Konačne ravnine Minkowskog

Pedić, Veronika

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Veronika Pedić

Konačne ravnine Minkowskog

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu proučavat ćemo konačne ravnine Minkowskog i dokazati *Heiseov teorem* o karakterizaciji konačnih ravnina Minkowskog parnog reda.

U prvoj cjelini dat ćemo kratak pregled projektivne geometrije s naglaskom na kvadrike, a posebno hiperboloide koji će nam biti korisni za konstrukciju klasičnog modela ravnine Minkowskog. Dokazat ćemo Dandelinov teorem o 16 točaka.

U drugoj cjelini definirat ćemo apstraktne ravnine Minkowskog i navesti neka njihova svojsva te ćemo detaljno opisati osnovni primjer. Definirat ćemo derivaciju ravnine Minkowskog u točki te snop, pramen i jato kružnica koji će nam se pokazati korisnima u dokazu Heiseova teorema.

U trećoj cjelini izvršit ćemo prebrojavanja u konačnim strukturama: projektivnim i afinim prostorima te ravninama Minkowskog te ćemo opisati problem reda konačne ravnine. Objasnit ćemo kako red ravnine Minkowskog određuje broj točaka, izvodnica i kružnica.

U četvrtoj ćemo cjelini klasificirati ravnine Minkowskog u klasične i neklasične te objasniti ulogu *Miquelova teorema*. Dat ćemo primjer neklasične ravnine Minkowskog.

U zadnjoj cjelini ćemo dokazati glavni teorem ovog rada, Heiseov teorem, uz pomoć *Qvistova teorema* i *Segreove leme*.

Zahvaljujem svojoj obitelji na podršci pri pisanju rada, ali posebno profesoru Vedranu Krčadincu na detaljnim objašnjenjima, zanimljivim pitanjima i problemima te pomoći i savjetima pri izradi rada.

2 Projektivna geometrija

U ovom poglavlju dat ćemo kratak uvod u trodimenzionalnu projektivnu geometriju i hiperboloide. Prvo ćemo definirati osnovni pojam, n-dimenzionalni projektivni prostor nad poljem te neka njegova svojstva. Polje će nam općenito biti nekomutativno (tj. tijelo).

Definicija 2.1. Projektivni prostor $PG(n, F)$ *je vektorski prostor* V *dimenzije* $n+1$ *nad poljem* F*.* Točke *su jednodimenzionalni potprostori od* V*,* pravci *su dvodimenzionalni potprostori od* V*. Općenito,* k-dimenzionalni projektivni potprostor *od* $PG(n, F)$ *je potprostor od* V *dimenzije* $k+1$*. Incidenciju projektivnih potprostora definiramo preko inkluzije "$\subseteq$" u* V*.*

Na primjer, točka T leži na pravcu p projektivnog prostora ako je odgovarajući 1-dimenzionalni potprostor podskup odgovarajućeg 2-dimenzionalnog potprostora.

Apstraktni projektivni prostor definiramo kao *incidencijsku strukturu* (tj. uređenu trojku (T, P, I), gdje je T skup točaka, P skup pravaca i $I \subseteq T \times P$ relacija incidencije) u kojoj vrijedi:

(P_1) (aksiom o pravcima): Kroz svake dvije točke prolazi jedinstven pravac.

(P_2) (Veblen - Youngov aksiom): Neka su A, B, C i D četiri točke takve da pravac AB siječe pravac CD. Onda i pravac AC siječe pravac BD.

(P_3) Na svakom pravcu leže barem tri točke. Postoje barem dva pravca.

Mi ćemo se u radu baviti modelom projektivnog prostora $PG(n, F)$, tj. projektivnim prostorom nad poljem, no tu zapravo ne gubimo mnogo na općenitosti. Iskažimo prvo Desarguesov teorem.

Teorem 2.2 (Desargues). *Neka je dan projektivni prostor te točke A_1, A_2, A_3 i B_1, B_2, B_3 u njemu takve da vrijedi:*

1. *Pravci A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 prolaze kroz neku točku C, različitu od A_i i B_i, $i = 1, 2, 3$.*

2. *Nikoje tri od točaka C, A_1, A_2, A_3 ili C, B_1, B_2, B_3 nisu kolinearne.*

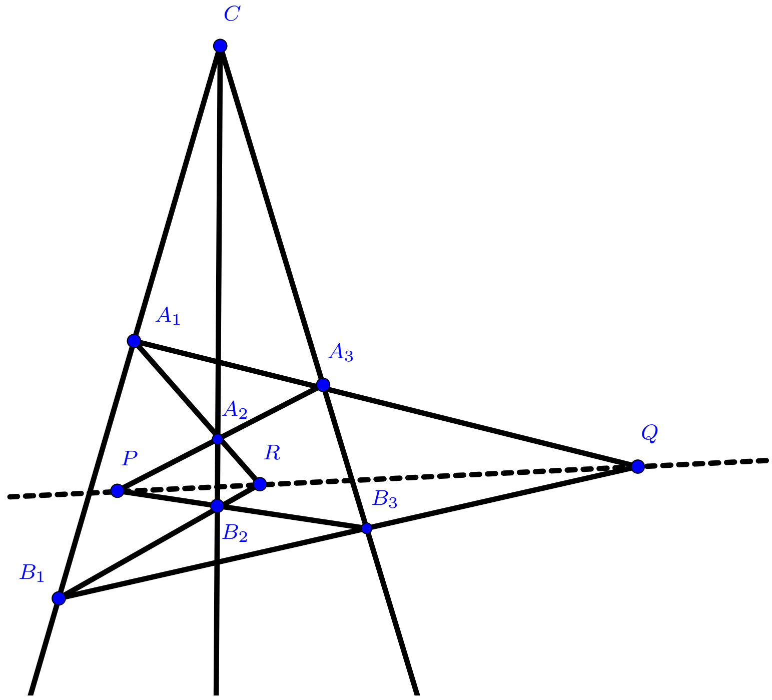
Tada su točke $P = A_2A_3 \cap B_2B_3$, $Q = A_1A_3 \cap B_1B_3$ i $R = A_1A_2 \cap B_!B_2$ kolinearne.

Sada nam *reprezentacijski teorem za projektivne prostore* daje izomorfizam između apstraktnog projektivnog prostora dimenzije $n \geq 2$ u kojem vrijedi Desarguesov teorem i projektivnog prostora $PG(n, F)$ nad nekim vektorskim prostorom V nad poljem F. Desarguesov teorem vrijedi u svim (apstraktnim) projektivnim prostorima dimenzije barem 3. Svaki projektivni prostor ili ravninu u kojoj on vrijedi nazivamo *desarguevskim*.

Iz definicije projektivnog prostora $PG(n, F)$ lako slijede aksiomi (P_1) i (P_2) te, u slučaju $n \geq 2$ i aksiom (P_3) apstraktnog projektivnog prostora te Desarguesov teorem. Dakle, model projektivnog prostora $PG(n, F)$ je doista primjer desarguevskog apstraktnog projektivnog prostora.

Definicija 2.3. *Neka je V vektorski prostor dimenzije $n + 1$ nad poljem F. Skup $\{a_1, \ldots, a_{n+2}\}$ točaka u projektivnom prostoru $PG(n, F)$ je* projektivni okvir ili projektivna baza od $PG(n, F)$ *ako postoji baza $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ od V takva da je $a_i = \langle e_i \rangle$, za $1 \leq i \leq n + 1$ te $a_{n+2} = \langle e_1 + \ldots + e_{n+1} \rangle$.*

Pokazuje se da su baze za V koje definiraju projektivni okvir jednake do na množenje nenul skalarom $\lambda \in F$.



Slika 1: Skica Desarguesova teorema.

Neka je sada $PG(n, F)$ vektorski prostor V dimenzije $n + 1$ nad poljem F. Neka je $\{e_0, \ldots, e_n\}$ baza za V te $a \in V$ proizvoljan nenul vektor. Tada a možemo na jedinstven način zapisati kao $a = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Točka $A = \langle a \rangle \in PG(n, F)$ ima u toj bazi *homogene koordinate* $A = (\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_n) = (\lambda\alpha_0 : \lambda\alpha_1 : \ldots : \lambda\alpha_n), \lambda \neq 0$.

Definicija 2.4. Dimenzija projektivnog prostora $PG(n, F)$ *je* n*, tj. jednaka je dimenziji pripadnog vektorskog prostora umanjenoj za* 1*.*

Dakle, trodimenzionalni projektivni prostor je projektivni prostor kojemu je dimenzija jednaka 3, što znači da je odgovarajući vektorski prostor četverodimenzionalan.

Definicija 2.5. *Neka je* V *konačnodimenzionalan vektorski prostor nad komutativnim poljem* F*.* Bilinearna forma (funkcional) *je funkcija* $B : V \times V \to F$ *takva da je:*

1. $B(\alpha x + \beta y, z) = \alpha B(x, z) + \beta B(y, z), \ \forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in F$

2. $B(x, \alpha y + \beta z) = \alpha B(x, y) + \beta B(x, z) \ \forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in F$

Definicija 2.6. *Funkcija $Q : V \to F$ je* kvadratna forma (funkcional) *ako vrijedi:*

1. $Q(\alpha x) = \alpha^2 \cdot Q(x), \ \forall \alpha \in F, \ \forall x \in V$

2. $B_Q(x,\ y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ *je bilinearna forma.*

Definicija 2.7. *Neka je Q kvadratna forma na vektorskom prostoru V. Za vektor $x \in V$ kažemo da je* singularan *ako je $Q(x) = 0$. Za potprostor $U \leq V$ kažemo da je* singularan *ako sadrži neki singularan vektor $x \neq 0$. Za potprostor $U \leq V$ kažemo da je* totalno singularan *ako su svi vektori iz U singularni.*

Definicija 2.8. Kvadrika Q *je skup svih točaka iz projektivnog prostora koje su totalno singularni potprostori s obzirom na kvadratnu formu Q.*

U trodimenzionalnom projektivnom prostoru $PG(3, F)$, kvadrika je skup točaka čije homogene koordinate zadovoljavaju danu homogenu jednadžbu stupnja 2. Ako se ta jednadžba promjenom baze može svesti na manje od 4 varijable kažemo da je kvadrika *singularna* ili *degenerirana*. U suprotnom kažemo da je *nesingularna, nedegenerirana* ili *ireducibilna*.

Definicija 2.9. *Ako pravac p ima s kvadrikom Q jednu zajedničku točku, kažemo da je on* tangenta*.*

Ako pravac p ima s kvadrikom Q dvije zajedničke točke, kažemo da je on sekanta*.*

Ako pravac p ima s kvadrikom Q barem tri zajedničke točke, kažemo da je on Q-pravac*.*

Ako pravac p nema s kvadrikom Q zajedničku točku, kažemo da je on vanjski pravac*.*

Propozicija 2.10. *Za proizvoljne tri kolinearne točke A, B, C te njima kolinearnu točku $D \neq B$ u projektivnom modelu $PG(n, F)$, za svaki izbor $a \in V$ predstavnika točke A možemo naći predstavnika $b \in V$ točke B te skalar $\lambda \neq 0$ takve da je $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $C = \langle a + b \rangle$, $D = \langle a + \lambda b \rangle$.*

Dokaz. Neka je $A = \langle a \rangle$. Neka je $b' \in V$, $B = \langle b' \rangle$. Tada postoje $\alpha, \beta \in F$ takvi da je $c = \alpha a + \beta b'$ predstavnik od $C = \langle c \rangle$. Budući da je $C \neq A, B$, slijedi da su $\alpha, \beta \neq 0$. Vektor $\alpha^{-1} c = a + \alpha^{-1} \beta b'$ je također predstavnik od C, a vektor $b = \alpha^{-1} \beta b'$ je predstavnik od B. Dakle, $b' = \beta^{-1} \alpha b$, pa je

$\alpha^{-1}c = a + \alpha\beta + \beta^{-1}\alpha b = a + b$, tj. $C = \langle a + b \rangle$. Točka D ima predstavnik oblika $D = \langle d \rangle$, $d = \gamma a + \delta b$, za neke $\gamma, \delta \in F$. Budući da je $D \neq B$, slijedi da je $\gamma \neq 0$. Dakle, možemo zapisati $\gamma^{-1}d = \gamma^{-1}\gamma a + \gamma^{-1}\delta b = a + \lambda b$, tj. $D = \langle a + \lambda b \rangle$. □

Pokažimo da je naziv Q-pravac iz prethodne definicije doista opravdan.

Propozicija 2.11. *Ako pravac p ima s kvadrikom Q tri zajedničke točke, onda je on cijeli sadržan u Q.*

Dokaz. Uočimo, iz prvog svojstva kvadratne forme slijedi da je vektor $x \in V$ singularan ako i samo ako je i vektor λx singularan, za svaki $\lambda \in F$, pa je za svaku točku dovoljno da je njezin predstavnik singularan kako bi i ona bila singularna. Neka su $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$ i $C = \langle c \rangle$ tri zajedničke točke pravca p i kvadrike Q. Bez smanjenja općenitosti po propoziciji 2.10 možemo odabrati da je $c = a + b$ jer su A, B i C kolinearne. Dakle, vrijedi da je $Q(a) = Q(b) = Q(a + b) = 0$. Svaka točka pravca p je oblika $\alpha a + \beta b$. Po drugom svojstvu kvadratne forme te po svojstvu bilinearne forme je tada za proizvoljne $\alpha, \beta \in F$:

$$Q(\alpha a + \beta b) - Q(\alpha a) - Q(\beta b) = B_Q(\alpha a, \beta b) =$$

$$= \alpha\beta B_Q(a, b) = \alpha\beta(Q(a + b) - Q(a) - Q(b)) = 0,$$

tj. zbog $Q(\alpha a) = Q(\beta b) = 0$, slijedi da je $Q(\alpha a + \beta b) = 0$. Dakle, svaka točka pravca p je sadržana u kvadrici Q. □

Definicija 2.12. *Neka je V vektorski prostor i S neki njegov podskup te neka je Q neka kvadratna forma. Definiramo*

$$S^{\perp} = \{x \in V \mid B_Q(x, y) = 0, \forall y \in S\}.$$

Definicija 2.13. *Ako je Q kvadrika i $T = \langle x \rangle \in Q$, skup $\langle x \rangle^{\perp}$ zovemo* tangencijalni prostor na Q u točki T *i označavamo Q_T.*

Ako je $T = \langle x \rangle \in Q$, po drugom i prvom svojstvu kvadratne forme slijedi da je $B_Q(x, x) = Q(2x) - Q(x) - Q(x) = 4Q(x) = 0$, tj. $T \in Q_T$. Također, za proizvoljan Q-pravac kroz T i točku $R = \langle r \rangle$ na njemu slijedi da je $B_Q(x, r) = Q(x + r) - Q(x) - Q(r) = Q(x + r) = 0$ jer je $\langle x + r \rangle$ točka na TR po propoziciji 2.10. Dakle, tangencijalni prostor Q_T se sastoji od točke T i od svih točaka P takvih da je spojnica PT tangenta ili Q-pravac. To je uvijek cijeli prostor ili hiperravnina. U prvom slučaju točku T zovemo *singularnom* točkom. Nedegenerirana kvadrika nema singularnih točaka, tj. tangencijalni prostor je svuda hiperravnina.

