SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Keti Stepčić

LEMOINEOVA TOčKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojim roditeljima i sestri Sari. Veliko hvala mojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje, koji su vjerovali u mene i moj uspjeh, bili moja podrška kroz cijelo moje obrazovanje. Najveće hvala mojoj sestri na njezinom odricanju, strpljenju i ogromnoj podršci što mi pruža. I na kraju se zahvaljujem svim svojim cimericama, prijateljima koji su kroz cijelo moje studiranje bili uz mene. Zahvaljujem se i svojoj mentorici doc.dr.sc. Mei Bombardelli na savjetima tijekom izrade i pisanja diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavat ćemo simedijane, te njezina svojstva. Najvažnije svojstvo simedijana trokuta je da se one sijeku u jednoj točki koju nazivamo Lemoineova točka. Ime je dobila po francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineu.
Na početku prisjetit ćemo se nekih osnovnih teorema i definicija koje ćemo kasnije koristiti u radu. U drugom poglavlju definirat ćemo pojam simedijane, te iskazati neka njihova osnovna svojstva.
U trećem poglavlju definirat ćemo Lemoineovu točku. Posljednje poglavlje posvetit ćemo istraživanju nekih svojstava Lemoineove točke te ćemo prikazati više načina kako odrediti Lemoineovu točku trokuta.

Poglavlje 1

Osnovni teoremi i pojmovi

1.1 Cevin i Menelajev teorem

Cilj ovog rada je iskazati neka svojstva simedijana u trokutu, te uvesti pojam Lemoineove točke. Da bismo mogli to iskazati, na početku je potrebno najprije navest neke osnovne pojmove i teoreme. Prije svega iskažimo i dokažimo teorem poznat pod imenom **Cevin teorem**[1] :

Teorem 1.1 (Cevin teorem). *Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Ako pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom onda vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \tag{1.1}$$

Dokaz. Neka je S točka i neka pravci AS, BS i CS sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC u točkama A_1, B_1 i C_1. Vrhom C konstruiramo paralelu s AB. Neka je D sjecište te paralele s BB_1, a E njeno sjecište s AA_1. Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi:

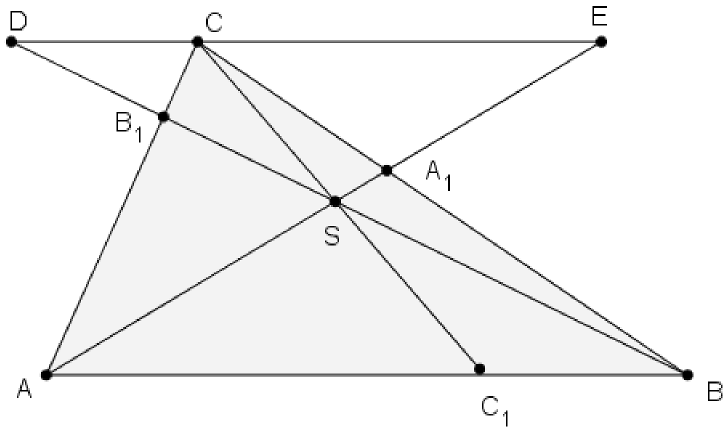
$$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1 \Longrightarrow \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CD|}{|AB|}$$

$$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1 \Longrightarrow \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|AB|}{|CE|}$$

$$\triangle SAC_1 \sim \triangle SEC \Longrightarrow \frac{|AC_1|}{|CE|} = \frac{|C_1S|}{|CS|},$$

$$\triangle CDS \sim \triangle C_1BS \Longrightarrow \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CS|}{|C_1S|}.$$

[1] Giovanni Ceva (1647.-1734.) talijanski matematičar



Slika 1.1: Cevin teorem

Množenjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1S|}{|CS|} \cdot \frac{|CS|}{|C_1S|}$$

i kraćenjem dobivamo tvrdnju teorema:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

□

Teorem 1.2 (**Obrat Cevinog teorema**). *Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1, \tag{1.2}$$

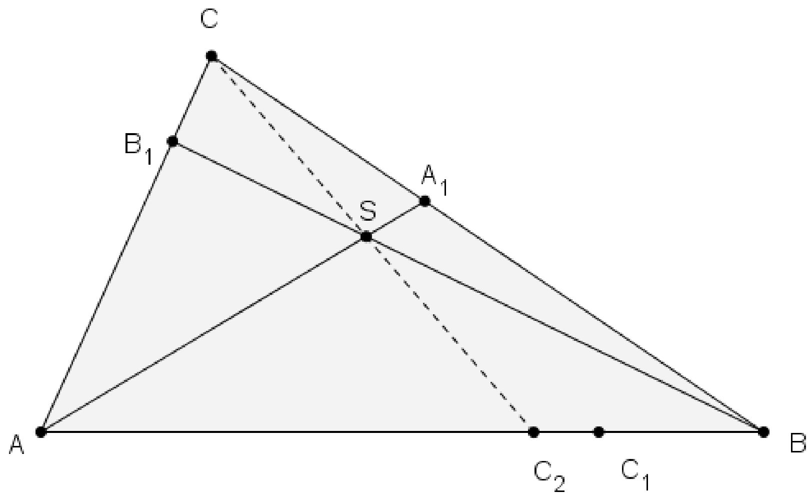
tada pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom.

Dokaz. Neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Neka je S sjecište pravaca AA_1 i BB_1, a C_2 sjecište pravaca CS i AB. Prema teoremu 1.1, vrijedi:

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$



Slika 1.2: Obrat Cevinog teorema

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}.$$

Točke C_1 i C_2 pripadaju dužini $\overline{AB}$. S obzirom je $|AC_1| = |AB| - |BC_1|$ i $|AC_2| = |AB| - |BC_2|$, iz jednakosti

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}$$

slijedi

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} - 1 = \frac{|AB|}{|BC_2|} - 1,$$

tj.

$$\frac{|AB|}{|BC_1|} = \frac{|AB|}{|BC_2|}.$$

Dakle, $|BC_1| = |BC_2|$, odnosno točke C_1 i C_2 se podudaraju. Time smo dokazali da pravac CC_1 prolazi točkom S. □

Cevin teorem možemo zapisati i na drugi način pomoću trigonometrije.

Teorem 1.3 (**Trigonometrijski oblik Cevinog teorema**). *Neka su A_1, B_1 i C_1 točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, redom. Pravci AA_1, BB_1, CC_1 prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle CBB_1} = 1. \tag{1.3}$$

Dokaz. S obzirom smo Cevin teorem i njegov obrat već dokazali, dovoljno je pokazati da je umnožak omjera duljina iz Cevinog teorema jednak umnošku omjera navedenih sinusa kutova. Primjenom poučka o sinusima na trokute ABB_1 i CBB_1 dobivamo:

$$\frac{|CB_1|}{|BB_1|} = \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle C} \quad \text{i} \quad \frac{|BB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B_1BA}$$

odnosno

$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin \angle C}.$$

Na analogan način dobili bismo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} \quad \text{i} \quad \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B}.$$

Množenjem dobivenih jednakosti dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{\sin \angle ACC_1}{\sin \angle C_1CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_1}{\sin \angle B_1BA}.$$

□

Sada ćemo iskazati i dokazati još jedan važan teorem poznat pod imenom **Menelajev teorem**[2] :

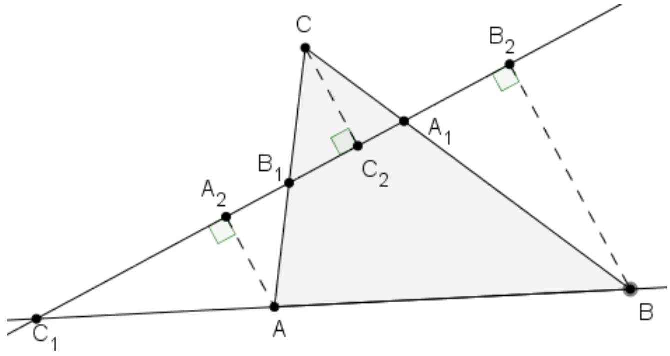
Teorem 1.4 (**Menelajev teorem**). *Neka su A_1 i B_1 točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a točka C_1 na produžetku stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Ako su točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne onda vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1. \tag{1.4}$$

Dokaz. Neka je p pravac kojem pripadaju točke A_1, B_1 i C_1, te neka su točke A_2, B_2 i C_2 nožišta okomica iz vrhova trokuta ABC na pravac p. Prema KKK teoremu o sličnosti trokuta slijedi:

$$\triangle AC_1A_2 \sim \triangle BC_1B_2 \Longrightarrow \frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{|AA_2|}{|BB_2|}$$

[2]Menelaj iz Aleksandrije (1.-2. st. pr. Kr), starogrčki matematičar



Slika 1.3: Menelajev teorem

$$\triangle BA_1B_2 \sim \triangle CA_1C_2 \Longrightarrow \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BB_2|}{|CC_2|}$$
$$\triangle CC_2B_1 \sim \triangle AA_2B_1 \Longrightarrow \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|CC_2|}{|AA_2|}.$$

Množenjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AA_2|}{|BB_2|} \cdot \frac{|BB_2|}{|CC_2|} \cdot \frac{|CC_2|}{|AA_2|}$$

i kraćenjem dobivamo tvrdnju teorema:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

□

Teorem 1.5 (**Obrat Menelajevog teorema**). *Neka su A_1 i B_1 točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$, a točka C_1 na produžetku stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1, \tag{1.5}$$

tada su točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne.

Dokaz. Neka je S sjecište pravaca B_1C_1 i CB. Iz teorema 1.4 slijedi da je

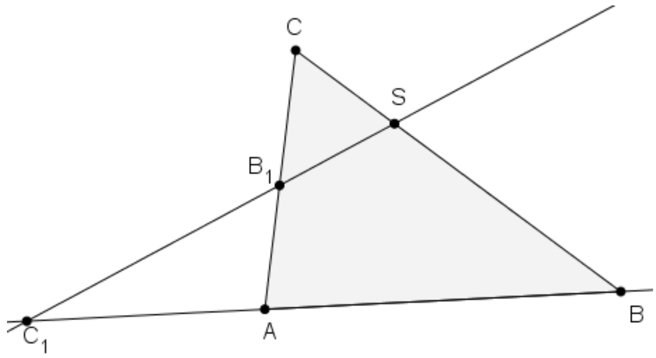
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BS|}{|SC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BS|}{|SC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

odnosno

$$\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BS|}{|SC|}.$$



Slika 1.4: Obrat Menelajevog teorema

Točke A_1 i S pripadaju dužini $\overline{BC}$. S obzirom je $|BA_1| = |BC| - |CA_1|$ i $|BS| = |BC| - |CS|$, slijedi

$$\frac{|BC|}{|A_1C|} - 1 = \frac{|BC|}{|SC|} - 1,$$

tj.

$$\frac{|BC|}{|A_1C|} = \frac{|BC|}{|SC|}.$$

Dakle, $|A_1C| = |SC|$, odnosno točke A_1 i S se podudaraju. Time smo dokazali da su točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne. □

Dakle, ako su A_1, B_1 i C_1 točke na pravcima BC, AC i AB trokuta ABC, redom, takve da vrijedi

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1,$$

onda se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u jednoj točki ili točke A_1, B_1 i C_1 pripadaju istom pravcu. Ukoliko sve tri točke A_1, B_1 i C_1 ili samo jedna od njih pripadaju stranicama trokuta ABC, prema teoremu 1.2 pravci AA_1, BB_1 i CC_1 se sijeku u jednoj točki, a ukoliko su samo dvije ili niti jedna točka na stranici trokuta ABC, tada su prema teoremu 1.5 točke A_1, B_1 i C_1 kolinearne.

1.2 Težište

S obzirom je Lemoineova točka povezana s pojmovima težišnica i težišta, u ovom potpoglavlju prisjetit ćemo se njihovih definicija.

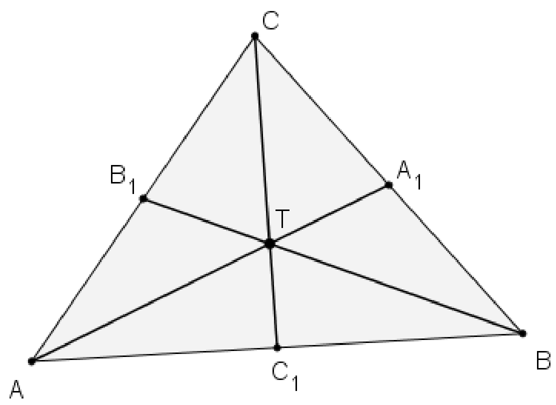
Definicija 1.6. *Spojnicu nekog vrha danog trokuta ABC sa polovištem suprotne stranice zovemo* ***težišnicom*** *ili* ***medijanom*** *tog trokuta.*

Teorem 1.7. *U trokutu postoje tri težišnice koje se sijeku u jednoj točki.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC, te neka su AA_1, BB_1, CC_1 težišnice. S obzirom su točke A_1, B_1, C_1 polovišta dužina $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ vrijedi:

$$|AC_1| = |BC_1|, \quad |BA_1| = |CA_1| \quad \text{i} \quad |CB_1| = |AB_1|.$$

Dobivamo:



Slika 1.5: Težište T trokuta ABC

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

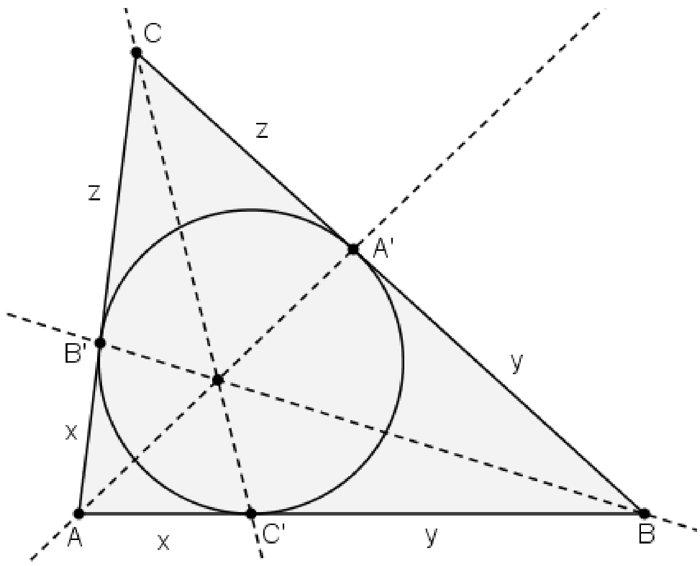
Koristeći obrat Cevinog teorema 1.2 zaključujemo da se težišnice $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ sijeku u jednoj točki T. □

Definicija 1.8. *Točka T u kojoj se sijeku težišnice trokuta ABC zove se* ***težište*** *trokuta.*

1.3 Gergonneova točka

U ovom potpoglavlju iskazat ćemo teorem i definiciju **Gergonneove točke**.

