

# Problem čuvara umjetničke galerije

---

**Pavičić, Goran**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2017**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:043667>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-22**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Goran Pavičić

**PROBLEM ČUVARA UMJETNIČKE  
GALERIJE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*za Anu*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Opis problema</b>	<b>2</b>
1.1 Osnovni pojmovi . . . . .	2
1.2 Neki jednostavniji primjeri . . . . .	4
1.3 Neki pokušaji ostvarivanja nadzora . . . . .	5
1.4 Rješenja pomoću triangulacije i bojanje vrhova . . . . .	7
1.5 Fiskov i Chvátalov dokaz . . . . .	10
<b>2 Triangulacija i algoritmi</b>	<b>15</b>
2.1 Triangulacija i 3-bojanje . . . . .	15
2.2 Algoritmi . . . . .	19
2.3 Konveksna podjela . . . . .	27
<b>3 Ortogonalni poligoni</b>	<b>31</b>
3.1 Podjela na konveksne četverokute . . . . .	31
3.2 Sackova podjela . . . . .	36
3.3 Algoritam i dokaz prema Lubiw . . . . .	37
<b>4 Neke druge varijante problema</b>	<b>41</b>
4.1 Čuvari u pokretu . . . . .	41
4.2 Nadzor vanjskog dijela poligona . . . . .	44
<b>Bibliografija</b>	<b>49</b>

# Uvod

Problem čuvara umjetničke galerije nastao je 1973. godine te ga je predstavio Victor Klee. Problem se sastoji u određivanju najmanjeg potrebnog broja čuvara koji će biti dovoljni za nadgledanje unutrašnjosti galerije s  $n$  zidova (Honsberger 1976.). Ubrzo je Vasek Chvátal utvrdio "Chvátalov teorem umjetničke galerije":  $\lfloor n/3 \rfloor$  čuvara će biti povremeno potrebno i uvijek dovoljno da bi nadzirali poligon s  $n$  vrhova (Chvátal 1975.). Ključan korak Chvátalovog teorema bit će podjela poligona na trokute pošto znamo da je svaki trokut konveksan poligon. Tada će za svaki trokut biti dovoljan jedan čuvar da ga nadgleda što je i ideja dokaza. Nakon tog teorema problem se počeo razvijati u mnogim smjerovima od kojih ćemo mi neke razmotriti kao što je nadzor ortogonalnih poligona, a dotaknuti ćemo se i rješavanja problema nužnosti za čuvare koji imaju mogućnost kretanja. U posljednjem poglavlju ovog rada promotrit ćemo i neke druge varijante problema kao što je nadzor vanjskog dijela poligona poznat kao Problem nadzora utvrde ili još teže, istovremeni nadzor unutrašnjeg i vanjskog dijela poligona poznat kao Problem zatvorskog dvorišta.

# Poglavlje 1

## Opis problema

### 1.1 Osnovni pojmovi

Tijekom obrade tematike problema nadzora umjetničke galerije koristit ćemo neke pojmove koje sada definiramo. Ti pojmovi su definirani dovoljno detaljno kako bi njihov smisao imao odgovarajuću formu za konstruiranje i rješavanje zadanog problema.

**Definicija 1.1.** Neka su  $v_1, v_2, \dots, v_n$  različite točke u euklidskoj ravnini pri čemu nikoje tri uzastopne, uzevši ciklički poredak, nisu kolinearne. Pretpostavimo da dužine (segmenti)  $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \dots, \overline{v_{n-1}v_n}, \overline{v_nv_1}$  nemaju zajedničkih točaka osim krajnjih (rubnih). Skup  $\overline{v_1v_2} \cup \overline{v_2v_3} \cup \dots \cup \overline{v_{n-1}v_n} \cup \overline{v_nv_1}$  tako čini zatvorenu poligonalnu crtu (zatvorenu izlomljenu crtu) bez samopresijecanja.

Područje ravnine omeđeno tom poligonalnom crtom nazivamo poligon i označavamo s  $P$ .

Skup  $\partial P = \bigcup_{i=1}^n \overline{v_iv_{i+1}}$  nazivamo *rub poligona*, pri čemu su točke  $v_1, v_2, \dots, v_n$  *vrhovi* poligona  $P$ , a dužine  $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \dots, \overline{v_{n-1}v_n}, \overline{v_nv_1}$  su *stranice* poligona  $P$ .

Rub poligona ovdje smatramo dijelom poligona kao zatvorenog podskupa ravnine, a za neku točku  $x \in P$  po potrebi ćemo naglasiti pripada li rubu poligona ili njegovoj unutrašnjosti  $\text{Int}P = P \setminus \partial P$ .

**Definicija 1.2.** Neka je zadan poligon  $P$ . Kut koji se nalazi u unutrašnjosti poligona  $P$  s vrhom u  $v_i, i = 1, \dots, n$ , omeđen dužinama  $\overline{v_{i-1}v_i}$  i  $\overline{v_iv_{i+1}}$  nazivamo konveksnim (konkavnim) ako je njegova mjera manja (veća) od  $180^\circ$ . Također, tada i vrh kuta  $v_i$  nazivamo konveksnim (konkavnim).

Napomenimo da smo ovdje primijenili sljedeći Jordanov teorem, s obzirom da je zatvorena poligonalna crta bez samopresijecanja primjer jednostavne zatvorene Jordanove krivulje u ravnini.

**Teorem 1.1** (Jordanov teorem). *Jednostavno zatvorena krivulja u ravnini (Jordanova krivulja) dijeli ravninu na točno dva povezana područja (jedno omeđeno - nutrina, a drugo neomeđeno - vanjšina) kojima je ta krivulja zajednički rub.*

Pretpostavimo da je umjetnička galerija smještena u zgradi čiji tlocrt ima oblik poligona (rub poligona odgovara u tlocrtu zidovima galerije). Za nadzor galerije potrebno je nadgledati svaku točku unutrašnjosti i ruba tog prostora. Uzmimo da su čuvari postavljeni u određenim nadzornim (stacionarnim) točkama, iz kojih se ne pomiču, a nadgledaju  $360^\circ$  okoline oko sebe.

Victor Klee postavio je 1973. problem određivanja najmanjeg broja čuvara koji će biti dovoljan za nadzor cjelokupnog prostora galerije poligonalnog tlocrta s  $n$  strana. Smatramo da je točka  $y$  poligona  $P$  vidljiva iz točke  $x$  tog poligona ako je cijeli segment  $\overline{xy}$  sadržan u  $P$ .

**Definicija 1.3.** Neka je  $P$  poligon s  $n$  vrhova. Funkciju  $G(P)$  definiramo kao

$$G(P) = \min \text{card}\{x \in P : \forall y \in P \quad \overline{xy} \subseteq P\}.$$

To znači da je  $G(P)$  najmanji broj nadzornih točaka iz kojih se vidi cjelokupna unutrašnjost i rub poligona  $P$ . Problem je očito trivijalan ako je poligon  $P$  konveksan, jer je onda dovoljan jedan čuvar, postavljen u bilo kojoj točki unutrašnjosti ili ruba tog poligona. Stoga je problem od interesa samo za poligone u kojima je barem jedan (unutarnji) kut konkavan.

Poznato je da za konveksni  $n$ -terokut zbroj unutarnjih kutova je jednak  $(n - 2)180^\circ$ . Isti rezultat vrijedi i za poligone koji nisu konveksni, a dobit ćemo ga nešto kasnije kao posljedicu mogućnosti podjele bilo kojeg poligona na  $n - 2$  trokuta (triangulacija, Teorem 2.1). Odatle će se vidjeti da poligon s  $n$  vrhova može imati najviše  $n - 3$  konkavnih kutova, a da se ta najveća vrijednost doista postiže vidjet će se u primjeru ilustriranom slikom 2.8.

Rješenje problema Victora Klee-a značilo bi poznavanje vrijednosti funkcije  $g(n)$  kojom je određen broj čuvara potreban za nadzor *bilo kojeg* poligonalnog područja s  $n$  vrhova.

Ako za pojedini  $n$  promatramo sve poligone s  $n$  vrhova, onda je broj  $g(n)$  potrebnih točaka nadzora jednak najvećoj vrijednosti  $G(P)$  koja se postiže za neki poligon  $P$  s  $n$  vrhova.

Naime, da bismo "pokrili" sve slučajeve poligona s  $n$  vrhova, moramo uzeti  $G(P)$  dovoljno velik za "najzahtjevniji" slučaj.

**Definicija 1.4.** Funkcija  $g(n)$  zadana je s

$$g(n) = \max\{G(P) : P \text{ je poligon s } n \text{ vrhova}\}.$$

Naglasimo još jednom da se funkcija  $G(P)$  odnosi na pojedini poligon  $P$ , dok se  $g(n)$  odnosi na sve poligone s  $n$  vrhova. Drugim riječima,  $g(n)$  čuvara dovoljno je za bilo koji

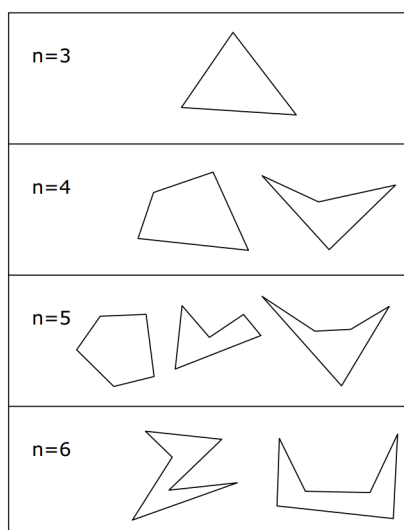


poligon s  $n$  vrhova (iako se za neke takve poligone nadzor može osvariti i s manje čuvara), a postoji barem jedan poligon za koji je taj broj nužan.

Jednu logičnu smjernicu za određivanje gornje međe vrijednosti  $g(n)$  pruža nam podjela općeg poligona na konveksne podskupove, budući da je za svaki takav podskup dostatan nadzor jednog čuvara. Već spomenuta mogućnost triangulacije poligona pokazat će kako je  $n - 2$  sigurno dovoljan broj čuvara za bilo koji poligon s  $n$  vrhova, no preciznijim razmatranjima dobit će se znatno bolji rezultat za vrijednost  $g(n)$ . Glavni je cilj ovog poglavlja dokazati da vrijedi  $g(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .

## 1.2 Neki jednostavniji primjeri

Najveći mogući broj čuvara potrebnih za nadzor bilo koje galerije s  $n$  vrhova bit će određen funkcijom  $g(n)$ . Promotrimo situacije za neke jednostavnije primjere u kojima će biti potreban manji broj čuvara nego li je to  $g(n)$ .

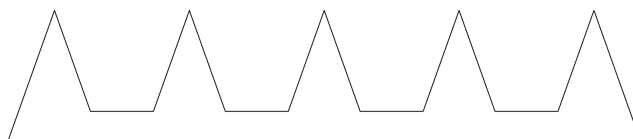


Slika 1.1: Za poligone s 5 ili manje vrhova dovoljan nam je jedan čuvar, dok kod nekih poligona s 6 vrhova su nam potrebna dva čuvara

Kod malog broja vrhova ( $n \leq 6$ ) vrlo brzo dolazimo do rješenja minimalnog broja čuvara. Očito je  $g(3) = 1$  čuvar. Također je  $g(4) = 1$ , naime za nekonveksni četverkut dovoljno je postaviti čuvara u vrh konkavnog kuta.

Nešto manje je očito  $g(5) = 1$  zbog toga što su moguća tri različita slučaja gdje nam se pojavljuju 0, 1 ili 2 konkavna kuta u unutrašnjosti poligona  $P$ .

Za  $n = 6$  imamo dva oblika s obzirom na raspored konkavnih vrhova (uzastopni ili ne) za koje će biti potrebna 2 čuvara, ali nikad nisu potrebna tri, tako da je  $g(6) = 2$ . Jedan slučaj je oblik slova Z dok je drugi slučaj takozvani "češalj" s  $k = 2$  zuba. Generalizacijom "češlja" s  $k$  "zuba" gdje je broj vrhova poligona  $n = 3k$  biti će nam potrebno  $k$  čuvara (slika 1.2). Primjer "češlja" pokazuje da općenito vrijedi  $g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . Poligon oblika "češlja"



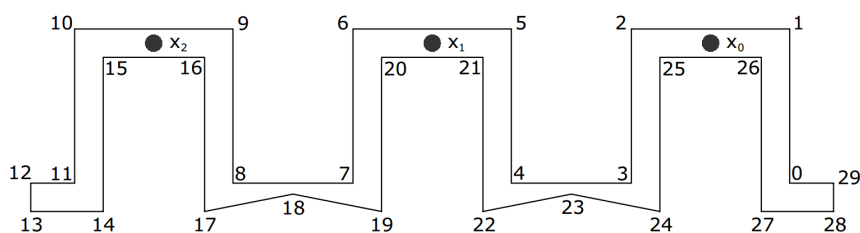
Slika 1.2: Svaki *zub* ovog češlja zahtijeva svog čuvara. U ovom slučaju imamo petnaestorokut i potrebno nam je pet čuvara.

je primjer gdje ćemo lako odrediti donju među  $g(n)$ , no glavna poteškoća je određivanje dovoljne vrijednosti za svaki  $n$ . Sada promotrimo neke situacije kako ostvariti nadzor s  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara.

### 1.3 Neki pokušaji ostvarivanja nadzora

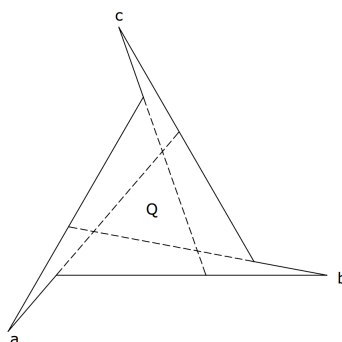
U pokušajima rješavanja problema nadzora, prirodno je razmotriti neka pojednostavljena u pristupu, čak i ako se pokažu nedostatnima općenito, jer nam pružaju bolji uvid u složenost problema i mogu nas navesti na potrebna poboljšanja u različitim situacijama. Dobivena procjena oblika  $g(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  sugerira da bi se možda nadzor mogao uvijek ostvariti postavljanjem čuvara u svaki treći vrh.

Nije sasvim lako konstruirati primjer koji pokazuje pogrešnost ove slutnje. Razmotrimo poligon  $P$  s  $n = 30$  vrhova, prikazan na slici 1.3. Postavljanjem čuvara u svaki treći vrh, bez obzira na to od kojeg vrha krenuli, jedna od istaknutih točaka  $x_0$ ,  $x_1$  ili  $x_2$  uvijek će ostati nevidljiva svim čuvarima. (Preciznije, ako se čuvare postavi u sve vrhove  $i$  takve da je  $i \equiv m \pmod{3}$ , onda točka  $x_m$  ostaje izvan područja nadzora). Ovo, naravno, ne znači samo po sebi da se nadzor poligona  $P$  ne bi mogao ostvariti s 10 čuvara, nego da to nije moguće takvim njihovim razmještajem.



Slika 1.3: Čuvari postavljeni u svakom trećem vrhu neće moći nadgledati neku od točaka  $x_0$ ,  $x_1$  ili  $x_2$ .

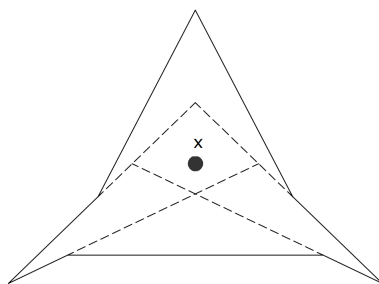
Nadalje, možemo ispitati redukciju problema u kojoj bi se ostvario nadzor nad čitavim rubom poligona, nadajući se da bi se time osigurala i vidljivost unutrašnjosti. No, šesterokut s tri konkavna vrha, prikazan na slici 1.4, čiji su konveksni vrhovi označeni s  $a$ ,  $b$  i  $c$ , takvog je oblika da čuvari smješteni u ta tri vrha zajednički vide cjelokupni rub, ali trokut  $Q$  u unutrašnjosti ostaje izvan njihova nadzora. S druge strane, dva čuvara smještena npr. u vrhu  $a$  i u konkavnom vrhu koji je najbliži vrhu  $b$  nadziru cijeli rub i unutrašnjost šesterokuta. Dakle, nadzor ruba općenito ne osigurava nadzor cijele nutrine poligona.



Slika 1.4: Čuvari u točkama  $a$ ,  $b$  i  $c$  nadziru rub, ali ne i unutrašnjost galerije.

Još jedna redukcija, koja se dosta prirodno nameće, jest ona u kojoj se čuvari postavljaju samo u vrhove poligona. Nazovimo takve čuvarice "vršnim" čuvarima te neka je  $g_v(n)$  broj vršnih čuvara koji je nužan i dovoljan za nadzor bilo kojeg  $n$ -terokuta. U nekim pojedinačnim primjerima vidljivo je da ograničavanje samo na vršne čuvarice umanjuje djelotvornost nadzora, kao na slici 1.5, gdje su nužna dva vršna čuvara, a za cjelokupni nadzor dostatan je jedan čuvar, postavljen u točku  $x$  u nutрини poligona. No, taj primjer ne utječe stvarno na usporedbu vrijednosti funkcija  $g(n)$  i  $g_v(n)$ , budući da  $g(n)$  obuhvaća sve moguće slučajeve za poligone s  $n$  vrhova. Zapravo, pokazat će se da je  $g(n) = g_v(n)$ , a to će slijediti

kao dodatni podatak iz predstojećih dokaza dovoljnosti broja čuvara pa se nećemo zasebno baviti tim pitanjem. Međutim, u nekim posebnim oblicima problema nadzora restrikcija na vršne čuvare doista daje bitno drukčiji rezultat pa je dobro imati to u vidu.