Definicija 2.14. *Neka je $PG(n, F)$ projektivni prostor. Za skup $\mathcal{S}$ potprostora od $PG(n, F)$ kažemo da je* mimoilazan *ako mu nikoja dva elementa nemaju zajedničku točku. Kažemo da je* pravac *transverzala od $\mathcal{S}$ ako siječe svaki element od $\mathcal{S}$ u točno jednoj točki.*

Lema 2.15. *Neka je $PG(n, F)$ projektivni prostor. Neka su l_1 i l_2 dva mimoilazna pravca i neka je T točka koja ne leži ni na jednom od njih. Tada postoji najviše jedna transverzala od l_1 i l_2 koja prolazi kroz T. Ako je $PG(n, F)$ trodimenzionalan, onda postoji točno jedna takva transverzala.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dvije takve transverzale t_1 i t_2. Tada svaka od njih siječe l_1 i l_2 u različitim točkama jer t_1 i t_2 sadrže točku T, pa bi u protivnom to bili jednaki pravci. Po Grassmanovoj formuli je $dim\langle t_1 \cup t_2 \rangle = 2 + 2 - 1 = 3$, pa t_1 i t_2 razapinju podravninu od $PG(n, F)$. No, jasno je da $\langle t_1 \cup t_2 \rangle \supseteq l_1$ i $\langle t_1 \cup t_2 \rangle \supseteq l_2$, pa smo dobili kontradikciju, jer se u projektivnoj ravnini svaka dva pravca sijeku.

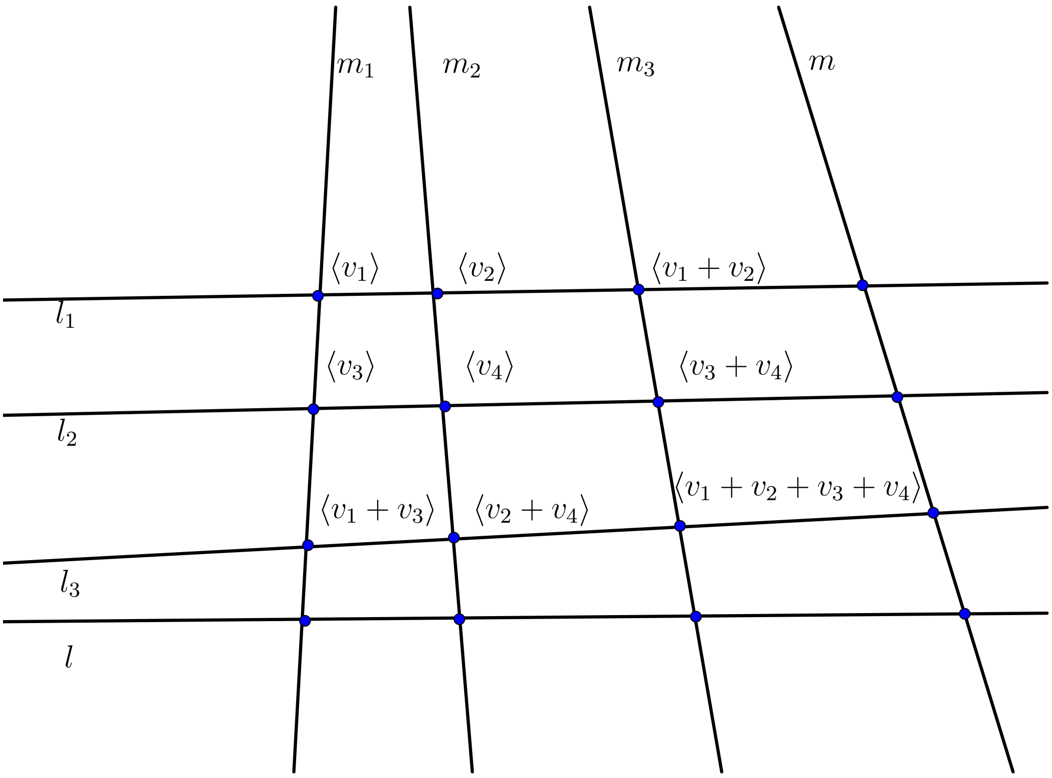
Neka je sada $PG(n, F)$ trodimenzionalan, tj. neka je pripadni vektorski prostor V četverodimenzionalan. Budući da točka T ne leži na l_1, $dim\langle T, l_1 \rangle = 3$. Budući da su presjeci transverzala t_1 i t_2 s pravcima l_1 i l_2 četiri različite točke, a $\dim V = 4$, slijedi da je $\dim\langle l_2, T, l_1 \rangle = 4$, pa je po Grassmanovoj formuli $\dim(l_2 \cap \langle T, l_1 \rangle) = 2 + 3 - \dim\langle l_2, T, l_1 \rangle = 1$. Dakle, $P = l_2 \cap \langle T, l_1 \rangle$ je projektivna točka. Budući da l_1 i PT leže u ravnini $\langle T, l_1 \rangle$, l_1 i PT se sijeku, pa je PT tražena transverzala od $\{l_1, l_2\}$. □

Lema 2.16. *Neka su l i m mimoilazni pravci u $PG(3, F)$ te neka su $A = \langle a \rangle$ i $B = \langle b \rangle$ dvije točke na l, a $C = \langle c \rangle$ i $D = \langle d \rangle$ dvije točke na m. Tada su vektori a, b, c i d linearno nezavisni.*

Dokaz. Budući da su A i B različite točke, odmah slijedi da su a i b linearno nezavisni vektori. Također, c je linearno nezavisan s a i b jer je $C \in m$, A, $B \in l$, a l i m su mimoilazni pravci. Na kraju, d je linearno nezavisan s a, b i c jer bi u suprotnom D bio u istoj ravnini kao i A, B i C, ali onda bi i pravci l i m bili u istoj ravnini, što je kontradikcija jer se u projektivnoj ravnini svaka dva pravca sijeku. □

Sada možemo dokazati Dandelinov teorem koji nam daje karakterizaciju komutativnosti polja F projektivnog prostora $PG(3, F)$.

Teorem 2.17. *(Teorem 16 točaka ili Dandelinov teorem) Neka su $\{l_1, l_2, l_3\}$ i $\{m_1, m_2, m_3\}$ skupovi mimoilaznih pravaca u $PG(3, F)$ takvi da svaki l_i siječe svakog od m_j. Polje F je komutativno ako i samo ako vrijedi: svaka transverzala l od $\{m_1, m_2, m_3\}$ siječe svaku transverzalu m od $\{l_1, l_2, l_3\}$.*



Slika 2: Mimoilazni pravci i njihove transverzale

Dokaz. Neka su $\langle v_1\rangle = l_1\cap m_1$, $\langle v_2\rangle = l_1\cap m_2$, $\langle v_3\rangle = l_2\cap m_1$ i $\langle v_4\rangle = l_2\cap m_2$ takvi da je $l_1\cap m_3 = \langle v_1+v_2\rangle$, $l_2\cap m_3 = \langle v_3+v_4\rangle$ i $l_3\cap m_1 = \langle v_1+v_3\rangle$. To možemo po propoziciji 2.10.

Imamo da je $l_3\cap m_2 = \langle v_2+\gamma v_4\rangle$, pa je $l_3\cap m_3 = \langle \delta_1(v_1+v_2)+\delta_2(v_3+v_4)\rangle = \langle \gamma_1(v_1+v_3)+\gamma_2(v_2+\gamma v_4)\rangle$, tj. $\gamma_1 v_1+\gamma_2 v_2+\gamma_1 v_3+\gamma_2\gamma v_4 = \delta_1 v_1+\delta_1 v_2+\delta_2 v_3+\delta_2 v_4$. Budući da su pravci l_1, l_2 i l_3 te m_1, m_2 i m_3 mimoilazni, vektori v_1, v_2, v_3 i v_4 su linearno nezavisni, pa je $\gamma_1 = \lambda\delta_1$, $\gamma_2 = \lambda\delta_1$, $\gamma_1 = \lambda\delta_2$, $\lambda\neq 0$ i $\gamma_2\gamma = \lambda\delta_2$, tj. $\gamma_1=\gamma_2$, $\delta_1=\delta_2$ i $\gamma_1\gamma=\gamma_1$. Dakle, zbog $\gamma_1\neq 0$, slijedi da je $\gamma = 1$, tj. $l_3\cap m_2 = \langle v_2+v_4\rangle$ te $l_3\cap m_3 = \langle v_1+v_2+v_3+v_4\rangle$.

Neka je sada $l\notin\{l_1,l_2,l_3\}$ transverzala od $\{m_1,m_2,m_3\}$ te $m\notin\{m_1,m_2,m_3\}$ transverzala od $\{l_1,l_2,l_3\}$. Neka su $\alpha,\beta\in F$ takvi da je $l_1\cap m = \langle v_1+\beta v_2\rangle$ te $l\cap m_1 = \langle v_1+\alpha v_3\rangle$. Tvrdimo da se l i m sijeku ako i samo ako je

$\alpha\beta = \beta\alpha$. Po lemi 2.15, znamo da točno jedan pravac kroz $\langle v_1 + \alpha v_3 \rangle$ siječe m_2 i m_3, pa to mora biti pravac l. Točke $\langle v_1 + \alpha v_3 \rangle \in m_1$, $\langle v_2 + \alpha v_4 \rangle \in m_2$ i $\langle v_1 + v_2 + \alpha(v_3 + v_4) \rangle \in m_3$ su kolinearne, pa one leže na $l = \langle v_1 + \alpha v_3, v_2 + \alpha v_4 \rangle$. Analogno, $m = \langle v_1 + \beta v_2, v_3 + \beta v_4 \rangle$. Ako postoji, točka presjeka l i m mora biti razapeta vektorom $x(v_1 + \alpha v_3) + y(v_2 + \alpha v_4) = z(v_1 + \beta v_2) + w(v_3 + \beta v_4)$. Dakle, iz nezavisnosti v_1, v_2, v_3 i v_4 slijedi $x = z, y = z\beta, x\alpha = w, y\alpha = w\beta$. Slijedi da je $y = x\beta$, pa je $x\beta\alpha = w\beta = x\alpha\beta$.

Dakle, ako je $l \cap m \neq \emptyset$, onda je $x \neq 0$, pa kraćenjem dobivamo da je $\beta\alpha = \alpha\beta$, tj. iz proizvoljnosti od α i β slijedi da je polje komutativno. S druge strane, ako je $\beta\alpha = \alpha\beta$, onda sustav ima netrivijalno rješenje $x = z = 1, y = \beta, w = \alpha$, tj. pravci se sijeku. □

2.1 Hiperboloidi

Definicija 2.18. *Neka je $PG(3, F)$ trodimenzionalni projektivni prostor. Neprazan skup $\mathcal{R}$ mimoilaznih pravaca iz $PG(n, F)$ zovemo* regulus *ako vrijedi:*

1. *Kroz svaku točku svakog pravca iz $\mathcal{R}$ prolazi transverzala od $\mathcal{R}$.*
2. *Kroz svaku točku transverzale od $\mathcal{R}$ prolazi pravac iz $\mathcal{R}$.*

Jasno je da je i skup $\mathcal{R}'$ svih transverzala regulusa $\mathcal{R}$ opet regulus; zovemo ga suprotni regulus od *$\mathcal{R}$.*

Teorem 2.19. *Neka su $\{l_1, l_2, l_3\}$ mimoilazni pravci u $PG(3, F)$. Tada vrijedi:*

1. *Postoji najviše jedan regulus koji sadrži l_1, l_2 i l_3.*
2. *Ako je polje F komutativno, onda postoji točno jedan regulus koji sadrži l_1, l_2 i l_3.*
3. *Ako polje F nije komutativno, onda nema regulusa u $PG(3, F)$.*

Dokaz. (*a*) Iz leme 2.15 imamo da svaka točka pravca l_3 leži na točno jednoj transverzali od l_1 i l_2, no jasno i točno jednoj transverzali od l_1, l_2 i l_3. Neka je $\mathcal{R}'$ skup svih takvih transverzala. To su onda transverzale bilo kojeg regulusa koji sadrži l_1, l_2 i l_3. Budući da kroz svaku točku pravca l_3 prolazi pravac iz $\mathcal{R}'$, a svaki projektivni pravac sadrži barem tri točke, slijedi da postoje barem tri takve transverzale m_1, m_2 i m_3. Neka je T točka na m_1 koja ne leži na l_1, l_2 ni l_3. Tada za svaki regulus $\mathcal{R}$ kroz l_1, l_2, l_3 vrijedi da je svaki pravac od $\mathcal{R}$ kroz T nužno transverzala od m_1, m_2 i m_3 kroz T. Dakle, po lemi 2.14. $\mathcal{R}$ je jedinstveno određen.

(b) Konstrukcija tog regulusa je kao u Dandelinovu teoremu: krećemo s dvije trojke mimoilaznih pravaca takvih da se svaki iz prve trojke siječe sa svakim iz druge trojke i onda po Dandelinovu teoremu zbog komutativnosti dobivamo tražena svojstva iz definicije regulusa.

(c) Slijedi direktno iz Dandelinova teorema. Pretpostavimo da takav regulus postoji, a onda zbog nekomutativnosti dobijemo kontradikciju. □

Iduće ćemo pokazati da točke na pravcima regulusa čine kvadriku tako što ćemo pokazati da im koordinate zadovoljavaju homogenu jednadžbu drugog stupnja.

Lema 2.20. *Neka je $\mathcal{R}$ regulus u $PG(3,F)$. Neka su $A = \langle a\rangle$, $A' = \langle a'\rangle$, $B = \langle b\rangle$, $B' = \langle b'\rangle$ četiri točke u regulusa, pri čemu su A i B na pravcu l, a A' i B' na pravcu l' regulusa takve da je A' presjek pravca l' i jedinstvene transverzale na pravac l u točki A te analogno, B' presjek pravca l' i jedinstvene transverzale na pravac l u točki B. Tada točke oblika $C = \langle a + \lambda b\rangle$ i $C' = \langle a' + \lambda b'\rangle$ leže na istoj transverzali na pravce l i l', za svaki $\lambda \in F$. Također, svaka točka na pravcu regulusa je dana kao linearna kombinacija $T = \langle a + \lambda b + \mu(a' + \lambda b)\rangle$.*

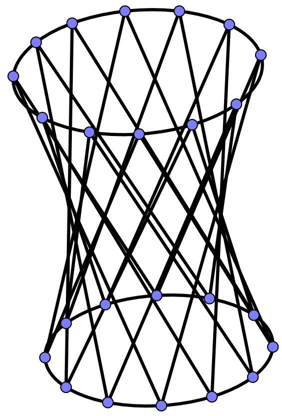
Dakle, iz leme 2.20 smo dobili da točke regulusa možemo zapisati kao posebnu linearnu kombinaciju vektora baze kao u dokazu Dandelinova teorema jer danu točku možemo zapisati kao linearnu kombinaciju odgovarajućih predstavnika.