Teorem 1.9 (**Gergonne**[3]). *Neka su A', B', C' dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta. Tada se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki.*



Slika 1.6: Gergonneova točka trokuta ABC

Dokaz. Odsječci tangenata povučenih iz neke točke na kružnicu su sukladni. Uvedimo oznake:

$$x = |AB'| = |AC'|, \quad y = |BA'| = |BC'|, \quad z = |CA'| = |CB'|.$$

Sada slijedi:

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1,$$

pa prema obratu Cevinog teorema 1.2 slijedi tvrdnja. □

Definicija 1.10. *Sjecište pravaca AA', BB', CC', pri čemu su točke A', B', C' dirališta upisane kružnice trokuta ABC redom sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta, naziva se* ***Gergonneovom točkom****.*

---

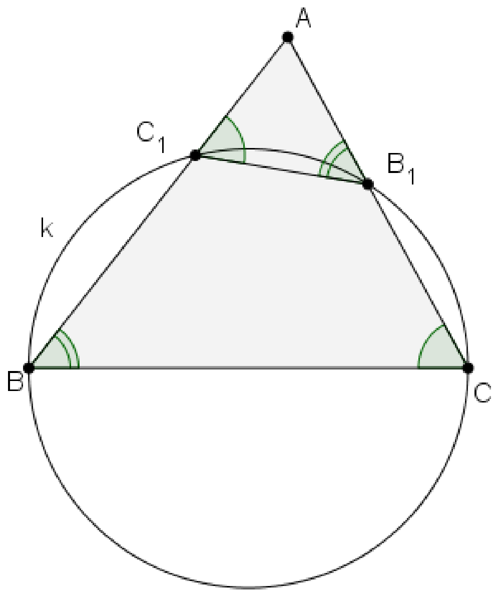
[3]Josef Diaz Gergonne (1771. - 1859.), francuski astronom i matematičar

Poglavlje 2

Simedijana

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam simedijane, te iskazati nekoliko teorema vezanih uz taj pravac. Da bismo mogli iskazati definiciju simedijane, najprije definirajmo antiparalele.

Definicija 2.1. *Neka je dan trokut ABC, točka B_1 na pravcu AC i točka C_1 na pravcu AB. Ako za takve točke vrijedi $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$ i $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$, tada dužinu $\overline{B_1C_1}$ zovemo **antiparalelom** stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC.*



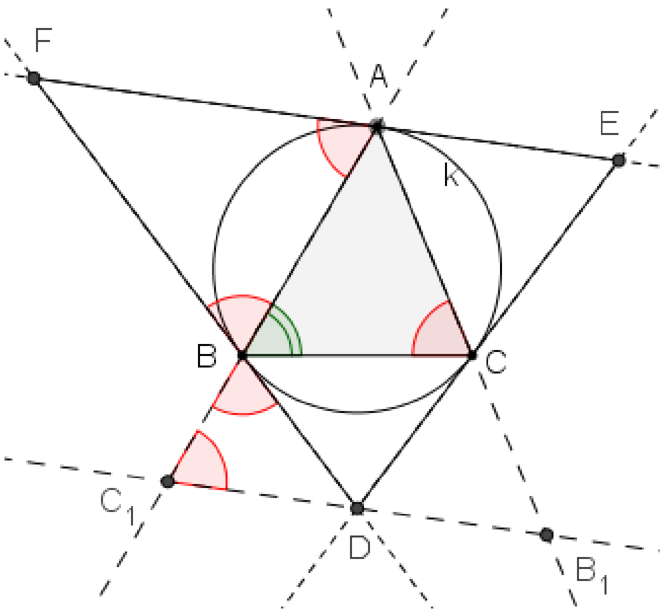
Slika 2.1: Antiparalela

Teorem 2.2. *Ako je $\overline{C_1B_1}$ antiparalela stranice $\overline{BC}$, tada točke B, C, B_1 i C_1 pripadaju jednoj kružnici.*

Dokaz. U četverokut BCB_1C_1 (vidi sliku 2.1), uočavamo da su nasuprotni kutovi suplementarni. Dakle, četverokut BCB_1C_1 je tetivni četverokut, pa točke B, C, B_1 i C_1 pripadaju istoj kružnici. □

Teorem 2.3. *Polovišta svih antiparalela neke stranice danog trokuta pripadaju istom pravcu koji prolazi trećim vrhom trokuta.*

Dokaz. Na temelju definicije 2.1 slijedi da su sve antiparalele neke od stranica danog trokuta međusobno paralelne.
Neka je S središte opisane kružnice k trokuta ABC, te neka se tangente na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama B i C sijeku u točki D, tangente na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama C i A sijeku u točki E i tangente na opisanu kružnicu trokuta ABC u točkama A i B sijeku u točki F. Neka antiparalela $\overline{C_1B_1}$ stranice $\overline{BC}$ prolazi točkom D (vidi sliku 2.2).



Slika 2.2: Teorem 2.3

Središnji kut je dvostruko veći od obodnog kuta nad istim lukom, pa vrijedi:

$$\angle ASB = 2 \cdot \angle ACB.$$

S obzirom je tangenta okomita na polumjer koji spaja diralište te tangente sa središtem opisane kružnice, vrijedi:

$$\angle FAS = 90^\circ.$$

U jednakokračnom trokutu ABS vrijedi:

$$\angle BAS = \frac{180^\circ - 2 \cdot \angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACB,$$

te slijedi:

$$\angle FAB = \angle FAS - \angle BAS = \angle ACB.$$

Dakle, vrijedi:

$$\angle DC_1B = \angle FAB,$$

pa su pravci AF i DC_1 paralelni.
S obzirom vrijedi da je $|AF| = |FB|$, slijedi:

$$\angle DC_1B = \angle FAB = \angle FBA = \angle DBC_1.$$

Dakle, trokut BC_1D je jednakokračan, i vrijedi $|DC_1| = |DB|$. Analogno se dobije da je $|DB_1| = |DC|$.
Dakle,

$$|DC_1| = |DB| = |DC| = |DB_1|,$$

odnosno točka D je polovište dužine $\overline{C_1B_1}$. Pravac AD siječe antiparalelu $\overline{C_1B_1}$ u polovištu D. Antiparalele stranice $\overline{BC}$ su međusobno paralelne, pa pravac AD siječe i sve ostale antiparalele dužine $\overline{BC}$ u njihovim polovištima, jer se homotetijom s centrom u A polovišta dužina preslikavaju u polovišta.
Analogno, pravac CF siječe sve antiparalele dužine $\overline{AB}$ u njihovim polovištima, a pravac BE siječe sve antiparalele dužine $\overline{AC}$ u njihovim polovištima. □

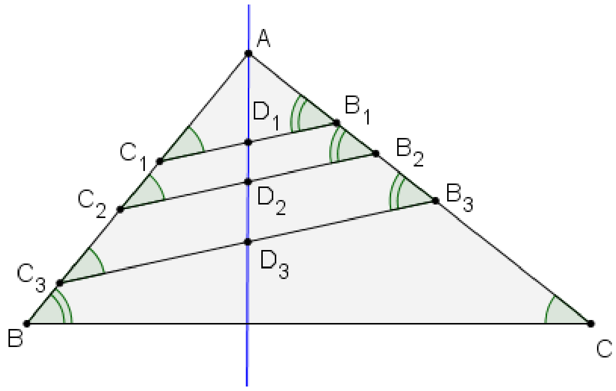
Definicija 2.4. *Pravac koji prolazi polovištima svih antiparalela neke stranice danog trokuta i prolazi nasuprotnim vrhom, zove se* ***simedijana*** *danog trokuta.*

Definicija 2.5. *Trokut čije stranice pripadaju tangentama na opisanu kružnicu danog trokuta u njegovim vrhovima zovemo* ***tangencijalni trokut*** *danog trokuta.*

Iz dokaza teorema 2.3 slijedi slijedeći teorem:

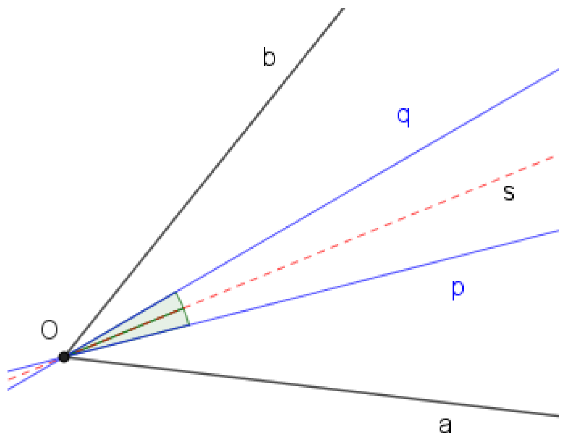
Teorem 2.6. *Neka je DEF tangencijalni trokut trokuta ABC. Tada su pravci AD, BE i CF simedijane trokuta ABC.*

Simedijanu trokuta možemo dobiti i na drugi način, pomoću izogonala. Prije toga, definirat ćemo pojam izogonalnih pravaca i izogonalno konjugiranih točaka.



Slika 2.3: Simedijana

Definicija 2.7. *Neka je dan kut i par pravaca, p i q, koji prolaze vrhom kuta i sa simetralom tog kuta zatvaraju sukladne kutove. Par pravaca, p i q, zovemo* ***izogonalama*** *tog kuta.*



Slika 2.4: Pravci p i q su izogonale kuta $\angle aOb$

Dakle, izogonale kuta zatvaraju sukladne kutove sa simetralom tog kuta, odnosno prema slici 2.4 vrijedi $\angle pOs = \angle qOs$. Slijedi da su i kutovi kojeg zatvaraju izogonale s krakovima danog kuta sukladni, tj. prema slici 2.4 vrijedi:

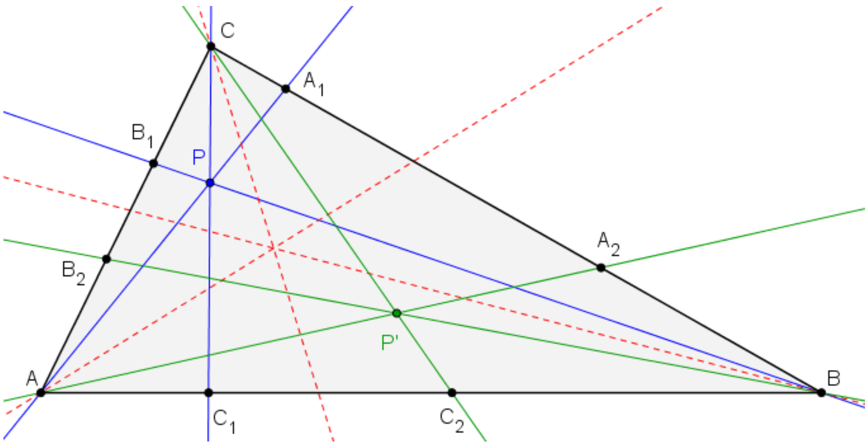
$$\angle aOp = \angle bOq \quad \text{i} \quad \angle aOq = \angle bOp.$$

Teorem 2.8. *Neka je ABC trokut i točka P unutar trokuta. Pravci simetrični pravcima PA, PB i PC s obzirom na simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki P'.*

Dokaz. Neka pravci PA, PB i PC sijeku stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ redom u točkama A_1, B_1, C_1. Neka je A_2 točka na pravcu BC takva da je pravac AA_2 simetričan pravcu AA_1 s obzirom na simetralu kuta pri vrhu A, točka B_2 na pravcu AC takva da je pravac BB_2 simetričan pravcu BB_1 s obzirom na simetralu kuta pri vrhu B i točka C_2 na pravcu AB takva da je pravac CC_2 simetričan pravcu CC_1 s obzirom na simetralu kuta pri vrhu C.
Trebamo pokazati da vrijedi

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = 1,$$

pa će prema obratu trigonometrijskog oblika Cevinog teorema 1.3 slijediti tvrdnja. Budući



Slika 2.5: Izogonalno konjugirane točke

da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 simetrični, s obzirom na simetrale kutova trokuta ABC, pravcima AA_2, BB_2 i CC_2, vrijedi $\angle ACC_2 = \angle C_1CB$, $\angle C_2CB = \angle ACC_1$, $\angle BAA_2 = \angle A_1AC$ itd. Na temelju toga dobivamo:

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = \frac{\sin \angle C_1CB}{\sin \angle ACC_1} \cdot \frac{\sin \angle A_1AC}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1BA}{\sin \angle CBB_1}.$$

S obzirom se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u točki P, prema trigonometrijskom obliku Cevinog teorema 1.3 slijedi:

$$\frac{\sin \angle C_1CB}{\sin \angle ACC_1} \cdot \frac{\sin \angle A_1AC}{\sin \angle BAA_1} \cdot \frac{\sin \angle B_1BA}{\sin \angle CBB_1} = 1,$$

pa vrijedi:

$$\frac{\sin \angle ACC_2}{\sin \angle C_2CB} \cdot \frac{\sin \angle BAA_2}{\sin \angle A_2AC} \cdot \frac{\sin \angle CBB_2}{\sin \angle B_2BA} = 1.$$

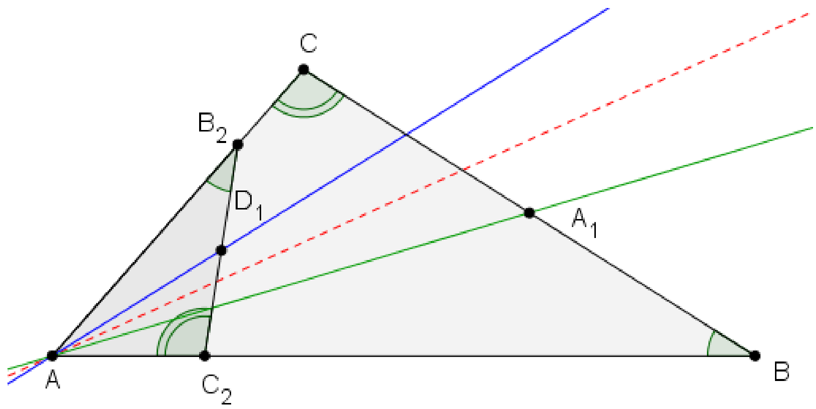
Dakle, prema trigonometrijskom obliku Cevinog teorema 1.3 pravci AA_2, BB_2 i CC_2 sijeku se u jednoj točki P'. □

Definicija 2.9. *Neka je točka P unutar trokuta ABC, a točka P' sjecište pravaca simetričnih pravcima PA, PB i PC s obzirom na simetrale kutova trokuta ABC. Točke P i P' zovemo* ***izogonalno konjugiranim točkama*** *ili kraće* ***izogonalnim točkama*** *trokuta ABC.*

Točku P' još zovemo **izogonalni konjugat** točke P s obzirom na trokut ABC.