Slika 1.5: Ponekad čuvari koji se nalaze u unutrašnjosti poligona mogu nadgledati više nego li čuvari u vrhovima.

## 1.4 Rješenja pomoću triangulacije i bojanje vrhova

Dosad razmotreni primjeri navode na pomisao da bi za bilo koji  $n$  moglo vrijediti  $g(n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , ali još nismo uočili strategiju biranja nadzornih točaka koja bi općenito argumentirala ispravnost takve tvrdnje. Primjerice, vidjeli smo da se ova formula koja ukazuje na "otprilike trećinu broja vrhova poligona" ne može uvijek opravdati biranjem svakog trećeg vrha poligona kao položajem pojedinog čuvara.

Međutim, ideja s "trećinom broja vrhova" može se uspješno provesti ako se primijeni triangulacija poligona, to jest podjela zadanog poligona na trokute, tako da je skup svih vrhova tih trokuta jednak skupu vrhova poligona. Pokazat će se da je svaki poligon moguće rastaviti na  $n - 2$  trokuta, ucrtavanjem nekih  $n - 3$  dijagonala. (To je očito za konveksne poligone, gdje se jednostavno povuku sve dijagonale iz jednog vrha). Nakon toga treba na optimalan način izabrati vrhove tako da svaki trokut iz triangulacije bude zastupljen jednim vrhom. Oba najranija i najpoznatija rješenja problema nadzora koriste triangulaciju (Chvátal, 1975. i Fisk, 1978.), s tim da je Fiskov dokaz kraći i elegantniji jer primjenjuje bojanje pridruženog grafa s 3 boje, dok je Chvátal pomoću indukcije pokazao da se svaka triangulacija može particionirati na najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  tzv. lepeza, a to su takve triangulacije u kojima svi pripadni trokuti imaju jedan zajednički vrh.

Taj pristup, izložen u članku [O'Rourke, 1987: 7-9] na svega tri stranice, nije toliko sažet kao Fiskov (desetak redaka u članku [O'Rourke, 1987: 5-6]), ali ima svojih prednosti koje se otkrivaju pri nekim poopćenjima problema nadzora.

Zasad ćemo definirati potrebne pojmove kako bismo u sljedećem odjeljku mogli koncizno

prikazati Fiskov i Chvátalov dokaz da je  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  uvijek dovoljan broj čuvara. U drugom poglavlju bavit ćemo se detaljnije postojanjem triangulacije poligona i mogućnošću bojanja grafa triangulacije pomoću tri boje.

**Definicija 1.5.** Triangulacija poligona  $P$  je podjela tog poligona na trokute tako da vrijedi:

1. Skup svih vrhova trokuta u triangulaciji jednak je skupu svih vrhova poligona  $P$ ;
2. bilo koja dva od tih trokuta imaju zajedničku samo cijelu jednu stranicu ili samo jedan vrh ili nemaju zajedničkih točaka.

(Formalno, mogli bismo govoriti o familiji trokutova čija unija je jednaka poligonu  $P$ , uz uvjete (1) i (2), no to podrazumijevamo kao "podjelu").

Intuitivno je dosta prihvatljivo da svaki poligon dopušta triangulaciju, no to će ipak trebati dokazati.

Podsjetimo se pojma grafa. Ovdje ćemo promatrati samo jednostavne grafove i to neusmjerene, dakle bridovi grafa bit će (neuređeni) parovi vrhova, bez višekratnosti.

**Definicija 1.6.** Jednostavni graf je uređeni par  $G = (V, E)$ , pri čemu je  $V$  neprazan konačan skup čije elemente nazivamo vrhovima ili čvorovima grafa  $G$ , a  $E$  je skup različitih dvočlanih podskupova skupa  $V$  koje nazivamo *bridovima* ili *lukovima* grafa  $G$ . (Podrazumijevamo da je  $E$  skup *nekih*, ne nužno svih, dvočlanih podskupova od  $V$ , a u posebnom slučaju kad se svi dvočlani podskupovi vrhova nalaze u  $E$  kažemo da je graf potpun).

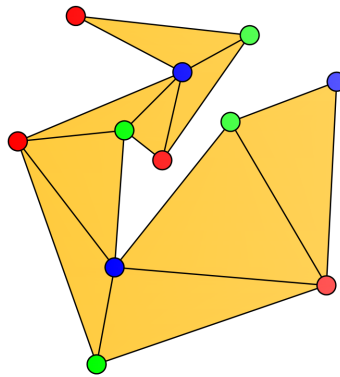
Za brid  $e = \{v, w\}$  kažemo da spaja vrhove  $v$  i  $w$ , a vrhove  $v$  i  $w$  koji su spojeni bridom nazivamo *susjednima*. Još se kaže da je vrh  $v$  *incidentan* s bridom  $e$  (kao što je to i  $w$ ). Brid  $e = \{v, w\}$  kraće se još označava s  $e = \overline{vw}$ .

*Stupanj vrha*  $v$  je broj vrhova s kojima je  $v$  spojen, to jest broj njegovih susjeda.

Ovdje će se skup vrhova poligona katkad podudarati sa skupom vrhova grafa, ali ne uvijek. Po potrebi ćemo naglasiti razliku između vrhova poligona i vrhova (čvorova) određenog promatranog grafa.

Ako je zadano preslikavanje sa skupa  $V$  vrhova grafa  $G$  u neki  $k$ -člani skup, čije se elemente obično naziva bojama, kažemo da je time izvedeno jedno (vršno)  $k$ -bojanje grafa. Često se na  $k$ -bojanje postavlja dodatni uvjet, primjerice da svaka dva susjedna vrha budu različito obojana, to jest da su im pridružene različite boje.

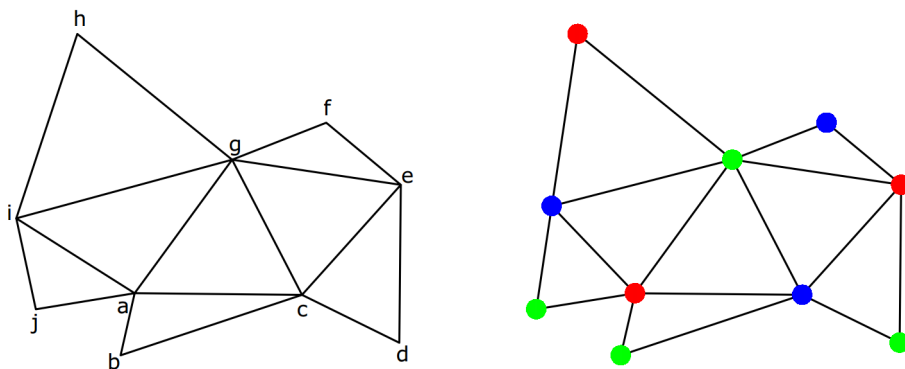
Pretpostavimo sada da je dana triangulacija poligona  $P$ , dobivena povlačenjem nekih dijagonala poligona (dakle, stranice trokuta koji čine triangulaciju su stranice i neke dijagonale poligona). Toj triangulaciji pridružimo graf kojem su vrhovi upravo vrhovi poligona, a bridovi su spojnice vrhova u triangulaciji, dakle sve stranice trokuta koji čine triangulaciju. Za svaku triangulaciju poligona pripadni graf može se obojati s 3 boje tako da svaka sva susjedna vrha budu različito obojana. Dokaz tog važnog rezultata naći će se u drugom



Slika 1.6: Trobojno bojanje grafa

poglavlju, kod detaljnog razmatranja triangulacije i svojstava grafa triangulacije. Zasad navedimo samo jedan primjer kao ilustraciju.

Na slici 1.7. prikazan je najprije jedan poligon s 10 vrhova, označenima  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$  i njegova triangulacija s 8 trokuta, dobivenih povlačenjem 7 dijagonala. Zatim je prikazano jedno 3-bojanje grafa te triangulacije (crvenom, zelenom i plavom bojom). Bojanje se može započeti npr. od trokuta  $abc$ , a zatim se redom za pojedine vrhove vidi jednoznačan izbor pripadne boje, budući da boje dvaju vrhova pojedinog trokuta diktiraju boju trećeg vrha.



Slika 1.7: Trobojna triangulacija

## 1.5 Fiskov i Chvátalov dokaz

Izvorna formulacija Chvátalovog teorema glasi:

**Teorem 1.2.** *Svaka  $n$ -triangulacija može se particionirati u  $m$  lepeza tako da je  $m \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ .*

Pritom je  $n$ -triangulacija definirana općenito kao planarni graf kojem je jedna strana omeđena  $n$ -terokutom, a sve ostale strane omeđene su trokutima. Ovdje nećemo ulaziti u pojedinosti, smatrajući kako se ovaj pojam očito podudara s prethodnom definicijom grafa pridruženog triangulaciji poligona s  $n$  vrhova. Podsjetimo da je lepeza takva triangulacija u kojoj svi pripadni trokuti imaju jedan zajednički vrh. Na kraju članka autor konstatira kako iz ovog teorema očito slijedi korolar (podrazumijevajući poznatu činjenicu o postojanju triangulacije) da je  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  uvijek dovoljan broj nadzornih točaka (u članku ih naziva dominirajućim točkama) budući da se svaka lepeza može nadzirati iz jedne točke.

Fisk u svojem članku navodi Chvátalov rezultat u sljedećem obliku, zapravo kao preformulaciju spomenutog korolara:

**Teorem 1.3.** *Ako je  $S$  poligon s  $n$  vrhova, onda postoji skup  $T$  od najviše  $\frac{n}{3}$  točaka od  $S$  takav da za bilo koju točku  $p$  iz  $S$  postoji točka  $q$  iz  $T$  sa svojstvom da je segment  $\overline{pq}$  čitav sadržan u  $S$ .*

Fiskov dokaz ovog teorema sada je sasvim kratak:

*Dokaz.* Zadani poligon se triangulira, tako da se ne dodaju novi vrhovi. Svaka takva triangulacija može se obojati u 3 boje, recimo  $a$ ,  $b$  i  $c$ , tako da su susjedni vrhovi obojani različito. Neka su  $T_a$ ,  $T_b$  i  $T_c$  skupovi vrhova obojani s  $a$ ,  $b$ ,  $c$  redom i uzmimo, bez smanjenja općenitosti, da broj vrhova u  $T_a$  nije veći od broja vrhova u svakom od skupova  $T_b$  i  $T_c$ . Tada broj vrhova obojanih s  $a$  nije veći od  $\frac{n}{3}$ , jer u protivnom bi ova tri skupa sadržavala ukupno više od  $n$  vrhova. Stavimo  $T = T_a$ . Svaka točka  $p$  od  $S$  pripada nekom trokutu triangulacije, a jedan od vrhova tog trokuta nalazi se u skupu  $T$ . Taj vrh očito je tražena točka  $q$ .  $\square$

(Primijetimo da smo već u definiciji triangulacije poligona zahtijevali da se ne dodaju novi vrhovi, a taj uvjet dolazi do izražaja i u ovom dokazu).

Prelazimo sada na Chvátalov dokaz o particiji triangulacije na lepeze.

*Dokaz.* Vrh lepeze koji je zajednički svim trokutima lepeze naziva se *središtem* lepeze. Dokaz se provodi indukcijom. Bazu indukcije čini trivijalni slučaj  $n = 3$ , gdje je svaki trokut ujedno i lepeza. Za  $n = 4$  očito je svaka triangulacija ujedno i lepeza. Također, za  $n = 5$  izravnom provjerom u svim mogućim slučajevima (slika 1.1.) vidimo da je svaka

triangulacija ujedno lepeza.

Dalje treba razmotriti sve vrijednosti  $n \geq 6$ . Strategija je takva da se u koraku indukcije najprije "odcijepi" jedan dio triangulacije, tako da se na preostali dio može primijeniti pretpostavka indukcije – da je tvrdnja istinita za sve vrijednosti broja vrhova triangulacije koje su strogo manje od  $n$ . Zatim se privremeno odcijepljeni dio vrati i uračuna se broj lepeza potreban za taj dio. Problem je onda u tome da zbroj potrebnog broja lepeza za dva promatrana dijela triangulacije ne bude veći od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . Ovakav argument bit će dostatan i ako se odcijepi samo jedan trokut, ali samo u slučaju kad je  $n$  djeljiv s 3 jer je tada  $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  pa će se pribrajanjem 1 za trokut dobiti upravo  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  kao najveći nužan broj lepeza. No, ako je  $n \equiv 1$  ili  $2 \pmod{3}$ , onda je  $\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  pa će odcjepljivanje "samo" trokuta u zbroju dati  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$ , što nam nije povoljno. Jasno je stoga da se za uspješnu primjenu indukcije broj vrhova mora odcjepljivanjem dijela triangulacije smanjiti barem za 3. (Naravno, samo po sebi to nije dovoljno, nego je važno i koliko lepeza će nositi odcijepljeni dio). Smanjivanje  $n$  za točno 3, međutim, nije uvijek moguće, kao što pokazuje primjer triangulacije s  $n = 24$  na slici 1.8. Niti jedna dijagonala ovdje nema svojstvo da se duž nje može odrezati dio s točno 3 vrha. Zato ključnu ulogu u Chvátalovom dokazu sad ima sljedeća

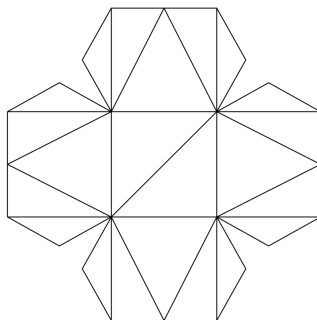
**Lema 1.4.** *U svakoj triangulaciji poligona s  $n \geq 6$  vrhova postoji dijagonala  $d$  takva da se rezanjem duž nje može odcijepiti točno 4 ili 5 ili 6 stranica poligona.*

Bitno je, dakle, da se ne govori o točno jednoj nego o tri moguće vrijednosti broja odcijepljenih stranica poligona, a za svaku od tih mogućnosti pokazat će se kako je dostatna za svrhu dokaza teorema. Naime, u svakom od tih slučajeva odcijepljeni dio doprinijet će samo jednu lepezu u ukupni broj lepeza na koje je podijeljena triangulacija. Uočimo da odcjepljivanje  $k$  stranica poligona znači odcjepljenje  $k - 1$  vrhova poligona i obrnuto.

*Dokaz.* Izaberimo dijagonalu  $d$  koja odvaja najmanji broj stranica poligona, ali da je taj broj, označimo ga s  $k$ , najmanje 4. (Takav izbor dijagonale očito je moguć čim je  $n \geq 6$ ). Numeriramo vrhove poligona s  $0, 1, \dots, n - 1$  tako da dijagonala  $d$  spaja vrhove  $0$  i  $k$ . Neki vrh  $t$ ,  $1 < t < k - 1$ , mora biti treći vrh trokuta kojem je  $d$  jedna stranica. Zbog minimalnosti izbora  $k$ , dijagonale  $(0, t)$  i  $(t, k)$  mogu odvajati najviše po 3 stranice poligona. Stoga iz  $t \leq 3$  i  $k - t \leq 3$  imamo  $k \leq 6$ .  $\square$

Vratimo se sad na dokaz teorema, to jest na korak indukcije. Pritom je  $d$  i dalje dijagonala izabrana na način kao u dokazu leme. Neka je  $G_1$  dio početne triangulacije, odvojen pomoću  $d$ , koji sadrži  $k$  stranica poligona tako da je to triangulacija poligona s  $k + 1$  stranicom, a  $G_2$  preostali dio izvorne triangulacije koji je stoga triangulacija poligona s  $n - k + 1$  vrhom. Po pretpostavci indukcije  $G_2$  se može rastaviti u najviše  $g' = \lfloor \frac{n-k+1}{3} \rfloor$  lepeza, a kako je  $k \geq 4$ , imamo  $g' \leq \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$ . Za završetak dokaza potrebno je još ustanoviti





Slika 1.8: Niti jedna dijagonala ove triangulacije ne odsijeca točno 3 vrha.

da  $G_1$  ne treba doprinijeti više od jedne lepeze ukupnoj particiji izvorne triangulacije poligona. (Naime, za  $G_1$  samu po sebi može biti potrebno više od jedne lepeze, kad je riječ o šesterokutu ili sedmerokutu, ali i tada će biti moguće neki dio  $G_1$  pripojiti jednoj lepezi iz  $G_2$ ).

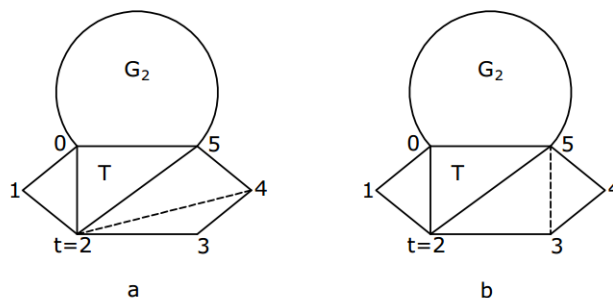
**Slučaj 1.** ( $k = 4$ )

$G_1$  je triangulacija peterokuta, a već smo uočili da je to sigurno lepeza. Stoga je  $G$  podijeljena na ne više od  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  lepeza i tvrdnja je dokazana.