Teorem 2.21. *Neka je $\mathcal{R}$ regulus u $PG(3,F)$ nad komutativnim poljem F. Možemo izabrati bazu takvu da se skup svih točaka na $\mathcal{R}$ podudara sa skupom svih točaka $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ koje zadovoljavaju kvadratnu jednadžbu $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$.*

Dokaz. Izaberemo bazu $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ istu kao u dokazu Dandelinova teorema, pri čemu su $l_1 = \langle v_1, v_2\rangle$, $l_2 = \langle v_3, v_4\rangle$ i $l_3 = \langle v_1 + v_3, v_2 + v_4\rangle$ tri mimoilazna pravca regulusa $\mathcal{R}$ koja ga jedinstveno određuju. Neka je $\langle v_1\rangle = (1 : 0 : 0 : 0)$, $\langle v_2\rangle = (0 : 1 : 0 : 0)$, $\langle v_3\rangle = (0 : 0 : 1 : 0)$ te $\langle v_4\rangle = (0 : 0 : 0 : 1)$, pa po lemi 2.20 točke $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ pravaca u $\mathcal{R}$ zadovoljavaju

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = \langle \lambda v_1 + \lambda\beta v_2 + \lambda\alpha v_3 + \lambda\alpha\beta v_4\rangle = (\lambda : \lambda\beta : \lambda\alpha : \lambda\alpha\beta),$$

gdje su $\alpha, \beta \in F$ proizvoljne te $\lambda \in F \setminus \{0\}$. Dakle, koordinate (x_0, x_1, x_2, x_3) bilo koje točke pravca u $\mathcal{R}$ zadovoljavaju uvjet $0 = \lambda \cdot \lambda\alpha\beta - \lambda\alpha \cdot \lambda\beta = x_0x_3 - x_1x_2$.



Slika 3: Regulus i njemu suprotan regulus

Obratno, neka je $T = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ točka takva da je $x_0x_3 = x_1x_2$. Ako je $x_0 \neq 0$, onda možemo zapisati $T = (x_0 : x_1 : x_2 : (x_1x_2)/x_0)$ i to je točka nekog pravca regulusa $\mathcal{R}$. Ako je $x_0 = 0$, onda je $x_1 = 0$ ili $x_2 = 0$. Neka je $x_1 = 0$ (posve analogno slijedi tvrdnja za $x_2 = 0$). Tada možemo zapisati $T = (0 : 0 : x_2 : x_3)$. Sada opet bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $T = (0 : 0 : \alpha : \alpha\beta)$, gdje su $\alpha, \beta \in F$. Odavde slijedi da je T točka pravca u $\mathcal{R}$. $\square$

Definicija 2.22. *Skup svih točaka pravaca u regulusu nazivamo* hiperboloid *ili* hiperbolička kvadrika od $PG(3, F)$.

Navedimo još jednu zanimljivu kvadriku, oval u projektivnoj ravnini, koja će nam se pokazati korisnom u nastavku.

Definicija 2.23. *Skup Ω točaka u projektivnoj ravnini nazivamo* oval *ako vrijedi:*

1. *Svaki pravac siječe Ω u najviše dvije točke*

2. *Kroz svaku točku $P \in \Omega$ postoji točno jedna tangenta t.*

Pokazuje se da proizvoljna ravnina siječe hiperboloid ili u dvije izvodnice ili u ovalu. U prvom slučaju zovemo je *tangentnom*, a u drugom *sekantnom* ravninom. Oval je u ovom slučaju nedegenerirana konika (kvadrika u klasičnoj projektivnoj ravnini), a dva pravca su degenerirana konika jer se njezina kvadratna jednadžba faktorizira kao produkt dviju linearnih jednadžbi.

3 Ravnina Minkowskog

U ovoj ćemo cjelini definirati osnovne pojmove i izreći teoreme koji će nam poslužiti kao uvod u dokaz Heiseova teorema. Počet ćemo s definicijom glavnog pojma ove teorije, ravnine Minkowskog, i opisom osnovnog primjera.

Definicija 3.1. *Uređenu četvorku skupova $M = (t, G_1 \cup G_2, \mathcal{K}, I)$, gdje su t točke, $G_1 \cup G_2$ izvodnice, $\mathcal{K}$ kružnice i I relacije incidencije zovemo* ravnina Minkowskog *ako vrijede sljedeći aksiomi:*

(M_1) $(t, G_1 \cup G_2 \cup \mathcal{K}, I)$ *je incidencijska struktura u kojoj vrijedi:*

- *(a) Kroz svaku točku u M prolazi točno jedna izvodnica iz G_1 i točno jedna izvodnica iz G_2.*
- *(b) Presjek proizvoljne izvodnice iz G_1 i proizvoljne izvodnice iz G_2 je točno jedna točka.*
- *(c) Proizvoljna kružnica s proizvoljnom izvodnicom ima u presjeku točno jednu točku.*

(M_2) Svake tri točke iz M, od kojih nikoje dvije ne leže na istoj izvodnici, leže na točno jednoj kružnici.

(M_3) Ako su a i b dvije točke iz M koje ne leže na istoj izvodnici te ako je K kružnica kroz a koja ne sadrži b, onda postoji kružnica kroz a i b koja u presjeku s K ima samo točku a.

(M_4) Postoji barem jedna kružnica, na kojoj leže barem tri točke.

Uočimo da iz (M_1) slijedi da je broj točaka proizvoljne kružnice u M jednak broju izvodnica u G_1, tj. u G_2. Naime, uzmemo li proizvoljnu kružnicu u M, svaka njezina točka je ujedno točka od M, pa po $(M_1)(a)$ kroz nju prolazi točno jedna izvodnica iz G_1 i iz G_2, a po $(M_1)(c)$ ta kružnica ima s tim pripadnim izvodnicama samo jednu zajedničku točku, pa je broj točaka kružnice najviše jednak broju izvodnica u G_1, tj. u G_2. Obratno, proizvoljna izvodnica iz G_1 (tj. G_2) ima u presjeku s tom kružnicom točno jednu točku, a to je točka od M, pa nijedna druga izvodnica iz G_1 (tj. G_2) kroz nju ne prolazi, pa je broj točaka kružnice barem jednak broju izvodnica u G_1 (tj. u G_2), te smo pokazali tvrdnju.

Pokažimo sada zašto nam je ovakva definicija ravnine Minkowskoga dobra na primjeru konstrukcije od hiperboloida.

Definicija 3.2. *Neka je P trodimenzionalni projektivni prostor te neka je h hiperboloid u P.* Incidencijska struktura *$M(h)$ je definirana kao:*

1. *Točke iz $M(h)$ su točke iz h.*

2. *Kružnice iz $M(h)$ su one ravnine iz P koje ne sadrže nijednu izvodnicu iz h, tj. sekantne ravnine na h.*

3. *Izvodnice iz $M(h)$ su izvodnice iz h, tj. pravci odgovarajućeg regulusa i njemu suprotnog regulusa.*

4. *Relacija incidencije u $M(h)$ je inducirana s P.*

Teorem 3.3. *Neka je h hiperboloid u trodimenzionalnom projektivnom prostoru P. Tada je incidencijska struktura $M(h)$ ravnina Minkowskog.*

Dokaz. Po definiciji hiperboloida je jasno da izvodnice iz h možemo podijeliti u dva skupa: one koje su u odgovarajućem regulusu, nazovimo ih G_1, te one koje su njihove transverzale, nazovimo ih G_2. Uz takvu definiciju smo odmah dobili da kroz svaku točku u $M(h)$, tj. kroz svaku točku od h, po lemi 2.14. prolazi točno jedna izvodnica iz G_1 i točno jedna izvodnica iz G_2, pa smo pokazali $(M_1)(a)$. Također, odmah smo dobili da je presjek prozivoljne izvodnice iz G_1 i proizvoljne izvodnice iz G_2 točno jedna točka iz $M(h)$, tj. iz h, pa smo pokazali $(M_1)(b)$. Po Grassmanovoj formuli znamo da se u trodimenzionalnom projektivnom prostoru svaki pravac i svaka ravnina ili sijeku ili je pravac sadržan u ravnini, pa svaka izvodnica iz h siječe svaku ravninu iz P koja ne sadrži nijednu izvodnicu iz h u točno jednoj točki. Dakle, proizvoljna kružnica iz $M(h)$ ima s proizvoljnom izvodnicom iz $M(h)$ točno jednu točku u presjeku, pa smo pokazali $(M_1)(c)$.

Neka su a, b i c tri nezavisne točke iz $M(h)$, tj. tri točke iz h od kojih nikoje dvije ne leže na istoj izvodnici. Tada one ne mogu ležati na jednom pravcu G iz P. Naime, vidjeli smo u cjelini 2 da pravac koji s kvadrikom ima tri zajedničke točke mora cijeli biti sadržan u kvadrici, pa bi pravac G bio izvodnica iz h, što je kontradikcija s izborom točaka a, b i c. Zato a, b i c razapinju jedinstvenu ravninu R u P. Trebamo pokazati da u R ne leži nijedna izvodnica. Pretpostavimo suprotno, tj. da u R leži izvodnica G iz h. Zbog izbora od a, b i c, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da b i c ne leže na G. Tada pravac K kroz b i c siječe pravac G u jednoj točki jer su oba sadržana u projektivnoj ravnini R. Zato K sadrži tri točke iz h, pa je cijeli sadržan u h, tj. to je izvodnica koja sadrži b i c. To je kontradikcija s izborom a, b i c, pa je R jedinstveno određena kružnica iz $M(h)$ kroz a, b i c. Dakle, pokazali smo (M_2).

Neka su a i b dvije točke iz h koje ne leže na istoj izvodnici te neka je K kružnica iz $M(h)$ kroz a koja ne sadrži b. Neka je h_a tangencijalna ravnina na K u a (tj. ravnina koja je razapeta objema izvodnicama kroz a). Ravnine

K i h_a sijeku se u jednom pravcu T koji je tangenta na K u a kao pravac iz h_a. Tvrdimo da je ravnina $K' = \langle b, T \rangle$ jedinstveno određena kružnica kroz b koja dodiruje K u a. Naime, budući da b nije točka iz K, a onda ni točka od T, K' je doista (dobro definirana) ravnina. Moramo pokazati da K' ne sadrži nijednu izvodnicu iz h, pa će to biti tražena kružnica. Pretpostavimo suprotno, tj. da neka izvodnica G leži u K'. Tada se G i T sijeku u točki iz h, tj. u a, pa je G jedna od dvije izvodnice kroz a, pa leži u h_a. Tada ravnine K' i h_a imaju u presjeku dva različita pravca G i T, pa se one podudaraju. Zato mora i b ležati u h_a, pa b leži na nekoj od izvodnica kroz a (jedine točke u h_a su točke izvodnica kroz a). Posebno, a i b leže na zajedničkoj izvodnici, no to je kontradikcija, pa K' doista jest tražena kružnica. Pretpostavimo da je K'' kružnica kroz b različita od K', koja dodiruje K u a. Tada K'' siječe ravninu K u nekoj izvodnici T'', različitoj od T, pa su T i T'' dvije različite izvodnice kroz a u ravnini K i zato K mora biti tangencijalna ravnina na h u a. Dakle, $K = h_a$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je K kružnica iz $M(h)$. Time smo pokazali (M_3).

Iz (M_2) znamo da u $M(h)$ postoji kružnica, tj. ravnina iz P koja ne sadrži nijednu izvodnicu iz h. Presjek ravnine s hiperboloidom je oval jer inače ravnina nije kružnica u $M(h)$. Taj je oval neprazan, pa sadrži barem jednu točku. No, kroz točku ovala prolaze barem tri pravca, od čega je samo jedan tangenta. Na druga dva pravca je zato još po jedna točka ovala, tj. ima ih barem tri. Dakle, pokazali smo (M_4). □

Definirajmo sada *ovoidalnu* ravninu Minkowskoga.

Definicija 3.4. *Kažemo da je ravnina Minkowskoga* ovoidalna *ako postoje trodimenzionalni projektivni prostor P i hiperboloid h u njemu, takvi da je $M = M(h)$.*

Zapravo bi logičnije bilo nazvati takve ravnine Minkowskoga hiperboloidalnima, no taj naziv nije u upotrebi. Takve ravnine još zovemo *klasičnim* ili *Miquelovim* ravninama.

3.1 Svojstva

Rezultati u nastavku odnose se na apstraktnu ravninu Minkowskoga, a ne samo na $M(h)$.

Propozicija 3.5. *Svaki od skupova G_1 i G_2 sadrži barem tri pravca.*

Dokaz. Po aksiomu (M_4) postoje barem tri točke, pa po (a) dijelu od (M_1) slijedi da postoje barem tri izvodnice u G_1 i analogno u G_2. No, te izvodnice u G_1 su međusobno različite po (c) dijelu od (M_1), pa imamo barem tri pravca u G_1. Analogno za G_2. □

Jedinstvenu izvodnicu iz G_1 kroz točku a ravnine Minkowskog M označavamo s $|a|_1$. Analogno jedinstvenu izvodnicu iz G_2 kroz točku a označavamo s $|a|_2$.

Neka su a i K točka i kružnica iz M. Označimo s aK sjecište od $|a|_1$ i K te s Ka sjecište od K i $|a|_2$.

Propozicija 3.6. *Točka a leži na kružnici K ako i samo ako vrijedi $aK = Ka$.*

Dokaz. Ako je $aK = Ka$, onda izvodnice iz definicije od aK i Ka imaju zajedničke točke a i aK, ali po (b) dijelu od (M_1) vidimo da mora biti $a = aK$, pa a leži na kružnici K. Obratno, ako a leži na kružnici K, onda je očito $aK = a = Ka$. □

Definicija 3.7. *Skup točaka u ravnini Minkowskog, od kojih nikoje dvije ne leže na istoj izvodnici zovemo* nezavisnim. *Dvije nezavisne točke nazivamo* povezivim točkama.

Uočimo da iz definicije nezavisnosti i aksioma $(M_1)(c)$ slijedi da su na svakoj kružnici sve točke međusobno nezavisne. Iz toga dalje slijedi da za proizvoljnu kružnicu K i točku a koja ne leži na K, ne može postojati kružnica kroz a i aK niti kroz a i Ka jer bi tada takva kružnica imala dvije zajedničke točke s izvodnicom $|a|_1$ ili $|a|_2$, a to bi bila kontradikcija s aksiomom $(M_1)(c)$.

Neka su a i b dvije povezive točke ravnine Minkowskog M te neka je ab sjecište od $|a|_1$ i $|b|_2$. Jasno je da za svaki par (a, K), gdje je a točka iz M, a K kružnica iz M vrijedi $a = (aK)(Ka)$.

Definirajmo sada derivaciju ravnine Minkowskog na pomalo neuobičajen način koji će se u nastavku pokazati korisnim.

