Vizualizacija kompleksnih funkcija

Šömen, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Šömen

VIZUALIZACIJA KOMPLEKSNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Ivica Nakić

Zagreb, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svom mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Nakiću na iznimnom strpljenju i velikoj pomoći tijekom izrade diplomskog rada.

Posebno se zahvaljujem cijeloj svojoj obitelji na neograničenoj podršci i razumijevanju tijekom studija i bez kojih sve što sam dosad postigla ne bi bilo moguće.
Od srca zahvaljujem Serđu koji je uvijek bio uz mene, u teškim i sretnim trenucima, te je bio stalna podrška i oslonac.

Također, zahvaljujem se svim svojim prijateljima na pruženoj podršci i uz koje je cijeli studij prošao puno lakše i zabavnije.

Sadržaj

Uvod

Kompleksne funkcije, uz njihovu značajnost u većini matematičkih područja, postale su nezamjenjivi alati u prirodnim znanostima i inženjerstvu. Zbog imaginarnih vrijednosti svojih argumenata, kompleksne funkcije često se čine tajanstvenima, no one su neophodne za potpuno razumijevanje prirode holomorfnih funkcija. Cilj ovog diplomskog rada je izložiti osnovne načine prikazivanja kompleksnih funkcija.

Grafove kompleksnih funkcija nije jednostavno vizualno predočiti. To se događa zbog jednostavnog razloga što je naš mozak treniran da vizualizira objekte u tri prostorne dimenzije, a grafovi komplesnih funkcija žive u četverodimenzionalnom prostoru. Stoga je izrazito teško zamisliti takve objekte. Situacija nije beznadna s obzirom da se nedostajeća dimenzija može dodati koristeći *boje*.

Pobliže ćemo proučiti *fazne portrete* - posebnu tehniku bojanja koja omogućava vizualizaciju funkcija kao slika. Promatrat ćemo kako se svojstva funkcije reflektiraju i kako se mogu iščitati iz faznih portreta. Fazni portreti pružaju funkcijama individualni prikaz i produbljuju naše intuitivno razumijevanje osnovnih i naprednih koncepata kompleksne analize.

Poslije općenitih komentara o vizualizaciji kompleksnih funkcija i neformalnog uvoda u fazne portrete u poglavlju 1, sistematsko izlaganje započinje u poglavlju 2. Nakon uspostavljanja sustava kompleksnih brojeva, istražit ćemo osnovna svojstva funkcija i razmotriti različite opcije za njihovu slikovnu reprezentaciju. Opremljeni s alatom faznih portreta, istraživat ćemo holomorfne funkcije slijedeći prirodan slijed razvoja. Započet ćemo s funkcijama koje se mogu formirati koristeći samo četiri osnovne aritmetičke operacije, a to su polinomi i racionalne funkcije. Slijedeći korak su redovi potencija koji su lokalni građevni blokovi generalnih holomorfnih funkcija.

U pisanju ovog rada od najveće koristi su mi bile knjiga [3] i članak [4] autora Eliasa Wegerta. Također, od velike pomoći su bili knjige [2] Šime Ungara i [1] Nevena Elezovića i Daslava Patrizija.

Poglavlje 1

Uvod u funkcije i njihov grafički prikaz

Grafički prikaz funkcija je jedan od najkorisnijih alata u svim područjima matematike. Dok se grafovi realnih funkcija mogu relativno jednostavno prikazati u ravnini, graf kompleksne funkcije jedne varijable je podskup četvero-dimenzionalnog prostora. S obzirom da smo navikli zamišljati objekte u tri dimenzije jasno je da će se javiti poteškoće kod pokušaja zamišljanja takvih objekata.