Teorem 2.10. *Simedijana i pravac kojem pripada težišnica (medijana) trokuta ABC osnosimetrični su s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta.*

Dokaz. Neka je $\overline{B_2C_2}$ antiparalela dužine $\overline{BC}$, točka D_1 polovište dužine $\overline{B_2C_2}$, a točka A_1 polovište od $\overline{BC}$ (vidi sliku 2.6).



Slika 2.6: Osna simetrija simedijane i pravca kojem pripada težišnica

Trokuti ABC i AB_2C_2 su slični, prema KKK teoremu o sličnosti trokuta, te vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB_2|}{|B_2C_2|},$$

odnosno

$$\frac{|AB|}{|BA_1|} = \frac{|AB_2|}{|B_2D_1|}.$$

Kutovi $\angle ABC$ i $\angle AB_2D_1$ su sukladni po definiciji antiparalela. Stoga, zaključujemo da su trokuti ABA_1 i AB_2D_1 slični po SKS teoremu o sličnosti trokuta, što znači da je:

$$\angle BAA_1 = \angle B_2AD_1.$$

Time smo dokazali da su pravac kojem pripada težišnica i simedijana trokuta ABC osnosimetrične s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta trokuta. □

Godine 1883. M. d'Ocagne[1] uvodi pojam simedijana za pravce simetrične težišnici s obzirom na simetralu kuta.

Teorem 2.11. *Simedijane trokuta ABC sijeku se u jednoj točki.*

Dokaz. Dokaz ovog teorema slijedi iz teorema 1.7, 2.8 i 2.10. Dakle, težišnice se sijeku u težištu T trokuta ABC, pa se pravci simetrični pravcima AT, BT i CT s obzirom na simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. S obzirom su simedijane i pravci kojima pripadaju težišnice trokuta ABC osnosimetrični s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta, slijedi da se simedijane sijeku u jednoj točki. □

U sljedećem poglavlju dokazat ćemo prethodni teorem i na drugi način, te ćemo sjecištu simedijana dati ime.
Sada ćemo iskazati i dokazati Steinerov teorem i njegov obrat koji su nam potrebni u dokazivanju sljedećih teorema.

Teorem 2.12 (Steinerov teorem[2]). *Sijeku li dvije izogonale kuta pri vrhu A suprotnu stranicu* $\overline{BC}$ *trokuta ABC u točkama* A_1 *i* A_2*, tada vrijedi:*

$$\frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka A_1 bliža točki B od točke A_2. Neka je k kružnica određena točkama A, A_1 i A_2 i neka su D i E sjecišta kružnice k sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, redom. Znamo da je $\angle DAA_2 = \angle EAA_1$ i $\angle DAA_1 = \angle EAA_2$. S obzirom su obodni kutovi kružnice k sukladni slijedi da su i pripadajući kružni lukovi sukladni, tj.:

$$\widehat{DA_2} = \widehat{EA_1} \quad \text{i} \quad \widehat{DA_1} = \widehat{EA}.$$

Dakle, dobivamo:

$$\angle DEA_1 = \angle DA_2A_1 = \angle EDA_2 = \angle EA_1A_2,$$
$$\angle A_2EA_1 = \angle A_2DA_1,$$
$$\angle EA_2D = \angle EA_1D,$$

[1] Philbert Maurice d'Ocagne (1862 - 1938), francuski matematičar
[2] Jakob Steiner (1796.-1863.), švicarski matematičar

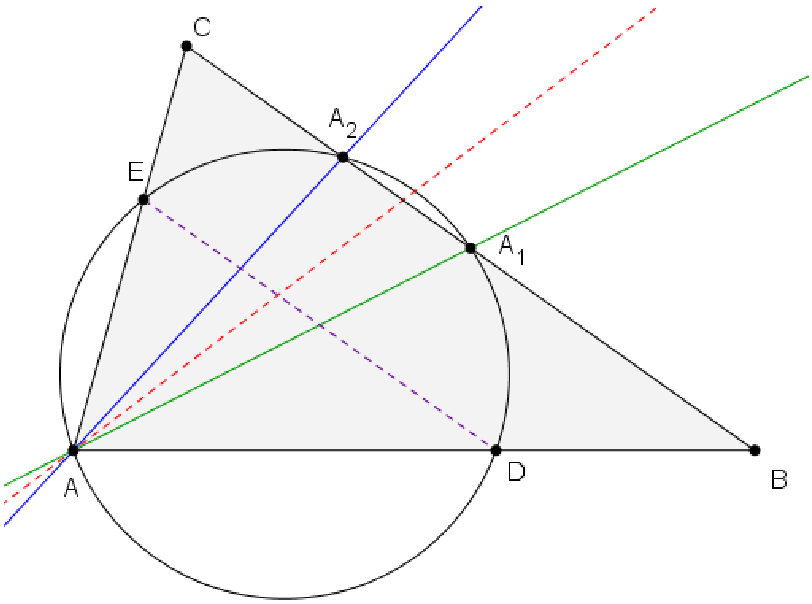
odnosno

$$\begin{aligned}\angle DEA_2 + \angle EA_2A_1 &= \angle DEA_1 + \angle A_2EA_1 + \angle EA_2D + \angle DA_2A_1\\ &= \angle EDA_2 + \angle A_2DA_1 + \angle EA_1D + \angle EA_1A_2\\ &= \angle EDA_1 + \angle DA_1A_2.\end{aligned}$$

S obzirom je zbroj veličina kutova u četverokutu jednak 360° slijedi da je

$$\angle DEA_2 + \angle EA_2A_1 = 180^\circ,$$

odnosno četverokut DA_2A_1E je trapez. Slijedi da su stranice $\overline{DE}$ i $\overline{BC}$ paralelne.



Slika 2.7: Steinerov teorem

S obzirom su pravci DE i BC paralelni, primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, vrijedi:

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}$$

odnosno,

$$\frac{|AB|^2}{|AB| \cdot |BD|} = \frac{|AC|^2}{|AC| \cdot |CE|}.$$

Primjenom potencija točaka B i C u odnosu na kružnicu k dobivamo:

$$|AB| \cdot |BD| = |BA_2| \cdot |BA_1| \quad \text{i} \quad |AC| \cdot |CE| = |CA_2| \cdot |CA_1|.$$

Uvrštavajući u gornju jednakost dobivamo:

$$\frac{|AB|^2}{|BA_2| \cdot |BA_1|} = \frac{|AC|^2}{|CA_2| \cdot |CA_1|},$$

te slijedi tvrdnja teorema:

$$\frac{|BA_2| \cdot |BA_1|}{|CA_2| \cdot |CA_1|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

□

Teorem 2.13 (**Obrat Steinerovog teorema**). *Neka su A_1 i A_2 točke na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC. Ako vrijedi:*

$$\frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \tag{2.2}$$

onda su pravci AA_1 i AA_2 izogonalni.

Dokaz. Neka je k kružnica određena točkama A, A_1 i A_2 i neka su D i E sjecišta kružnice sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, redom. Primjenom potencije točaka B i C u odnosu na kružnicu k dobivamo:

$$|AB| \cdot |BD| = |BA_2| \cdot |BA_1| \quad \text{i} \quad |AC| \cdot |CE| = |CA_2| \cdot |CA_1|\,.$$

Uvrštavajući u jednakost (2.2), dobivamo:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|} = \frac{|AB| \cdot |BD|}{|AC| \cdot |CE|},$$

odnosno

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CE|},$$

tj.

$$\frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CE|}.$$

Primjenom Talesovog teorema o proporcionalnosti slijedi da su pravci ED i BC paralelni. Četverokut EDA_1A_2 je tetivni četverokut, a ujedno i trapez. Preciznije, četverokut EDA_1A_2 je jednakokračan trapez. Dakle, dužina $\overline{DA_1}$ sukladna je dužini $\overline{EA_2}$. Obodni kutovi nad sukladnim tetivama su sukladni, pa vrijedi:

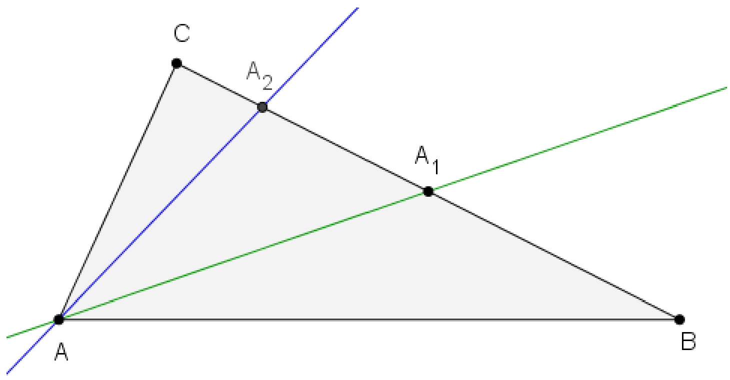
$$\angle EAA_2 = \angle DAA_1.$$

Dakle, pravci AA_1 i AA_2 su izogonalni. □

Teorem 2.14. *Neka je A_2 točka na dužini $\overline{BC}$, takva da je pravac AA_2 simedijana trokuta ABC. Tada vrijedi:*

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Neka je pravac AA_2 simedijana, te neka je A_1 polovište dužine $\overline{BC}$. Tada je dužina $\overline{AA_1}$ težišnica trokuta ABC, pa su pravci AA_1 i AA_2 izogonalni.



Slika 2.8: Osna simetrija težišnice i simedijane

Primjenjujući Steinerov teorem 2.12 vrijedi:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_1||BA_2|}{|CA_1||CA_2|}.$$

S obzirom je dužina $\overline{AA_1}$ težišnica trokuta ABC, vrijedi da je $|BA_1| = |CA_1|$. Sada iz gornje jednakosti slijedi tvrdnja:

$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_2|}{|CA_2|}.$$

□

Teorem 2.15. *Neka je A_2 točka na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC. Ako vrijedi:*

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \tag{2.4}$$

tada je pravac AA_2 simedijana trokuta ABC.

Dokaz. Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Tada je $|BA_1| = |CA_1|$, te vrijedi:

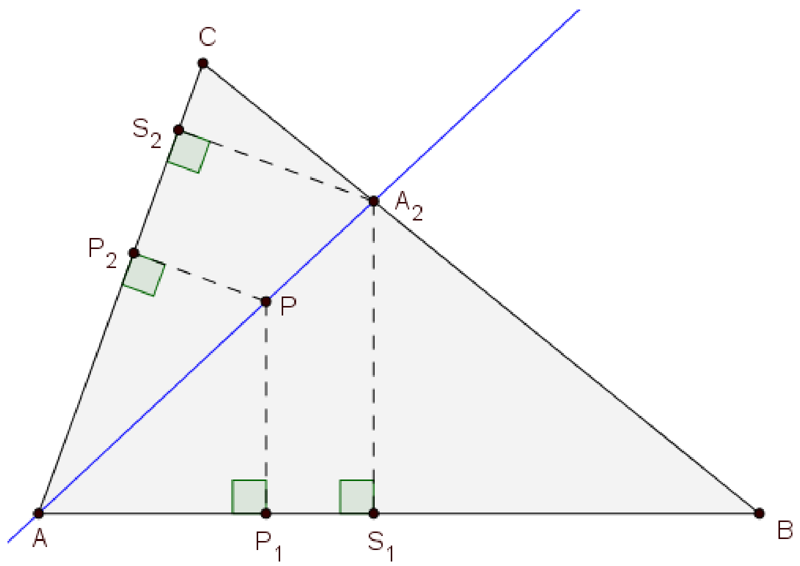
$$\frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|BA_1| \cdot |BA_2|}{|CA_1| \cdot |CA_2|}.$$

Primjenjujući obrat Steinerovog teorema 2.13 zaključujemo da su pravci AA_2 i AA_1 izogonale, pa je prema teoremu 2.10 pravac AA_2 simedijana trokuta ABC. □

Teorem 2.16. *Neka je P točka na simedijani vrha A trokuta ABC. Tada su udaljenosti $|PP_1|$ i $|PP_2|$ do stranica $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AC}$ proporcionalne duljinama tih stranica, odnosno:*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Dokaz. Neka je točka A_2 sjecište simedijane iz vrha A sa stranicom $\overline{BC}$, a točke S_1 i S_2 nožista okomica iz točke A_2 na pravce AB i AC. Promatrajući kutove $\angle BAA_2$ i $\angle CAA_2$, te



Slika 2.9: Omjer udaljenosti točke P na simedijani AA_1 od stranica trokuta

primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|A_2S_1|} = \frac{|AP|}{|AA_2|} \quad \text{i} \quad \frac{|PP_2|}{|A_2S_2|} = \frac{|AP|}{|AA_2|}. \tag{2.5}$$

Izjednačavanjem dobivenih jednakosti slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|A_2S_1|} = \frac{|PP_2|}{|A_2S_2|},$$

odnosno

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2S_1|}{|A_2S_2|}. \tag{2.6}$$

Neka je $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Iz trokuta A_2S_1B, odnosno A_2S_2C dobivamo:

$$|A_2S_1| = |A_2B| \cdot \sin\beta, \tag{2.7}$$

$$|A_2S_2| = |A_2C| \cdot \sin\gamma. \tag{2.8}$$

Primjenjujući sinusov poučak u trokutu ABC slijedi:

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma},$$

odnosno

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{2.9}$$

Prema teoremu 2.14 vrijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \tag{2.10}$$

Uvrštavajući jednakosti (2.7), (2.8), (2.9) u jednakost (2.6) dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2B| \cdot \sin\beta}{|A_2C| \cdot \sin\gamma} = \frac{|A_2B| \cdot |AC|}{|A_2C| \cdot |AB|},$$

odnosno zbog (2.10) slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|^2 \cdot |AC|}{|AC|^2 \cdot |AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

□

Teorem 2.17. *Neka je P točka takva su njene udaljenosti $|PP_1|$ i $|PP_2|$ do stranica $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AC}$ proporcionalne duljinama tih stranica, odnosno takva da vrijedi:*

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Tada točka P pripada simedijani vrha A trokuta ABC.