Definicija 3.8. *Neka je $M = (t, G_1 \cup G_2, K, I)$ ravnina Minkowskog i neka je a točka iz M.* Derivacija *od M po a je incidencijska struktura M_a za koju vrijedi:*

1. Točke *u M_a su točke iz M koje ne leže ni na $|a|_1$ ni na $|a|_2$.*

2. Pravci *u M_a su kružnice iz M koje sadrže točku a te izvodnice iz M koje ne sadrže a.*

3. Relacija incidencije *u M_a je inducirana relacijom iz M.*

Definicija 3.9. Afina ravnina *je incidencijska struktura koja zadovoljava aksiome:*

(A_1) Kroz svake dvije točke prolazi jedinstven pravac.

(A_2) Za svaki pravac p i točku T koja ne leži na p postoji jedinstven pravac kroz T koji ne siječe p.

(A_3) Postoje barem tri nekolinearne točke.

Propozicija 3.10. *Neka je M ravnina Minkowskog i neka je a točka u M. Tada je derivacija M_a afina ravnina.*

Dokaz. Neka su b i c dvije različite točke iz M_a. Ako b i c leže na istoj izvodnici G, onda je G pravac u M_a kroz b i c. Neka sada b i c ne leže na istoj izvodnici. Budući da po definiciji od M_a b i c ne leže na $|a|_1$ ni na $|a|_2$, slijedi da su a, b i c nezavisne. Dakle, postoji kružnica K kroz a, b i c. Ta kružnica je pravac koji povezuje točke b i c u M_a, pa smo pokazali (A_1).

Neka je X pravac u M_a, a b točka u M_a koja ne leži na njemu. Ako je X izvodnica, primjerice iz G_1, onda je $|b|_1$ paralela kroz b na X u M_a.

Neka je X kružnica u M_a. Budući da su točke a i b po definiciji povezive, po (M_3) postoji točno jedna kružnica K kroz b koja u presjeku s X ima točku a. U ovom slučaju je K paralela kroz b na X u M_a.

Dakle, pokazali smo (A_2).

Vidjeli smo da G_1 i G_2 sadrže barem tri pravca svaki. Odavde slijedi da u M_a postoje barem četiri točke, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, pa smo pokazali (A_3). □

Definicija 3.11. *Neka je M ravnina Minkowskog. Kažemo da se dvije kružnice iz M* sijeku *ako imaju točno dvije zajedničke točke. Kažemo da se dvije kružnice iz M* mimoilaze *ako nemaju zajedničkih točaka. Kažemo da se kružnice iz M dodiruju ako imaju jednu zajedničku točku ili ako se podudaraju.*

Definicija 3.12. *Neka su a i b nezavisne točke iz M. Skup svih kružnica iz M kroz a i b zovemo* snop *i označavamo (a, b). Točke a i b zovemo nosačima snopa (a, b). Maksimalni skup kružnica koje se u parovima dodiruju u točki a zovemo* pramen s nosačem a.

Budući da a nije točka u M_a, slijedi da je pramen s nosačem a skup paralelnih pravaca afine ravnine M_a, tj. skup pravaca u M_a koji se ne sijeku, pa slijedi da je pramen jedinstveno određen nosačem a i jednom kružnicom K koja je sadržana u njemu. Naime, pravci u M_a koji su izvodnice iz M takve da ne sadrže a, po aksiomu $M_1(c)$ imaju u presjeku s pravcima koji su u pramenu s nosačem a točno jednu točku, a to nije a, pa ne mogu biti paralelni. Zato pramen s nosačem a možemo označiti s $\langle a, K\rangle$. Također, ako su K i L dvije kružnice koje se dodiruju u točki a, one su sadržane u jedinstvenom pramenu $\langle a, K\rangle$, pa stoga možemo taj pramen označiti i s $\langle K, L\rangle$.

Propozicija 3.13. *Neka je S snop (tj. pramen) u ravnini Minkowskog M. Tada svaka točka iz M koja je nezavisna s nosačima (tj. nosačem) od S leži na jedinstvenoj kružnici iz S.*

Dokaz. Neka je $S = (a, b)$ proizvoljan snop u M. Po definiciji su tada a i b nezavisne. Neka je c neka točka nezavisna sa a i b. Tada, zbog nezavisnosti točaka, postoji točno jedna kružnica kroz a, b i c, pa smo dobili da postoji točno jedna kružnica u S kroz c.

Neka je sada S pramen s nosačem a, $S = \langle a, K \rangle$. Ako je b neka točka nezavisna sa a, onda je b točka iz afine ravnine M_a, pa po aksiomu (A_2) postoji točno jedan pravac L iz skupa paralela s K u M_a koji sadrži b. Tada je L jedinstvena kružnica u S kroz b. □

Definicija 3.14. *Skup S kružnica ravnine Minkowskoga M nazivamo* jato, *ako svaka točka iz M leži na točno jednoj kružnici iz S.*

4 Konačni slučaj

Ograničimo se sada na konačne incidencijske strukture, u kojima su skupovi točaka i pravaca (izvodnica, kružnica) konačni. Promotrimo prvo koliko ima točaka, pravaca i općenito k-dimenzionalnih potprostora u konačnom projektivnom prostoru $PG(n, \mathbb{F}_q) = PG(n, q)$. Pritom je $\mathbb{F}_q$ konačno polje s q elemenata.

Pokažimo koliko ima d-dimenzionalnih potprostora m-dimenzionalnog vektorskog prostora nad poljem $\mathbb{F}_q$. Koristit ćemo takozvane *Gaussove koeficijente*,

$$\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{(q^m - 1)(q^m - q)\cdots(q^m - q^{d-1})}{(q^d - 1)(q^d - q)\cdots(q^d - q^{d-1})} = \frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1)\cdots(q^{m-d+1} - 1)}{(q^d - 1)(q^{d-1} - 1)\cdots(q - 1)}.$$

Propozicija 4.1. *Gaussovi koeficijenti odgovaraju broju d-dimenzionalnih potprostora m-dimenzionalnog vektorskog prostora nad $\mathbb{F}_q$.*

Dokaz. Takav je potprostor jedinstveno određen svojom bazom, tj. skupom od d nezavisnih vektora iz danog m-dimenzionalnog vektorskog prostora. Prvi od tih vektora možemo izabrati na $q^m - 1$ način jer možemo odabrati bilo koji vektor osim nulvektora. Drugi vektor možemo odabrati na $q^m - q$ načina jer možemo odabrati bilo koji vektor linearno nezavisan s prvim. Analogno dalje nastavljamo za iduće vektore. Na kraju podijelimo s brojem mogućih nezavisnih skupova od d vektora u d-dimenzionalnom potprostoru jer smo toliko puta brojili isti potprostor. □

Dakle, u projektivnom prostoru $PG(n,q)$ je

(i) $\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1$ broj točaka,

(ii) $\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)}{(q^2-1)(q^2-q)}$ broj pravaca,

(iii) $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_q$ broj k-dimenzionalnih potprostora, za proizvoljan $k \leq n$.

Posebno, u projektivnom prostoru $PG(3,q)$ imamo q^3+q^2+q+1 točaka i jednako toliko ravnina. Iz definicije Gaussovih koeficijenata zapravo odmah vidimo dualnost točaka i ravnina u projektivnom prostoru $PG(3,q)$. Ukupan broj pravaca u $PG(3,q)$ jednak je $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^4-1)(q^4-q)}{(q^2-1)(q^2-q)} = (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1$.

Na ovaj se način lako izračuna da je na pravcu u $PG(n,q)$ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_q = q+1$ točaka i općenito da je na proizvoljnom k-potprostoru od $PG(n,q)$ $\begin{bmatrix} k+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = q^k + q^{k-1} + \cdots + q + 1$ točaka.

Također, na ovaj način možemo izračunati broj k-dimenzionalnih potprostora od $PG(n,q)$ koji prolaze kroz zadanu točku.

Propozicija 4.2. *Broj k-dimenzionalnih potprostora od $PG(n,q)$ koji prolaze kroz zadanu točku jednak je $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.*

Dokaz. Neka je V pripadni vektorski prostor projektivnog prostora $PG(n,q)$ i neka je W neki njegov potprostor. Jasno, po definiciji je dimenzija od V jednaka $n+1$. Definirajmo kvocijentni prostor $V/W = \{x+W \mid x \in V\}$, uz operaciju zbrajanja $(x+W)+(y+W) = (x+y)+W$ i množenja skalarom $\alpha(x+W) = \alpha x + W$. Tada je $dim\ V/W = dimV - dimW$ te imamo bijekciju s potprostora od V/W na potprostore od V koji sadrže W. Dakle, broj $(k+1)$-dimenzionalnih potprostora od V koji sadrže neku točku $A = \langle a \rangle$, gdje je $a \in V$, jednak je broju k-dimenzionalnih potprostora od V/A, tj. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$. □

Primjerice, broj pravaca kroz točku A je $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_q$, tj. u $PG(3,q)$ kroz danu točku prolazi q^2+q+1 pravaca.

Iduće želimo definirati takozvani *dizajn.*

Definicija 4.3. *Za incidencijsku strukturu $D = (\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$, gdje su $\mathcal{T}$ točke, $\mathcal{B}$ blokovi, a $I \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{B}$ relacija incidencije, kažemo da je* jednostavna *ako nikoja dva bloka nisu incidentni s istim skupom točaka.*

Definicija 4.4. Blokovni dizajn s parametrima (v,k,λ) *ili* (v,k,λ) dizajn *je konačna incidencijska struktura sa svojstvima:*

(d_1) ukupan broj točaka je v,

(d_2) na svakom bloku leži točno k točaka,

(d_3) kroz svake dvije točke prolazi točno λ blokova.

Neka je $PG(n,q)$ projektivni prostor dimenzije n nad konačnim poljem $\mathbb{F}_q$. Definirajmo incidencijsku strukturu $PG_d(n,q)$ tako da su joj točke projektivne točke, a blokovi d-dimenzionalni projektivni potprostori od $PG(n,q)$, pri čemu je $1 \leq d \leq n$. To je (v,k,λ) dizajn s parametrima $v = \begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, $k = \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{d+1}-1}{q-1}$ te $\lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$. Naime, već smo pokazali da je ukupan broj točaka u projektivnom prostoru $PG(n,q)$ jednak $\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$ te posebno da na svakom d-dimenzionalnom projektivnom potprostoru od $PG(n,q)$ leži $\begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q$ točaka. Preostaje pokazati da kroz svake dvije projektivne točke prolazi točno $\begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$ d-dimenzionalnih potprostora. Analogno kao u propoziciji 4.2, neka je V pripadni vektorski prostor dimenzije $n+1$ i neka su A i B dvije točke u njemu. Tada je broj $(d+1)$-dimenzionalnih potprostora od V koji sadrže točke $A = \langle a \rangle$ i $B = \langle b \rangle$ jednak broju $(d-1)$-dimenzionalnih potprostora od $V/\langle a,b \rangle$, tj. $\begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}$.

Definirajmo sada pravac u blokovnom dizajnu.

Definicija 4.5. *Neka je D (v,k,λ) dizajn i neka su A i B dvije točke u njemu.* Pravac *kroz točke A i B je presjek svih blokova koji sadrže te dvije točke.*

Uočimo, u dizajnu $PG_d(n,q)$ pravci se podudaraju s pravcima pripadnog projektivnog prostora i sadrže $q+1$ točaka. No, vrijedi i obrat.

Teorem 4.6. *Neka je $D = (\mathcal{T}, \mathcal{B}, I)$ jednostavna incidencijska struktura. Tada vrijedi: D je $PG_2(3,q)$ točno onda kada je D dizajn s parametrima $(q^4+q^3+q+1, q^2+q+1, q+1)$, u kojem na svakom pravcu leži $q+1$ točka.*

Ovo je specijalni slučaj teorema Dembowskog i Wagnera iz 1960., čiji se dokaz može naći u [1].

U konačnom projektivnom prostoru reda q, svaki se regulus sastoji od točno $q+1$ pravaca. Budući da se hiperboloid u projektivnom prostoru sastoji od točaka na regulusu, broj točaka hiperboloida u projektivnom prostoru nad konačnim poljem reda q jednak je $(q+1)^2$.

Napomena 4.7. *Po Wedderburnovu teoremu svako konačno tijelo je polje, pa po teoremu 2.19 za svaki konačan trodimenzionalan projektivni prostor vrijedi da kroz proizvoljna tri mimoilazna pravca postoji točno jedan regulus.*

Teorem 4.8. *U projektivnoj ravnini reda q, skup točaka Ω je oval ako i samo ako je kardinalitet tog skupa $q+1$ i nikoje tri točke nisu kolinearne.*

Propozicija 4.9. *Kroz svaku točku ovala u projektivnoj ravnini prolazi jedinstvena tangenta na taj oval.*

Dokaz. Neka je Ω oval u $PG(2,q)$ i neka je a točka tog ovala. Kroz tu točku ukupno prolazi $q+1$ pravac i svaki od njih je ili tangenta ili sekanta na Ω jer je $a \in \Omega$, a svaki pravac siječe oval u najviše dvije točke. Budući da je na ovalu ukupno $q+1$ točka, kroz točku a prolazi ukupno q sekanti jer je toliko mogućih izbora druge točke ovala, a dvije točke u potpunosti određuju pravac u projektivnoj ravnini. Dakle, kroz točku a prolazi točno $(q+1)-q=1$ tangenta. □

Sada smo dobili i da je ukupan broj tangenti na oval jednak ukupnom broju točaka ovala, tj. $q+1$.

Budući da se afina ravnina može dobiti od projektivne ravnine tako da iz nje izbacimo jedan pravac i sve točke na njemu, te obratno, svaka afina ravnina se može proširiti do projektivne ravnine dodavanjem pravca u beskonačnosti te točaka na njemu, lako dobivamo da je broj točaka afine ravnine jednak q^2 te da je svaka točka sadržana na $q+1$ pravcu i obratno, da svaki pravac sadrži q točaka, Također, ukupno je u q^2+q pravaca u afinoj ravnini reda q.

Gore opisani afini i projektivni prostori te ravnine Minkowskoga primjeri su konačnih geometrija. Vidjeli smo da u konačnoj afinoj ravnini reda q svaki pravac sadrži q točaka, a u projektivnoj ravnini reda q svaki pravac sadrži $q+1$ točku. Znamo da red konačne afine ili projektivne ravnine može biti proizvoljna potencija prostog broja jer za dani prost broj p i prirodni broj n možemo uzeti projektivnu ili afinu ravninu nad konačnim poljem reda $q=p^n$. Međutim, otvoren je problem u konačnoj geometriji pitanje je li red konačne ravnine uvijek tog oblika. Poznati rezultat u tom smjeru je $Bruck-Ryserov$ teorem iz 1949. koji kaže da red konačne ravnine ne može biti prirodan broj q oblika $4k+1$ ili $4k+2$, gdje je k prirodan broj, takav da q nije jednak sumi dvaju kvadrata cijelih brojeva. Međutim, taj teorem nam ne daje odgovor već za konačne ravnine reda 10. Za takve je ravnine 1989. dokazano uz pomoć računala da doista ne postoje, ali već za red 12 tvrdnja je još uvijek otvorena. Za ravnine Minkowskog se također još uvijek ne zna mora li red biti potencija prostog broja. Kad bi postojala ravnina Minkowskog reda drugačijeg oblika, onda bi postojala takva afina i projektivna ravnina jer bismo mogli uzeti derivaciju ravnine Minkowskog u točki. Zato Bruck - Ryserov teorem eliminira iste redove kao i za projektivne ravnine. Iz Heiseova teorema će ipak slijediti da parni redovi ravnina Minkowskog moraju biti potencije od 2, a to nije pokazano za projektivne i afine ravnine.