**Slučaj 2.** ( $k = 5$ )

$G_1$  je triangulacija šesterokuta. Neka je  $T$  trokut u  $G_1$  kojem je  $d$  stranica, a vrh nasuprot  $d$  neka je  $t$ . Zbog minimalnosti  $k = 5$  ne može biti  $t = 1$  ili  $t = 4$  (jer bi postojala dijagonala koja odvaja samo 4 stranice poligona). Slučajevi  $t = 2$  i  $t = 3$  su ravnopravni pa izaberimo  $t = 2$  (slika 1.9). Sada se u  $G_1$  nalazi ili brid  $\overline{24}$  ili  $\overline{35}$ . Ako je to  $\overline{24}$ ,  $G_1$  je lepeza sa središtem u vrhu 2 pa je slučaj riješen. Uzmimo da se brid  $\overline{35}$  nalazi u  $G_1$ . Tada  $G_1$  nije lepeza pa trebamo postupiti drukčije. Označimo s  $G_0$  graf dobiven kao unija  $G_2$  i  $T$ .  $G_0$  je onda triangulacija poligona s  $n - 5 + 2 = n - 3$  stranica pa se na  $G_0$  može primijeniti pretpostavka indukcije. To znači da se  $G_0$  može podijeliti na ne više od  $g' = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  lepeza, a trokut  $T$  mora biti dio jedne od tih lepeza. Označimo tu lepezu s  $F$ . Njezino središte je neki od vrhova trokuta  $T$ . Razlikujemo dva podslučaja:

Ako je središte od  $F$  u vrhu 0 ili 2, pripojimo trokut 012 lepezi  $F$ , a vrhovi 2, 3, 4 i 5 određuju vlastitu lepezu. Ukupni broj lepeza na koje je rastavljena triangulacija  $G$  opet je najviše  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . Preostaje mogućnost da je vrh 5 središte lepeze  $F$ . Sad jednostavno pripojimo trokute 523 i 524 toj lepezi, a 012 ostaje kao zasebna lepeza i tvrdnja je opet dokazana.



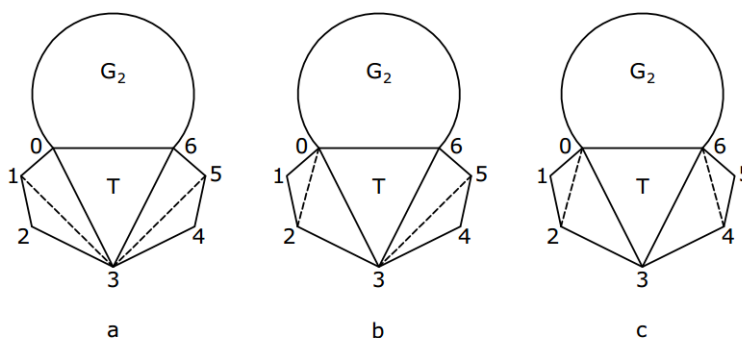
Slika 1.9:  $G_1$  je šesterokut

**Slučaj 3.** ( $k = 6$ )

$G_1$  je triangulacija sedmerokuta. Iz uvjeta minimalnosti  $k = 6$  lako zaključimo da za vrh  $t$  trokuta  $T$  kojem je  $d = \overline{06}$  jedna stranica mora vrijediti  $t = 3$ . Kako svaki od četverokuta  $0123$  i  $3456$  dopušta dvije moguće triangulacije, imamo ukupno 4 podslučaja. Njihovo razmatranje pratimo na slici 1.10.

U najjednostavnijem slučaju, dijagonale  $\overline{31}$  i  $\overline{35}$  su bridovi pa je  $G_1$  lepeza. Ostale podslučajeve treba razmotriti detaljnije i primijeniti slične postupke kao u slučaju  $k = 5$ .

Neka su dijagonale  $\overline{02}$  i  $\overline{35}$  bridovi u  $G_1$ . Tada pripojimo četverokut  $0236$  triangulaciji  $G_2$  kako bismo dobili triangulaciju  $G_0$  poligona s  $n - 6 + 3 = n - 3$  vrhova, koja se po pretpostavci indukcije može rastaviti na najviše  $g' = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1$  lepeza. Neka je  $F$  ona lepeza iz tog rastava koja sadrži trokut  $023$ .



Slika 1.10:  $G_1$  je sedmerokut

Ako je središte od  $F$  u vrhu 0 ili 2, pripojimo trokut 012 k  $F$ , a 3456 uzmimo kao zasebnu lepezu. Obrnuto, ako je središte od  $F$  vrh 3, pripojimo 3456 k lepezi  $F$ , a 012 uzmemo kao zasebnu lepezu. Svaki od ovih slučajeva time je riješen na već poznati način. Ako dijagonale  $\overline{13}$  i  $\overline{46}$  pripadaju triangulaciji  $G_1$ , to je situacija simetrična prethodnoj pa je ne treba posebno razmatrati.

Preostaje slučaj kad su  $\overline{02}$  i  $\overline{46}$  bridovi. Pripojimo trokut  $T$  k  $G_2$  pa dobivamo triangulaciju  $G_0$  poligona s  $n - 6 + 2 = n - 4$  vrhova te na nju primijenimo pretpostavku indukcije. Neka je  $F$  lepeza iz podjele  $G_0$  koja sadrži  $T$ . Ako je središte od  $F$  u vrhu 0, pripojimo četverokut 0123 k  $F$ , a 3456 uzmimo kao zasebnu lepezu.

Slučaj kad je središte od  $F$  u vrhu 6 simetričan je prethodnom. Središte of  $F$  može biti u vrhu 3 samo na taj način da je trokut  $T$  sâm jedna lepeza u rastavu  $G_0$ , budući da vrh 3 ne može biti spojen ni s jednim vrhom koji se nalazi s druge strane dijagonale  $\overline{06}$ . Zato možemo uzeti i 0 kao središte od  $F$ , a taj je podslučaj već riješen.

Time je dovršen dokaz Chvátalovog teorema. □

## Poglavlje 2

# Triangulacija i algoritmi

### 2.1 Triangulacija i 3-bojanje

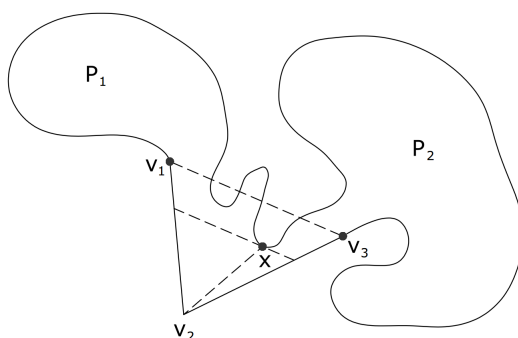
U prvom poglavlju vidjeli smo kako triangulacija poligona i njezino bojanje dovodi do rješenja osnovnog problema kojim se bavimo u ovom radu, no preostalo je izložiti dokaze postojanja triangulacije i mogućnosti 3-bojanja triangulacije tako da svaka dva susjedna vrha budu različito obojana. Razmotrit ćemo i nešto drukčiji pristup rastava poligona na konveksne dijelove, ne nužno trokute, u ovisnosti o broju konkavnih kutova kao istaknutog parametra. Posebno, prikazat ćemo i neke algoritme za triangulaciju. Takvi algoritmi dodatno su važni zato što se metoda triangulacije često primjenjuje kao matematički model u drugim znanostima, primjerice za mjerenja u geodeziji i za određivanje epicentra potresa u seizmologiji, pomoću tri seizmološke stanice.

Postojanje triangulacije za bilo koji poligon utvrdit ćemo induktivnim dokazom sljedećeg osnovnog teorema:

**Teorem 2.1.** *Poligon s  $n$  vrhova se može podijeliti na  $n - 2$  trokuta ucrtavanjem  $n - 3$  dijagonala.*

*Dokaz.* Dokaz se provodi matematičkom indukcijom po  $n$ . Trivijalan je slučaj za  $n = 3$ . Neka je  $P$  poligon s  $n \geq 4$  vrhova. Neka je  $v_2$  konveksan vrh od  $P$  te razmotrimo tri uzastopna vrha  $v_1, v_2$  i  $v_3$ . (Smatramo očitim da barem jedan vrh mora biti konveksan. To se može izvesti odatle što je nutrina poligona po definiciji omeđen podskup ravnine). Tražimo neku unutarnju dijagonalu  $d$ , to jest dijagonalu koja je cijela sadržana u nutrini poligona. Ako se segment  $\overline{v_1v_3}$  u cijelosti nalazi u unutrašnjosti od  $P$  (ne presijeca  $\partial P$ ) neka je  $d = \overline{v_1v_3}$ , inače trokut  $v_1v_2v_3$  mora sadržavati barem jedan vrh od  $P$ . Neka je  $x$  vrh od  $P$  najbliži  $v_2$ , gdje je udaljenost mjerena okomito iz  $v_2$  na  $\overline{v_1v_3}$  i neka je  $d = \overline{v_2x}$ . U svakom slučaju,  $d$  dijeli  $P$  na dva manja poligona  $P_1$  i  $P_2$ . Ako  $P_i$  ima  $n_i$  vrhova,  $i = 1, 2$  tada je  $n_1 + n_2 = n + 2$  jer se obje krajnje točke od  $d$  nalaze u  $P_1$  i  $P_2$ . Jasno  $n_i \geq 3$ ,  $i = 1, 2$

što implicira da je  $n_i < n$ ,  $i = 1, 2$ . Primjenom pretpostavke indukcije na oba poligona  $P_1$  i  $P_2$  dobivamo triangulaciju poligona  $P$  koja se sastoji od  $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$  trokuta i  $(n_1 - 3) + (n_2 - 3) + 1 = n - 3$  dijagonala, uključujući i  $d$ .  $\square$



Slika 2.1: Dužina  $\overline{xv_2}$  je unutarnja dijagonala

**Korolar 1.** Zbroj unutarnjih kutova poligona je  $(n - 2)\pi$ .

*Dokaz.* Zbroj unutarnjih kutova u svakom od  $n - 2$  trokuta iznosi  $\pi$ .  $\square$

Za dokaz tvrdnje o mogućnosti 3-bojanja triangulacije ključnu ulogu ima teorem G. H. Meistersa iz 1975. godine, poznat kao "Teorem o dva uha".

**Definicija 2.1.** Za tri uzastopna vrha  $v_1v_2v_3$  poligona  $P$  kažemo da čine uho u vrhu  $v_2$ , ako je dijagonala  $\overline{v_1v_3}$  cijela sadržana u nutrima poligona  $P$ . Kažemo da se dva uha poligona ne preklapaju ako dva pripadna trokuta nemaju zajedničkih unutarnjih točaka.

**Teorem 2.2** (Meisters). *Svaki poligon s  $n \geq 4$  vrhova ima barem dva uha koja se ne preklapaju.*

Prije samog dokaza, navedimo rezultat o mogućnosti 3-bojanja svake triangulacije poligona, koji nam je ovdje i glavni cilj:

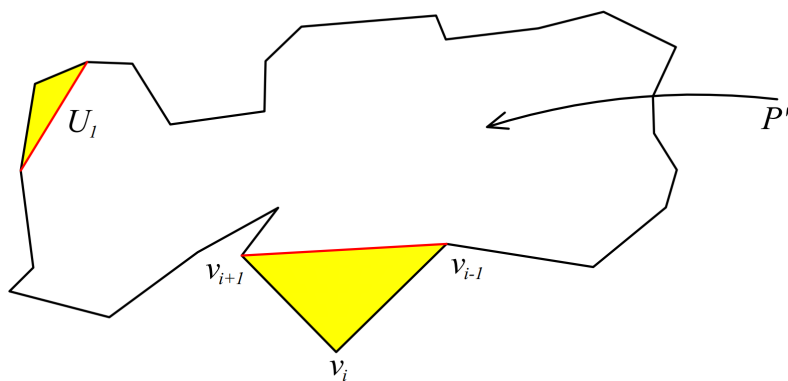
**Teorem 2.3.** *Vrhovi grafa bilo koje triangulacije danog poligona mogu se obojati s 3 boje tako da susjedni vrhovi budu različito obojani.*

*Dokaz.* Uočimo da za bilo koje uho danog poligona pripadni trokut mora pripadati (svakoj) triangulaciji. Sad je jednostavno provesti dokaz indukcijom po broju vrhova poligona. Tvrdnja je trivijalna za  $n = 3$ . Za  $n > 3$  primijenimo Teorem 2.2. Odrežemo li trokut koji je određen bilo kojim uhom poligona (ako označimo vrhove s  $v_1v_2v_3$ , reže se duž segmenta  $\overline{v_1v_3}$ ), preostaje poligon s  $n - 1$  vrhova i na njega primijenimo pretpostavku indukcije. Zatim vratimo uklonjeni vrh  $v_2$  i obojimo ga preostalom, trećom bojom s obzirom na boje vrhova  $v_1$  i  $v_3$ .

Prelazimo sad na dokaz Teorema 2.2., a provodi se također indukcijom po broju  $n$  vrhova poligona. Za  $n = 4$  poligon očito ima dva uha koja se ne preklapaju.

Za korak indukcije, izaberimo bilo koji konveksni vrh poligona  $P$  s  $n \geq 5$  vrhova, neka je to  $v_i$ . Razlikovat ćemo dva slučaja, s obzirom na to čine li vrhovi  $v_{i-1}v_iv_{i+1}$  uho ili ne.

**Slučaj 1.** Poligon ima uho u vrhu  $v_i$ . Uklanjanjem pripadnog trokuta preostaje poligon  $P'$  s jednim vrhom manje. Po pretpostavci indukcije,  $P'$  ima dva uha koja se ne preklapaju. Barem jedno od ta dva uha nema vrh  $v_{i-1}$  ni  $v_{i+1}$ , jer u protivnom bi došlo do preklapanja ta dva uha (segment  $\overline{v_{i-1}v_{i+1}}$  bio bi zajednički za pripadne trokute). Takvo uho pripada i poligonu  $P$ , a očito nema preklapanja s njegovim uhom u vrhu  $v_i$  pa u tom slučaju tvrdnja vrijedi.



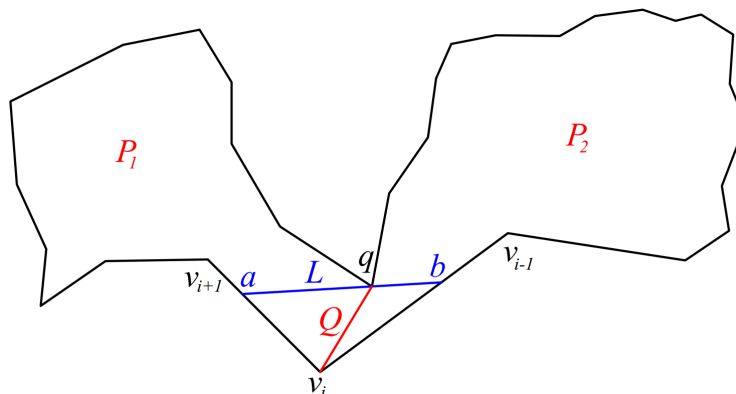
Slika 2.2: **Slučaj 1.** Poligon  $P$  ima uho u vrhu  $v_i$ .

**Slučaj 2.** Poligon nema uho u vrhu  $v_i$ . Stoga se u unutrašnjosti trokuta  $v_{i-1}v_iv_{i+1}$  nalazi barem jedan vrh poligona  $P$ . Ako je takav vrh jedinstven označimo ga s  $q$ , a ako takvih vrhova ima više povucimo kroz njih pravce paralelne sa segmentom  $\overline{v_{i-1}v_{i+1}}$  pa s  $q$  označimo

onaj vrh za koji je povučeni pravac  $L$  najbliži vrhu  $v_i$ . Neka su  $a$  i  $b$  sjecišta pravca  $L$  sa stranicama  $\overline{v_{i-1}v_i}$  odnosno  $\overline{v_iv_{i+1}}$ .

Izbor vrha  $q$  takav je da unutar trokuta  $av_ib$  nema vrhova poligona. Segment  $\overline{v_iq}$  sada dijeli poligon  $P$  na dva poligona  $P_1$  i  $P_2$ , tako da prvi ima vrhove  $v_{i-1}v_iq\dots$ , a drugi  $qv_iv_{i+1}\dots$ .

Razmotrimo poligone  $P_1$  i  $P_2$ . Ako je jedan od njih trokut, uzmimo da je to  $P_1$ , on ujedno



Slika 2.3: **Slučaj 2.** Poligon  $P$  nema uho u vrhu  $v_i$ .

čini jedno uho za  $P$ , a  $P_2$  tada ima barem 4 vrha i po pretpostavci indukcije ima dva uha koja se ne preklapaju. Barem jedno od ta dva uha nema vrh ni u točki  $v_i$  ni u točki  $q$  pa stoga zajedno s uhom  $P_1$  čini dva uha poligona  $P$  koja se ne preklapaju.