Dokaz. Neka je A_2 sjecište pravaca AP i BC. Neka su S_1 i S_2 nožišta okomica iz točke A_2 na stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Analogno kao u dokazu teorema 2.16, promatrajući kutove $\angle BAA_2$ i $\angle CAA_2$. te primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, zaključujemo da vrijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2S_1|}{|A_2S_2|}.$$

Primjenom formulu za sinus dobivamo izraze:

$$|A_2S_1| = |A_2B| \cdot \sin\beta \quad \text{i} \quad |A_2S_2| = |A_2C| \cdot \sin\gamma. \tag{2.11}$$

Primjenjujući sinusov poučak u trokutu ABC slijedi:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}. \tag{2.12}$$

Uvrštavajući jednakosti (2.11) i (2.12) dobivamo:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{|A_2B| \cdot \sin\beta}{|A_2C| \cdot \sin\gamma} = \frac{|A_2B| \cdot |AC|}{|A_2C| \cdot |AB|}.$$

Dakle,

$$\frac{|A_2B|}{|A_2C|} \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

tj.

$$\frac{|A_2B|}{|A_2C|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

Prema teoremu 2.15 slijedi da je pravac AA_2 simedijana. Dakle, točka P se nalazi na simedijani. □

Teorem 2.18. *Neka su dani trokut ABC i kvadrati $ACUV$ i $ABST$ nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, s vanjske strane trokuta ABC. Neka je točka P središte opisane kružnice trokuta ATV. Tada je pravac AP simedijana trokuta ABC.*

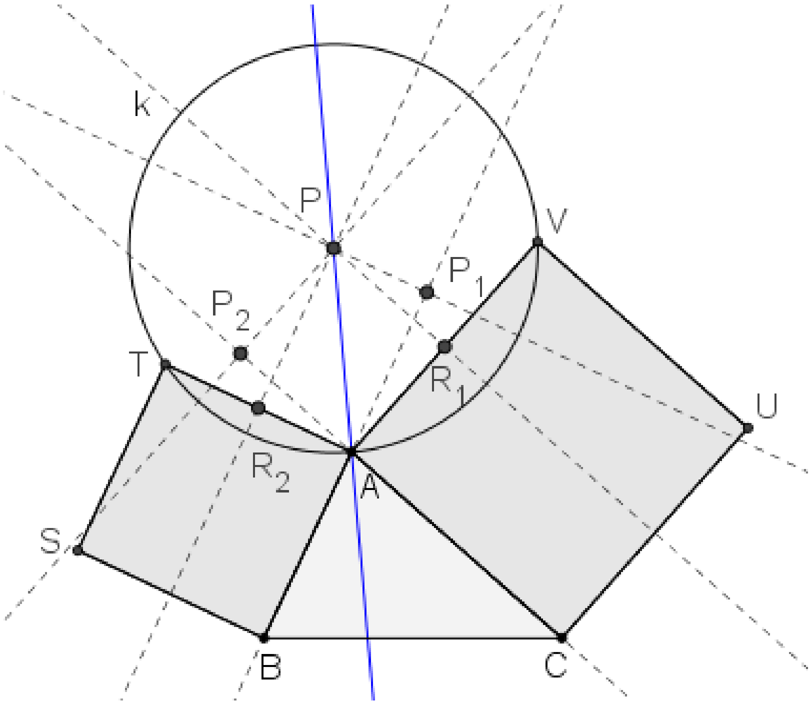
Dokaz. Središte P opisane kružnice trokuta ATV nalazi se na sjecištu simetrala dužina $\overline{AT}$ i $\overline{AV}$. Neka su R_2 i R_1 polovišta dužina $\overline{AT}$ i $\overline{AV}$, a P_1 i P_2 nožišta okomica iz točke P na pravce AB i AC, redom. Četverokuti AP_1PR_2 i AR_1PP_2 su pravokutnici, pa vrijedi:

$$|PP_1| = |R_2A| = \frac{1}{2}|AT| = \frac{1}{2}|AB|,$$
$$|PP_2| = |R_1A| = \frac{1}{2}|AV| = \frac{1}{2}|AC|.$$

Sada slijedi:

$$\frac{|PP_1|}{|PP_2|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{\frac{1}{2}|AC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Prema teoremu 2.17 slijedi da je AP simedijana trokuta ABC. □



Slika 2.10: Teorem 2.18

Poglavlje 3

Lemoineova točka

Glavni cilj ovog rada je istražit svojstva simedijana, ali i definirat Lemoineovu točku, što ćemo učinit u ovom poglavlju.

Teorem 3.1. *Neka su pravci AA_2, BB_2, CC_2 simedijane trokuta ABC. Tada se ta tri pravca sijeku u jednoj točki L.*

Dokaz. Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$. S obzirom su pravci AA_2, BB_2, CC_2 simedijane trokuta ABC možemo koristiti teorem 2.14 po kojem slijedi:

$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{|CB_2|}{|AB_2|} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} = \frac{a^2}{c^2},$$

$$\frac{|AC_2|}{|BC_2|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Množenjem navedenih jednakosti dobivamo:

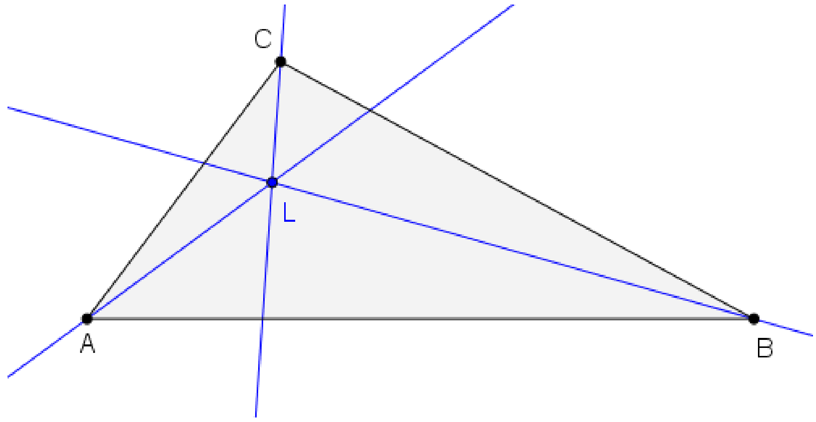
$$\frac{|BA_2|}{|CA_2|} \cdot \frac{|CB_2|}{|AB_2|} \cdot \frac{|AC_2|}{|BC_2|} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1.$$

Po obratu Cevinog teorema 1.2 slijedi da pravci AA_2, BB_2, CC_2 prolaze jednom točkom. Dakle, simedijane trokuta ABC sijeku se u jednoj točki. □

Definicija 3.2. *Točku u kojoj se sijeku simedijane trokuta nazivamo* ***Lemoineova točka****.*

Lemoineova točka dobila je naziv po francuskom matematičaru Emileu Michelu Hyacintheu Lemoineu[1]. Poznat je kao inicijator zanimanja za geometriju trokuta. Diplomirao

[1]Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840. - 1912.), francuski matematičar



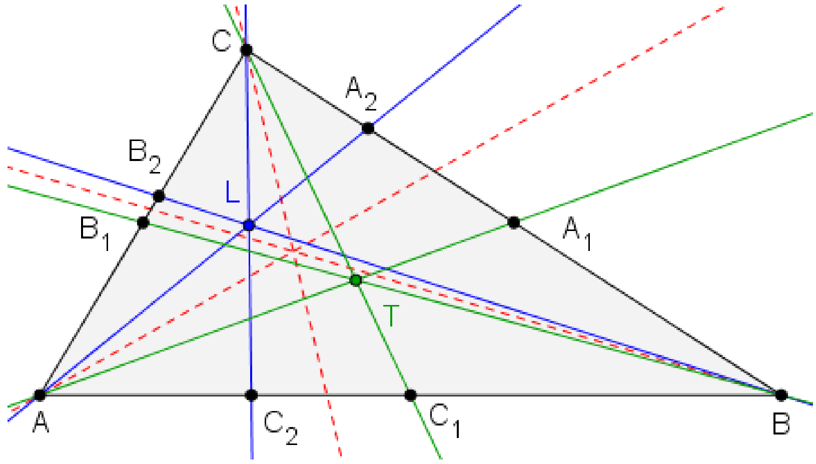
Slika 3.1: Lemoineova točka trokuta ABC

je na Sveučilištu Ècole Polytechnique u Parizu, 1860. Sudjelovao je u francusko-pruskom ratu. Radio je kao inžinjer građevine, a matematikom, posebice geometrijom, i glazbom bavio se amaterski. Bio je jedan od osnivača glazbene grupe *La Trompette*. Od aktivnog matematičkog istraživanja odustao je 1895. godine, te od tada nije objavio niti jedan matematički rezultat.
Lemoine se je bavio istraživanjem pravaca koji prolaze polovištem antiparalela i njihovim sjecištem. Godine 1884. J. Neuberg[2] je nazvao sjecište simedijana Lemoineovom točkom. Međutim, tu točku su ranije spominjali i drugi matematičari, npr. L. Huilier[3] (1809.), Grebe[4](1847.). Neko vrijeme su u Francuskoj tu točku nazivali Lemoineova točka, dok su ju u Njemačkoj nazivali Grebeova točka. Kasnije je Robert Tucker[5] uveo novo ime za sjecište simedijana trokuta, simedijalna točka, koja je široko prihvaćena. Više o Lemoineu i otkrivanju Lemoineove točke može se pronaći u literaturi (vidi [1], [6], [8]).
Lemoineovu točku smo definirali kao sjecište simedijana trokuta ABC, ali možemo ju definirati i na druge načine, što ćemo iskazati sljedećim teoremima.

Teorem 3.3. *Težište T i Lemoineova točka L su izogonalne točke trokuta ABC.*

Dokaz. Znamo da se težišnice sijeku u težištu T. U teoremu 2.10 smo dokazali da su težišnice i simedijane trokuta ABC izogonalne, odnosno simetrične su s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta. U teoremu 2.8 dokazali smo da se pravci simetrični pravcima AT, BT i CT sijeku u jednoj točki, odnosno simedijane se sijeku u jednoj točki. Dakle, težište T i Lemoineova točka L su izogonalne točke trokuta ABC. □

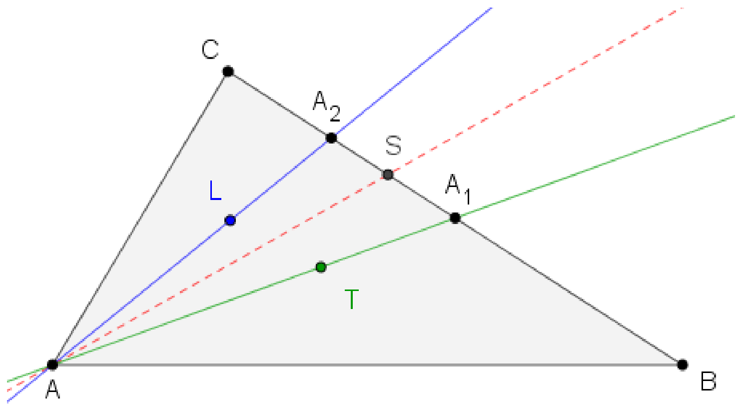
[2]Joseph Jean Baptiste Neuberg (1840. - 1926.), luksemburški matematičar
[3]Simon Antoine Jean L'Huilier (1750. - 1840.), švicarski matematičar
[4]Ernst Wilhelm Grebe (1804. - 1874.), njemački matematičar
[5]Robert Tucker (1832. - 1905.), engleski matematičar



Slika 3.2: Težište i Lemoineova točka su izogonalne točke trokuta

Teorem 3.4. *Neka je T težište i L Lemoineova točka trokuta ABC. Tada vrijedi:*

$$\begin{aligned} \angle BAL &= \angle CAT \\ \angle CAL &= \angle BAT \\ \angle CBL &= \angle ABT \\ \angle ABL &= \angle CBT \\ \angle ACL &= \angle BCT \\ \angle BCL &= \angle ACT. \end{aligned} \tag{3.1}$$



Slika 3.3: Teorem 3.4

Dokaz. Neka je A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, a A_2 točka u kojoj simedijana AL siječe stranicu $\overline{BC}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka A_1 bliža točki B od točke A_2. Točka T pripada težišnicama, a točka L pripada simedijanama trokuta ABC. U teoremu 2.10 dokazali smo da su pravac kojem pripada težišnica i simedijana nekog vrha trokuta ABC simetrične s obzirom na simetralu odgovarajućeg kuta, odnosno da su ta dva pravca izogonale odgovarajućeg kuta trokuta. Dakle pravac kojem pripada težišnica i simedijana trokuta zatvaraju sa simetralom odgovarajućeg kuta jednake kutove.
Promatrat ćemo kut $\angle CAB$ (slika 3.3). Neka je točka S sjecište pravca BC i simetrale kuta u vrhu A (vidi sliku 3.3). Tada dobivamo:

$$\angle BAL = \angle BAS + \angle SAL = \angle CAS + \angle SAT = \angle CAT,$$

$$\angle CAL = \angle CAS - \angle LAS = \angle BAS - \angle TAS = \angle BAT.$$

Na analogan način dobiju se preostale jednakosti. □

Poglavlje 4

Svojstva Lemoineove točke

Do sada je otkriveno mnogo svojstava Lemoineove točke, a u ovom ćemo poglavlju iskazat i dokazat neka od njih. Više o iskazanim teoremima nalazi se u literaturi (vidi [1], [2], [4], [7], [9]).

Teorem 4.1. *Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a d_a, d_b i d_c udaljenosti točke L do stranica a, b i c trokuta ABC, redom. Ako je L Lemoineova točka unutar danog trokuta ABC tada su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama pripadnih stranica tog trokuta, tj. vrijedi:*

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

Dokaz. U teoremu 2.16 dokazali smo da su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama stranica tog trokuta, pa vrijedi:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

Odnosno, kao produženi omjer dobivamo izraz:

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

□

Teorem 4.2. *Neka su a, b i c duljine stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a d_a, d_b i d_c udaljenosti točke L do stranica a, b i c trokuta ABC, redom. Ako je L točka unutar danog trokuta ABC takva da su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama pripadnih stranica tog trokuta, tj. da vrijedi:*

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c,$$

tada je L Lemoineova točka trokuta ABC.