Neka je od sada $M = (t, G_1 \cup G_2, K, I)$ *konačna* ravnina Minkowskoga, tj. ona u kojoj je skup točaka t konačan. Ako imamo konačnu afinu ravninu, onda je na svakom pravcu te afine ravnine q točaka, svaka je točka sadržana na $q+1$ pravcu, a ukupno je q^2 točaka i q^2+q pravaca u toj afinoj ravnini. Kažemo da je *red* takve afine ravnine jednak q. U takvoj afinoj ravnini skup pravaca se dijeli u $q+1$ klasu po relaciji paralelnosti, pri čemu je u svakoj klasi q paralelnih pravaca.

Lema 4.10. *Neka su a i b dvije točke iz M. Tada su derivirane afine ravnine M_a i M_b istog reda.*

Dokaz. Slijedi direktno iz činjenice da je broj točaka proizvoljne kružnice u M jednak broju izvodnica u G_1 (tj. G_2). Naime, neka je K proizvoljna kružnica u M koja sadrži a, a L proizvoljna kružnica u M koja sadrži b. Tada je broj točaka na te dvije kružnice jednak broju izvodnica u G_1, pa je i međusobno jednak. Zato su po gornjoj napomeni afine ravnine M_a i M_b istog reda. □

Sada možemo definirati *red ravnine Minkowskoga.*

Definicija 4.11. *Neka je M konačna ravnina Minkowskoga.* Red *ravnine M jednak je redu proizvoljne derivirane afine ravnine M_a.*

Ako je $M(h)$ ovoidalna ravnina Minkowskoga, pri čemu je h hiperboloid nekog projektivnog prostora reda q, onda je $M(h)$ također reda q jer svaka izvodnica sadrži točno $q+1$ točku od h.

Propozicija 4.12. *Neka je M konačna ravnina Minkowskoga reda q.*

(a) Na svakoj kružnici i na svakoj izvodnici je točno $q+1$ točka.

(b) Broj izvodnica u G_1 jednak je broju izvodnica u G_2 i iznosi $q+1$.

(c) Broj točaka u M je $(q+1)^2$.

(d) Svaka točka iz M leži na $q(q-1)$ kružnica.

(e) Svake dvije nezavisne točke a i b u M leže na $q-1$ zajedničkih kružnica.

(f) Broj kružnica u M je $q(q^2-1)$.

Dokaz. (a) Ako je K kružnica i a točka na njoj, onda je K pravac afine derivirane ravnine M_a. Budući da je M_a reda q, K u njoj sadrži točno q točaka i sve su različite od a, pa K ima ukupno $q+1$ točku.

Neka je G izvodnica i a točka koja ne leži na njoj. Tada je G pravac afine ravnine M_a. Ako je $G \in G_1$, onda je svaka točka iz G također točka od M_a, osim točke presjeka G i $|a|_2$. Budući da je M_a reda q, G u njoj sadrži točno q točaka, pa ukupno sadrži $q+1$ točku. Analogno za $G \in G_2$.

(b) Neka je K kružnica. Iz (a) slijedi da K sadrži točno $q+1$ točku. Iz (M_1) slijedi da je broj elemenata iz G_1 (tj. G_2) jednak broju točaka iz K, tj. iznosi $q+1$.

(c) Budući da svaka točka iz M leži na točno jednoj izvodnici iz G_1 i točno jednoj izvodnici iz G_2, a sve točke iz G_1 i G_2 su u M, iz (a) i (b) slijedi tvrdnja.

(d) Neka je a točka. Tada izvodnice koje ne sadrže a tvore u M_a dvije klase paralelnih pravaca jer se po (M_1)(a) izvodnice iz G_1 (tj. G_2) međusobno ne sijeku. Broj kružnica koje sadrže a je odavde jednak broju svih pravaca neke afine ravnine reda q, umanjen za broj pravaca u dvije klase paralelnosti, tj. jednak je $q(q+1) - 2q = q(q-1)$.

(e) Neka su a i b dvije nezavisne točke u M. Iz (c) slijedi da je točno $(q+1)^2 - 2[(q+1)+q] + 2 = (q-1)^2$ točaka nezavisnih s a i s b jer su s njima nezavisne sve točke osim točaka na njihovim izvodnicama, pri čemu smo dva sjecišta pripadnih izvodnica brojili dvaput. Budući da po (M_2) kroz svaku takvu točku prolazi točno jedna kružnica snopa (a, b) te da su to upravo sve točke takvih kružica, a svaka takva kružnica sadrži $q+1$ točku uključujući a i b, slijedi da a i b leže na točno $[(q-1)^2]/(q-1) = q-1$ zajedničkih kružnica.

(f) Ukupan broj kružnica u M jednak je broju točaka pomnoženom s brojem kružnica na kojima leži svaka točka i podijeljenom s brojem točaka na svakoj kružnici, tj. $(q+1)^2 \cdot q(q-1)/(q+1) = q(q^2-1)$. □

Propozicija 4.13. *Neka je M ravnina Minkowskoga reda q.*

(a) Svaki snop iz M sastoji se od točno $q-1$ kružnice.

(b) Svaki pramen sadrži točno q kružnica.

(c) Svako jato u M sadrži točno $q+1$ kružnica.

(d) Svaka kružnica K dodiruje točno q^2 kružnica, uključujući samu sebe.

(e) Svaka kružnica siječe točno $\frac{1}{2}(q+1)q(q-2)$ kružnica.

(f) Svaka se kružnica mimoilazi s točno $\frac{1}{2}q^2(q-1)$ kružnica.

Dokaz. (a) Slijedi iz propozicije 4.12 po definiciji snopa.

(b) Svaki pramen s nosačem a je klasa paralelnih pravaca u M_a, pa tvrdnja slijedi jer je M_a afina ravnina reda q po definiciji reda ravnine Minkowskoga.

(c) Po definiciji je jato particija točaka ravnine M u kružnice, pa je broj kružnica u njemu jednak broju točaka u M podijeljenom s brojem točaka u kružnici, tj. $\frac{(q+1)^2}{q+1} = q + 1$.

(d) Iz (b) slijedi da kroz svaku točku kružnice K prolazi točno $q - 1$ kružnica koje dodiruju K, a različite su od K. Budući da K sadrži točno $q + 1$ točku, slijedi da je broj kružnica koje dodiruju K, a različite su od K jednak $(q + 1)(q - 1) = q^2 - 1$.

(e) Iz skupa točaka proizvoljne kružnice možemo na $\binom{q+1}{2}$ način odabrati dvije točke. Iz (a) slijedi da kroz svaki takav par točaka prolaze točno $q - 2$ kružnica različitih od K. Budući da su te kružnice različite od K, nijedna od njih ne siječe K treći put, pa slijedi da je broj kružnica koje sijeku K jednak $\binom{q+1}{2}(q - 2) = \frac{(q+1)q(q-2)}{2}$.

(f) Broj kružnica koje su mimoilazne s kružnicom K je broj kružnica različitih od K umanjen za broj kružnica koje dodiruju K te za broj kružnica koje sijeku K, tj. $[q(q^2-1)-1]-(q^2-1)-\frac{1}{2}(q+1)q(q-2) = \frac{1}{2}q(q^2-q)$. □

5 Neklasične ravnine Minkowskog

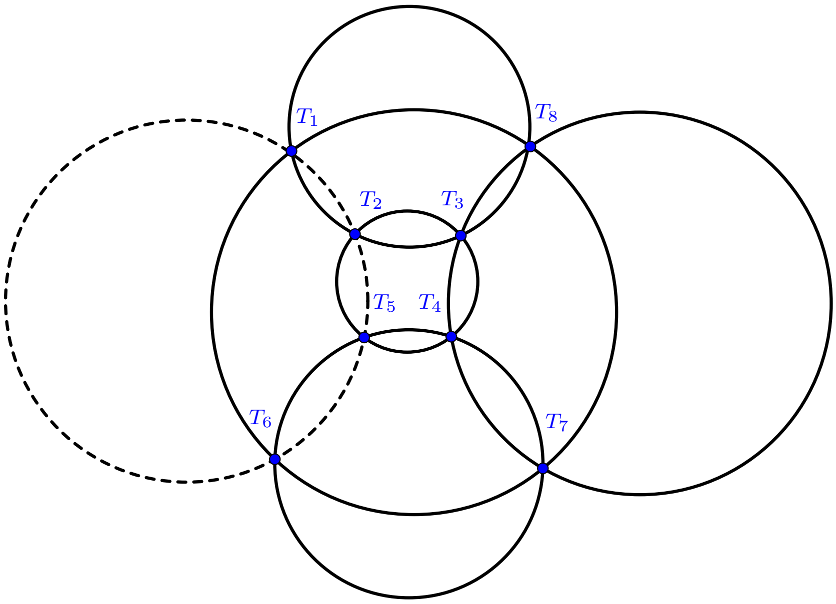
Iduće ćemo iskazati takozvani *Miquelov teorem* koji karakterizira klasične primjere ravnina Minkowskoga slično kao što *Desarguesov teorem* karakterizira klasične projektivne ravnine. Naime, klasični projektivni prostori, tj. projektivni prostori nad poljem, su upravo oni projektivni prostori u kojima vrijedi Desarguesov teorem. To su svi projektivni prostori dimenzije barem 3 i neke projektivne ravnine. Primjer projektivnog prostora koji ne zadovoljava Desarguesov teorem je takozvana *Moultonova ravnina* u kojoj se neki pravci "lome" pri prijelazu y-osi u prikazu u euklidskoj ravnini.

Teorem 5.1 (Miquel)**.** *Sljedeća tvrdnja vrijedi u ravnini Minkowskog $M(h)$ dobivenoj od hiperboloida: Za proizvoljnih 8 neparalelnih točaka $T_1, \cdots, T_8$ koje predstavljaju vrhove kocke takve da su točke na njezinih 5 stranica konciklične četvorke vrijedi da je i šesta četvorka točaka konciklička.*

Pokaže se da je tvrdnja teorema točna čak i ako je $T_4 = T_5$

Zapravo vrijedi jači *Chenov teorem* koji karakterizira ravnine Minkowskog izomorfne ravnini $M(h)$.

Teorem 5.2 (Chen)**.** *Ravnina Minkowskog M zadovoljava Miquelov teorem ako i samo ako je M izomorfna ravnini Minkowskog $M(h)$.*



Slika 4: Šest konciklličkih četvorki točaka

Sada je opravdano zvati ravnine Minkowskog *miquelovskima* ako su izomorfne ravnini Minkowskog $M(h)$. U idućoj cjelini ćemo pokazati da su sve ravnine Minkowskog parnog reda oblika $M(h)$, tj. da su miquelovske i to je glavni teorem ovog rada.

Navedimo sada teorem koji povezuje desargueovske afine ravnine i konačne miquelovske ravnine Minkowskog.

Teorem 5.3 (Chen, Kaerlein)**.** *Konačna ravnina Minkowskog neparnog reda je miquelovska ako i samo ako ima točku u kojoj je derivacija desargueovska afina ravnina.*

Iduće želimo pokazati da nisu sve ravnine Minkowskoga miquelovske, tj. želimo naći ravninu Minkowskog koja nije miquelovska. Naravno, red takve ravnine mora biti neparan. Definirajmo prvo strogo 3-tranzitivne grupe.

Definicija 5.4. *Neka je G grupa s neutralnim elementom 1 i neka je X skup.*

Kažemo da G djeluje na X ako je zadana funkcija $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx$, takva da vrijedi

1. *$1x = x$, za svaki $x \in X$,*
2. *$g(hx) = (gh)(x)$, za sve $g, h \in G$, $x \in X$.*

Definicija 5.5. *Neka grupa G djeluje na skup X i neka je $x \in X$.* Stabilizator *elementa x je skup $G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G$.* Orbita *ili* staza *elementa x je skup $x^G = \{gx \mid g \in G\} \subseteq X$.*

Iz definicije lako slijedi da je stabilizator proizvoljnog elementa iz G podgrupa od G. Također, na skupu X možemo definirati relaciju ekvivalencije: $x \sim y \iff (\exists g \in G)\ y = gx$. Pokazuje se da su klase ekvivalencije te relacije orbite.

Definicija 5.6. *Neka grupa G djeluje na skup X. Kažemo da je djelovanje (strogo) t-tranzitivno ako za svake dvije uređene t-torke međusobno različitih elemenata iz X $(x_1, \ldots, x_t)$ i $(y_1, \ldots, y_t)$ postoji (jedinstven) $g \in G$ takav da je $g(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$.*

Uočimo, 1-tranzitivnost je zapravo tranzitivnost na elementima od X.

Teorem 5.7. *Neka je Π skup permutacija koje djeluju strogo 3-tranzitivno na konačni skup S koji sadrži barem 3 elementa. Neka je $\mathcal{T} = S^2$ skup točaka, $\mathcal{K} = \{\{(x, y) \in \mathcal{T} \mid y = \pi(x)\} \mid \pi \in \Pi\}$ skup kružnica te definirajmo relacije $||_+$ i $||$ na sljedeći način: $(x_1, y_1) \ ||_+ \ (x_2, y_2)$ ako i samo ako je $x_1 = x_2$ te $(x_1, y_1) \ ||_- \ (x_2, y_2)$ ako i samo ako je $y_1 = y_2$. Za točku $T \in \mathcal{T}$ definirajmo izvodnice $\overline{T}_+ = \{A \in \mathcal{T} \mid A \ ||_+ \ T\}$ i $\overline{T}_- = \{A \in \mathcal{T} \mid A \ ||_- \ T\}$. Također, definirajmo $G_1 = \{\overline{T}_+ \mid T \in \mathcal{T}\}$ te $G_2 = \{\overline{T}_- \mid T \in \mathcal{T}\}$.*

Tada je $M(\Pi) = (\mathcal{T}, G_1 \cup G_2, \mathcal{K}, \in)$ ravnina Minkowskog, pri čemu je $\in$ relacija "biti element".

Dokaz. Iz definicije od G_1 i G_2 odmah slijedi $(M_1)(a)$.

Neka je $A = (x_A, y_A) \in \mathcal{T}$, $B = (x_B, y_B) \in \mathcal{T}$ te $C = (x_C, y_C) \in \overline{A}_+ \cap \overline{B}_-$. Tada je $x_C = x_A$ i $y_C = y_B$, pa je C jednoznačno određena. Dakle, imamo $(M_1)(b)$.