Ako ni  $P_1$  ni  $P_2$  nije trokut, svaki od njih po pretpostavci indukcije ima dva uha koja se ne preklapaju. Iz razloga kao u prethodnom slučaju postoji barem po jedno uho u  $P_1$  i  $P_2$  koje nema vrh ni u točki  $v_i$  ni u točki  $q$  pa se takva dva uha ne preklapaju i tvrdnja je dokazana.  $\square$

### Napomena.

Umjesto induktivnog dokaza Teorema o dva uha, može se promatrati tzv. *dualni graf triangulacije* poligona i pokazati da je taj graf *stablo* (povezani i aciklički graf), a onda iskoristiti svojstva te klase grafova kako bi se dokazala tvrdnja. Dualni graf triangulacije formira se tako da se svakom trokutu triangulacije pridruži jedan čvor, a susjedni su čvorovi oni za koje pripadni trokuti imaju zajedničku stranicu. Svaki čvor očito je stupnja najviše 3. Uho odgovara čvoru stupnja 1 (*listu stabla*), a svako stablo s barem dva čvora ima barem dva lista.

## 2.2 Algoritmi

Vidjeli smo da je triangulacija poligona bitan korak u rješavanju razmatranog problema nadzora. U računalnoj geometriji, kao grani računarstva koja se bavi izučavanjem algoritama formuliranih u terminima geometrije, triangulacija poligona jedan je od tipičnih i najvažnijih problema. Osim načelne mogućnosti izvedbe triangulacije, čime smo se bavili u prethodnom odjeljku, posebni značaj ima i efikasnost samog postupka, to jest učinkovitost algoritma triangulacije. Različite varijante dokaza izravno vode do algoritama, ali oni se mogu bitno razlikovati po svojoj složenosti. U ovom poglavlju izložit ćemo detaljnije neke od primjera algoritama triangulacije.

Napomenimo ukratko kako se uobičajeno izražava složenost algoritma, u smislu vremena ili nekih drugih parametara potrebnih za njegovo izvršenje.

Pretpostavimo da algoritam radi na temelju  $n$  unesenih podataka. Načelno možemo izraziti potrebno vrijeme  $T(n)$  (odnosno gornju među vrijednosti potrebnog vremena) kao funkciju od  $n$ , primjerice polinom. Ako znamo da se ta gornja međa može napisati kao polinom stupnja  $k$ , tada je  $T(n)$  reda veličine  $n^k$ , jer postoji pozitivna konstanta  $M$  takva da vrijedi  $T(n) \leq Mn^k$  za sve vrijednosti  $n$ . Piše se  $T(n) = O(n^k)$ . Općenito, oznaka  $f(x) = O(g(x))$  kad  $x \rightarrow \infty$  za neke funkcije  $f$  i  $g$  znači da postoji pozitivna konstanta  $M$  takva da je  $|f(x)| \leq M|g(x)|$  za sve dovoljno velike vrijednosti  $x$ .

Ovdje se najčešće spominju algoritmi složenosti poput  $O(n^2)$  i poboljšanja poput  $O(n \log n)$  i  $O(n \log \log n)$  te, dakako,  $O(n)$  ("linearno vrijeme").

Algoritam Gareya, Johnsona, Preparatae i Tarjana iz 1978. smatra se prvim netrivialnim algoritmom za triangulaciju polinoma, a vrijeme izvršenja mu je  $O(n \log n)$ . Zasniva se na ideji Preparatae i Leeja za korištenje monotonih poligona, odnosno njihovom algoritmu za podjelu poligona na monotone poligone (1977.) Glavna je prednost monotonih poligona što se mogu triangulirati u linearnom vremenu, a kako za rastav jednostavnog poligona u monotone poligone postoji algoritam složenosti  $O(n \log n)$ , primjenom takvih algoritama poligon se može triangulirati u vremenu  $O(n \log n)$ .

Monotoni poligon može se triangulirati u linearnom vremenu i bilo kojim od algoritama Fourniera i Montunoa ili Toussainta (oba objavljena 1984. godine).

Sljedeće poboljšanje postigli su Tarjan i Van Wyk, kreiranjem algoritma za triangulaciju poligona u vremenu  $O(n \log \log n)$  (1988.) Pojednostavljenu varijantu tog algoritma, jednake složenosti, objavili su Kirkpatrick, Klawe i Tarjan 1992. godine.

U istom razdoblju objavljeni su algoritmi za triangulaciju složenosti koja se označava s  $O(n \log *n)$ , a vrijeme se praktički ne razlikuje od linearnog. Napokon, 1991. godine Chazelle je objavio algoritam za triangulaciju poligona u linearnom vremenu, samo što je taj bio vrlo kompliciran za primjenu. Godine 2001. Amato, Goodrich i Ramos izložili su ran-



domizirani algoritam koji je modifikacija Chazelleovog (determinističkog), uz pomoć nekih otprije poznatih neoptimalnih randomiziranih algoritama, a očekivano vrijeme izvršenja je linearno. Poligon se rastavlja na trapeze.

### Algoritam Avis i Toussainta

Naravno, ne treba zanemariti ni postupak 3-bojanja triangulacije, kao bitan dio Fiskovog dokaza. Implementacija Chvatalovog dokaza, bez nekih poboljšanja, zahtijevala bi  $O(n)$  potraga za unutarnjom dijagonalom, što bi rezultiralo složenosti  $O(n^2)$ . No, algoritam koji su 1981. godine objavili Avis i Toussaint slijedi Fiskov dokaz i složenosti je  $O(n \log n)$ , zato što prvi korak (triangulacija) po tada najboljim poznatim rezultatima zahtijeva vrijeme  $O(n \log n)$ , a i korak 3-bojanja oni su algoritamski riješili s istom složenosti, dok se završni korak traženja vrhova obojanih najmanje zastupljenom bojom ionako izvodi u linearnom vremenu.

#### Algoritam

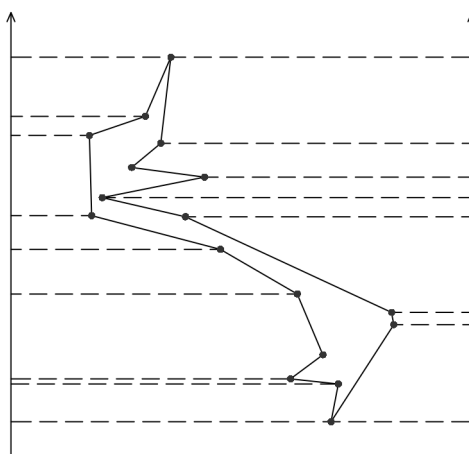
1. Triangulirati  $P$  i dobiti graf  $G$ .
2. Obojati vrhove  $G$  u tri boje tako da svaka dva susjedna vrha budu različito obojana.
3. Smjestiti čuvare u točke obojane bojom koja se pojavljuje najmanji broj puta.

Algoritam 3-bojanja kod Avis i Toussainta temelji se na strategiji tipa "podijeli pa vladaj", koja proizlazi iz njihove leme da u svakoj triangulaciji poligona s  $n$  vrhova postoji dijagonala koja dijeli poligon na dva dijela od kojih svaki ima barem  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  vrhova. Uzimajući rekursivno da se svaki od tih dijelova može 3-oboјati, spajanjem obojanih dijelova (uz promjenu boja u jednom od njih ako je potrebno, ovisno o zajedničkoj stranici) dobiva se 3-bojanje cijelog poligona. Kako se svaki od koraka podjele i spajanja izvodi u linearnom vremenu, ukupna složenost određena je rekursivnom jednađbom  $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ , čije je rješenje  $T(n) = O(n \log n)$ .

## Monotoni poligoni i pretraživanje ravnine

Monotone poligone prvi put spominju Lee i Preparata 1977. godine.

**Definicija 2.2.** Neka je  $p_1, \dots, p_k$  poligonalna crta ili lanac. Lanac se naziva *monotonim s obzirom na pravac  $L$*  ako je redosljed projekcija  $p_1, \dots, p_k$  na pravac  $L$  jednak redosljedu tih vrhova u lancu, to jest kad se prolazi cijelim lancem redom po vrhovima, istim redosljedom (bez vraćanja unatrag) prolazi se projekcijama vrhova lanca na pravac  $L$ . Monotonost nije narušena ako se dva susjedna vrha projiciraju u istu točku.



Slika 2.4: Vrhovi monotonog poligona projiciraju se na (određeni) pravac u monotono rastućem nizu, odnosno monotono padajućem nizu.

**Definicija 2.3.** Lanac se naziva *monotonim* ako je monoton s obzirom na barem jedan pravac  $L$ .

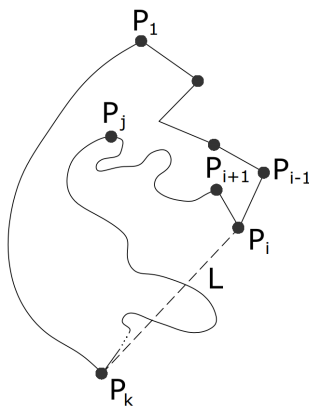
Dogovorno ćemo uzimati da je  $y$ -os pravac s obzirom na koji je promatrani lanac monoton.

Poligon nazivamo *monotonim* ako se može rastaviti na dva lanca koji su monotoni s obzirom na isti pravac. Takva dva lanca nazivamo *lijevi* i *desni* lanac. Očito, jedan od tih lanaca bit će monotono rastući, a drugi monotono padajući. Definirajmo i *unutarnji šiljak* poligona kao vrh  $v$  čija oba susjedna vrha ili nemaju oba veće ordinate ili nemaju oba manje ordinate od  $v$ . Unutarnje šiljke možemo slikovito zamisliti kao "stalaktite" i "stalagmite".

**Lema 2.4** (Garey i ostali 1978.). *Ako poligon  $P$  nema unutarnji šiljak tada je on monoton prema  $y$ -osi.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno. Neka poligon  $P$  nije monoton u odnosu na  $y$ -os. Tada najmanje jedan od lanaca, na primjer desni, nije monoton. Neka su vrhovi desnog lanca  $p_1, \dots, p_k$  gledajući ih odozgo prema dolje i neka je  $p_i$  prvi vrh takav da je  $y$ -koordinata  $p_{i+1}$  veća od  $p_i$ , a takav  $p_i$  postoji jer lanac nije monoton. Ako se  $p_{i+1}$  nalazi sa desne strane  $\overline{p_i p_{i-1}}$  tada je  $p_i$  unutarnji šiljak čime dobivamo proturječje i dokaz je gotov.

Pretpostavimo da je  $p_{i+1}$  slijeva od  $\overline{p_i p_{i-1}}$ . Spojimo  $p_i$  do  $p_k$  s pravcem  $L$  kao na slici 2.5. Neka je  $p_j$  vrh s najvećom vrijednosti  $y$  u lancu  $p_i$  do  $p_k$  prije nego što taj lanac presiječe  $L$ . Tada je  $p_j$  unutarnji šiljak. Naime, taj vrh je konkavan jer je lokalni maksimum u  $y$ -smjeru i unutrašnjost poligona je iznad njega, a nijedan od susjednih vrhova ne može imati veću  $y$ -koordinatu.  $\square$



Slika 2.5: Ukoliko  $p_i$  nije unutarnji šiljak,  $p_j$  to jest.

Jednu vrstu algoritama prikladnih za ovakve i slične geometrijske probleme čine tzv. *sweep algoritmi* ili *sweep line algoritmi* u kojima se ravnina prelazi ("prebriše") zamišljenim pravcem, često vertikalnim ili horizontalnim (*sweep line*). Svojom pomicanjem pravac nailazi na točke bitne za dani problem, unaprijed određenim redoslijedom.

Neka je pravac  $L$  horizontalan te neka presijeca poligon  $P$  i zaustavlja se prilikom dolaska na svaki pojedini vrh poligona. Na taj način su vrhovi razmješteni prema vrijednostima njihovih  $y$ -koordinata.

### Algoritam Leeja i Preparatae

Algoritam Leeja i Preparatae uklanja sve unutarnje šiljke ucrtavanjem unutarnjih dijagonala. Taj proces se provodi *plane sweep* algoritmom koji su osmislili Nievergelt i Preparata.

Vrhovi će biti označeni prema njihovim visinama u monotono padajućem nizu s oznakama  $v_0, \dots, v_n$  tako da je  $v_0$  najviši vrh. Neka je  $B$  baza podataka s podacima zapisanim kao uređenim parovima [brid ( $e$ ), vrh ( $w$ )]. Neka je  $L$  pravac koji presijeca bridove  $e_0, \dots, e_k$  slijeva na desno. Tada je  $B$

$$[e_0, w_0], [e_1, w_1], \dots, [e_k, w_k],$$

gdje je  $w_i$  vrh s najmanjom vrijednosti  $y$  koji se nalazi između  $e_i$  i  $e_{i+1}$ , to jest, unutar trapezoida omeđenog pravcem  $L$ , bridovima  $e_i$  i  $e_{i+1}$  i pravcem paralelnim pravcu  $L$ , koji prolazi nižom od gornjih krajnjih točaka bridova  $e_i$  i  $e_{i+1}$ . Svrha ovakvog pregleda strukture podataka je u tome da kad se pravcem  $L$  otkrije unutarnji šiljak poligona  $P$  koji je usmjeren "prema gore", u oznaci  $v_j$ , tada se taj vrh nalazi između  $e_i$  i  $e_{i+1}$  i  $v_j$  tada spajamo dijagonalom s vrhom  $w_i$ .

### Algoritam

1. Poredaj vrhove u monotono padajućem nizu (s obzirom na  $y$ -koordinatu):  $v_0, \dots, v_n$ .
2. {Silazni tok}
  - Za**  $i = 0$  **do**  $n$
  - Ukloni konkavni vrh poligona  $P$  koji je usmjeren "prema gore".
3. {Uzlazni tok}
  - Za**  $i = n - 1$  **prema**  $0$
  - Ukloni konkavni vrh poligona  $P$  koji je usmjeren "prema dolje".

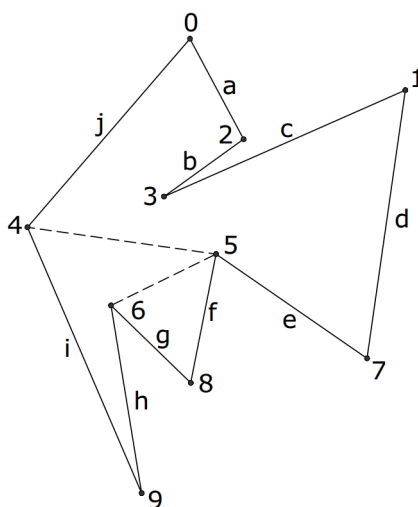
Detaljnije ćemo opisati samo silazni tok. Analogno će se algoritam provesti i u uzlaznom toku kako bi uklonio konkavne vrhove poligona  $P$  koji su usmjereni "prema dolje".

Opis algoritma ćemo provesti promatrajući sliku 2.6. i tablicu 2.1. Najprije označimo sve vrhove u padajućem nizu oznakama  $0, 1, 2, \dots, 9$ . Vrhove označimo tako da zamišljamo padajući pravac  $L$  te svaki idući vrh koji će pravac  $L$  susresti označimo idućim brojem. Tako nam je najviši vrh poligona  $P$  vrh 0.

Stranice poligona označimo slovima redom  $a, b, c, \dots, i, j$  u smjeru kazaljke na satu počevši od one čija je krajnja lijeva točka vrh 0.

U tablici sada promotrimo provedbu uklanjanja konkavnih vrhova, u ovom slučaju, okrenutih "prema gore". U prvom stupcu se nalazi vrh u odnosu na koji gledamo pravac presijecanja  $L$  s poligonom  $P$ . U drugom stupcu zapisujemo najbližu stranicu slijeva koja se nalazi u ravnini vrha iz prvog stupca. U trećem stupcu se nalazi broj stranica koji se spajaju *odozgo* u promatranom vrhu. Ukoliko je taj broj 0 tada taj vrh postaje kandidat da se radi o unutarnjem šiljku. Četvrti stupac prikazuje sve segmente presijecanja u parovima ranije opisanim u radu. Peti stupac je rezultat uklanjanja unutarnjih šiljaka.

Pravac  $L$  najprije presijeca stranice  $j$  i  $a$  te je vrh iznad njih vrh 0, u oznaci  $[j, 0][a, 0]$ .



Slika 2.6: Primjer podjele u monotone poligone ucrtavanjem dijagonala (5, 4) i (6, 5).

Nakon toga dolazi do vrha 1 i tada pravac  $L$  presijeca stranice poligona, gledajući s lijeva na desno  $[j, 0][a, 0]$  i  $[c, 1][d, 1]$  gdje je vrh iznad njih 1. Kako se u trećem stupcu nalazi broj 0 vrh 1 postaje kandidat za uklanjanje. No, vrh 1 nije unutarnji šiljak već konveksni vrh pa algoritam ne poduzima nikakve dodatne radnje. Analogno provedimo postupak za vrhove 2, 3, 4.

Promotrimo sada situaciju kod vrha 5. Iz trećeg stupca vidimo da nije određen stranicama *odozgo* pa postaje kandidat da je unutarnji šiljak. Kako iz četvrtog stupca možemo primijetiti, vrh 5 se ne nalazi u rubnom području jer je u sredini niza gledajući podatke koje očitava pravac  $L$  s lijeva na desno. Stoga je vrh 5 unutarnji šiljak koji je usmjeren "prema gore" i spajamo ga dijagonalom poligona  $P$  s vrhom koji je najbliži u odnosu na  $y$ -os, a to je vrh 4 što se vidi u petom stupcu. Na taj način smo dobili dva poligona  $P_1$  i  $P_2$  čija unija daje poligon  $P$ .

