiv:0908.3161 [hep-th]

[21] Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*, Second Edition. Institute of Physics Publishing, 2003.

[22] Nielsen, M. *Introduction to Yang-Mills theories*, `http://michaelnielsen.org/blog/yang_mills.pdf/`, 4.4.2016.

[23] Picard, S. *Introduction to the Yang-Mills Equations*, `http://www.math.mcgill.ca/gantumur/math581w12/downloads/picard_YM.pdf`, 6.8.2016.

[24] Pope, C. *Geometry and Group Theory*, `http://people.physics.tamu.edu/pope/geom-group.pdf`, 3.4.2016.

[25] Schutz, B. F. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, 1980.

[26] Smolić, I. *Diferencijalna geometrija u fizici*, `http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ismolic/dgf.pdf`, 11.8.2016.

[27] Strobl, T. *Algebroid Yang-Mills Theories*. Physical Review Letters 93, 211601 11(2004). arXiv:hep-th/0406215

[28] Vuković, I. *Hopfov svežanj i elektomagnetsko polje*. Diplomski rad. Zagreb : Prirodoslovno-matematički fakultet, 2016.