Neka je $\pi \in \Pi$ te $K = \{(x, y) \in \mathcal{T} \mid y = \pi(x)\}$ kružnica. Neka je prvo $\overline{T}_+$ izvodnica. Tada sve točke iz $\overline{T}_+$ imaju prvu koordinatu istu, označimo je x_T te su na tom pravcu sve točke koje imaju takvu prvu koordinatu. Jasno je da je tada jednoj od tih točaka druga koordinata upravo $\pi(x_T)$, jer je π bijekcija, pa je ta točka u K. Neka je sada $\overline{T}_-$ izvodnica. Tada sve točke iz $\overline{T}_-$ imaju drugu koordinatu istu, označimo je y_T te su na tom pravcu sve točke koje imaju takvu drugu koordinatu. Jasno je da je tada jednoj od tih točaka prva koordinata upravo $\pi^{-1}(y_T)$, jer je π bijekcija. Dakle, imamo $(M_1)(c)$.

Neka su $A = (x_A, y_a)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ tri točke iz $\mathcal{T}$ od kojih nikoje dvije ne leže na istoj izvodnici. Tada su (x_A, x_B, x_C) i (y_A, y_B, y_C) trojke međusobno različitih elemenata iz S. Dakle, budući da Π djeluje strogo 3-tranzitivno na S, slijedi da postoji jedinstven $\pi \in \Pi$ takav da je $\pi(x_A, x_B, x_C) = (y_A, y_B, y_C)$, pa postoji jedinstvena kružnica koja sadrži A, B i C, tj. vrijedi (M_2).

Jasno je da svaka kružnica i svaka izvodnica imaju točno $q+1 \geq 3$ točaka, gdje je $q+1$ broj elemenata u S. Također, snop svake dvije nezavisne točke ima $q-1$ element. Naime, kružnica je zbog stroge 3-tranzitivnosti od Π potpuno određena s tri točke, pa ako su dane dvije točke, one su sadržane na onoliko kružnica na koliko načina možemo odabrati treću točku. To se može učiniti na $(q+1)-2 = q-1$ načina. Neka su $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$ dvije točke iz $\mathcal{T}$ koje ne leže na istoj izvodnici te neka je K kružnica kroz A koja ne sadrži B. Tada K sadrži točno $q+1-1-2 = q-2$ točke različite od A koje su nezavisne s B. Naime, to su sve točke na K osim A te dviju točaka koje su na izvodnicama kroz B. Iz (M_2) slijedi da postoji točno $q-2$ kružnica kroz A i B koje sijeku K u dvije točke. S druge strane, znamo da $q-1$ kružnica prolazi kroz A i B. Dakle, postoji točno jedna kružnica kroz A i B koja u presjeku s kružnicom K ima samo točku A.

Neka su $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ i $C = (x_C, y_C)$ tri točke takve da nikoje dvije nemaju neku istu koordinatu. Takve točke možemo odabrati iz S^2 jer je S najmanje tročlan. Budući da Π djeluje strogo 3-tranzitivno na S, slijedi da postoji (čak jedinstven) $\pi \in \Pi$ takav da je $\pi(x_A, x_B, x_C) = (y_A, y_B, y_C)$, pa postoji kružnica koja sadrži A, B i C, tj. imamo (M_4).

Dakle, $M(\Pi)$ je doista ravnina Minkowskog. $\square$

Sada želimo konstruirati neklasičnu ravninu Minkowskog konačnog reda. Po Heiseovu teoremu kojeg ćemo dokazati u idućoj cjelini, red takve ravnine mora biti neparan.

Neka je $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ polje i neka su $PG(1,\mathbb{F}) = \{\langle(x_1, x_2)\rangle \mid 0 \neq (x_1, x_2) \in \mathbb{F}^2\}$ i $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ redom *homogena* i *nehomogena* reprezentacija projektivnog pravca nad $\mathbb{F}$. Grupe $P\Gamma L(2,\mathbb{F})$ i $PGL(2,\mathbb{F})$ su grupe permutacija od $PG(1,\mathbb{F})$. Za svaki $\psi \in P\Gamma L(2,\mathbb{F})$ postoje $a, b, c, d \in \mathbb{F}$ te automorfizam κ polja $\mathbb{F}$ takav da je

$$\psi : \langle(x_1, x_2)\rangle \to \langle(a\kappa(x_1) + b\kappa(x_2), c\kappa(x_1) + d\kappa(x_2))\rangle,$$

pri čemu je $ad - bc \neq 0$.

Uz pridruživanje $\langle(1,0)\rangle \mapsto \infty$, $\langle(x,1)\rangle \mapsto x$ s $PG(1,\mathbb{F})$ u $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$, preslikavanje ψ inducira na $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ permutaciju ψ' takvu da

$$\infty \mapsto \begin{cases} \frac{a}{c}, \text{ako je } c \neq 0, \\ \infty, \text{ako je } c = 0 \end{cases}$$

te

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d}, \text{ako je } c\kappa(x) + d \neq 0, x \in \mathbb{F} \\ \infty, \text{ako je } c\kappa(x) + d = 0, x \in \mathbb{F}. \end{cases}$$

Skraćeno pišemo $\psi' : x \to \frac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d}$, $ad - bc \neq 0$. Permutaciju ψ' zovemo *razlomljeno semilinearno preslikavanje* te, u slučaju kad je κ identiteta, razlomljeno linearno preslikavanje.

Koristeći skraćeni zapis kao gore, slijedi:

(a) $P\Gamma L(2, \mathbb{F}) = \{x \mapsto \frac{a\kappa(x)+b}{c\kappa(x)+d} \mid a, b, c, \in \mathbb{F},\ ad-bc \neq 0, \kappa \text{ automorfizam od } \mathbb{F}\}$.

(b) $PGL(2, \mathbb{F}) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F},\ ad - bc \neq 0\}$.

Skup $PSL(2, \mathbb{F}) = \{x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F},\ ad - bc = 1\}$ je specijalna podgrupa od $PGL(2, \mathbb{F})$.

Teorem 5.8. (*a*) *$PGL(2, \mathbb{F})$ djeluje strogo 3-tranzitivno na $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$, tj. za svaki par trojki (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3) međusobno različitih elemenata iz $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ postoji točno jedan $\pi \in PGL(2, \mathbb{F})$ takav da je $\pi(x_i) = x'_i$, za $i = 1, 2, 3$.*

(*b*) *$PSL(2, \mathbb{F})$ djeluje 2-tranzitivno na $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ tj. za svaka dva para (x_1, x_2) i (x'_2, x'_2) međusobno različitih elemenata iz $\mathbb{F} \cup \{\infty\}$ postoji točno jedan $\pi \in PSL(2, \mathbb{F})$ takav da je $\psi(x_1) = x'_1$ i $\psi(x_2) = x'_2$.*

Neka je $p > 2$ i $n \in \mathbb{N}$ te neka je $(\mathbb{F}_q, +, \cdot)$ polje s $q = p^n$ elemenata. Neka je γ automorfizam koji šalje x u x^p te neka je Q skup kvadrata iz $\mathbb{F}_q$. Neka je Π sljedeći podskup skupa semilinearnih preslikavanja:

$$\Pi = \{x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc \in Q\} \cup$$

$$\cup \{x \mapsto \frac{a\gamma(x) + b}{c\gamma(x) + d} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc \notin Q\}.$$

Za $k_0 \in \mathbb{F} \setminus Q$ te $\alpha_0 : x \mapsto k_0\gamma(x)$ je $\Pi = PSL(2, p^n) \cup PSL(2, p^n)\alpha_0$. Ako uzmemo identitetu umjesto γ, dobivamo da je $\Pi = PGL(2, p^n)$. Za $n = 2$ skup Π je strogo 3-tranzitivna grupa.

Lema 5.9 (Percy)**.** *Π djeluje strogo 3-tranzitivno na $K \cup \{\infty\}$.*

Po teoremu 5.7, za Π iz Percyjeve leme postoji odgovarajuća ravnina Minkowskog koju označavamo $M(\Pi, p^n)$. Za $n \geq 2$ pokazuje se da ta ravnina Minkowskog nije miquelovska, tj. nije izomorfna ravnini $M(h)$ dobivenoj od hiperboloida u projektivnom prostoru $PG(3, p^n)$. Pri tome je Π grupa samo za $n = 2$, a inače je skup permutacija.

6 Heiseov teorem

U ovoj cjelini dokazujemo Heiseov teorem o karakterizaciji konačnih ravnina Minkowskoga parnog reda. Taj je rezultat 1974. godine dokazao njemački matematičar Werner Heise.

Teorem 6.1 (Heise)**.** *Konačne ravnine Minkowskoga parnog reda q su upravo incidencijske strukture $M(h)$, pri čemu je h hiperboloid u trodimenzionalnom projektivnom prostoru reda q.*

Od sada nadalje je M konačna ravnina Minkowskoga reda q. Za proizvoljnu točku a u M označavamo s $\overline{M}_a$ projektivni zatvarač afine ravnine M_a. Dakle, $\overline{M}_a$ je projektivna ravnina koja sadrži jedan "nepravi" pravac (pravac u beskonačnosti) G_∞, takav da se M_a dobiva od $\overline{M}_a$ izbacivanjem pravca G_∞. U $\overline{M}_a$ postoje dvije točke t_1 i t_2 koje leže na pravcu u beskonačnosti G_∞, t_1 je točka koja leži na svim pravcima u klasi paralelnosti $G_1 \setminus \{|a|_1\}$, a t_2 je točka koja leži na svim pravcima u klasi paralelnosti $G_2 \setminus \{|a|_2\}$. Ove oznake ćemo koristiti od sada pa do kraja rada.

Neka je (a, K) uređeni par točke i kružnice koja je ne sadrži u M. Za takav par definiramo da je $\overline{K}$ skup točaka u $\overline{M}_a$ takav da vrijedi:

(a) Sve točke u K, osim aK i Ka su u $\overline{K}$.

(b) Točke u beskonačnosti t_1 i t_2 su u $\overline{K}$.

Uočimo, ovako definiran skup je doista skup točaka u projektivnoj ravnini $\overline{M}_a$. Naime, u M_a su sve točke iz M osim točaka na izvodnicama $|a|_1$ i $|a|_2$, pa s obzirom da K ne sadrži a, u M_a su sve točke iz K osim onih koje se nalaze na $|a|_1$ i $|a|_2$, a to su upravo Ka i aK. Također, točke u beskonačnosti t_1 i t_2 po definiciji leže svaka na barem jednom pravcu različitom od $|a|_1$ i $|a|_2$, pa su sadržane u $\overline{M}_a$.

Lema 6.2. *Neka je a točka koja ne leži na kružnici K u M. Tada je $\overline{K}$ oval u projektivnoj ravnini $\overline{M}_a$. Nadalje, tangenta na $\overline{K}$ u t_1 je $|Ka|_1$, a tangenta na $\overline{K}$ u t_2 je $|aK|_2$.*

Dokaz. Budući da $\overline{K}$ sadrži točno $(q+1)-2+2=q+1$ točaka, po teoremu 4.8 moramo samo pokazati da nikoje tri točke iz $\overline{K}$ ne leže na zajedničkom pravcu u $\overline{M}_a$. Pravac u beskonačnosti u $\overline{M}_a$ sadrži samo točke t_1 i t_2 iz $\overline{K}$. Svaka izvodnica sadrži točno jednu točku iz K, pa sadrži najviše dvije točke iz $\overline{K}$. Konačno, svaka kružnica L kroz a sadrži najviše dvije točke iz K jer je različita od K. Takav pravac L iz M_a ne leži ni u jednoj od klasa paralelnosti $G_1 \setminus \{|a|_1\}$ i $G_2 \setminus \{|a|_2\}$, pa L ne sadrži ni t_1 ni t_2 u $\overline{M}_a$. Dakle, $\overline{K}$ je oval u $\overline{M}_a$. Znamo da je tangenta na $\overline{K}$ u t_1 izvodnica iz G_1 jer su to jedini pravci različiti od G_∞ koji sadrže t_1. Jedinstvena izvodnica iz G_1 koja ne sadrži nijednu"pravu" točku iz $\overline{K}$ je $|Ka|_1$. Analogno se vidi da je tangenta na t_2 izvodnica $|aK|_2$. $\square$

Kažemo da uređeni par (a, K) točke i kružnice koja je ne sadrži u M *zadovoljava uvjet* $(\mathcal{O})$ ako postoji još jedna točka a' iz M takva da sve kružnice kroz a koje dodiruju K sadrže i a'.

Teorem 6.3 (Qvist)**.** *Neka je P konačna projektivna ravnina reda q te neka je $\mathcal{O}$ oval u P.*

(a) *Ako je q paran, onda postoji točka a u P takva da je skup tangenti na $\mathcal{O}$ upravo skup pravaca kroz a. Tu točku a nazivamo* nukleusom ovala.

(b) *Ako je q neparan, tada kroz svaku točku koja nije na $\mathcal{O}$ prolaze dvije ili nijedna tangenta.*

Dokaz. (a) Neka je $S=\{b_0, b_1, \cdots, b_q\}$ sekanta na oval $\mathcal{O}$ koja ga siječe u točkama b_0 i b_1. Budući da je broj točaka ovala $q+1$ neparan, kroz svaku točku b_i, $i=2,\ldots,q$ prolazi barem jedna tangenta T_i. Naime, za svaki $i \in \{1,\ldots,q\}$ pravci kroz b_i particioniraju $\mathcal{O}$ u skupove kardinalnosti 2, 1 ili 0, ovisno o tome je li pravac sekanta, tangenta ili vanjski pravac. Kad kroz neku točku b_i ne bi prolazila tangenta, ukupan broj točaka na $\mathcal{O}$ bi bio oblika $2\cdot k+0\cdot l$, ali to je kontradikcija, jer znamo da je ukupan broj točaka ovala $\mathcal{O}$ neparan. Ukupan broj tangenti je $q+1$, pa budući da su b_0 i b_1 točke na ovalu i kroz njih prolazi točno jedna tangenta, slijedi da i kroz svaku točku b_i, $i=2,\ldots,q$ mora prolaziti točno jedna tangenta. Sada smo dobili da ako je a točka presjeka dviju tangenti, nijedna sekanta ne može prolaziti kroz a. Naime, kroz svaku točku sekante prolazi točno jedna tangenta, pa a ne može biti točka na drugoj sekanti. Dakle, kroz a može prolaziti samo tangenta ili vanjski pravac. No, budući da pravci kroz a particioniraju $\mathcal{O}$ u skupove kardinalnosti 1 ili 0, ovisno o tome je li pravac tangenta ili vanjski pravac, a ukupan broj pravaca kroz a jednak je ukupnom broju točaka na ovalu, slijedi da je svaki pravac kroz a tangenta.