Idući vrh je 6. Također kao i vrh 5 nema stranica *odozgo* i ne nalazi se na rubu pa je i vrh 6 unutarnji šiljak te ga spojimo s njemu najbližim, a to je vrh 5. Sada smo  $P$  rastavili na tri poligona  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ .

Sada ćemo promotriti vrh 7. Vrh 7 se sada nalazi u poligonu  $P_1$  te je lijeva stranica u njegovoj okolini u stvari stranica  $e$ . Vrh ima dvije stranice *odozgo* i nije kandidat da bude konkavni vrh u silaznom toku.

Analogno provodimo algoritam za vrhove 8 i 9, svaki u području svog poligona ( $P_2$  i  $P_3$ ).

Provjerimo sada kompleksnost algoritma.

Početno sortiranje provodi se u  $O(n \log n)$  vremenu. Kad bi baza  $B$  bila već ranije implementirana, tako da ju algoritam ne mora samostalno kreirati, tada bi umetanja i izbacivanja

trajala  $O(\log n)$  vremena. Svaki od vrhova kojim prođe pravac  $L$ , a takvih umetanja i izbacivanja ima  $O(n)$  vode do  $O(n \log n)$  algoritma.

i	j	I	B	Izlaz
0			$[-\infty, 0][j, 0][a, 0]$	
1	$a$	0	$[-\infty, 0][j, 0][a, 0][c, 1][d, 1]$	
2	$j$	1	$[-\infty, 0][j, 2][b, 2][c, 1][d, 1]$	
3	$j$	2	$[-\infty, 0][j, 3][d, 1]$	
4	$-\infty$	1	$[-\infty, 4][i, 4][d, 1]$	
5	$i$	0	$[-\infty, 4][i, 5][f, 5][e, 5][d, 1]$	5→4
6	$i$	0	$[-\infty, 4][i, 6][h, 6][g, 6][f, 5][e, 5][d, 1]$	6→5
7	$e$	2	$[-\infty, 4][i, 6][h, 6][g, 6][f, 7]$	
8	$h$	2	$[-\infty, 4][i, 6][h, 8]$	
9	$-\infty$	2	$[-\infty, 9]$	

Tablica 2.1: Tablica uklanjanja vrhova ucrtavanjem dijagonala

## Neki drugi algoritmi

### *Algoritam Gareyja, Johnsona, Preparatae i Tarjana*

Kao i algoritam Leeja i Preparatae, ovaj algoritam u svojoj osnovi koristi *plane sweep* algoritam i monotone poligone.

Pri provedbi algoritma koji se provodi u  $O(n \log n)$  vremenu najprije se označe točke u padajućem nizu što je zajedničko s prethodnim algoritmom. No, ti poligoni se koriste na drukčiji način nego li kod Leeja i Preparatae. Algoritam odmah odsijeca trokute i na taj način triangulira poligon  $P$ . Nakon provedene triangulacije algoritam provodi provjeru po ucrtanim dijagonalama i provjerava jesu li krajnje točke tih dijagonala konkavni vrhovi. Ako imamo uzastopne vrhove od kojih niti jedan nije konkavni tada njih grupiramo i spajamo ih samo s jednim vrhom. Takav dio poligona je konveksan promatrajući ga iz nasuprotnog vrha s kojim je spojen dijagonalom. Analogni postupak provedemo i s ostalim vrhovima čime je algoritam u potpunosti proveden.

### *Algoritam Hertela i Mehlhorna*

Ovo je također *plane sweep* algoritam kao i algoritam Leeja i Preparatae. Najprije se poligon  $P$  rastavi na monotone poligone nakon čega se svaki od monotonih poligona tri-

angulira. Ovako zamišljeno mogli bismo reći da ovaj algoritam nije ništa drugo nego spojeni algoritam Leeja i Preparatae s algoritmom Gareyja i ostalih. Ipak, tomu nije tako. Plane sweep algoritam Hertela i Mehlhorna se provodi u vremenu  $O(n \log n)$  odnosno toliko je vremena potrebno za sortiranje vrhova te još  $O(n)$  za zapis podataka, svaki u trajanju od  $O(\log n)$ . Na taj način nije postignut nikakav napredak u odnosu na prethodni algoritam. Ono što ovaj algoritam čini uspješnijim je modifikacija kojom se postiže njegovo provođenje za  $O(n + r \log r)$  vremena gdje je  $r$  broj konkavnih vrhova poligona. Budući da može biti najviše  $n - 3$  takvih vrhova, ovakav algoritam nije primjeren za taj najgori slučaj, ali za manji broj konkavnih vrhova ovaj algoritam može biti koristan. Pri konstrukciji i provedbi ovog algoritma bitna je razlika što se tijekom jedne njegove provedbe uspješno provodi triangulacija. U zapisu bi rekli da se pravac  $L$  može *vratiti unatrag* kako bi proveo triangulaciju.

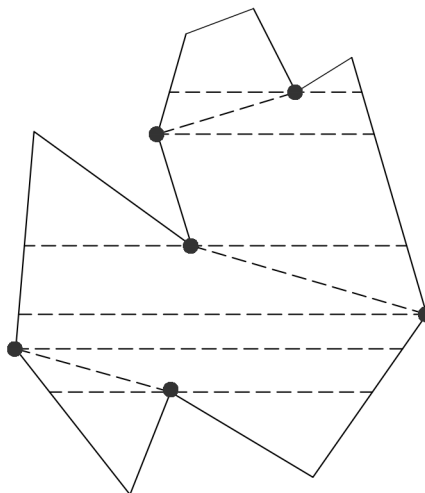
Na taj način se proces provedbe triangulacije ubrzava. Proces se provodi, kako smo spomenuli, *plane sweep* algoritmom pomoću pravca  $L$ . U ovom slučaju pravac  $L$  će se zaustaviti samo na konkavnim vrhovima umjesto u svim vrhovima, što ubrzava sami proces. Sada je samo potrebno konkavne vrhove razvrstati prema njihovim  $y$  vrijednostima. Druga važna razlika je da pravac  $L$  može postati izlomljen odnosno da pojedini segmenti pravca napreduju brže od drugih segmenata. Na taj način se po segmentima brže provodi analiza podataka s kojima pravac  $L$  raspolaže te je ovaj algoritam iz tog razloga brži.

### *Algoritam Chazellea i Incerpija*

Chazelle i Incerpi su pokazali kako monotono particioniranje može biti provedeno u vremenu  $O(n \log s)$  gdje je  $s$  broj kojim se mjeri "zavojitost" poligona (*eng. sinuosity*), pri čemu  $s$  možemo shvatiti kao broj promjena monotonosti poligona (npr. za svaki unutarnji šiljak nastaje jedna promjena). Broj  $s$  nas može koštati  $O(n)$  ali je "uobičajeno" jako malen. Oni nisu triangulirali zadani poligon već su ga rastavljali na trapeze. Postupak se provodi tako da kroz svaki vrh poligona  $P$  ucrtamo horizontalnu dužinu (paralelnu s pravcem  $L$ ) čiji su krajevi točke ruba poligona  $\partial P$ . Zbog izgleda zadanog poligona možemo očekivati da će se osim trapeza dobiti i nekoliko trokuta. Svaki trapez na svojim paralelnim stranicama sadrži jedan vrh poligona  $P$ . Vrhovi koji narušavaju monotonost u  $y$  smjeru su oni vrhovi koji se nalaze unutar horizontalne dužine, a nisu njezina krajnja točka. Podjela poligona u trapeze se provodi principom *podijeli pa spoji*. Primijetimo kako bilo koji beskonačno dug poligonalni uzorak možemo dijeliti na trapeze ucrtavajući paralelne dužine kroz vrhove.

Neka je dani poligon  $P$  određen vrhovima  $p_1, \dots, p_n$  u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Neka je  $P_1$  lanac  $p_1, \dots, p_{\lfloor n/2 \rfloor}$  i  $P_2$  lanac  $p_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}, \dots, p_n$ .

Algoritam *podijeli pa vladaj* (i zatim spoji rezultate) rekurzivno izvodi podjelu  $P_1$  i  $P_2$  u trapeze te ih zatim spaja u odgovarajuću podjelu cijelog poligona  $P$ . Glavnu poteškoću u postupku predstavlja korak spajanja.



Slika 2.7: Podjela poligona na trapeze vodi prema podjeli na monotone dijelove.

### *Algoritam Tarjana i Van Wyka*

Ovaj algoritam, kojem je vrijeme unutarnje traingulacije poboljšano s  $O(n \log n)$  na  $O(n \log \log n)$  polazi od sličnih ideja kao i kod Chazellea i Incerpija (podjela na trapeze metodom *podijeli pa vladaj*), ali se podjela izvodi na samom poligonu, a ne na lancima.

Algoritam obuhvaća neke inovativne, ali komplicirane korake tako da je njegov značaj možda više teorijskog nego praktičnog karaktera.

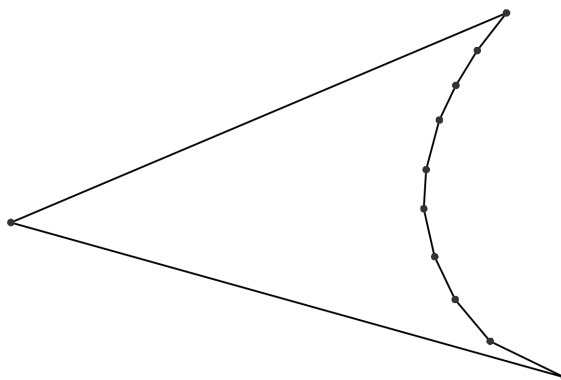
## 2.3 Konveksna podjela

Do sada smo razmotrili načine pri kojima smo poligone rastavljali na najjednostavnije oblike za koje smo sigurni da su konveksni. Bilo koji poligon s  $n$  vrhova i stranica rastavljali smo na trokute ili četverokute jer za njih ne moramo provjeravati nikakve druge uvjete te sa sigurnošću možemo reći da za bilo koji od dva spomenuta oblika nam je potreban jedan čuvar što se svodi na već poznatu formulu oblika  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ . No, kako bilo koji konveksni mnogokut zahtijeva nadzor samo jednog čuvara smisljeno je pretpostaviti kako će broj konkavnih vrhova imati važnu ulogu za određivanje broja čuvara kod nekonveksnih poligona. Stoga uvodimo parametar  $r$  kao broj konkavnih vrhova poligona.

Uočimo da vrijedi  $r \leq n - 3$ , budući da je zbroj kutova u bilo kojem poligonu jednak  $(n - 2)\pi$ . Sljedeći primjer na slici 2.8. pokazuje da postoje poligoni za koje se vrijednost



$r = n - 3$  doista postiže. Pritom ta vrijednost ne mora biti presudna, jer je u ovom primjeru dovoljan nadzor samo jednog čuvara.



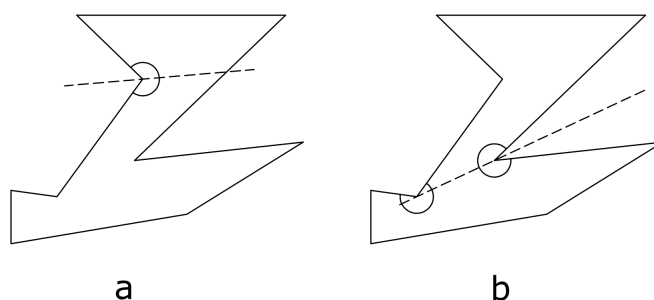
Slika 2.8: Poligon s  $n$  vrhova od kojih je  $n - 3$  konkavnih.

Međutim, sljedeći primjer sa slike 2.10. pokazuje da je ponekad nužno postaviti upravo  $r$  čuvara za nadzor unutrašnjosti poligona.

**Lema 2.5** (Chazelle 1980.). *Svaki poligon s  $r$  konkavnih vrhova moguće je podijeliti na konveksne dijelove čiji broj nije veći od  $r + 1$ .*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti indukcijom. Očito je da lema vrijedi za  $r = 0$ . Povucimo zraku iz konkavnog vrha koja raspolavlja unutarnji kut pri tom vrhu sve do njezinog prvog sjecišta s rubom poligona. Tom zrakom smo podijelili poligon na dva poligona s  $r_1$  i  $r_2$  konkavnih vrhova, pri čemu je  $r_1 + r_2 \leq r - 1$ . Naime, dva novonastala poligona ne mogu imati niti jedan "novi" konkavni vrh to jest konkavni vrh koji nije postojao već u početnom poligonu. To vidimo odatle što povučena zraka ili siječe rub poligona unutar jedne stranice (čime se ne dobiva konkavni vrh) ili prolazi nekim vrhom početnog poligona, a taj može imati svojstvo konkavnog vrha za jedan "novi" poligon samo ako je takav bio i u početnom poligonu. S druge strane, povlačenjem simetrale konkavnog kuta imamo zajednički vrh "novih" poligona koji nije konkavan ni u jednom od njih. Stoga vrijedi  $r_1 + r_2 \leq r - 1$  pa prema pretpostavci indukcije slijedi da imamo najviše  $r_1 + 1 + r_2 + 1 \leq r + 1$  konveksnih dijelova.  $\square$

Uočimo još da broj konveksnih dijelova na koji se može podijeliti poligon nije manji od  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$ . Naime, budući da se broj konkavnih vrhova može jednim "rezom" (kao u dokazu Leme 2.5.) smanjiti najviše za 2, minimalni broj potrebnih rezova iznosi  $\lceil \frac{r}{2} \rceil$ . U tom slučaju broj konveksnih dijelova iznosi  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$ . Dakle, optimalni (najmanji potrebni) broj konveksnih dijelova nije manji od  $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$ .



Slika 2.9: Zraka simetrale kuta konkavnog vrha siječe rub poligona (a) ili prolazi nekim vrhom poligona (b).



Slika 2.10: U ovakvim oblicima nalik zatvaraču foto-aparata nužno je postaviti  $r$  čuvara.

**Teorem 2.6** (O'Rourke 1982.). *Neka je  $P$  poligon s  $n$  stranica i  $r \geq 1$  konkavnih vrhova. Da bi nadzirali prostor poligona  $P$  ponekad je potrebno i uvijek dovoljno  $r$  čuvara.*

*Dokaz.* Nužnost je već ustanovljena, primjerom sa slike 2.9.

Kako bismo dokazali dovoljnost, primijenimo prethodnu Lemu 2.5. Iz postupka podjele vidimo da svaki dobiveni konveksni dio mora na svom rubu imati bar jedan konkavni vrh početnog poligona. Stoga čuvari smješteni u svakom konkavnom vrhu mogu nadzirati svaki konveksni dio.  $\square$

**Teorem 2.7** (Hertel i Mehlhorn 1983.). *Neka je  $r$  broj konkavnih vrhova poligona. Tada se svaka triangulacija poligona može pretvoriti u particiju poligona s ne više od  $2r + 1$  konveksnih dijelova uklanjanjem nekih dijagonala.*

*Dokaz.* Neka je  $d$  unutarnja dijagonala poligona čija je krajnja točka  $v$ . Dijagonalu  $d$  ćemo nazvati *osnovnom* za  $v$  ako njenim uklanjanjem vrh  $v$  postaje konkavni vrh. Tada konkavni vrh ne može biti zajednički za više od dvije osnovne dijagonale, jer kut manji od  $360^\circ$  ne može biti podijeljen na više od 3 kuta tako da svaka dva susjedna dijela zajedno imaju više od  $180^\circ$ . (Naime, moguće je kut  $\alpha < 360^\circ$  podijeliti na kutove  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  tako da bude  $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$  i  $\alpha_2 + \alpha_3 > 180^\circ$ , ali očito za  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$  ne može biti  $\alpha_1 + \alpha_2 > 180^\circ$  i  $\alpha_3 + \alpha_4 > 180^\circ$ .)

Kad bi svaki konkavni vrh ležao na točno dvije osnovne dijagonale tako da niti jedna od tih dijagonala ne bude zajednička za dva konkavna vrha, to bi značilo da se  $2r$  dijagonala ne može ukloniti iz triangulacije. To je najveći mogući broj dijagonala koje se ne mogu ukloniti iz triangulacije, što znači da je poligon podijeljen u najviše  $2r + 1$  konveksnih dijelova.  $\square$

## Poglavlje 3

# Ortogonalni poligoni

### 3.1 Podjela na konveksne četverokute

#### Uvod

Jedna od važnijih klasa poligona je klasa ortogonalnih poligona. Što su ortogonalni poligoni?

**Definicija 3.1.** Ortogonalni poligoni su oni poligoni čiji su bridovi paralelni s koordinatnim osima, osi apscisa i osi ordinata.

Dakle, bridovi poligona su naizmjenice horizontalni i vertikalni te se uvijek sijeku pod kutovima od  $90^\circ$  ili  $270^\circ$  u nutrini poligona. Ove poligone je lako prikazati u kartezijevim koordinatama bez smanjenja općenitosti u odnosu na druge ortogonalne poligone.