Dokaz. Iz produženog omjera slijedi:

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

U teoremu 2.17 dokazali smo da se točka trokuta čije su udaljenosti do stranica proporcionalne duljinama stranica tog trokuta nalazi na simedijani. Iz gornjih jednakosti slijedi da se točka L nalazi na svakoj simedijani, dakle nalazi se na sjecištu simedijana, odnosno L je Lemoineova točka. □

Teorem 4.3. *Udaljenosti d_a, d_b i d_c Lemoineove točke L od stranica a, b i c danog trokuta ABC dane su jednakostima:*

$$d_a = \frac{a^2 v_a}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d_b = \frac{b^2 v_b}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$d_c = \frac{c^2 v_c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Dokaz. Prema teoremu 4.1 vrijedi:

$$\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c},$$

odakle proširivanjem dobivamo:

$$\frac{ad_a}{a^2} = \frac{bd_b}{b^2} = \frac{cd_c}{c^2}.$$

Koristeći svojstvo razmjera slijedi:

$$\frac{ad_a + bd_b + cd_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{ad_a}{a^2} = \frac{d_a}{a}. \tag{4.1}$$

Trokut ABC možemo podijeliti na tri trokuta BCL, ACL i ABL. Površinu trokuta ABC možemo prikazati kao zbroj površina trokuta BCL, ACL i ABL, te dobivamo:

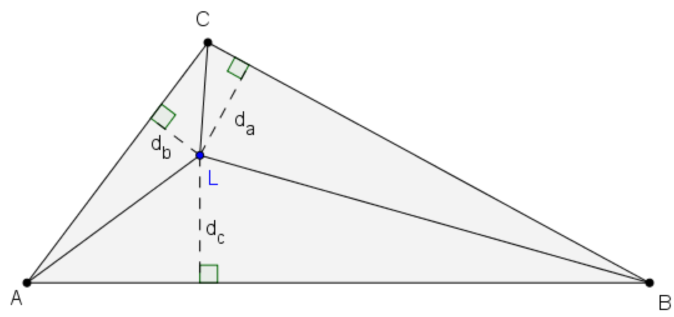
$$P_{ABC} = \frac{ad_a}{2} + \frac{bd_b}{2} + \frac{cd_c}{2},$$

odnosno

$$2P_{ABC} = ad_a + bd_b + cd_c.$$

Uvrštavajući u jednakost (4.1) vrijedi:

$$\frac{2P_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{d_a}{a},$$



Slika 4.1: Udaljenost Lemoineove točke L trokuta ABC do njegovih stranica

odnosno

$$d_a = \frac{2aP_{ABC}}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Površinu trokuta ABC možemo izračunati i kao $P = \frac{av_a}{2}$, pa slijedi:

$$d_a = \frac{a^2 v_a}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Na analogan način možemo odrediti i preostale udaljenosti, d_b i d_c. □

Teorem 4.4. *Neka je dan pravokutan trokut. Udaljenost Lemoineove točke L od hipotenuze jednaka je polovini duljine visine na hipotenuzu.*

Dokaz. Neka je točka C vrh pravog kuta trokuta ABC. Neka su duljine kateta a i b, a duljina hipotenuze c, te duljina visine na hipotenuzu v_c. U pravokutnom trokutu ABC možemo primijeniti Pitagorin poučak, pa vrijedi da je $c^2 = a^2 + b^2$. Iz prethodnog teorema, 4.3, vrijedi

$$d_c = \frac{c^2 v_c}{a^2 + b^2 + c^2},$$

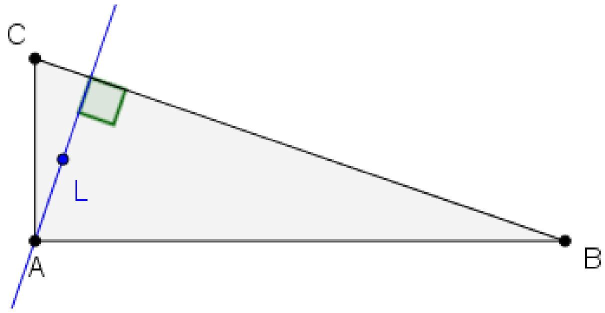
te uvrštavajući gornju jednakost slijedi:

$$d_c = \frac{c^2 v_c}{c^2 + c^2} = \frac{c^2 v_c}{2c^2},$$

odnosno

$$d_c = \frac{v_c}{2}.$$

Dakle, dobili smo da je udaljenost d_c Lemoineove točke L do stranice c jednaka polovini duljine visine v_c iz vrha C na stranicu c. □

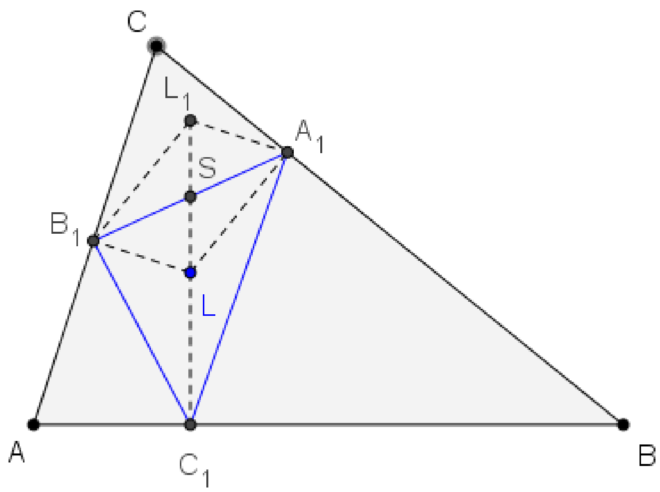


Slika 4.2: Udaljenost Lemoineove točke L pravokutnog trokuta ABC do hipotenuze

Definicija 4.5. *Neka je točka P unutar trokuta ABC. Trokut $A_1B_1C_1$ kojemu su vrhovi nožišta okomica spuštenih iz neke točke P na stranice danog trokuta ABC, zovemo* ***nožišnim*** *ili* ***pedalnim trokutom*** *pola P s obzirom na dani trokut ABC.*

Teorem 4.6. *Nožišni trokut Lemoineove točke L je trokut kojemu je točka L težište.*

Dokaz. Neka je dan trokut ABC, te neka je L Lemoineova točka, a trokut $A_1B_1C_1$ nožišni trokut točke L. Neka je točka L_1 u ravnini takva da je četverokut $LA_1L_1B_1$ paralelogram. Dijagonale paralelograma se međusobno raspolavljaju, te sa S označimo njihovo sjecište. S obzirom je četverokut $LA_1L_1B_1$ paralelogram, nasuprotne stranice su jednakih duljina,



Slika 4.3: Lemoineova točka L trokuta ABC je težište nožišnog trokuta $A_1B_1C_1$

odnosno $|LB_1| = |A_1L_1|$. Prema teoremu 2.16 vrijedi:

$$\frac{|LA_1|}{|LB_1|} = \frac{|BC|}{|AC|},$$

odnosno

$$\frac{|LA_1|}{|A_1L_1|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Nadalje, vrijedi da je $LA_1 \perp BC$ i $LB_1 \perp AC$. S obzirom su u paralelogramu nasuprotne stranice paralelne, vrijedi $A_1L_1 \perp AC$. Kutovi $\angle ACB$ i $\angle L_1A_1L$ imaju okomite krakove, pa su sukladni, tj.

$$\angle ACB = \angle LA_1L_1.$$

Trokuti ABC i L_1LA_1 su slični po SKS teoremu o sličnosti trokuta. S obzirom su dva para odgovarajućih stranica tih sličnih trokuta međusobno okomite, moraju i preostale stranice biti međusobno okomite, odnosno $AB \perp LL_1$. Kako je $AB \perp LL_1$, točke C_1, L i L_1 su kolinearne. Točka S je sjecište dijagonala paralelograma $LA_1L_1B_1$, odnosno polovište dužine $\overline{A_1B_1}$. Slijedi da je dužina $\overline{C_1S}$ težišnica trokuta $A_1B_1C_1$. Na analogan način dokazali bismo da i preostale težišnice trokuta $A_1B_1C_1$ prolaze Lemoineovom točkom L. Dakle, točka L je težište trokuta $A_1B_1C_1$. □

Teorem 4.7. *Neka je T težište i L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka su D, E i F sjecišta pravaca AT, BT i CT s opisanom kružnicom trokuta ABC. Neka su D_1, E_1 i F_1 sjecišta simedijana AL, BL i CL s opisanom kružnicom trokuta ABC. Tada vrijedi:*

$$DD_1 \parallel BC, \quad EE_1 \parallel CA, \quad FF_1 \parallel AB.$$

Dokaz. U teoremu 3.4 dokazali smo da vrijedi jednakost $\angle CAL = \angle BAT$, odnosno da vrijedi $\angle CAD_1 = \angle BAD$. S obzirom su obodni kutovi nad jednakim lukovima jednaki, vrijedi:

$$\angle CAD_1 = \angle CDD_1 \text{ i } \angle BAD = \angle BCD,$$

te slijedi:

$$\angle CDD_1 = \angle DCB.$$

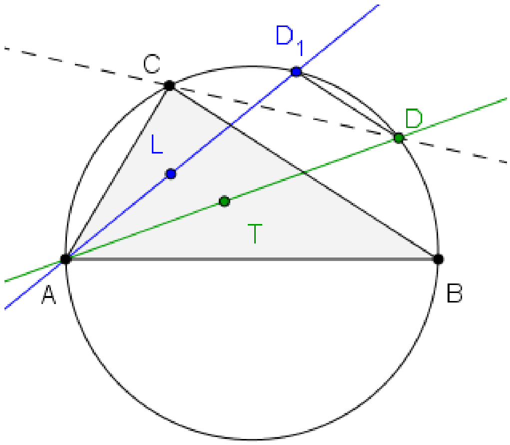
Pravac CD je transverzala pravaca AB i D_1D. Dokazali smo da je $\angle CDD_1 = \angle DCB$, pa slijedi da su pravci BC i DD_1 paralelni.
Time smo dokazali teorem, odnosno da vrijedi:

$$DD_1 \parallel BC,$$

a analogno se pokaže i:

$$EE_1 \parallel CA, \quad FF_1 \parallel AB.$$

□

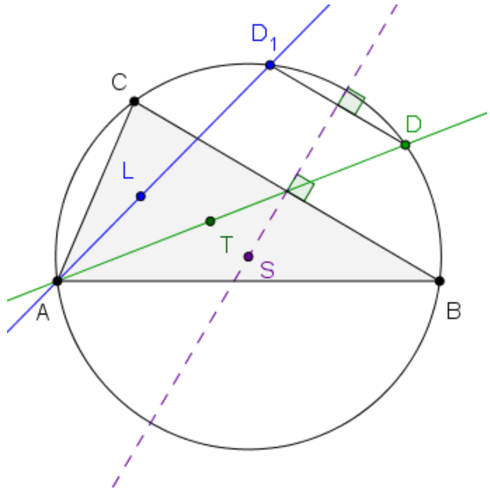


Slika 4.4: Teorem 4.7

Dakle, Lemoineovu točku trokuta možemo konstruirati i bez antiparalela, težišnica i težišta, tako da kao na slici 4.4 konstruiramo pravac AA_1 kojem pripada težišnica te presječemo s opisanom kružnicom trokuta, a zatim konstruiramo paralelu s nasuprotnom stranicom $\overline{BC}$ te presječemo s opisanom kružnicom, da bismo dobili točku D_1. Tada dobivamo simedijanu AD_1. Tako ponovimo i za preostale vrhove trokuta, te dobivamo Lemoineovu točku, kao sjecište tih pravaca.

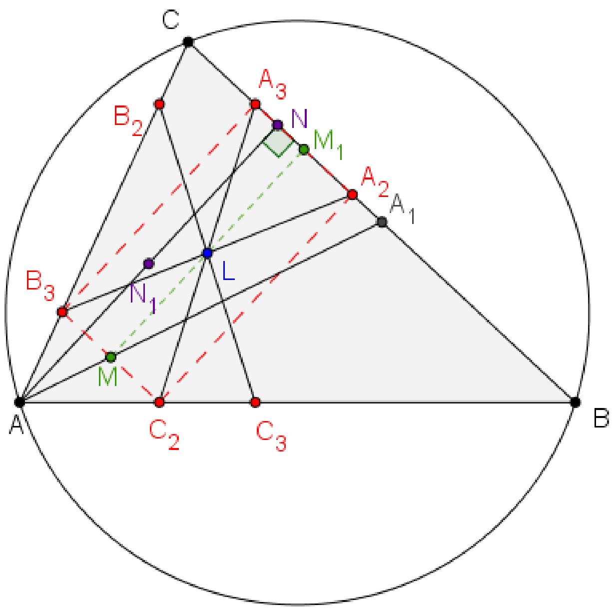
Teorem 4.8. *Neka je T težište i L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka su D, E i F sjecišta težišnica AT, BT i CT s opisanom kružnicom trokuta ABC. Neka su D_1, E_1 i F_1 sjecišta simedijana AL, BL i CL s opisanom kružnicom trokuta ABC. Simetrale dužina $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ su istovremeno simetrale dužina $\overline{DD_1}$, $\overline{EE_1}$ i $\overline{FF_1}$.*

Dokaz. U teoremu 4.7 dokazali smo da vrijedi da je $DD_1 \parallel BC$. Još moramo dokazati da se simetrale dužina $\overline{DD_1}$ i $\overline{BC}$ podudaraju. Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ta je točka središte tom trokutu opisane kružnice. Označimo sa S središte opisane kružnice k trokuta ABC. Dakle, točka S pripada simetrali dužine $\overline{BC}$.
Dužina $\overline{DD_1}$ je tetiva kružnice k. Simetrala tetive prolazi kroz središte kružnice. Slijedi da točka S pripada i simetrali dužine $\overline{DD_1}$.
U teoremu 4.7 dokazali smo da su dužine $\overline{DD_1}$ i $\overline{BC}$ paralelne, pa vrijedi da su i simetrale tih dužina međusobno paralelne. Dakle, simetrale dužina $\overline{DD_1}$ i $\overline{BC}$ su paralelne i prolaze istom točkom S, pa slijedi da se podudaraju.
Analogno se dokaže da simetrale dužina $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ su istovremeno simetrale dužina $\overline{EE_1}$ i $\overline{FF_1}$, redom. □



Slika 4.5: Teorem 4.8

Teorem 4.9. *Neka je $\overline{AN}$ visina, točka N_1 polovište dužine $\overline{AN}$, a točka A_1 polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC. Tada Lemoineova točka L trokuta ABC pripada pravcu A_1N_1.*



Slika 4.6: Teorem 4.9

Dokaz. U trokutu ABC konstruirajmo antiparalele $\overline{C_3B_2}$, $\overline{C_2A_3}$, $\overline{A_2B_3}$ kojima pripada Le-

moineova točka L, kao na slici 4.6. S obzirom točka L raspolavlja antiparalele, četverokut $C_2B_3A_3A_2$ je paralelogram, a Lemoineova točka je sjecište dijagonala. Neka je A_1 polovište dužine $\overline{BC}$. Neka težišnica $\overline{AA_1}$ siječe dužinu $\overline{C_2B_3}$ u točki M. Dužina $\overline{C_2B_3}$ je paralelna s dužinom $\overline{BC}$, pa slijedi da je točka M polovište dužine $\overline{C_2B_3}$. Neka je M_1 polovište dužine $\overline{A_2A_3}$. Tada je točka L polovište dužine $\overline{MM_1}$.
Homotetijom, s centrom u točki A_1 dužina $\overline{MM_1}$ preslikava se u dužinu $\overline{AN}$, odnosno polovište L dužine $\overline{MM_1}$ preslikava se u polovište N_1 dužine $\overline{AN}$. Dakle, Lemoineova točka L trokuta ABC pripada pravcu A_1N_1. □

Na analogan način dokaže se da Lemoineova točka L pripada preostalim pravcima koji spajaju polovišta stranica trokuta ABC s polovištima visina iz suprotnog vrha, te proizlazi slijedeći teorem.