(b) Neka je $T_b=\{b, c_1, \ldots, c_q\}$ tangenta na $\mathcal{O}$ u točki b. Za svaki $i \in \{1,\ldots,q\}$ pravci kroz c_i particioniraju $\mathcal{O}$ u skupove kardinalnosti 2, 1 ili 0, ovisno o tome je li pravac sekanta, tangenta ili vanjski pravac. Budući da je broj točaka u $\mathcal{O}$ $q+1$, a to je paran broj, za svaku točku c_i mora postojati barem još jedna tangenta kroz tu točku različita od T_b. Naime, pravac T_b sadrži točno jednu točku iz $\mathcal{O}$, pa kad bi svi drugi pravci kroz c_i bili sekante ili vanjski pravci, ukupan broj točaka na $\mathcal{O}$ bi morao biti $1+2\cdot k+0\cdot l$, a to je neparno, pa bismo dobili kontradikciju. Budući da je ukupan broj tangenti $q+1$, kroz svaku točku c_i prolazi još točno jedna tangenta različita od T_b. Dakle, ako kroz točku c koja nije u $\mathcal{O}$ prolazi neka tangenta na $\mathcal{O}$, onda kroz tu točku prolaze točno dvije tangente na $\mathcal{O}$. $\square$

Iskažimo još jedan pomoćni rezultat za dokaz karakterizacije parnosti reda ravnine Minkowskoga q.

Lema 6.4. *U ravnini Minkowskoga M reda 3, uvjet $(\mathcal{O})$ ne vrijedi za neincidentne parove kružnice i točke.*

Propozicija 6.5. *Neka je M konačna ravnina Minkowskoga reda q. Ekvivalentno je:*

(a) q je paran.

(b) U M uvjet $(\mathcal{O})$ vrijedi za svaki neincidentan par točke i kružnice.

(c) U M uvjet $(\mathcal{O})$ vrijedi za najmanje jedan neincidentan par točke i kružnice.

Dokaz. Neka je (a, K) neincidentan par točke i kružnice. Tada su kružnice kroz a koje dodiruju K te izvodnice $|Ka|_1$ i $|aK|_2$ upravo tangente na oval $\overline{K}$ u $\overline{M}_a$, po lemi 6.2.

Pokažimo da (a) povlači (b). Po Qvistovu teoremu su tangente na $\overline{K}$ upravo pravci kroz neku točku a' u $\overline{M}_a$. Sada a' ne može biti točka u beskonačnosti jer pravac u beskonačnosti sadrži obje točke t_1 i t_2 iz $\overline{K}$, pa je to sekanta. Posebno, svaka kružnica kroz a koja dodiruje K sadrži i točku a', pa je tvrdnja pokazana.

Jasno je da uvjet (b) povlači uvjet (c), pa pokažimo još da uvjet (c) povlači uvjet (a). Neka je (a, K) neincidentan par točke i kružnice u M koji zadovoljava uvjet $(\mathcal{O})$. Tada je po lemi 6.4 $q \neq 3$. Ako je $q = 2$, tvrdnja (a) vrijedi, pa možemo pretpostaviti da je $q \geq 4$. Neka je a' jedinstveno određena točka koja leži na svim kružnicama koje dodiruju K. Tada kroz a' prolaze najmanje $q-1 \geq 3$ tangente na oval $\overline{K}$. Odavde po teoremu 6.3 q nije neparan. $\square$

Od sada nadalje je M konačna ravnina Minkowskoga parnog reda $q > 2$.

Korolar 6.6. *Svake tri kružnice u M koje se u parovima dodiruju, imaju zajedničku točku.*

Dokaz. Fiksirajmo jednu od tih kružnica, nazovimo je K. Druge dvije kružnice, nazovimo ih L_1 i L_2 dodiruju se u nekoj točki iz M, označimo je s a. Ako one dodiruju K u točki a, pokazali smo tvrdnju. Pretpostavimo zato da a nije na K. Tada je (a, K) neincidentan par točke i kružnice u ravnini Minkowskog parnog reda, pa vrijedi uvjet $(\mathcal{O})$, tj. L_1, L_2 i K se dodiruju u nekoj točki $a' \in M$, pa smo pokazali tvrdnju. $\square$

Korolar 6.7. *Neka su a, b i c tri nezavisne točke u M. Tada postoji točno jedna kružnica kroz c koja dodiruje svaku kružnicu snopa (a, b).*

Korolar 6.8. *Neka su a i b dvije povezive točke u M. Tada je skup kružnica koje dodiruju svaku kružnicu snopa (a, b) upravo snop (ab, ba).*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da svaka kružnica koja dodiruje sve kružnice u (a, b) leži u (ab, ba). Neka je K kružnica koja dodiruje svih $q - 1$ kružnica snopa (a, b). Tada K ne sadrži ni a ni b. Naime, pretpostavimo primjerice da K sadrži a. Budući da je $q - 1 \geq 3$, u snopu (a, b) su barem dvije kružnice L i N. No, budući da se one tada dodiruju u točki a s K, moraju se L i N dodirivati, a to je kontradikcija.

Svaka kružnica iz (a, b) sastoji se od a, b i točaka koje ne leže ni na jednoj od izvodnica $|a|_1$, $|a|_2$, $|b|_1$ i $|b|_2$. Budući da K dodiruje svih $q - 1$ kružnica snopa (a, b), ona ima najmanje $q - 1$ točku izvan ovih četiriju izvodnica. Budući da K ne sadrži ni a ni b, a dodiruje sve ove četiri izvodnice, slijedi da K mora prolaziti kroz ab i ba.

Sada tvrdimo da postoji točno $q - 1$ kružnica koje dodiruju sve kružnice iz (a, b). Doista, po korolaru 6.7 slijedi da kroz svaku od $(n - 1)^2$ točaka nezavisnih s a i b prolazi točno jedna kružnica K koja dodiruje sve kružnice iz (a, b). No, znamo da svaka takva kružnica K sadrži točno $q - 1$ točku nezavisnu s a i b. Odavdje slijedi tvrdnja.

Sada je broj kružnica koje dodiruju svaku kružnicu iz (a, b) upravo jednak broju kružnica iz (ab, ba). Po prethodnoj tvrdnji su sada ta dva skupa jednaka. $\square$

Za dvije kružnice K i L koje se mimoilaze označavamo sa $S(K, L)$ skup svih kružnica koje dodiruju K i L.

Korolar 6.9. *Neka su K i L dvije disjunktne kružnice u M. Tada je $S(K, L)$ jato u M.*

Dokaz. Pokažimo prvo da kroz svaku točku od K prolazi točno jedna kružnica koja dodiruje K i L. Prvo tvrdimo da kroz svaku točku a od K prolazi barem jedna takva kružnica. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da svaka kružnica pramena $\langle a, K\rangle$ siječe L u dvije točke ili je s njom mimoilazna. Znamo da je svaka točka na L, osim eventualno točaka aL i La, sadržana na nekoj kružnici N pramena $\langle a, K\rangle$ po aksiomu (M_3) jer je nezavisna s a, a K i L su mimoilazne. Jasno, na toj kružnici N je tada sadržana još neka točka kružnice L po pretpostavci. Također, jasno je da je svaka točka iz L, osim eventualno aL i La, sadržana na točno jednoj takvoj kružnici jer one u presjeku imaju samo točku a. Znamo otprije da doista ne postoji kružnica kroz a i aL niti kroz a i La. Dakle, sada znamo da ukupan broj točaka na L mora biti oblika $2k + 1 + 1$, što je paran broj. No, to je kontradikcija s propozicijom 4.12 (a) koja kaže da je broj točaka na L jednak $q + 1$ jer je q paran, pa tvrdnja doista vrijedi. Pretpostavimo sada da postoje dvije kružnice N_1 i N_2 pramena $\langle a, K\rangle$ koje dodiruju L. Tada su L, N_1 i N_2 tri kružnice koje se u parovima dodiruju, pa imaju zajedničku točku po korolaru 6.6. No, to je kontradikcija jer N_1 i N_2 po pretpostavci u presjeku imaju samo točku a koja ne leži na L jer su K i L mimoilazne.

U drugom koraku pokazat ćemo da je svaka točka b izvan K i L sadržana na najviše jednoj kružnici iz $S(K, L)$. Naime, neka su M_1 i M_2 dvije kružnice iz $S(K, L)$ koje sadrže b. Neka su a_1 i a_2 (tj. b_1 i b_2) točke presjeka od M_1 i M_2 s K (tj. s L). Budući da za (b, K) vrijedi uvjet $\mathcal{O}$, slijedi da M_1 i M_2 sadrže $(Kb)(bK)$. Posebno, točke b i $(Kb)(bK)$ su povezive. Analogno slijedi da M_1 i M_2 sadrže $(Lb)(bL)$ te da su točke b i $(Lb)(bL)$ povezive. Dakle, obje različite kružnice M_1 i M_2 sadrže točke b, $(Kb)(bK)$ i $(Lb)(bL)$. Budući da b ne leži ni na K ni na L, slijedi da je $(Kb)(bK) \neq b \neq (Lb)(bL)$, pa mora biti $(Kb)(bK) = (Lb)(bL)$. Odavde posebno slijedi da $(Kb)(bK)$ leži na $|Lb|_1$, tj. Kb je incidentno sa $|Lb|_1$. No, tada slijedi da se disjunktne kružnice K i L dodiruju u točki b, a to je kontradikcija.

Iz prve i druge tvrdnje slijedi da je $S(K, L)$ skup $q + 1$ u parovima disjunktnih kružnica, pa je to jato. $\square$

Da bismo mogli smjestiti ravninu Minkowskoga u projektivni prostor treba nam još jedna tvrdnja koju je dokazao Segre. No, prije toga pokazat ćemo jednu pomoćnu lemu.

Lema 6.10. *Neka su K, L i M tri u parovima mimoilazne kružnice. Tada postoji kružnica X koja ih sve dodiruje.*

Dokaz. Po korolaru 6.9 svaka točka iz M leži na točno jednoj kružnici iz $S(K, L)$. Ako ne postoji kružnica X, onda svaka kružnica iz $S(K, L)$ siječe kružnicu M u dvije točke ili je s njom mimoilazna, pa $q+1$ mora biti paran. No, to je kontradikcija. $\square$

Lema 6.11 (Segre)**.** *Neka su K i L dvije mimoilazne kružnice te neka su M i N dvije (disjunktne) kružnice iz $S(K, L)$. Tada svaka kružnica iz $S(K, L)$ dodiruje svaku kružnicu iz $S(M, N)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{C}$ skup kružnica različitih od K i L, koje nisu iz $S(K, L)$. Tada $\mathcal{C}$ ima $q(q^2-1)-2-(q+1) = q^3-2q-2$ elementa.

Za svaku kružnicu $C \in \mathcal{C}$ definirajmo m_C kao broj svih kružnica iz M koje ne dodiruju K, L ni C. Nadalje, definirajmo $\mathcal{C}' = \{C \in \mathcal{C} \mid m_C \geq 2\}$.

Dakle, $\mathcal{C}'$ je skup kružnica iz $\mathcal{C}$ za koje postoje najmanje dvije kružnice takve da dodiruju K, L i C.

Pokažimo prvo tri tvrdnje iz kojih će slijediti lema. Prvo tvrdimo da vrijedi:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}'} (m_C - 1) = q^2 - q.$$

Naime, prebrojavamo parove (H, C), pri čemu je $H \in S(K, L)$, $C \in \mathcal{C}$ takve da se H i C dodiruju. Svaka kružnica iz $S(K, L)$ dodiruje (uključujući K i L) točno q^2-1 kružnicu različitu od H. Odavde je broj parova koje treba prebrojiti točno $(q+1)(q^2-3)$. S druge strane, broj ovakvih parova je točno $\sum_{C \in \mathcal{C}'} m_C$. Dakle, slijedi da je $q^3+q^2-3q-3 = \sum_{C \in \mathcal{C}} m_C$. Sada je $m_C = 1$, za svaki $C \in \mathcal{C}' \setminus \mathcal{C}$, pa slijedi da je

$$\sum_{C \in \mathcal{C}} m_C = \sum_{C \in \mathcal{C}} (m_C - 1) + |C| = \sum_{C \in \mathcal{C}'} (m_C - 1) + q^3 - 2q - 3.$$

Dakle, pokazali smo tvrdnju.

U drugom koraku tvrdimo da je:

$$\sum_{C \in \mathcal{C}'} m_C(m_C - 1) = (q+1)q(q-1).$$

Naime, prebrojavamo skupove trojki (H, H', C) takvih da su $H, H' \in S(K, L)$, $C \in \mathcal{C}$ te $H \neq H'$ te C dodiruje H i H'. S jedne strane, broj takvih trojki je jednak q. S druge strane, po korolaru 6.7, dvije disjunktne kružnice iz $S(K, L)$ imaju točno $q-1$ kružnicu koja ih dodiruje, a različita je od K i L. Slijedi da je

$$(q+1)q(q-1) = \sum_{C \in \mathcal{C}} m_C(m_C - 1) = \sum_{C \in \mathcal{C}'} m_C(m_C - 1),$$

pa smo pokazali tvrdnju.

U trećem koraku pokazujemo da za sve $C \in \mathcal{C}'$ vrijedi $m_C = q + 1$. Naime, neka je $m = max_{C\in\mathcal{C}'} m_C$. Iz prethodna dva koraka slijedi da je

$$(q+1)q(q-1) = \sum_{C\in\mathcal{C}'} m_C(m_C - 1) \leq m \cdot \sum_{C\in\mathcal{C}'}(m_C - 1) = m \cdot q(q-1),$$

pa je $m \geq q + 1$. No, budući da je broj kružnica koje dodiruju C, K i L najviše jednak broju kružnica koje dodiruju K i L, slijedi da je $m \leq q + 1$. Dakle, $m = q+1$, pa slijedi da je za svaku kružnicu C iz $\mathcal{C}'$ $m_C = m = q+1$.

Odavde sada lako slijedi tvrdnja leme. Naime, neka je C kružnica iz $S(M, N)$ različita od K i L. Tada je $C \in \mathcal{C}'$ jer kružnice M i N dodiruju kružnice K, L i C. Po trećem koraku je tada $m_C = q + 1$, pa slijedi da C dodiruje svih $q + 1$ kružnica iz $S(K, L)$, što smo i trebali pokazati. $\square$

Dokažimo sada Heiseov teorem. Već smo u cjelini 3 pokazali da je $M(h)$ ravnina Minkowskog reda q kada je h hiperboloid u trodimenzionalnom projektivnom prostoru reda q. Od sada nadalje neka je $M = (t, G_1 \cup G_2, \mathcal{K}, I)$ konačna ravnina Minkowskog parnog reda q i pokažimo obrat.

Definicija 6.12. *Definiramo* incidencijsku strukturu *$P(M)$ na sljedeći način:*

1. Točke *iz $P(M)$ su s jedne strane točke iz M (i njih zovemo* realne točke*), a s druge strane kružnice iz M (njih zovemo* idealne točke*). Ako je K kružnica iz M, njoj pridruženu idealnu točku u $P(M)$ označavamo s K^+.*

2. Ravnine *u $P(M)$ su točke iz M (i zovemo ih* idealne ravnine*) te kružnice iz M (koje zovemo* realne ravnine*). Ako je a točka iz M, pripadnu idealnu ravninu označavamo s a^+.*

3. Incidencija *u $P(M)$ je inducirana s I te vrijedi:*

   (a) $aIK \iff a \in K$ *(za $a \in t$ i $K \in \mathcal{K}$)*

   (b) $aIb^+ \iff a \in |b|_1$ *ili* $a \in |b|_2$ *(za $a, b \in t$)*

   (c) $K^+Ia^+ \iff a \in K$ *(za $K \in \mathcal{K}$ i $a \in t$)*

   (d) $K^+IL \iff K$ *i* L *se dodiruju (za $K, L \in \mathcal{K}$)*

Uočimo, ako je aIb^+, onda je bIa^+.