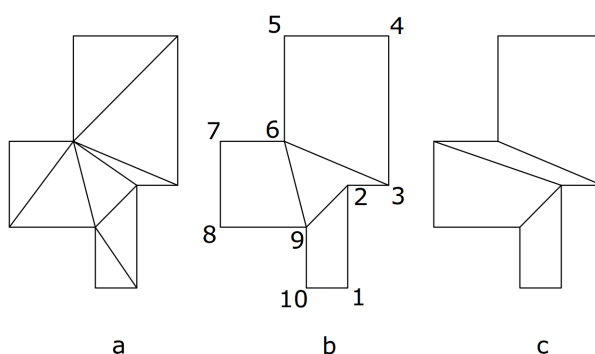
Teorem o ortogonalnoj umjetničkoj galeriji prvi put je iskazan i dokazan 1980. U teoremu je dokazano kako je ponekad potrebno i uvijek dovoljno  $n/4$  čuvara da bi nadgledali ortogonalnu umjetničku galeriju s  $n$  vrhova. Zbog postavljenih ograničenja prema kojima smo odredili izgled ortogonalnog poligona za njegovo nadgledanje dovoljno nam je tri četvrtine čuvara u odnosu na poligone koji nemaju takva ograničenja. Ipak najprije ćemo obraditi spomenuti dokaz čija je posljedica podjela ortogonalnog poligona jednako važna kao i triangulacija za opće poligone. Naime, dokazano je kako svaki ortogonalni poligon može biti podijeljen na konveksne četverokute ucrtavanjem dijagonala u poligon.

#### Podjela na konveksne četverokute

Prethodno smo promatrali kako je podjelom poligona na trokute riješen problem konveksnih dijelova na koje je bilo koji poligon podijeljen. Kod podjele na konveksne četverokute ipak treba biti mnogo oprezniji. Naime, ako samo spojimo parove trokuta po stranici koju

dijele ne moramo nužno dobiti konveksan četverokut kao što vidimo na slici 3.1a. U ova-  
voj podjeli ključno će biti napraviti podjelu krajnjih dijelova poligona, koje ćemo nazvati  
*uho* kao što možemo vidjeti na slici 3.1b. Na taj način bismo mogli smatrati četverokute  
(1, 2, 9, 10), (3, 4, 5, 6) i (6, 7, 8, 9) dobrom podjelom, no tada je preostao četverokut (2, 3, 6, 9)  
koji nije konveksan. Pravilna podjela ovog ortogonalnog poligona je na četverokute (1, 2, 9, 10),  
(2, 3, 6, 7), (2, 7, 8, 9) i (3, 4, 5, 6).

Da bismo proveli dokaz najprije ćemo definirati odnos susjednih stranica.

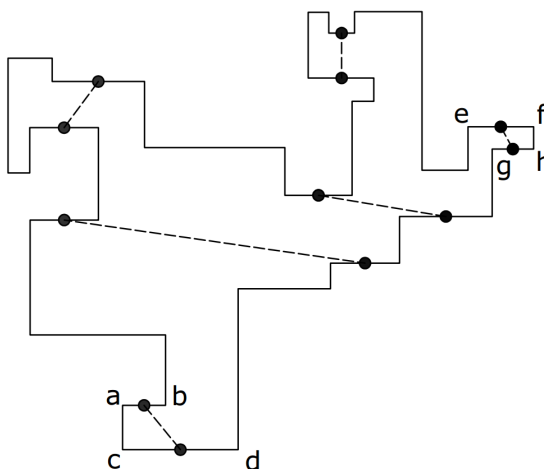


Slika 3.1: Niti jedna podjela na trokute (a) ili uklanjanje *uha* (b) ne dovodi do podjele na konveksne četverokute (c).

**Definicija 3.2.** Neka je  $P$  ortogonalni poligon. Horizontalni brid poligona  $P$  nazivamo *gornjim bridom* ako je unutrašnjost od  $P$  ispod njega, a *donjim bridom* ako je unutrašnjost poligona iznad njega. Analogno nazivamo *lijevi* i *desni* brid. Gornji brid  $G$  i donji brid  $D$  su *susjedni* ako vrijedi:

1.  $G$  i  $D$  se vide odnosno ako postoje točke  $g \in G$  i  $d \in D$  takve da se dužina  $\overline{gd}$  u potpunosti nalazi u unutrašnjosti poligona  $P$ .
2. Ne postoji  $D'$  iznad  $D$  takva da se  $G$  vidi iz  $D'$ .
3. Ne postoji  $G'$  ispod  $G$  takva da se  $D$  vidi iz  $G'$ .

Primijetimo da horizontalni brid ne mora imati *susjeda*, ali ako ima tada je on jedinstven. Par susjednih bridova će kreirati *uho* ako su povezani vertikalnim bridom. Na slici 3.2 možemo vidjeti da *uši* kreiraju parovi stranica  $(\overline{ab}, \overline{cd})$  i  $(\overline{ef}, \overline{gh})$ . Ono zbog čega su ti dijelovi poligona važni je jedinstvena mogućnost podjele u konveksne četverokute. Četverokuti  $abcd$  i  $efgh$  moraju biti u četverokutnoj podjeli poligona. Sada definirajmo ortogonalni poligon u općem položaju.



Slika 3.2: Susjedne gornje i donje stranice:  $(\overline{ab}, \overline{cd})$  i  $(\overline{ef}, \overline{gh})$  čine uši.

**Definicija 3.3.** Neka je  $P$  ortogonalni poligon. *Općim položajem* poligona  $P$  nazivamo položaj gdje bilo koja dva vrha poligona  $P$  nemaju niti jednu jednaku vrijednost horizontalnih i vertikalnih koordinata.

U ortogonalnim poligonima se također provodi podjela na konveksne dijelove kao što se to čini i u općenitim poligonima pomoću triangulacije. Obzirom da su ortogonalni poligoni dosta specifični, njihovu podjelu na konveksne dijelove provest ćemo dijeleći ih na konveksne četverokute.

**Teorem 3.1** (Kahn, Klawe, and Kleitman 1980.). *Svaki ortogonalni poligon  $P$  (sa ili bez rupa) moguće je podijeliti na konveksne četverokute.*

Direktna posljedica ovog teorema će biti činjenica kako je nužan i dovoljan broj čuvara za nadgledanje nutrine ortogonalnog poligona  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .

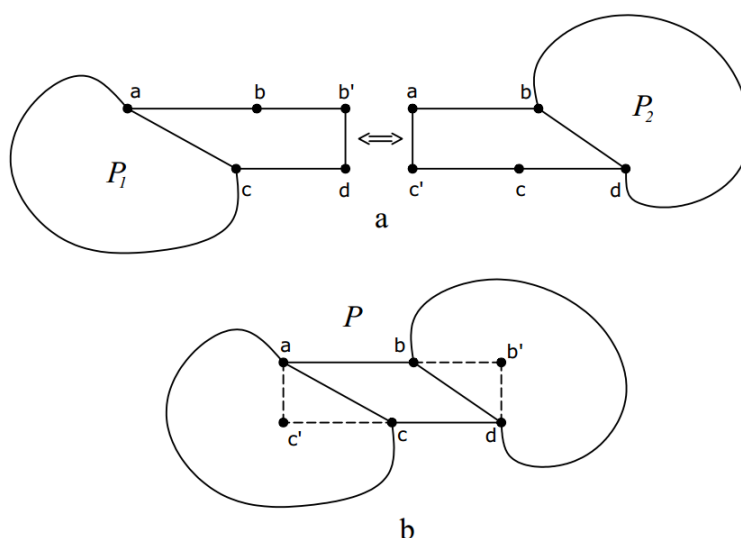
*Dokaz.* Može se pokazati da je dovoljno promatrati poligone u općem položaju. Baza indukcije će biti pravokutnik koji je već sam po sebi konveksan četverokut. Uz pretpostavku da se svi poligoni manji od  $P$ , odnosno poligoni s manjim brojem vrhova nego  $P$  mogu podijeliti na četverokute,  $P$  mora sadržavati barem jednu od sljedećih struktura:

1. Par susjednih bridova ne formiraju uho.
2. Dobro uho.
3. Barem jedan par ušiju.

Pokažimo sada da tvrdnja kako je moguće  $P$  reducirati na manji  $P'$ , tako da se podjela na četverokute poligona  $P'$ , uz pretpostavku indukcije, može proširiti na poligon  $P$ .

Ako  $P$  ima par susjednih stranica koje ne kreiraju uho, tada je  $P$  moguće reducirati.

Neka je gornji brid  $G = \overline{ab}$  i njemu susjedni donji brid  $D = \overline{cd}$  tako da je  $a$  lijevo od  $c$ .



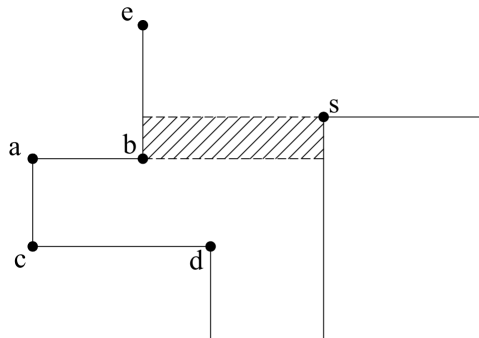
Slika 3.3: Reduciranje za susjedne bridove  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  koji ne čine uho.

Tada četverokut  $abcd$  možemo dopuniti do pravokutnika i njegovim razdvajanjem dobiti dva uha što nazivamo poligonom  $P'$ . U slučaju da  $P$  nema rupa,  $P'$  sadrži dva dijela  $P_1$  i  $P_2$  koji su manji od  $P$ , to jest imaju manji broj vrhova. Neka je  $\tau$  točka neposredno iznad  $G$  i  $\beta$  točka neposredno ispod  $D$ . Sada su  $\tau$  i  $\beta$  povezane u vanjštini poligona  $P'$  koja ide duž poligona gdje se nalaze uši. Ali  $\tau$  ne može biti povezan s  $\beta$  u vanjštini od  $P$ ; kako je  $P'$  povezan, mora postojati dio koji okružuje  $\tau$  ili  $\beta$  tako da se odsijecanje od  $P'$  ne gubi. Stoga je broj rupa od  $P$  smanjen za 1 i  $P'$  je manji.

Ako je  $P$  dobro uho, onda je  $P$  reducibilan.

Neka je uho s gornje strane te neka su  $\overline{ab}$  i  $\overline{cd}$  gornji i donji bridovi,  $e$  susjedan  $b$  te  $s$  kao krajnja točka uha. Kako je uho dobro, neki bridovi sijeku unutrašnjost pravokutnika određenog vrhovima  $b$  i  $s$  ili je  $s$  gornji brid. Neka je  $x$  slijeva u odnosu na  $y$ .

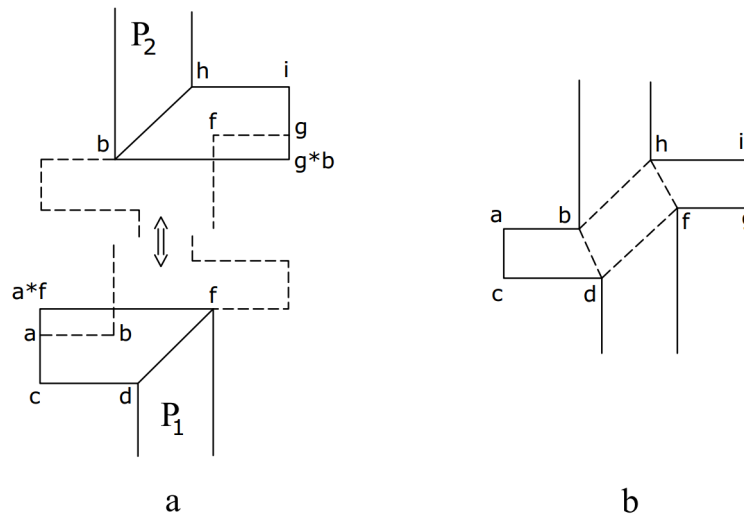
Zamijenimo li  $\overline{xy}$  i lanac  $e, b, a, c, d$  s dva uha, prvi s  $y, b * y, b * c, d$  i drugi s  $x, y, y * b, b, e$  i nazovimo to poligonom  $P'$ . Tada  $P'$  možemo razdvojiti na dva poligona,  $P_1$  i  $P_2$ . Pretpostavimo da svaki poligon manji od  $P$  možemo podijeliti na konveksne četverokute, upravo kao što je to slučaj s  $P_1$  i  $P_2$ . Ako  $P$  nema rupe, tada je očito da će  $P'$  imati manje rupa. Pogledamo li neke dvije točke izvan prostora poligona  $\tau$  i  $\beta$ , tako da je  $\tau$  iznad  $\overline{xy}$ , a  $\beta$  ispod  $\overline{cd}$  na jednak način se provodi provjera kao što smo prethodno pokazali pa je  $P'$



Slika 3.4: Definicija komponenti uha; uho  $(\overline{ab}, \overline{cd})$  je loše.

moguće podijeliti na konveksne četverokute. Ukoliko  $P$  nema rupa pozivamo se na opći slučaj.

Ako  $P$  sadrži par ušiju, onda je  $P$  reducibilan.



Slika 3.5: Reduciranje parova ušiju.

Neka  $\overline{ab}, \overline{cd}$  tvore gornji, a  $\overline{fg}, \overline{hi}$  donje uho. Pomaknimo  $\overline{ab}$  gore tako da formiramo uho  $(a * f, f)$ ,  $\overline{cd}$  i pomaknimo  $\overline{fg}$  dolje da formiramo uho  $(b, g * b)$ ,  $\overline{hi}$ . Ako je  $P'$  nepovezan, tada su  $P_1$  i  $P_2$  manji od  $P$ . Ako je  $P'$  povezan tada on sadrži jednu rupu manje nego li  $P$  pa je  $P'$  manji. Pretpostavkom indukcije se dokazuje da je  $P$  moguće podijeliti u konveksne četverokute. □



## 3.2 Sackova podjela na četverokute

Dokazani teorem nam ne pruža mogućnost da iz njega odmah možemo provesti neki algoritam podjele za dani ortogonalni poligon. Sackovi algoritmi raščlanjuju problem podjele na tri manja problema: podjelu na monotone poligone, podjelu monotoni poligona na konveksne četverokute i podjelu *piramide* na konveksne četverokute.

### Podjela piramide na konveksne četverokute

Da bismo podijelili piramidu na konveksne četverokute najprije je potrebno definirati piramidu i pojmove vezane uz nju.

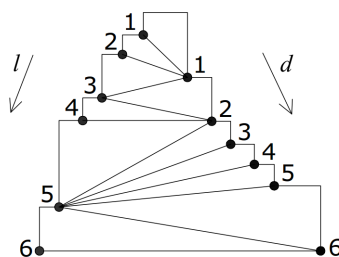
**Definicija 3.4.** Neka ortogonalni poligon ima jedan horizontalni brid, dužinu, koju nazivamo bazom takvu da se sve projekcije rubnih točaka ostalih horizontalnih bridova projiciraju na nju. Takav ortogonalni poligon nazivamo *vertikalni histogram*.

**Definicija 3.5.** Vertikalni histogram koji je monoton su vertikalnom smjeru nazivamo *piramida*.

Lakše bismo opisali piramidu kao stepenice *prema gore* od baze do najvišeg horizontalnog brida i *prema dolje* od najvišeg horizontalnog brida do baze. Poligon s ovakvim svojstvima nije teško podijeliti na konveksne četverokute.

Neka su konkavni kutovi na lijevoj strani stepenica označeni s  $l_1, l_2, \dots, l_{a-1}$  redom odozgo prema dolje te neka posljednja točka (točka baze) ima oznaku  $l_a$ . Analogno označimo i desnu stranu stepenica s  $d_1, \dots, d_{b-1}$  i točku baze s  $d_b$  (slika 3.6).

Poredajmo sada obje strane prema njihovim visinama



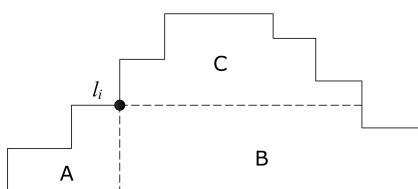
Slika 3.6: Podjela piramide na konveksne četverokute spajanjem lista.

$$l_1 l_2 d_1 l_3 l_4 d_2 d_3 d_4 d_5 l_5 d_6 l_6$$

Svaki vrh iz novog zapisa  $l_i$  spojimo s vrhom  $d_j$  redom u nizu kako je zapisano. Analogno, kada u zapisu dođemo do  $d_j$  spojimo ga s  $l_i$ . Na taj način smo padajućim redoslijedom piramidu podijelili na konveksne četverokute.

Provjerimo ispravnost provedene podjele. Svaki par susjednih vrhova, koji su konkavni na jednoj strani stepenica, je povezan s pripadajućim konkavnim vrhom drugih stepenica. Na taj način znamo da smo piramidu podijelili na četverokute. Svi konveksni vrhovi su sadržani u podjeli, dok su svi konkavni vrhovi krajnje točke najmanje jedne dijagonale koja ih čini dvama konveksnim vrhovima. Potrebno je još samo provjeriti konveksnost svih dobivenih četverokuta.