Teorem 4.10. *Pravci koji spajaju polovišta stranica danog trokuta ABC s polovištima visina iz nasuprotnih vrhova sijeku se u Lemoineovoj točki L.*

Dakle, Lemoineovu točku možemo konstruirati na još jedan način, tako da spojimo polovišta stranica danog trokuta s polovištima visina iz suprotnog vrha i pronađemo sjecište.

Lemoineovu točku možemo konstruirati na još jedan način. U teoremu 2.6 dokazali smo da su pravci AD, BE i CF simedijane trokuta, a znamo da se one sijeku u Lemoineovoj točki. Prema teoremu 1.9 slijedi da se pravci AD, BE i CF sijeku u Gergonneovoj točki, odnosno Lemoineova točka trokuta ABC je zapravo Gergonneova točka njemu tangencijalnog trokuta

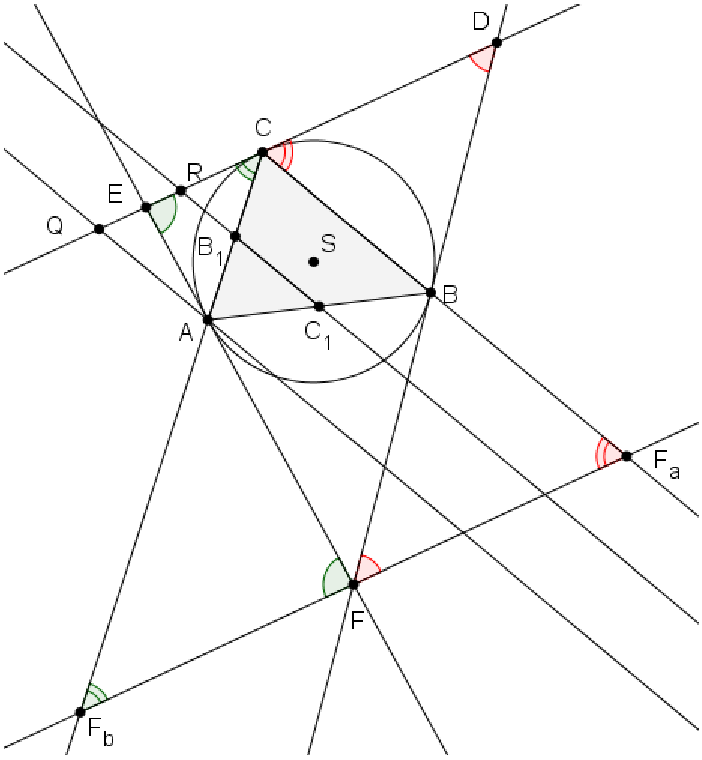
Teorem 4.11. *Neka je DEF tangencijalni trokut trokuta ABC. Neka su točke B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, i neka je R sjecište pravaca B_1C_1 i DE. Tada vrijedi:*

$$AR \parallel CF.$$

Dokaz. U teoremu 2.6 dokazali smo da su pravci AD, BE i CF simedijane trokuta, a znamo da se one sijeku u Lemoineovoj točki. Primjenjujući Cevin teorem 1.1 na trokut DEF dobivamo:

$$\frac{|EA|}{|AF|} \cdot \frac{|FB|}{|BD|} \cdot \frac{|DC|}{|CE|} = 1. \tag{4.2}$$

Neka su točke F_a i F_b sjecišta pravca koji je paralelan s pravcem DE i prolazi točkom F i pravaca BC, odnosno CA. Tada je pravac F_aF_b paralelan s pravcem DE. Iz dokaza teorema 2.3 slijedi da je točka F polovište dužine $\overline{F_aF_b}$. Neka je Q sjecište pravca DE i pravca koji je paralelan s pravcem BC i sadrži točku A. Neka su B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, pa je dužina $\overline{B_1C_1}$ je srednjica trokuta ABC i vrijedi da je dužina $\overline{B_1C_1}$



Slika 4.7: Teorem 4.11

paralelna sa stranicom $\overline{BC}$. S obzirom je $AQ \parallel BC$, vrijedi da je i $B_1C_1 \parallel AQ$, tj. $RB_1 \parallel AQ$. Točku B_1 definirali smo kao polovište stranice $\overline{AC}$, pa slijedi da je dužina $\overline{RB_1}$ srednjica trokuta ACQ, tj. :

$$|CR| = |QR|.$$

Dakle, točka R je polovište dužine $\overline{QC}$. Promatrajući stranice trokuta F_aF_bC i trokuta QCA dobivamo:

$$F_aF_b \parallel QC, \quad F_bC \parallel AC \quad \text{i} \quad F_aC \parallel AQ.$$

Odnosno, odgovarajuće stranice trokuta F_aF_bC i trokuta QCA su paralelne, pa su trokuti F_aF_bC i QCA homotetični, s centrom homotetije u točki M, pri čemu je M sjecište pravaca F_aQ i CA. Točke F_a, F_b i C se tom homotetijom preslikavaju u točke Q, C i A, redom, a polovište F dužine $\overline{F_aF_b}$ se preslikava u polovište R dužine $\overline{QC}$. Drugim riječima, pravac CF se homotetijom preslikava u pravac AR, odnosno dokazali smo:

$$AR \parallel CF.$$

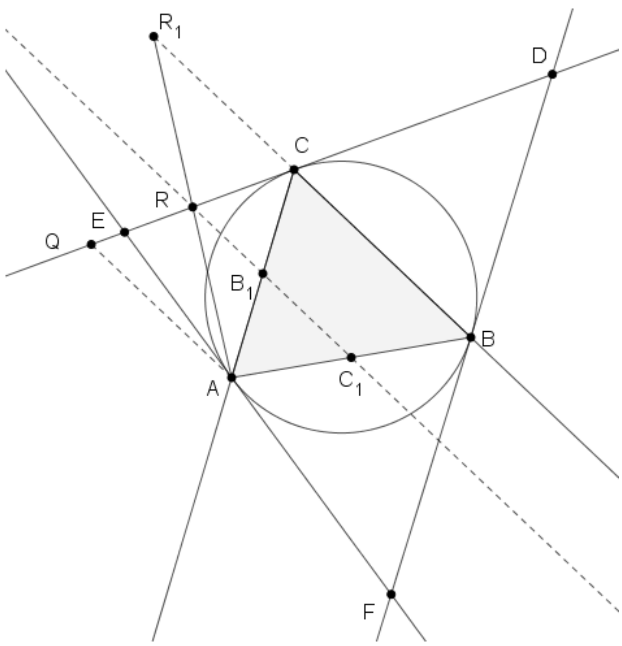
□

Teorem 4.12. *Neka je trokut DEF tangencijalni trokut trokuta ABC. Neka su točke B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, i neka je R sjecište pravaca B_1C_1 i DE, a R_1 centralnosimetrična točka točki A s obzirom na točku R. Tada točke R_1, C i B pripadaju istom pravcu.*

Dokaz. U dokazu teorema 4.11 dokazali smo da je točka R polovište dužine $\overline{QC}$, pri čemu je Q sjecište pravca DE i pravca koji je paralelan s pravcem BC i sadrži točku A, odnosno vrijedi da su i točke C i Q centralnosimetrične s obzirom na točku R. Dakle, vrijedi:

$$|AR| = |R_1R| \quad \text{i} \quad |QR| = |CR|,$$

odnosno četverokutu ACR_1Q se međusobno raspolavljaju dijagonale, pa slijedi da je četverokut ACR_1Q paralelogram.

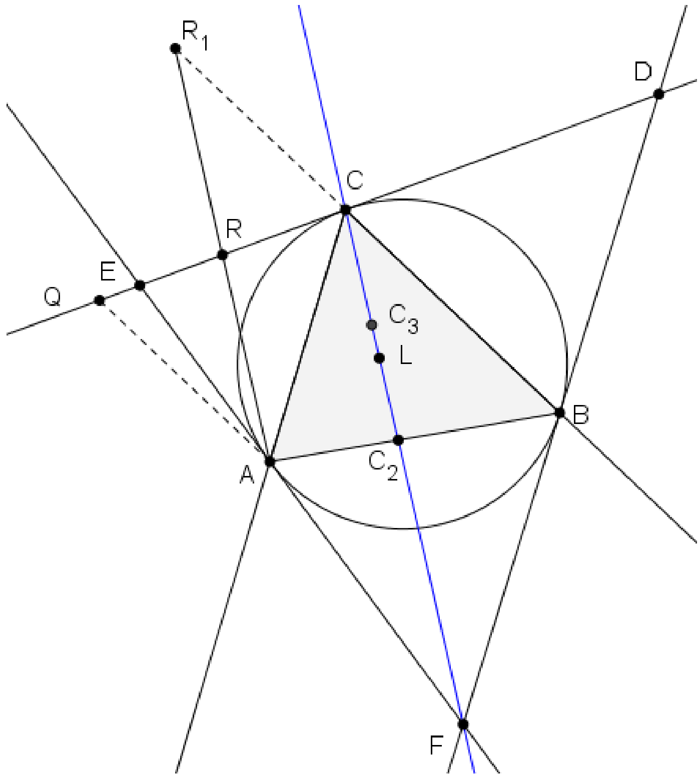


Slika 4.8: Teorem 4.12

Nasuprotne stranice paralelograma su paralelne, odnosno pravac QA je paralelan s pravcem R_1C. Prema definiciji točke Q slijedi da je pravac QA paralelan i s pravcem BC, odakle slijedi da točke R_1, C i B pripadaju istom pravcu. □

Teorem 4.13. *Neka je trokut DEF tangencijalni trokut trokuta ABC s Lemoineovom točkom L. Neka su točke B_1 i C_1 polovišta stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC, i neka je R sjecište pravaca B_1C_1 i DE. Neka je točka C_2 sjecište simedijane CL i stranice $\overline{AB}$, a točka C_3 polovište dužine $\overline{CC_2}$. Tada točke R, C_3 i B pripadaju istom pravcu.*

Dokaz. Neka je R_1 centralnosimetrična točka točki A s obzirom na točku R. Prema teoremu 2.6 pravac CF prolazi Lemoineovom točkom L trokuta ABC, odnosno točke C, F i L su kolinearne. U teoremu 4.11 dokazali smo da je pravac AR paralelan s pravcem CF, odnosno vrijedi da je pravac AR_1 paralelan s pravcem CF. Kako je pravac AR_1 paralelan s pravcem C_2C postoji homotetija sa središtem u točki B koja preslikava dužinu $\overline{AR_1}$ u dužinu $\overline{C_2C}$, a polovište R dužine $\overline{AR_1}$ u polovište C_3 dužine $\overline{CC_2}$. Dakle, točke R, C_3 i B pripadaju istom pravcu.

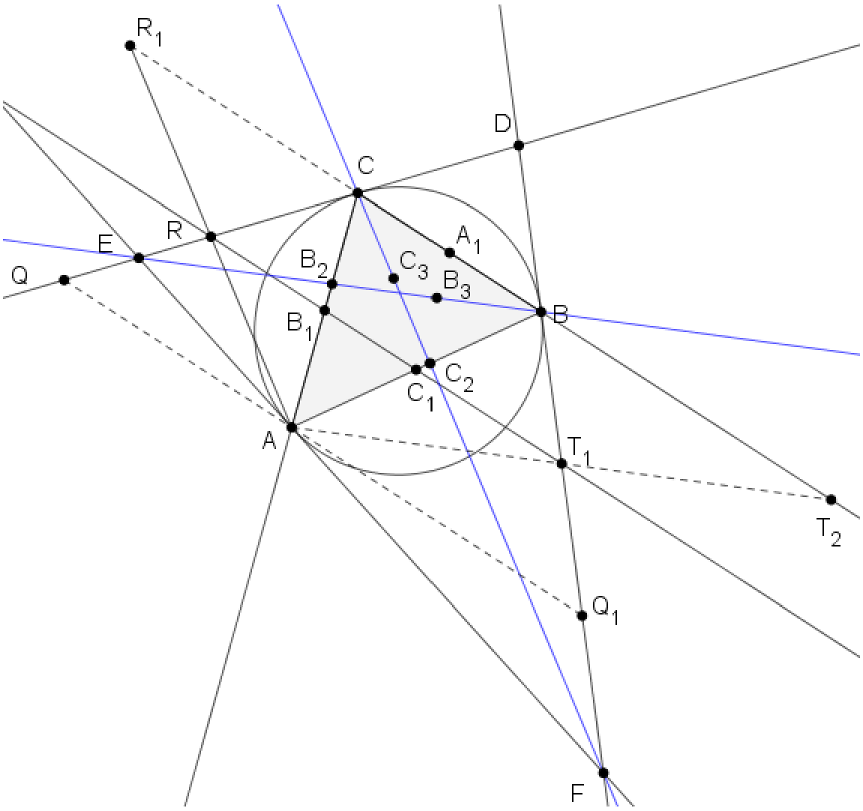


Slika 4.9: Teorem 4.13

□

Teorem 4.14. *Neka je L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka simedijane BL i CL trokuta ABC sijeku dužine $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama B_2 i C_2, redom i neka su B_3 i C_3 polovišta dužina $\overline{BB_2}$ i $\overline{CC_2}$. Tada su pravci BC_3 i CB_3 međusobno simetrični s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$.*

Dokaz. Da bismo dokazali ovaj teorem, koristit ćemo tangencijalni trokut DEF. Neka je A_1 polovište dužine $\overline{BC}$, B_1 polovište dužine $\overline{CA}$ i C_1 polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je R sjecište



Slika 4.10: Teorem 4.14

pravaca B_1C_1 i DE, R_1 centralnosimetrična točka točki A s obzirom na točku R, a točka Q sjecište pravca DE i pravca koji je paralelan s pravcem BC i sadrži točku A.[4] U dokazu teorema 4.13 dokazali smo da točka R_1 pripada pravcu BC.