Tradicionalan koncept za vizualizaciju kompleksnih funkcija je takozvani *analitički pejsaž*. On prikazuje graf apsolutne vrijednosti dane funkcije. Analitički pejsaži uključuju samo modul funkcije, dok je argument izgubljen. Taj nedostatak može se nadoknaditi korištenjem modernih tehnologija i upotrebom boja iz čega proizlazi *obojani analitički pejsaž*. Prije razvoja tehnologije, za vrijeme crno bijelih prikaza, nedostatak prikaza argumenta funkcije kompenzirao se obogaćivanjem analitičkog pejsaža s linijama konstantnog argumenta te se eksplicitno prikazivala numerička vrijednost argumenta.

S obojanim analitičkim pejsažem problem prikaza kompleksnih funkcija bi se mogao smatrati riješenim. No treba uzeti u obzir da oni nisu jednostavno generirani i s upotrebom suvremenih tehnologija. Zapravo postoje situacije kada upotreba običnih analitičkih pejsaža koji prikazuju samo modul funkcije može zavaravati i proizvesti krive zaključke o funkciji.

Iz prikaza funkcije pomoću analitičkog pejsaža teško je iščitati tražene informacije o funkciji. Raspon modula funkcije može biti dosta velik te često su esencijalni dijelovi funkcija skriveni, na primjer u dolinama iza planinskih vrhova ili mogu biti pokriveni s tornjevima polova funkcije. U takvim situacijama najbolje je pogledati obojeni analitički pejsaž funkcije ravno s vrha. Rezultat je ravna obojana slika. To je *fazni portret* koji prikazuje fazu ili argument funkcije kodiranu s bojama. Kao i kod analitičkog pejsaža, fazni portret prikazuje samo "polovicu" funkcije no ispada da je argument pogodniji za razumijevanje funkcije i rekonstrukciju njenih svojstava od modula funkcije.

Jednostavan fazni portret kompleksne funkcije f je slika koja prikazuje fazu $f/|f|$ kodiranu s bojama na domeni funkcije f. S obzirom da se vrijednosti faze nalaze na kompleksnom jediničnom krugu mogu se prikazati na "kotaču boja".

Iako fazni portreti ne uzimaju u obzir modul funkcije oni sadrže dovoljno informacija za jedinstvenu rekonstrukciju *holomorfnih* funkcija do na pozitivni faktor. No svejedno se često koriste *poboljšani* fazni portreti koji omogućavaju lakše iščitavanje karakteristika funkcije.

Primijetimo da su fazni portreti zapravo slike, a slike mogu biti varljive. Primjerice, osnovni detalji mogu biti nevidljivi zbog niske rezolucije ili vrijednosti funkcije se mogu nalaziti u rasponu gdje je faza gotovo konstantna. Korištenje faznih portreta za istraživanje funkcije zahtijeva kritičko razmišljanje o primijećenim karakteristikama funkcije.

Dodavanje konstante neće bitno promijeniti funkciju, ali može (i to vrlo često) u potpunosti promijeniti njen fazni portret. Na primjer, ako je konstanta c dovoljno velika, tada fazni portret od $f+c$ će biti skoro monokromatski što ne želimo. S druge strane, dodavanje pogodne konstante može biti izrazito korisno. Primjerice, ako je fazni portret funkcije f skoro monokromatski možemo izabrati neku točku z_0 u području koje nas zanima i promotriti funkciju $f - f(z_0)$. S obzirom da je dobivena funkcija mala u blizinu z_0 njen fazni portret ima visoku rezoluciju i ponaša se kao mikroskop usmjeren na tu točku.

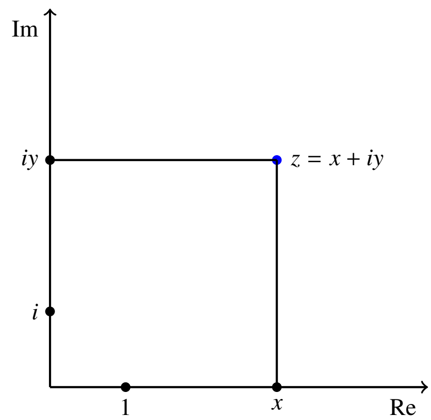
Poglavlje 2

Kompleksne funkcije

Funkcije koje ćemo promatrati su kompleksne funkcije jedne kompleksne varijable. Te funkcije nisu nužno holomorfne, no naglasak će biti stavljen na tu izrazito važnu klasu funkcija.