Neka je  $l_i$  konkavni vrh lijevih stepenica, kao na slici 3.7. te neka je  $d_j$  jedan od traženih



Slika 3.7:  $l_i$  je povezan vrhom iz  $B$ .

vrhova na desnim stepenicama koji će biti povezani algoritmom. Kako se  $d_j$  nalazi na desnim stepenicama ne može se nalaziti u dijelu  $A$ . Kako se na listi dobivenoj spajanjem konkavnih vrhova lijevih i desnih stepenica  $d_j$  nalazi nakon  $l_i$  znači da je  $d_j$  niže u odnosu na  $l_i$  pa se ne nalazi niti u dijelu  $C$ . Stoga je  $d_j$  u dijelu  $B$  čime je konkavnost "razbijena". Kako je za svaki konkavni vrh konkavnost razbijena svi četverokuti su konveksni čime je pokazana ispravnost ovog algoritma.

### 3.3 Algoritam i dokaz prema Lubiw

Prikazat ćemo pristup ortogonalnim poligonima kakav je prezentirala Anna Lubiw 1985. godine. Naime, njen dokaz mogućnosti podjele ortogonalnog poligona vodi prema njenom algoritmu koji to učinkovito provodi.

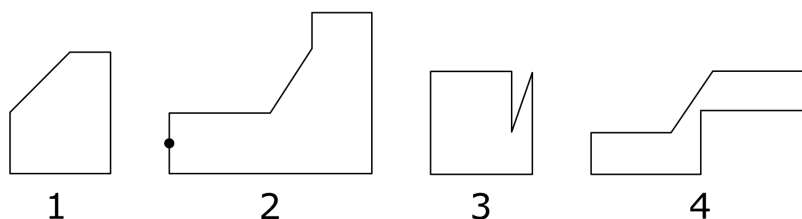
Oba dokaza se provode na sličan način. Iz podjele ortogonalnog poligona na konveksne četverokute, bilo da se radi o poligonu sa ili bez rupa, uklonimo jedan četverokut. Uklanjanjem jednog četverokuta smo možda kreirali nekoliko novih poligona, ali sve te poligone je moguće rastaviti na konveksne četverokute. No, nakon uklanjanja četverokuta ne moraju preostali poligoni biti ortogonalni. Teorem koji ćemo dokazati se može proširiti na širu klasu poligona od ortogonalnih. Lubiw je odredila klase ortogonalnih poligona sa i bez rupa. Za obje klase, postoji četverokut čijim uklanjanjem nastaju manji poligoni koji

se nalaze u istoj klasi te se taj teorem dokazuje indukcijom.

**Definicija 3.6.** *1-ortogonalni* poligon je poligon bez rupa s jednim bridom  $e$  kojeg nazivamo *nakrivljenim bridom*, takav da poligon zadovoljava uvjete:

1. Postoji paran broj bridova.
2. Osim  $e$ , bridovi su naizmjenice horizontalni i vertikalni koji obuhvaćaju poligon.
3. Svi konkavni vrhovi su manji ili jednaki  $270^\circ$ .
4. *Nos* nakrivljenog brida ne sadrži vrhove poligona.

*Nos* nakrivljenog brida  $e$  je pravokutni trokut unutar poligona čija je hipotenuza  $e$ . Uvjet da nos ne sadrži vrhove proizlazi iz činjenice da su svi ostali bridovi horizontalni i vertikalni te se ne mogu ni na koji način sjeći s  $e$  osim u njegovim krajnjim točkama. Na slici 3.8. ćemo prikazati četiri moguća slučaja u kojima nisu zadovoljeni uvjeti.



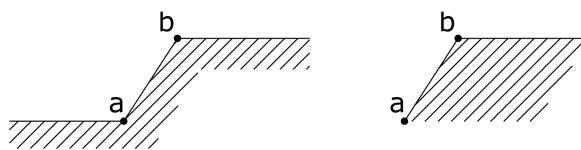
Slika 3.8: Četiri poligona nedjeljiva u konveksne četverokute, svaki od njih ne zadovoljava jedan od uvjeta definicije.

**Teorem 3.2** (Lubiw 1985.). *Svaki 1-ortogonalni poligon  $P$  je moguće rastaviti na konveksne četverokute.*

*Dokaz.* Dokaz ćemo provesti indukcijom. Ako  $P$  ima samo četiri brida, tada ima dva horizontalna i dva vertikalna brida (nakon eventualne rotacije do  $90^\circ$ ) prema svojstvu (2). Bez obzira na položaj nakrivljenog brida,  $P$  mora biti konveksan. Time je određena baza indukcije.

Pretpostavimo da  $P$  ima više od četiri brida. Pokažimo da postoji *uklonjivi četverokut*, konveksan četverokut čijim će uklanjanjem  $P$  biti rastavljen na manje jednoortogonalne poligone.

Ako zajedno promatramo svojstva (1) i (2) tada dva susjedna brida od  $e = \overline{ab}$  su oba ili horizontalna ili oba vertikalna. Iz svojstva (3) proizlaze dvije moguće situacije prikazane



Slika 3.9: Nakrivljeni brid  $\overline{ab}$  gdje sjenčani dio označava unutrašnjost poligona  $P$ .

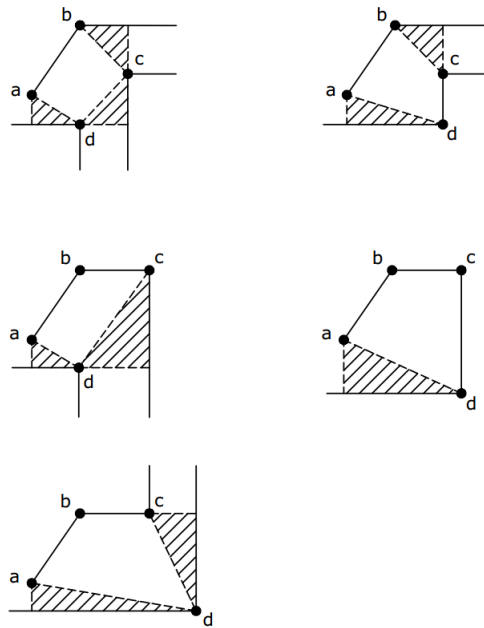
na slici 3.9. U oba slučaja je sadržana lijeva krajnja točka gornjeg brida  $b$ . Dvije točke četverokuta kojeg ćemo ukloniti su  $a$  i  $b$ . Odredimo preostale dvije točke  $c$  i  $d$ . neka je  $c$  najviši lijevi vrh područja  $R_1$ , no kako je  $R_1$  zatvoren slijeva i odozgo bridovima čija je jedna krajnja točka  $b$ ,  $c$  mora postojati i tada je on ili na bridu s  $b$  ili na krajnje lijevom bridu. Definirajmo područje  $R_2$  koje je omeđeno odozgo i zdesna. Isključimo li vrhove  $a$  i  $c$ , područje je otvoreno i neka je, ako postoji, najviši desni vrh područja  $R_2$  vrh  $d$ .

Ako kroz  $c$  prolazi vertikalni brid  $F$  tada mu je durga krajnja točka vrh  $d$ . Ukoliko je  $F \neq cd$  tada se  $d$  nalazi na vrhu nekog drugog brida koji je pozicioniran krajnje gore desno i time je pokazano da vrh  $d$  postoji.

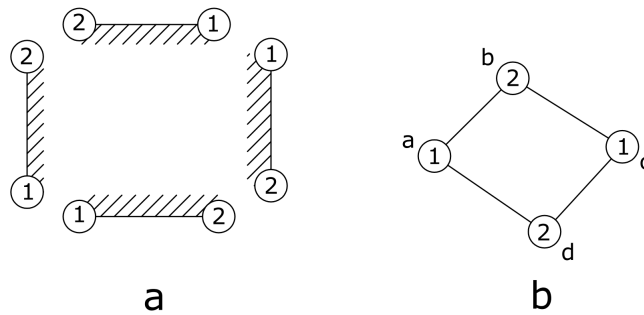
Nakon što smo razmotrili sve slučajeve za  $c$  i  $d$ , uklonimo četverokut  $abcd$ .

Jedna od mogućnosti uklanjanja četverokuta  $abcd$  ostavlja tri poligonalna područja, koja su omeđena s  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  i  $\overline{ad}$ . Svaka od tih dijagonala će očito biti nakrivljeni brid na svojim poligonima. Stoga će svaki od tih poligona zadovoljavati svojstvo (2). Prema razmatranim slučajevima lako se vidi da je svojstvo (3) zadovoljeno što se može vidjeti i na primjerima sa slike 3.10. Da područje nosa ne sadržava niti jedan vrh, što je svojstvo (4), proizlazi iz činjenice da je vrh  $c$  najviši krajnje lijevi vrh, a slično ograničenje vrijedi i za vrh  $d$ . Spomenuta ograničenja nam daju označena područja sa slike 3.10 koja ne sadržavaju vrhove. U svim slučajevima, nos ne sadrži niti jedan vrh.

Da bismo dokazali kako svaki od preostalih poligona ima paran broj bridova (svojstvo (1)), koristit ćemo takozvano pametno prebrojavanje Anne Lubiw. Definiramo krajnje točke gornje, donje, lijeve i desne bridove podjele u dvije vrste kao na slici 3.11a. Krajnje točke nakrivljenog brida dobivaju svojstvo susjednih horizontalnih ili vertikalnih bridova. Trebalo bi biti jasno da je svakom vrhu 1-ortogonalnog poligona dodjeljuje nedvosmisljeni tipom prema ovoj shemi, na primjer, konveksni kut koji tvore donji i lijevi brid može biti samo vrh tipa 1. Bilo kako obuhvatili 1-ortogonalni poligon vrste vrhova alterniraju. Primijetimo da je  $a$  vrste 1 i  $b$  vrste 2 kao na slici 3.9; u slučajevima prikazanim na slici 3.10  $c$  je uvijek vrste 1, a  $d$  vrste 2. Stoga svaka od dijagonala  $\overline{bc}$ ,  $\overline{cd}$  i  $\overline{ad}$  sadrže krajnje točke vrste 1 i 2 pa dijelovi poligona omeđeni tim dijagonalama zadovoljavaju alternaciju 1/2. Stoga poligoni moraju imati paran broj vrhova.



Slika 3.10: Nosovi dijagonala uklonjivih konvexnih četverokuta su prazni (osjenčano).



Slika 3.11: Vrste vrhova; sjenčani dio u (a) označava unutrašnjost poligona  $P$ .

Time smo pokazali da je svaki od dobivenih poligona 1-ortogonalni poligon. Jasno je da ti poligoni imaju manje vrhova nego  $P$  pa prema pretpostavci indukcije moguće ih je podijeliti na konvexne četverokute. Spajanjem njihovih podjela s  $abcd$  četverokutom nam daje podjelu na konvexne četverokute poligona  $P$  čime je teorem dokazan.  $\square$

## Poglavlje 4

# Neke druge varijante problema

### 4.1 Čuvari u pokretu

U ovom poglavlju promotrit ćemo neke varijante problema nadzora umjetničke galerije koji su slični dosad promatranim problemima.

Naime, postoje razne varijante interpretacije, kako problema, tako i njihovih rješenja. Najprije ćemo promotriti koliko čuvara bi bilo dovoljno ukoliko bi oni imali mogućnost kretanja. Kako je dosad razmotrena samo mogućnost stacionarnih čuvara, koji su fiksirani u jednoj točki poligona, bilo da se radi o samom rubu ili njegovoj nutrini, intuitivno je jasno kako će biti potreban manji broj čuvara ukoliko oni imaju mogućnost kretanja.

Naravno, u takvom slučaju čuvari će imati određene osobine, odnosno ograničenja svojih kretanja.

**Definicija 4.1.** Neka je  $s$  dužina koja se u cijelosti nalazi u nutrini poligona  $P : s \subseteq P$ . Kažemo da je točka  $x \in P$  nadzirana sa dužine  $s$  ako postoji  $y \in s$  takav da je dužina  $\overline{xy} \subseteq P$ .

Dakle, točka  $x$  je nadzirana ako je vidljiva s bilo koje točke linije kretanja čuvara. Također, ovdje se uvodi i pojam *slabe* i *dobre* vidljivosti. Slaba vidljivost je definirana kao vidljivost točke  $x \in P$  iz neke točke  $y \in s$ , dok je dobra vidljivost definirana kao vidljivost točke  $x$  iz svake točke  $y \in s$ .

Nakon što smo definirali vidljivost točke sa neke dužine, provjerit ćemo koliko će nam biti potrebno čuvara u pokretu za neke općenite poligone, kao i za ortogonalne poligone. U sljedećoj tablici ćemo prikazati konačan rezultat toga da nam navedene poligone nadzire potreban broj čuvara koji se nalaze u mjestu u odnosu na potreban broj čuvara u pokretu. Najprije opišimo i neke osobine odnosno ograničenja čuvara u pokretu i njihove mogućnosti kretanja.

Čuvari→	Statični	U pokretu
Oblik poligona		
Opći	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$
Ortogonalni	$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$	$\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$

Tablica 4.1: Potreban broj čuvara.

*Čuvar po bridu* će biti čuvar čija se kretanja mogu pružati samo duž brida poligona  $P$ . Njegova kretanja se mogu pružati samo između dva susjedna vrha poligona  $P$  između kojih se čuvar nalazi. Također, čuvar može nadgledati i iz samog vrha poligona  $P$ .

*Čuvar po dijagonali* će biti čuvar koji će se kretati samo duž dijagonale koja se pruža između dva vrha u nutrini poligona  $P$ .

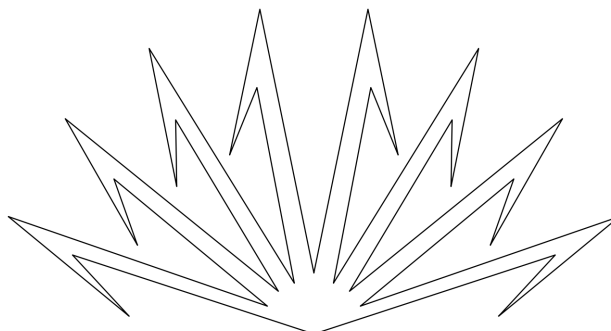
*Čuvar po dužini* će biti čuvar koji se kreće po bilo kojoj dužini unutar poligona  $P$ . Ta dužina se u cijelosti mora nalaziti u nutrini poligona  $P$ .

Zajednički naziv za čuvare u pokretu koji nadgledaju područje poligona je *geometrijski čuvari*.

Triangulacijom poligona  $P$  smo ostvarili prvi cilj podjele na konveskne dijelove za koje je bilo potrebno  $k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara. Tada smo razmatrali mogućnost nadgledanja galerije s čuvarima koji nisu imali mogućnost kretanja, već su bili smješteni u nekoj točki unutar poligona  $P$  gdje je kao dio poligona smatran i svaki njegov brid. Tako su čuvari mogli biti smješteni bilo gdje u samoj nutrini poligona, kao i na bridovima ili u vrhovima poligona, no nisu bili pokretni. Lako je zaključiti kako će nam biti dovoljno i  $k$  geometrijskih čuvara ako nam je bilo dovoljno  $k$  čuvara koji nisu imali mogućnost kretanja. Promotrimo li poligon oblika kao na slici 4.1. tada možemo primijetiti kako će nam biti nužno i dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara. Taj primjer pokazuje nužnost broja  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara u pokretu.

O'Rourke je 1983. godine dao dokaz kojim je potvrdio da je za nadgledanje prostora poligona  $P$  s  $n$  vrhova općenito i dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara po dijagonali. Dokaz se provodi pomoću lema za poligone s  $5 \leq n \leq 9$  vrhova te se za  $n \geq 10$  pomoću matematičke indukcije pokaže kako je za nadgledanje poligona dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara po dijagonali, a samim time i čuvara u pokretu.

S obzirom da je dokazana tvrdnja provedena za čuvare po dijagonalama potrebno je promotriti vrijedi li i tvrdnja za ostale čuvare u pokretu. Kako su čuvari po dijagonali samo specijalan slučaj čuvara po dužini znači da je ta tvrdnja zadovoljena.



Slika 4.1: Za nadzor ovog poligona potrebno je  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara, bez obzira na to kako izaberemo čuvaru po dužini ili po bridu.

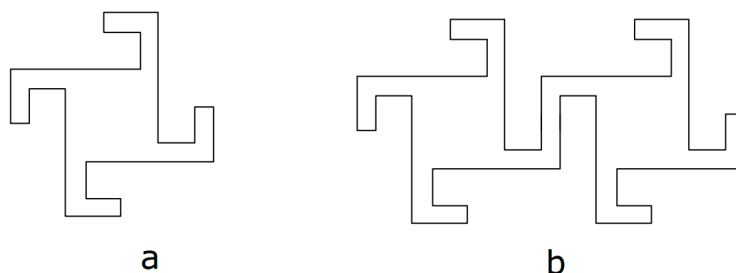
Kako se za opće poligone utvrdilo da je dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  čuvara u pokretu promotrimo koliko će biti potrebno i dovoljno čuvara za neki ortogonalni poligon.

Rastavom nekih općih poligona smo zaključili kako je za poligone općeg oblika koje nadziru stacionarni čuvari potrebno i dovoljno  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  čuvara. Ipak, za ortogonalne poligone su dani određeni uvjeti kao što je npr. da se bridovi poligona uvijek sijeku pod  $90^\circ$  ili  $270^\circ$ . Ustanovljeno je kako takva vrsta poligona može biti podijeljena na  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  konveksnih dijelova te će samim time za nadzor poligona biti dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  stacionarnih čuvara.