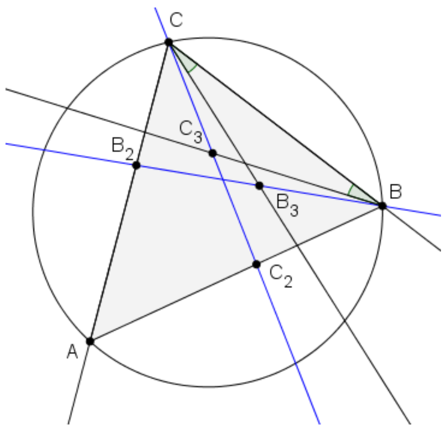
Neka je T_1 sjecište pravaca B_1C_1 i FD, točka Q_1 sjecište pravca FD i pravca koji je paralelan s pravcem BC i prolazi točkom A, te neka je točka T_2 centralnosimetrična točki A s obzirom na točku T_1. Točka C_1 je polovište stranice $\overline{AB}$, a $\overline{C_1B_1}$ je srednjica trokuta ABC, pa slijedi da je pravac B_1C_1 paralelan s pravcem BC i AQ_1, odnosno pravac C_1T_1 je paralelan s pravcem AQ_1. Tada slijedi da je $\overline{C_1T_1}$ srednjica trokuta AQ_1B, tj. točka T_1 je polovište dužine $\overline{Q_1B}$.

Prema definiciji točke T_2 slijedi da je T_1 polovište dužine $\overline{AT_2}$. Dakle, T_1 je polovište dužine $\overline{Q_1B}$ i $\overline{AT_2}$, pa je četverokut AQ_1T_2B paralelogram. Sada slijedi da se homotetijom s centrom u C polovište B_3 dužine $\overline{B_2B}$ preslikava u polovište T_1 dužine $\overline{AT_2}$. Dakle, točke C, B_3 i T_1 pripadaju istom pravcu. U teoremu 4.13 dokazali smo da točke R, C_3 i B pripadaju istom pravcu. Da bismo dokazali tvrdnju teorema, moramo dokazati da su pravci RB i T_1C međusobno simetrični s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$.

Točke B i C su međusobno simetrične s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$, kao i točke B_1 i C_1. Opisana kružnica trokutu ABC se tom osnom simetrijom preslikava sama u sebe. Tangenta na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki B se preslikava u tangentu na opisanu kružnicu trokuta ABC u točki C. Drugim riječima, pravac FD se preslikava u pravac DE.

Točka T_1 je sjecište pravaca B_1C_1 i FD, a točka R je sjecište pravaca B_1C_1 i DE, odnosno točka T_1 se osnom simetrijom preslikava u točku R, pri čemu je os simetrije simetrala kuta $\angle CDB$. S obzirom se i točka C preslikava istom osnom simetrijom u točku B vrijedi da se i pravac T_1C preslikava tom osnom simetrijom u pravac RB. Dakle, dokazali smo tvrdnju teorema, da su pravci RB i T_1C simetrični s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$. □

Teorem 4.15. *Neka je L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka simedijane BL i CL trokuta ABC sijeku dužine $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama B_2 i C_2, i neka su B_3 i C_3 polovišta dužina $\overline{BB_2}$ i $\overline{CC_2}$. Tada vrijedi $\angle BCB_3 = \angle CBC_3$.*



Slika 4.11: Teorem 4.15

Dokaz. U teoremu 4.14 dokazali smo da se pravac CB_3 osnom simetrijom s obzirom na simetralu dužine $\overline{BC}$ preslikava u pravac BC_3, a pravac BC se preslikava sam u sebe. Dakle, dobivamo:

$$\angle(BC, CB_3) = \angle(BC, BC_3)\,.$$

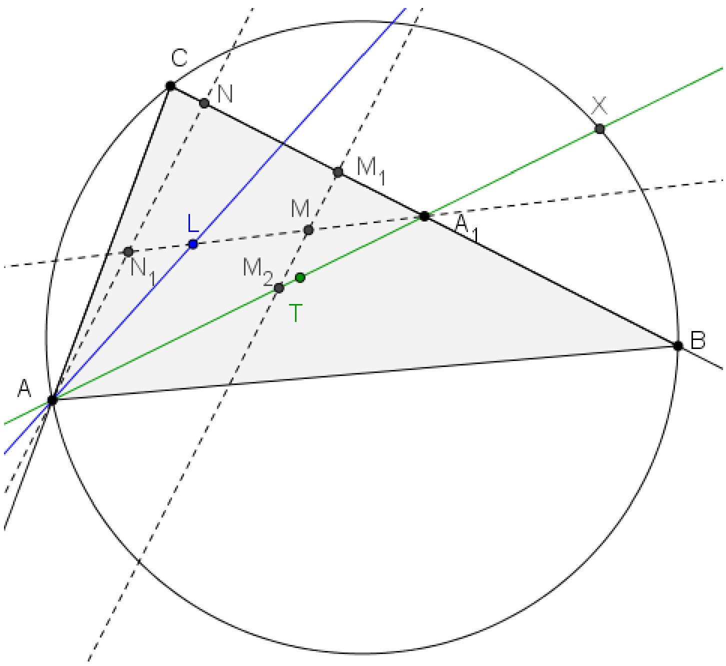
Drugim riječima, dokazali smo tvrdnju teorema, odnosno da vrijedi:

$$\angle BCB_3 = \angle CBC_3.$$

□

Teorem 4.16. *Neka je točka A_1 polovište dužine $\overline{BC}$, točka T težište, a točka L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka je J točka na pravcu TL koja dijeli dužinu $\overline{TL}$ u omjeru $\frac{|TJ|}{|JL|} = \frac{2}{3}$. Neka je X sjecište pravca AA_1 i opisane kružnice trokuta ABC (različito od točke A), točka U ortogonalna projekcija točke X na pravac BC, a točka U_1 centralno simetrična točka točki U s obzirom na točku X.*
Tada pravac AU_1 prolazi točkom J i prepolavlja dužinu $\overline{LA_1}$.

Dokaz. Jasno je da točke A, T, A_1 i X pripadaju istom pravcu.
Neka je točka M polovište dužine $\overline{LA_1}$. Tada je Lemoineova točka, L, centralno simetrična točka točki A_1 s obzirom na točku M.
Neka je točka N nožište visine iz vrha A trokuta ABC, a točka N_1 polovište dužine $\overline{AN}$. U teoremu 4.9 dokazali smo da Lemoineova točka L pripada pravcu A_1N_1, pa možemo zaključiti da točke L, A_1, N_1 i M pripadaju istom pravcu.



Slika 4.12: Teorem 4.16

Neka je točka M_1 nožište okomice iz točke M na pravac BC, a točka M_2 sjecište te okomice i pravca AA_1. S obzirom je točka N nožište visine iz vrha A trokuta ABC, pravac AN je okomit na pravac BC. Također, i pravac M_2M_1 je okomit na pravac BC. Dakle, $AN \parallel M_2M_1$. Koristeći Talesov teorem o proporcionalnosti dobivamo:

$$\frac{|M_2M|}{|MM_1|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|}.$$

Prema definiciji, točka N_1 je polovište dužine $\overline{AN}$, pa vrijedi:

$$\frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1, \quad \text{odnosno} \quad \frac{|M_2M|}{|MM_1|} = 1.$$

Dakle, točka M je polovište dužine $\overline{M_2M_1}$. Odnosno, točka M_2 je centralno simetrična točki M_1 s obzirom na točku M. Kao što smo već spomenuli, točka L je centralno simetrična točki A_1 s obzirom na točku M. Centralnom simetrijom se pravac preslikava u njemu paralelan pravac, pa vrijedi:

$$LM_2 \parallel A_1M_1, \quad \text{odnosno} \quad LM_2 \parallel BC.$$

Neka je X_1 sjecište simedijane AL trokuta ABC i opisane kružnice tog trokuta. Prema teoremima 4.7 i 4.8, vrijedi $XX_1 \parallel BC$ i simetrala dužine $\overline{BC}$ je ujedno i simetrala dužine $\overline{XX_1}$. Neka je točka G_1 ortogonalna projekcija točke X_1 na pravac BC. Pravci AN, XU i X_1G_1 su okomiti na dužinu $\overline{BC}$, odnosno pravci su međusobno paralelni:

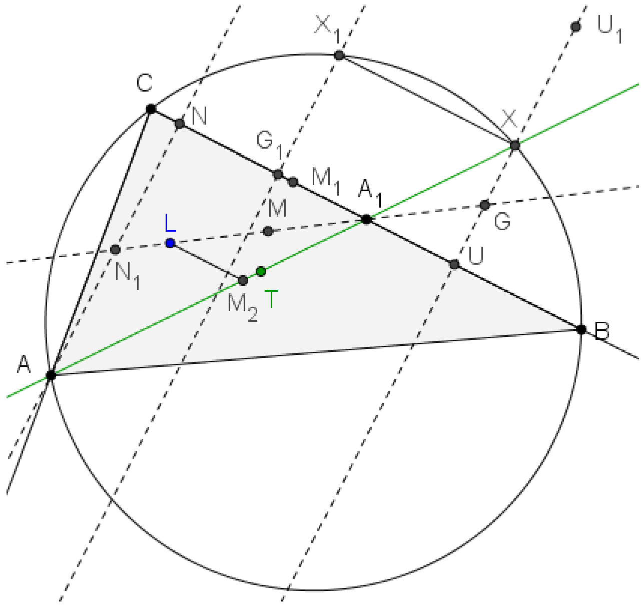
$$AN \parallel XU \parallel X_1G_1.$$

Iz teorema 4.9 znamo da točke L, A_1 i N_1 pripadaju istom pravcu.
Neka je G sjecište tog pravca i pravca XU. S obzirom je $AN \parallel XU$, primjenjujući Talesov teorem o proporcionalnosti, dobivamo:

$$\frac{|XG|}{|GU|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1.$$

Dakle, točka G je polovište dužine $\overline{XU}$.
S obzirom je $XX_1 \parallel UG_1$ i $XU \parallel X_1G_1$, četverokut XX_1G_1U je paralelogram. Preciznije četverokut XX_1G_1U je pravokutnik, jer je $X_1G_1 \perp BC$, odnosno $\angle X_1G_1U = 90°$. Pravokutniku XX_1G_1U simetrale nasuprotnih stranica se podudaraju. Odnosno, simetrala dužine $\overline{XX_1}$ podudara se sa simetralom dužine $\overline{UG_1}$, ali i sa simetralom dužine $\overline{BC}$. Dakle, i simetrale dužina $\overline{UG_1}$ i $\overline{BC}$ se podudaraju. S obzirom da dužine $\overline{UG_1}$ i $\overline{BC}$ pripadaju istom pravcu, a simetrale im se podudaraju, zaključujemo da je polovište A_1 dužine $\overline{BC}$ ujedno i polovište dužine $\overline{UG_1}$.
Sada znamo da su točke A_1 i G polovišta dužina $\overline{UG_1}$ i $\overline{XU}$. Promatrajući trokut G_1XU, uočavamo da je dužina $\overline{A_1G}$ srednjica trokuta, a tada vrijedi da je $A_1G \parallel G_1X$. S obzirom da i Lemoineova točka L pripada pravcu A_1G vrijedi $LA_1 \parallel G_1X$.