2.1 Kompleksni brojevi

Svaki kompleksni broj $z = x+iy$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, može se prikazati kao točka u Euklidskoj ravnini $\mathbb{R}^2$, uz poznavanje koordinata x i y. U ovom kontekstu $\mathbb{R}^2$ zovemo kompleksnom ravninom i označavamo ju s $\mathbb{C}$.



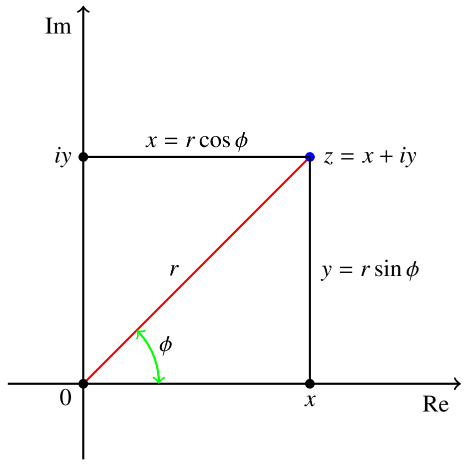
Slika 2.1: Kompleksna ravnina

Koordinate x i y su realni, to jest imaginarni dio od z te ih označavamo s $x = \operatorname{Re} z$ i $y = \operatorname{Im} z$. Primjetimo da imaginarni dio od $x + iy$ je zapravo realni broj y, a ne iy. Također,

$z = x + iy$ nužno ne znači da je x realni dio i y imaginarni dio od z, to samo vrijedi ako su x i y realni brojevi.

Kompleksni brojevi za koje vrijedi $\operatorname{Re} z = 0$ nazivaju se čisti imaginarni brojevi. Imaginarna os je skup svih čistih imaginarnih brojeva, dok se realna os sastoji od svih kompleksnih brojeva koji nemaju imaginarni dio, to jest za koje je $\operatorname{Im} z = 0$.

Kao i točke u ravnini, kompleksni brojevi imaju alternativni prikaz u polarnim koordinatama.



Slika 2.2: Polarna reprezentacija kompleksnog broja

Za kompleksan broj $z = x + iy, z \neq 0$ realni i imaginarni dio od z su dani sljedećim formulama

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi \tag{2.1}$$

gdje r označava udaljenost točke z od ishodišta, a ϕ kut između pozitivnog dijela realne osi i dužine koja spaja ishodište s točkom z (slika 2.2). Stavljajući (2.1) u $z = x + iy$ dobivamo *polarnu reprezentaciju* kompleksnog broja z

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi). \tag{2.2}$$

Ako je $z = 0$ tada se (2.2) zadovoljava s $r = 0$ i bilo kojom vrijednošću kuta ϕ.

Vrijednost r se naziva *modul* od z i označava s $|z|$. Modul od z se može izraziti pomoću realnog i imaginarnog dijela od z koristeći Pitagorin teorem,

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Za $z \neq 0$, svaki realni broj ϕ koji zadovoljava (2.2) nazivamo *argument* od z. Argument kompleksnog broja $z = 0$ je nedefiniran.

Svaki argument ϕ od $z = x + iy$ gdje je $x \neq 0$ zadovoljava

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}. \tag{2.3}$$

Obrat ne vrijedi s obzirom da je $\operatorname{tg}\phi = \operatorname{tg}(\phi + \pi)$, stoga relacija (2.3) nije dovoljna za pronalaženje vrijednosti od ϕ, u obzir se mora uzeti i položaj točke z u jednom od četiri kvadranta koordinatnog sustava. Štoviše, čak ni (2.2) nije dovoljan uvjet za jedinstveno određivanje vrijednosti ϕ s obzirom da zbrajanje s višekratnikom od 2π ne mijenja vrijednost sinus i kosinus funkcije.