Sada je lako zaključiti kako će nam za nadzor ortogonalnog poligona biti potrebno manje čuvara u pokretu nego li je bilo potrebno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  stacionarnih čuvara. Objasnimo sada sve na jednom primjeru.

Za ortogonalni oblik poligona oblika svastike s  $n = 20$  vrhova kao na slici 4.2a. bit će potrebna četiri čuvara, svaki čuvar za jedan rukavac ortogonalnog poligona. Svakog čuvara ćemo postaviti tako da mu se kretanje pružaju od središnjeg dijela poligona prema nekoj točki iz koje će moći nadzirati jedan rukavac poligona. Jasno je da se tada za svaki rukavac postiže slaba vidljivost zbog takozvanog "mrtvog kuta" odnosno dijela poligona koji se neće moći nadgledati cijelo vrijeme. Ipak, čuvaru možemo smjestiti tako da s obzirom na njihovo kretanje cijelo vrijeme barem jedan čuvar nadzire središnji dio poligona čime se postiže dobra vidljivost svake točke središta poligona i krakova prema rukavcima. Tada vrijedi da je nužno imati  $(3 \cdot 20 + 4)/16 = 64/16 = 4$  čuvara za nadziranje cijelog poligona. Spajanjem dvaju takvih poligona s  $n = 20$  vrhova kao na slici 4.2. nestaju četiri vrha pa dobivamo poligon s  $n = 36$  vrhova kao na slici 4.2b. Za takav poligon bit će potrebno 7 čuvara, jedan čuvar za svaki rukavac te jedan čuvar za prolaz koji povezuje ta dva poligona. Primijetimo da je  $(3 \cdot 36 + 4)/16 = 112/16 = 7$ . Dodavanjem na ovakav način  $k$





Slika 4.2: Za nadzor ortogonalnog poligona potrebno je  $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$  čuvara.

svastika dobivamo da je za  $n = 16k+4$  vrhova poligona potrebno  $3k+1$  čuvara. Primijetimo da je  $(3n+4)/16 = 3k+1$ . Pomoću ovog primjera je pokazano kako je za nadziranje ortogonalnog poligona nužno  $\lfloor \frac{3n+4}{16} \rfloor$  čuvara u pokretu, no taj broj dokazano je i da je općenito dovoljan za ortogonalne poligone (Aggarwal, 1984.).

## 4.2 Nadzor vanjskog dijela poligona

Druga varijanta problema vezana za nadziranje umjetničke galerije krije se u prostoru nadziranja, jer osim same nutrine poligona moguće je nadgledati i njegovu vanjštinu.

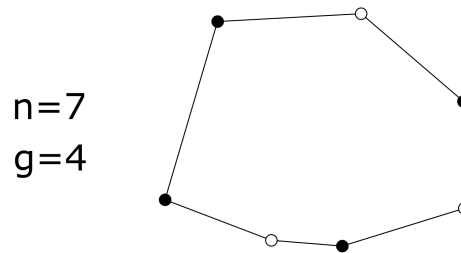
Takav problem možemo rastaviti na dva moguća slučaja: prvi slučaj je nadzor samo vanjštinu poligona i ta vrsta problema se naziva *Problem nadzora utvrde* i drugi slučaj kada je potrebno nadzirati vanjštinu i nutrinu poligona te se taj problem naziva *Problem zatvorskog dvorišta*.

Promotrimo najprije Problem nadzora utvrde. Koliko čuvara je potrebno da bi nadzirali vanjštinu poligona  $P$  s  $n$  vrhova?

Ovaj problem podjednako je težak i za konveksne i nekonveksne poligone. Ipak prvo definirajmo mogućnost nadgledanja prostora koji se nalazi u vanjštini poligona  $P$ .

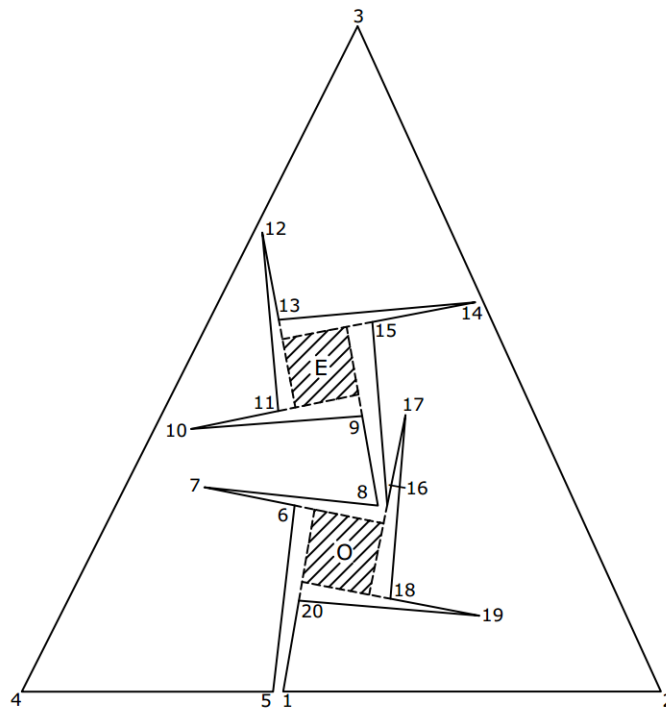
**Definicija 4.2.** Neka je točka  $y$  neka točka koja se ne nalazi u nutрини poligona  $P$ . Ako postoji vrh  $z$  poligona  $P$  takav da dužina  $\overline{zy}$  ne presijeca poligon  $P$  tada je točka  $y$  nadgledana iz točke  $z$ .

Za nadzor vanjštinu konveksnog poligona  $P$  potrebno je postaviti čuvara u svaki drugi vrh (primijetimo da ovdje govorimo ponovo o čuvarima koji su stacionarni). Tada je potreban broj čuvara za nadzor  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Pogledamo li sliku 4.3. mogli bismo zaključiti da će nam uvijek biti dovoljno postaviti čuvara u svakom drugom vrhu čak i ako se radi o nekonveksnom poligonu. Ipak tomu nije tako. Pogledamo li sliku 4.4. primjećujemo kako smještanje čuvara u svakom drugom vrhu nije uspješna strategija te nije dovoljno smjestiti čuvaru u



Slika 4.3: Za nadzor vanjštine konveksnog poligona potrebno je  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvara u (obojanim) vrhovima.

samo parno ili samo neparno označene vrhove jer jedan dio vanjštine poligona na taj način neće moći biti nadgledan kao što je i naznačeno na slici. Dakle, s  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  možemo postaviti

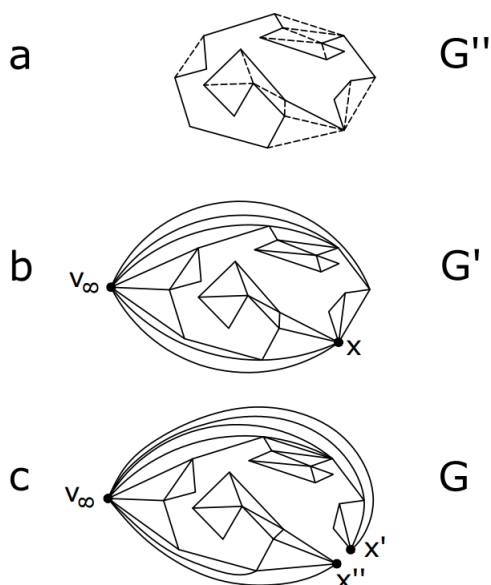


Slika 4.4: Čuvari postavljeni u vrhovima označenim parnim brojem ne mogu nadgledati područje  $E$ , dok čuvari postavljeni u neparnim vrhovima ne mogu nadgledati prostor  $O$ .

uvjet nužnosti za poligone, ali potrebno je dodatno razmotriti na koji način je primjereno

razmjestiti čuvere kako bi nadzirali cjelokupnu vanjštinu poligona  $P$ .

Gledajući sliku 4.5. možemo geometrijski zamisliti kako doći do rješenja problema



Slika 4.5: Graf u (c) nastao je triangulacijom konveksne ljuske iz (a) spajanjem svih vrhova ljuske s  $v_\infty$  (b) te razdvajanjem u jednom od tih vrhova  $x$ .

ovakvog tipa. Kao što vidimo najprije je potrebno triangulirati vanjštinu poligona, ali samo onog dijela koji se nalazi unutar ljuske samog poligona. Označimo li taj graf s  $n$  točaka kao  $G''$  (slika 4.5a.) dodavanjem točke  $v_\infty$  u graf  $G''$  dobivamo novi graf koji označavamo  $G'$  kao na slici 4.5b. te tada  $G'$  sadrži  $n + 1$  točaka. Na kraju odaberemo neku točku  $x$  konveksne ljuske poligona te ju razdvojimo na dvije različite točke  $x'$  i  $x''$  tako da  $v_\infty$  bude susjedan za obje točke. Tada graf sadrži  $n + 2$  točke i provedbom triangulacije znamo da nam je dovoljno  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$  čuvara. Kako za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi da je  $\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  zaključujemo kako je za nadzor vanjštine poligona dovoljno  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  čuvara. To je tvrdnja teorema O'Rourkea i Wooda iz 1983. godine.

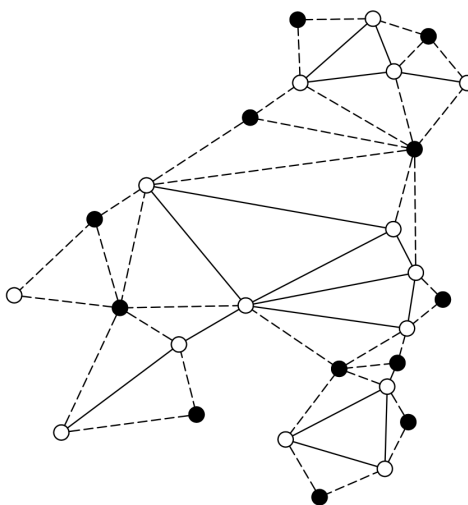
Na kraju promotrimo i rješenja koja nam nudi Problem zatvorskog dvorišta. S koliko čuvara je moguće nadgledati zatvorsko dvorište s obzirom na to da je potrebno nadgledati i nutrinu i vanjštinu poligona?

Postavljena je sljedeća slutnja:

Dovoljno je postaviti  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  čuvara u vrhovima poligona kako bi u potpunosti nadzirali nutrinu

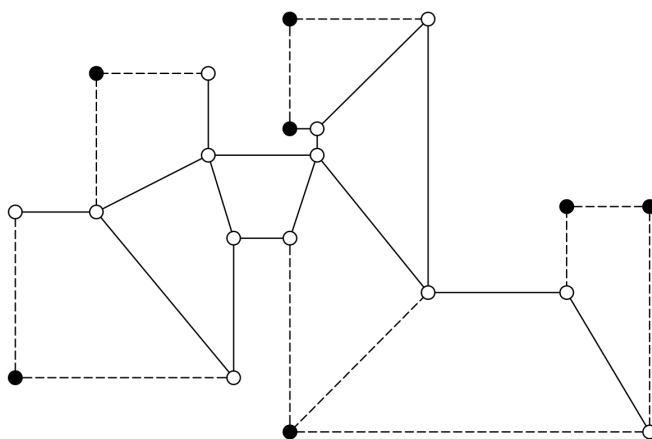
i vanjštinu poligona s  $n$  vrhova. Ovdje ćemo ukratko iznijeti argument za slabiji rezultat, da je dovoljno  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$  čuvara.

Kao što je ranije pokazano, za nadziranje vanjštine poligona potrebno nam je  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  čuvara. Provođenjem triangulacije nutrine poligona  $P$  te uklanjanjem svih vrhova i bridova koji se u tim vrhovima spajaju dobivamo jedan nepovezani graf. Tada graf ne sadrži više od  $n - \lceil \frac{n}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  vrhova. Nakon toga se uklanjaju svi vrhovi i bridovi koji ne tvore neki trokut jer njih očito nadziru čuvari sa svih strana.



Slika 4.6: Crtkane granice se podudaraju s vrhovima u kojima se nalaze čuvari (obojane točke).

Primijenimo sada argument vidljivosti nutrine, obojimo trobojno i smjestimo čuvaru u vrhove obojane najmanje korištenom bojom. Primijetimo da iako određeni dijelovi nisu nužno grafovi triangulacije jednostavnih poligona, oni su ipak trobojni jer je svaki podgraf takav graf. To će zahtijevati najviše  $\lfloor \frac{n_i}{3} \rfloor$  dodatnih čuvara za svaki povezan dio s  $n_i$  vrhova gdje je  $n_i \geq 3$ . Stoga je ukupan broj potrebnih čuvara  $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{3} \rfloor$ . Ta formula je ekvivalentna  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ , osim kada je  $n \equiv 1 \pmod{6}$ . U tom slučaju je potrebno  $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$  čuvar.



Slika 4.7: Crtkanim granicama se jedan kraj nalazi u vrhu u kojemu se nalazi i čuvar (obojani vrhovi).

Da bi nadzirali nutrinu i vanjštinu ortogonalnog poligona potrebno je  $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$  čuvara smještenih u vrhovima poligona, što je tvrdnja još jednog O'Rourkeovog teorema iz 1983. godine. Naime, kako je za vanjštinu ortogonalnog poligona dovoljno  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  čuvar, podjelom nutrine na konveksne dijelove dobije se broj vrhova ne veći od  $n - (\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)$ . Potom uklanjanjem vrhova i bridova, analogno postupku u općem poligonu, dobiva se  $n_i$  konveksnih dijelova te je dovoljno  $\lfloor \frac{n_i}{4} \rfloor$  čuvara, uočimo da vrijedi  $n_i \geq 4$ . Tada je ukupan broj čuvara

$$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}{4} \rfloor.$$

Dani izraz nije veći od  $\lfloor \frac{7n}{16} \rfloor + 5$  s time da se konstanta 5 može mijenjati za neke vrijednosti  $n \bmod 16$ .

# Bibliografija

- [1] J. O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms 1987.*, Oxford University Press, New York, 1987.
- [2] V. Chvátal, *A combinatorial theorem in plane geometry*, J. Comb. Theory Ser. B 18 (1975), 39-41.
- [3] S. Fisk, *A short proof of Chvatal's watchman theorem*, J. Comb. Theory Ser. B 24 (1978), 374.
- [4] J. O'Rourke, *Computational geometry in C second edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] G.H. Meisters, *Polygons have ears*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82, No. 6 (Jun. - Jul.), 1975, 648-651.

# Sažetak

Razmatranjem problema nadzora umjetničke galerije ustanovili smo kako je ključni korak napraviti dobru podjelu poligona pritom misleći na podjelu u konveksne mnogokute. Podjelom poligona s  $n$  vrhova na konveksne mnogokute ustanovljeno je kako će za bilo koji poligon biti dovoljno  $\lfloor n/3 \rfloor$  čuvara. Ipak, promatrajući jednu posebnu klasu poligona (ortogonalnih) dobili smo još bolje rješenje kako je za njih dovoljno  $\lfloor n/4 \rfloor$  čuvara za nadgledanje njihove unutrašnjosti. Nakon što smo razmotrili problem koji je postavljen 1973. godine promotri smo i neke druge varijante problema. Za nadzor galerije koja ima oblik općeg poligona bit će dovoljno  $\lfloor n/4 \rfloor$ , a za ortogonalne poligone  $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$  čuvara koji se mogu kretati po nekoj od dužina unutar poligona. Ukoliko je potrebno nadzirati vanjštinu poligona tada će nam biti dovoljno  $\lceil n/2 \rceil$  čuvara i što je zanimljivo, to ne ovisi o tome je li poligon konveksan ili ne, dok će za istovremeni nadzor unutrašnjosti i vanjštinu biti potrebno  $\lfloor 2n/3 \rfloor$  za opći, odnosno  $\lfloor 7n/16 \rfloor + 5$  čuvara za bilo koji ortogonalni poligon.

# Summary

Considering the art gallery problem, we have found that the key step is to make a good division of polygons, or more accurately, a division into convex polygons. It was found that by dividing any polygon with  $n$  vertices into convex polygons you'll never need more than  $\lfloor n/3 \rfloor$  guards. Still, observing a specific type of polygon (orthogonal) it was proved that  $\lfloor n/4 \rfloor$  vertex guards are sufficient to supervise its inside. After considering the problem that was set in 1973., we also looked at some other variations of the problem. To supervise a gallery, that is shaped like a general polygon, it will be sufficient  $\lfloor n/4 \rfloor$  mobile guards and for orthogonal polygons  $\lfloor (3n + 4)/16 \rfloor$ . If it is necessary to monitor the polygon outside,  $\lfloor n/2 \rfloor$  guards will be sufficient, and interestingly, it does not depend on whether the polygon is convex or not. As for simultaneous control of the inside and outside, it will be needed  $\lfloor 2n/3 \rfloor$  guards for general and  $\lfloor 7n/16 \rfloor + 5$  for any orthogonal polygon.



# Životopis

Rođen sam 14. srpnja 1988. godine u Zagrebu. Pohađao sam Osnovnu školu Vladimira nazora u Zagrebu te sam ju završio 2003. godine. Iste godine sam upisao Geodetsku tehničku školu gdje sam i maturirao te stekao zvanje geodetski tehničar 2007. godine. Preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer: nastavnički na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu upisao sam 9. rujna 2008. godine, te isti završio 31. srpnja 2013. godine.