Kako je točka U_1 centralno simetrična točki U s obzirom na točku X, vrijedi $|UX| = |XU_1|$. Također, $|UX| = |G_1X_1|$, jer smo prije dokazali da je četverokut XX_1G_1U pravokutnik. Dakle, $|XU_1| = |G_1X_1|$.
Prije smo dokazali da je i $XU_1 \parallel G_1X_1$, pa zaključujemo da je četverokut $XU_1X_1G_1$ paralelogram. Slijedi da je i $G_1X \parallel U_1X_1$. Ranije smo dokazali da je $LA_1 \parallel G_1X$, pa vrijedi da je



Slika 4.13: Teorem 4.16

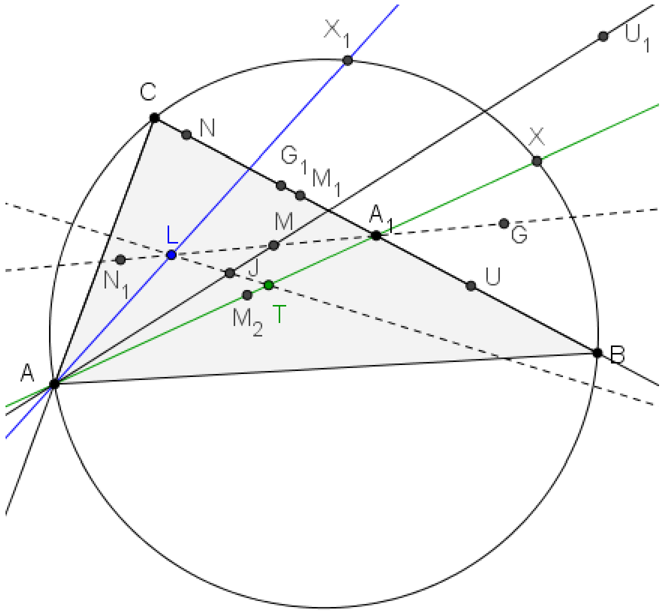
$LA_1 \parallel U_1X_1$, tj. $ML \parallel U_1X_1$. S obzirom je $LM_2 \parallel BC$ i $XX_1 \parallel BC$, slijedi da je $LM_2 \parallel XX_1$. Znamo da je $M_2M \perp BC$ i $XU_1 \perp BC$, pa vrijedi da je $M_2M \parallel XU_1$. Dakle, odgovarajuće stranice trokuta LM_2M i trokuta X_1XU_1 su paralelne, što znači da su trokuti homotetični. Centar homotetije je sjecište pravaca LX_1 i M_2X, odnosno točka A. To znači da pravac U_1M isto prolazi točkom A. Time je dokazano da pravac AU_1 prolazi polovištem M dužine $\overline{LA_1}$. Sada trebamo dokazati da točka J pripada pravcu AU_1. Primijenit ćemo Menelajev teorem 1.4 na trokut LA_1T. Težište T trokuta ABC dijeli težišnicu $\overline{AA_1}$ u omjeru $\frac{|AT|}{|TA_1|} = 2$, odnosno vrijedi $\frac{|TA_1|}{|AT|} = \frac{1}{2}$. Zato je

$$\frac{|AA_1|}{|AT|} = \frac{3}{2}.$$

Po definiciji, točka J pripada pravcu TL i dijeli dužinu $\overline{TL}$ u omjeru $\frac{|TJ|}{|JL|} = \frac{2}{3}$, a točka M je polovište dužine $\overline{LA_1}$, pa je $\frac{|LM|}{|MA_1|} = 1$. Uvrštavajući dobivamo:

$$\frac{|A_1A|}{|AT|} \cdot \frac{|TJ|}{|JL|} \cdot \frac{|LM|}{|MA_1|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 1. \tag{4.3}$$

Iz jednakosti (4.3) i Menelajevog teorema 1.4 zaključujemo da točke A, J i M pripadaju istom pravcu. Drugim riječima, točka J pripada pravcu AM, odnosno pravcu AU_1. Time smo dokazali i drugi dio teorema, da točka J pripada pravcu AU_1. □



Slika 4.14: Teorem 4.16

Prethodno iskazani i dokazani teorem možemo primijeniti na analogan način i na preostale vrhove trokuta ABC, te dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 4.17. *Neka su točke A_1, B_1, C_1 polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, točka T težište trokuta ABC i neka su X, Y, Z sjecišta pravaca AT, BT, CT trokuta ABC i njemu opisane kružnice (različite od točaka A, B, C). Nadalje, neka su U, V, W ortogonalne projekcije točaka X, Y, Z na pravce, BC, CA, AB, a U_1, V_1, W_1 centralno simetrične točke točkama U, V, W s obzirom na točke X, Y, Z.*
Tada pravci AU_1, BV_1, CW_1 prolaze jednom točkom J za koju vrijedi:

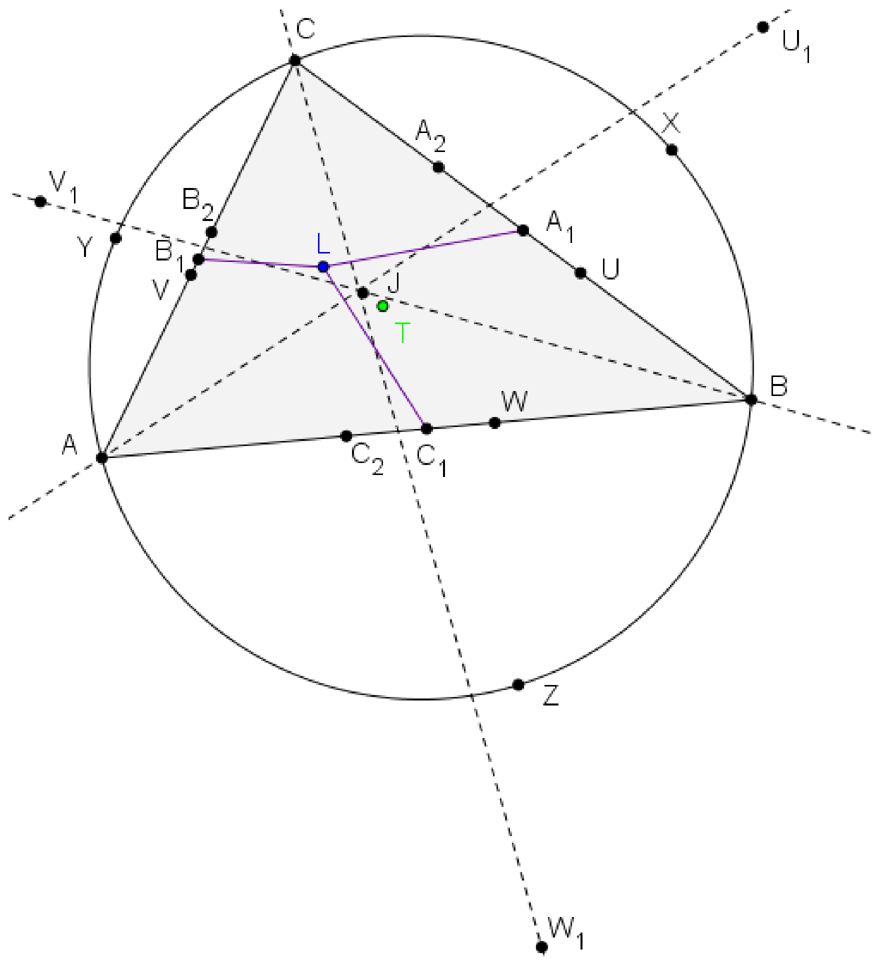
$$\frac{|TJ|}{|JL|} = \frac{2}{3},$$

gdje je L Lemoineova točka trokuta ABC.

Teorem 4.18. *Neka je L Lemoineova točka trokuta ABC. Neka simedijana AL trokuta ABC siječe dužinu $\overline{BC}$ u točki A_2 i opisanu kružnicu trokuta ABC u točki X_1 (različitoj od A). Tada vrijedi:*

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{1}{2}.$$

Dokaz. Iz dokaza teorema 4.8 znamo da je simetrala dužine $\overline{BC}$ ujedno i simetrala dužine $\overline{XX_1}$, pri čemu je X sjecište pravca kojem pripada težišnica $\overline{AA_1}$ i opisane kružnice trokuta



Slika 4.15: Teorem 4.17

ABC. Po definiciji točka A_1 je polovište dužine $\overline{BC}$, pa ona pripada simetrali dužina $\overline{BC}$ i $\overline{XX_1}$. Dakle, $|A_1X| = |A_1X_1|$. S obzirom je trokut XA_1X_1 je jednakokračan, vrijedi:

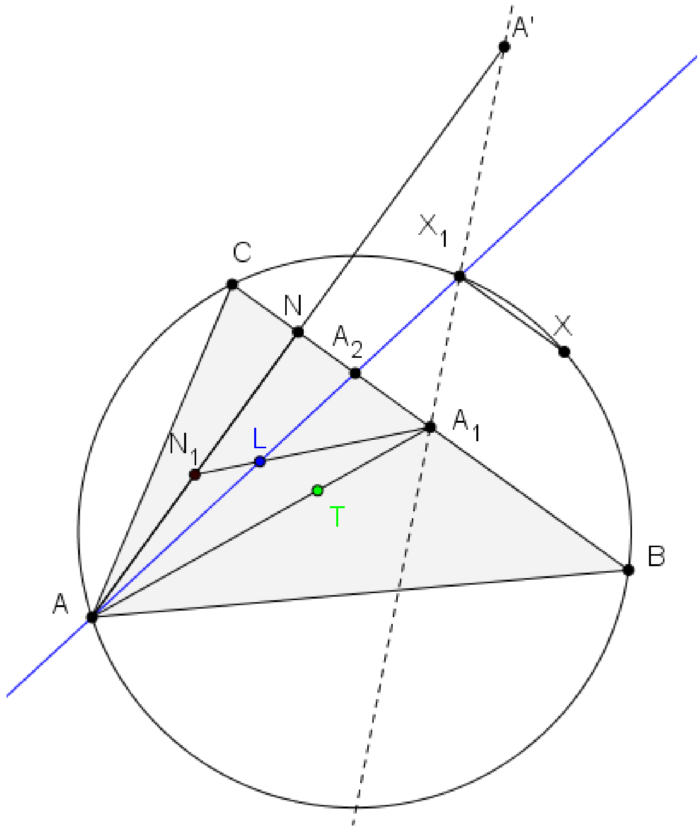
$$\angle A_1X_1X = \angle X_1XA_1.$$

Neka je H sjecište pravaca A_1X_1 i AB. S obzirom je $XX_1 \parallel BC$, za kutove uz presječnicu A_1X_1 vrijedi:

$$\angle A_1X_1X = \angle HA_1B \quad \text{i} \quad \angle X_1XA_1 = \angle CA_1A = \angle XA_1B.$$

Kutovi $\angle X_1A_1X$ i $\angle AA_1H$ su vršni, pa su sukladni. Sada slijedi:

$$\angle X_1A_1B = \angle X_1A_1X + \angle XA_1B = \angle AA_1H + \angle HA_1B = \angle AA_1B. \tag{4.4}$$



Slika 4.16: Teorem 4.18

Neka je točka A' osnosimetrična točki A s obzirom na pravac BC. Neka je točka N nožište visine iz vrha A na pravac BC. Tada je N ujedno i polovište dužine $\overline{AA'}$. Dakle, $\frac{|AA'|}{|NA'|} = 2$. Točka A' je osnosimetrična točki A s obzirom na pravac BC, pa vrijedi:

$$\angle A'A_1B = \angle BA_1A. \tag{4.5}$$

Uspoređujući dobivene jednakosti (4.4) i (4.5) zaključujemo da je $\angle A‘A_1B = \angle X_1A_1B$, a kako su $A‘$ i X_1 s iste strane pravca A_1B, točke A_1, A' i X_1 pripadaju istom pravcu. Sjecište simedijane AL i pravca BC je točka A_2, te stoga točke A_1, N i A_2 pripadaju istom pravcu.
Neka je točka N_1 polovište dužine $\overline{AN}$. Dakle, točke A, N, N_1 i A' pripadaju jednom pravcu, te točke A, L, A_2 i X_1 pripadaju također jednom pravcu. Pravci $A‘X_1$, NA_2, N_1L, AA_1 sijeku se u točki A_1. Primjenjujući jednakost dvoomjera četvorki točaka dobivamo:

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{|AN_1|}{|N_1N|} : \frac{|AA'|}{|A'N|}.$$

S obzirom je N_1 polovište dužine $\overline{AN}$, a N polovište dužine $\overline{AA'}$, vrijedi:

$$\frac{|AN_1|}{|N_1N|} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{|AA'|}{|A'N|} = 2.$$

Dakle, dobivamo:

$$\frac{|AL|}{|LA_2|} : \frac{|AX_1|}{|X_1A_2|} = \frac{1}{2}.$$

□

Dobili smo još jedan način konstrukcije Lemoineove točke L. Neka je X sjecište pravca AT i opisane kružnice k trokuta ABC, a X_1 drugo sjecište opisane kružnice k i pravca koji je paralelan s pravcem BC i prolazi točkom X. Neka je $\overline{AN}$ visina na stranicu $\overline{BC}$, N_1 polovište te visine i A_1 polovište stranice $\overline{BC}$. Sjecište pravaca A_1N_1 i AX_1 je Lemoineova točka.

Bibliografija

[1] P. Ballew, *Isogons and Isogonic Symmetry*, (svibanj 2017.), http://www.pballew.net/isogon.html.

[2] A. Bogomolny, *All about Symmedians*, (siječanj 2017.), http://www.cut-the-knot.org/triangle/symmedians.shtml.

[3] M. Bombardelli i D. Ilišević, *Elementarna geometrija, skripta, verzija 1.0*, (rujan 2016.), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/EGskripta.pdf.

[4] D. Grinberg, *Three properties of the symmedian point*, (rujan 2016.), http://web.mit.edu/~darij/www/TPSymmedian.pdf.

[5] M. Halapa, *Omjeri udaljenosti točke od stranica trokuta*, (svibanj 2017.), http://www.halapa.com/pravipdf/omjerudalj.pdfl.

[6] C. Kimberling, *Emile Michel Hyacinthe Lemoine (1840 - 1912) geometer*, (svibanj 2017.), http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/lemoine.html.

[7] S. Luo i C. Pohoata, *Let‘s Talk About Symmedians!*, (travanj 2017.), https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf.

[8] J. J. O'Connor i E. F. Robertson, *Emile Michel Hyacinthe Lemoine*, (svibanj 2017.), http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lemoine.html.

[9] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 1994.

[10] B. Pavković i D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1992.

Sažetak

U ovom radu definirali smo pojam simedijane trokuta na dva načina: kao pravac koji prolazi polovištima antiparalela stranica trokuta, te kao pravac koji je izogonalan pravcu kojem pripada težišnica. Zatim smo iskazali i dokazali neka od glavnih svojstava simedijana.
U drugom dijelu rada orijentirali smo se više na Lemoineovu točku, koju smo definirali kao sjecište simedijana, te kao izogonalno konjugiranu točku težišta. Zatim smo istraživali neka od svojstava Lemoineove točke. Dokazali smo i povezanost Lemoineove točke s nekim drugim poznatim točkama u ravnini, pa je tako Lemoineova točka trokuta ujedno i težište nožišnog trokuta Lemoineove točke, te je Lemoineova točka Gergonneova točka njemu tangencijalnog trokuta.

Summary

In this paper we have defined the notion of the symmedian of a triangle in two ways: as the line that goes through the midpoints of the antiparallels to the sides of a triangle, and as the line that is isogonal to the triangle median. We have also presented and provided proof for some of the main properties of the symmedian.
In the second part of the paper we have mostly focused on the Lemoine point, which can be defined as the symmedian intersection and as the isogonal conjugate of the triangle centroid. In addition, we have investigated some of the properties of the Lemoine point. We have also proved the connection of the Lemoine point with some other points within the plane, which leads to the conclusion that the Lemoine point of a triangle also serves as the centroid of its pedal triangle and the Lemoine point actually represents the Gergonne point of its tangential triangle.

Životopis

Rođena sam 2. svibnja 1991. godine u Puli. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 1998. godine u Osnovnoj školi Vitomir Širola - Pajo, u područnoj školi u Svetom Martinu. Godine 2006. upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Mate Blažine u Labinu.
Po završetku srednjoškolskog obrazovanja 2010. godine, nastavila sam daljnje školovanje na Prirodoslovno – matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija matematike 2014. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematike, smjer: nastavnički, koji ove godine završavam.