Teorem 6.13. *Ako je q paran, onda je $P(M)$ trodimenzionalni projektivni prostor reda q.*

Dokaz. Provjerit ćemo da struktura $P(M)$ zadovoljava pretpostavke propozicije 4.6:

(a) Broj točaka u $P(M)$ jednak je broju točaka u M pribrojenom broju kružnica iz M, pa po propoziciji 4.12 slijedi da je jednak

$$(q+1)^2 + q(q^2-1) = q^3 + q^2 + q + 1.$$

(b) Ako je K realna ravnina, tj, kružnica iz M, onda K sadrži točno $q+1$ realnu točku. Naime, to su točke iz M od K. Ako je a^+ idealna ravnina, tj. točka iz M, onda ona sadrži $2q+1$ realnu točku, to su točke iz $|a|_1$ i $|a|_2$, te $q(q-1)$ idealnih točaka, to su kružnice u M koje sadrže a. Dakle, svaka ravnina u $P(M)$ sadrži točno q^2+q+1 točku.

Pokazat ćemo da vrijedi još:

(c) Kroz svake dvije točke prolazi točno $q+1$ ravnina,

(d) Svaki pravac iz $P(M)$ sadrži $q+1$ točku.

Moramo prvo obraditi različite slučajeve, ovisno o tome jesu li točke realne ili idealne.

Prvi slučaj. Uzmimo dvije realne točke a i b. Budući da se nalazimo u ravnini Minkowskoga, moramo ovaj slučaj opet razdvojiti na dva podslučaja:

Slučaj 1a: Točke a i b su nezavisne. Onda su realne ravnine koje sadrže a i b upravo $q-1$ kružnica kroz a i b. Ako je c^+ idealna ravnina koja sadrži a i b, onda je i cIa^+ i cIb^+, pa c mora biti točka iz M koja leži na izvodnici kroz a i na izvodnici kroz b. Zato je $c = ab$ ili $c = ba$. Dakle, a i b leže na točno $(q-1)+2 = q+1$ zajedničkoj ravnini, pa slijedi (c). Realne točke koje leže na svakoj kružnici snopa (a, b), pa onda i na $(ab)^+$ i $(ba)^+$, su upravo točke a i b. Idealne točke K^+ koje leže na $q+1$ zajedničkoj ravnini od a i b su po korolaru 6.8 upravo kružnice K snopa (ab, ba). Dakle, ravnine koje sadrže a i b sadrže $q+1$ zajedničku točku, pa slijedi (d).

Slučaj 1b: Točke a i b nisu nezavisne. U ovom slučaju ne postoji realna ravnina koja sadrži a i b. Ako je G izvodnica kroz a i b, onda $q+1$ točka od G upravo sačinjava ideanu ravninu koja sadrži a i b. Nijedna idealna točka ne može ležati na svakoj idealnoj ravnini c^+, gdje su c točke iz G. Realne točke koje leže na svakoj takvoj idealnoj ravnini x^+ su točno $q+1$ točka iz G.

Drugi slučaj. Gledamo realnu točku a i idealnu točku K^+. Ovdje prirodno razlikujemo sljedeća dva slučaja:

Slučaj 2a: Točka a leži na kružnici K. Tada su realne ravnine koje sadrže a i K upravo q kružnica pramena $\langle a, K\rangle$. Ako je c^+ neka idealna ravnina koja sadrži a i K^+, onda c mora ležati na nekoj izvodnici kroz a i na kružnici K. Zato mora biti $c = a$. Dakle, a i K^+ su obje sadržane u točno $q+1$ ravnina, pa imamo (c). Jedinstvena realna točka koja leži na a^+ i svim kružnicama pramena $\langle a, K\rangle$ je upravo točka a. Idealne točke L^+ koje leže u istoj ravnini kao a i K^+ su kružnice L koje sadrže a i dodiruju svaku kružnicu pramena $\langle a, K\rangle$, a to su upravo kružnice pramena $\langle a, K\rangle$. Budući da takvih kružnica ima točno q, dobili smo (d).

Slučaj 2b: Točka a ne leži na kružnici K. Realne ravnine koje sadrže a i K^+ su kružnice koje sadrže a i dodiruju K, pa ih ima $q-1$. Idealne ravnine koje sadrže a i K^+ su $(Ka)^+$ i $(aK)^+$, pa smo pokazali (c). Budući da je q paran, kružnice koje sadrže a i dodiruju K sadrže i točku $(Ka)(aK)$. Budući da točke a i $(aK)(Ka)$ leže na ravninama $(Ka)^+$ i $(aK)^+$, slijedi da a i $(Ka)(aK)$ leže na svakoj kružnici koja sadrži a i K^+. Idealne točke L^+ koje leže na svakoj od ravnina koje sadrže a i K^+ su kružnice L koje sadrže Ka i aK te dodiruju svaku od kružnica koje sadrže a i dodiruju K. Dakle, po korolaru 6.8, to je upravo $q-1$ kružnica iz (Ka, aK), pa imamo (d).

Treći slučaj: Sada promatramo dvije idealne točke K^+ i L^+. Razlikujemo tri podslučaja:

Slučaj 3a: Kružnice K i L iz M sijeku se u dvije točke a i b. Budući da su a i b nezavisne kao točke jedne kružnice, slijedi da su realne ravnine koje sadrže K^+ i L^+ upravo kružnice koje dodiruju K i L, tj. $q-1$ kružnica snopa (ab, ba). Idealne ravnine koje sadrže K^+ i L^+ su ravnine a^+ i b^+, pa smo pokazali (c). Realne točke koje leže na svakoj ravnini koja sadrži K^+ i L^+ su obje točke ab i ba. Idealne točke pravca kroz K^+ i L^+ su upravo kružnice koje sadrže a i b i dodiruju sve kružnice snopa (ab, ba). Dakle, to je upravo $q-1$ kružnica snopa (a, b), pa imamo (d).

Slučaj 3b: Kružnice K i L se dodiruju u točki a iz M. Realne ravnine koje sadrže K^+ i L^+ su one kružnice M koje dodiruju K i L. Po korolaru 6.6 svaka takva kružnica M mora sadržavati točku a, pa su realne ravnine koje sadrže K^+ i L^+ upravo q kružnica pramena $\langle K, L\rangle$. Budući da postoji samo jedna idealna ravnina koja sadrži K^+ i L^+, pokazali smo (c). Jedinstvena realna točka koja leži na svakoj ravnini koja sadrži K^+ i L^+ je a. Idealne točke pravca kroz K^+ i L^+ su kružnice pramena $\langle K, L\rangle$, pa imamo (d).

Slučaj 3c: Kružnice K i L se mimoilaze. Realne ravnine koje sadrže K^+ i L^+ su upravo kružnice jata $S(K, L)$. Budući da ne postoji idealna ravnina koja sadrži K^+ i L^+, slijedi da K^+ i L^+ leže na točno $q+1$ ravnini, pa imamo (c). Budući da kružnice jata $S(K, L)$ nemaju sve jednu zajedničku točku, slijedi da ne postoji realna točka koja leži na svakoj ravnini koja sadrži K^+ i L^+. Iz Segreove leme slijedi da kružnice koje dodiruju svaku kružnicu jata $S(K, L)$ također čine jato. Odavde slijedi da postoji točno $q+1$ idealna točka koja leži na svakoj kružnici koja sadrži K^+ i L^+, pa imamo (d).

Sada smo pokazali pretpostavke propozicije 4.6, pa slijedi da je $P(M)$ trodimenzionalni projektivni prostor reda q. $\square$

Teorem 6.14. *Neka je M ravnina Minkowskog parnog reda q te neka je $P(M)$ incidencijska struktura iz definicije 6.12. Tada je skup $\mathcal{T}$ realnih točaka hiperboloid u trodimenzionalnom projektivnom prostoru $P(M)$. Nadalje, $M = M(\mathcal{T})$.*

Dokaz. Iz dokaza teorema 6.13 slijedi da u $P(M)$ postoje samo četiri vrste pravaca:

(a) pravac G se sastoji od realnih točaka neke izvodnice od M,

(b) pravac G se sastoji od dvije različite nezavisne realne točke a i b te $q-1$ idealnih točaka K^+ takvih da je K kružnica snopa (a, b),

(c) pravac G se sastoji od jedne realne točke a i q idealnih točaka L^+, pri čemu je L kružnica nekog fiksnog pramena $\langle a, K \rangle$,

(d) pravac G se sastoji od $q+1$ idealnih točaka K^+, pri čemu je K kružnica nekog fiksnog jata S.

Prvo ćemo pokazati da je skup $\mathcal{T}$ realnih točaka iz $P(M)$ kvadratni skup: iz gornje klasifikacije pravaca slijedi da su na svakom pravcu koji sadrži više od dvije realne točke, sve točke realne.

Neka je sada a realna točka. Tada je a^+ jedinstveno određena tangencijalna ravnina na $\mathcal{T}$ u točki a. Naime, budući da svaka realna točka koja leži na a^+, leži i na nekoj od izvodnica iz M kroz a, slijedi da je svaki pravac u a^+ tangenta u točki a. Neka je s druge strane T tangenta na $\mathcal{T}$ u točki a. Tada je T pravac vrste (a) ili (c). U oba slučaja svaka točka iz T leži na a^+.

Zato je a kvadratni skup u $P(M)$. Izvodnice tog kvadratnog skupa su očito pravci vrste (a), pa su to upravo izvodnice ravnine Minkowskog M.

Budući da svaka realna točka, pa i svaka točka iz M, leži na točno jednoj izvodnici jednog paralelnog skupa izvodnica te budući da se dvije izvodnice iz različitih paralelnih skupova izvodnica sijeku u točno jednoj realnoj točki, slijedi da je $\mathcal{T}$ hiperboloid u $P(M)$.

Svaka realna ravnina siječe $\mathcal{T}$ u $q + 1$ u parovima nezavisnih točaka, tj. presjek realne ravnine i hiperboloida $\mathcal{T}$ je oval, a svaka idealna ravnina a^+ siječe hiperboloid $\mathcal{T}$ točno u onim točkama koje su zajedničke izvodnicama kroz a. Dakle, realne ravnine su upravo sekantne ravnine.

Odavde direktno slijedi da je incidencijska struktura $M(\mathcal{T})$ koja se sastoji od realnih točaka, izvodnica i sekantnih ravnina, upravo ravnina Minkowskog M. Dakle, $M(\mathcal{T}) = M$, tj. M je ovoidalna ravnina Minkowskog. □

Sada iz teorema 6.13 i 6.14 slijedi tvrdnja Heiseova teorema.

Literatura

[1] A. Beutelspacher, *Einführung in die endliche Geometrie II, Projektive Räume*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1982.

[2] A. Beutelspacher, *Partial parallelisms in finite projective spaces*, Geom. Dedicata **36** (1990), 273-278, dostupno na https://doi.org/10.1007/BF00150794

[3] A. Beutelspacher, U. Rosenbaum, *Projective geometry: From foundations to applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[4] P. Dembowski, *Finite geometries*, Springer, 1968.

[5] E. Hartmann, *Planar circle geometries, an introduction to Moebius-, Laguerre- and Minkowski-planes*, bilješke s predavanja, dostupno na http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/circlegeom.pdf (kolovoz 2017.)

[6] D. Hestenes, R. Ziegler, *Projective geometry with Clifford algebra*, Acta Applicandae Mathematicae **23** (1991.), 25-63.

[7] V. Krčadinac, *Polarni prostori*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/polarni.pdf (kolovoz 2017.).

[8] V. Krčadinac, *Unitali*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~krcko/nastava/unitali10.pdf (kolovoz 2017.).

[9] K. B. Moore, *Discrete mathematics research progress*, Nova publishers, 2008.

[10] A. E. Schroth, *Topological circle planes and topological quadrangles*, Chapman Hall/CRC (Research Notes in Mathematics Series), 1995.

[11] S. Singer, *Nacrtna geometrija*, bilješke s predavanja, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ng/materijali/nacrt20-36.pdf (kolovoz 2017.)

[12] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, bilješke s predavanja, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf (kolovoz 2017.).

[13] B. S. Webb (urednik), *Survey in Combinatorics 2005.*, Cambridge University Press, 2005.

[14] Wikipedia, *Conic section*, https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section_In_the_real_projective_plane (kolovoz 2017.)

[15] Wikipedia, *Werner Heise*, https://de.wikipedia.org/wiki/Werner_Heise (kolovoz 2017.).

Sažetak

U ovom radu proučavamo konačne ravnine Minkowskog. Dajemo pregled nama značajnih rezultata projektivne geometrije te prebrojavamo točke, pravce i elemente konačnih geometrija: projektivnih prostora, afinih prostora i ravnina Minkowskog. Dajemo primjer neklasične ravnine Minkowskog.

Konačno, dokazujemo Heiseov teorem i sve pomoćne rezultate, uključujući Qvistov teorem i Segreovu lemu.

Summary

In this thesis we study finite Minkowski planes. We give an overview of relevant results in projective geometry and count points, lines and elements of finite geometries: projective spaces, affine spaces and Minkowski planes. We explain an example of non-classical Minkowski planes.

Finally, we prove the theorem of Heise and all the results necessary for its proof, including the theorem of Qvist and the Segre lemma.

Životopis

Veronika Pedić rođena je 6. listopada 1993. godine u Splitu. U Zagrebu završava Osnovnu školu Frana Galovića i V. gimnaziju te Osnovnu i Srednju glazbenu školu Zlatka Balokovića. Tijekom osnovne i srednje škole sudjelovala je na državnim natjecanjima iz matematike, fizike, logike te hrvatskog i latinskog jezika.

Na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu 2012. godine upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike. Tijekom Preddiplomskog studija drži demonstrature iz Linearne algebre I i II u akademskoj godini 2013./2014., mentor je natjecateljima iz matematike i logike u V. gimnaziji te jedan od organizatora međunarodnog Turnira gradova u Zagrebu.

Diplomski sveučilišni studij Teorijske matematike upisuje 2015. godine na istom Odsjeku. Tijekom Diplomskog studija drži demonstrature iz Euklidskih prostora i Modela geometrije u akademskoj godini 2015./2016. te je mentor natjecateljima iz matematike u V. gimnaziji.

Akademske godine 2014./2015. te 2016./2017. dobiva nagradu Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta za najbolje studente završnih godina studija, a godine 2016./2017. također i Rektorovu nagradu Sveučilišta u Zagrebu za timski znanstveni rad *Racionalne funkcije na krivuljama i primjena nad poljem* $\mathbb{C}$ zajedno s kolegicom Barbarom Bošnjak i kolegom Josipom Novakom. Dobitnica je Stipendije Grada Zagreba za svaku akademsku godinu od 2010./2011. do 2016./2017.

U srpnju 2017. godine u Dijonu polazi ljetnu školu *Current Topics in the Theory of Algebraic Groups*.