Oznaka $\arg z$ se koristi za označavanje proizvoljnog argumenta od z, što znači da je $\arg z$ skup brojeva, a ne samo jedan broj. Posebno, relacija $\arg z_1 = \arg z_2$ ne označava jednadžbu već izražava jednakost dva skupa.

Slijedi da su dva kompleksna broja $r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ i $r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$, različita od nule, jednaka ako i samo ako vrijedi

$$r_1 = r_2 \quad \text{i} \quad \phi_1 - \phi_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{2.4}$$

to jest

$$r_1 = r_2 \quad \text{i} \quad (\exists k \in \mathbb{Z})\ \phi_1 = \phi_2 + 2k\pi.$$

Da bi argument od z bio dobro definirani broj, a ne skup brojeva, treba se ograničiti na neki interval, primjerice $\langle -\pi, \pi]$ ili $[0, 2\pi\rangle$. Tada taj poseban izbor argumenta označavamo s $\operatorname{Arg} z$ i nazivamo primarna vrijednost argumenta.

Ako želimo izbjeći rad s argumentom, možemo koristiti *fazu* kompleksnog broja koja se definira s $\psi(z) := z/|z|$.

Apsolutna vrijednost od $z - a$ je Euklidska udaljenost između točaka z i a, što se često koristi za prikazivanje geometrijskih objekata. Primjerice, unutrašnjost kruga i kružnice sa središtem u a i radijusom r mogu se prikazati kao

$$D_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \qquad T_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Ako se radi o jediničnom krugu koristimo posebne oznake

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \qquad \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Pogledajmo sada kako izgledaju aritmetičke operacije s kompleksnim brojevima kada su u polarnom obliku. Neka su z_1 i z_2 dani s $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Koristeći adicijske teoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta \tag{2.5}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \tag{2.6}$$

dobivamo

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)). \tag{2.7}$$

Dakle, modul produkta kompleksnih brojeva je produkt modula faktora, dok je argument produkta suma argumenata faktora. Iz definicije modula i svojstava apsolutne vrijednosti dobivamo i sljedeća svojstva modula kompleksnih brojeva

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z\bar{z} = |z|^2 \tag{2.8}$$

Nadalje, vrijede i sljedeće nejednakosti

$$\mathrm{Re}\, z \leq |z|, \quad \mathrm{Im}\, z \leq |z|, \quad |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Prve dvije relacije slijede direktno iz definicije apsolutne vrijednosti. Uočimo da $|z_1|$, $|z_2|$ i $|z_1 - z_2|$ možemo interpretirati kao dužine stranica trokuta sa vrhovima 0, z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini. Iz toga slijedi da je treća relacija zapravo nejednakost trokuta.

S obzirom da je suma argumenata dva faktora zapravo argument njihova produkta, iz (2.8) slijedi da je faza multiplikativna, to jest za z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2 \neq 0$, vrijedi

$$\psi(z_1 z_2) = \psi(z_1) \cdot \psi(z_2), \qquad \psi(z_1/z_2) = \psi(z_1)/\psi(z_2). \tag{2.9}$$

Posebno, za $z \neq 0$ imamo

$$\psi(-z) = -\psi(z), \qquad \psi(1/z) = 1/\psi(z) = \overline{\psi(z)}. \tag{2.10}$$

Koristeći (2.7) uzastopno s istim faktorom z, dobivamo De Moivre-vu formulu za n-tu potenciju od $z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi). \tag{2.11}$$

Ova formula vrijedi i za negativne vrijednosti od n. Posebno, inverz z^{-1} od kompleksnog broja $z = r(\cos\phi + i \sin\phi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ može se izraziti s

$$z^{-1} = 1/z = r^{-1}\Big(cos(-\phi) + i \sin(-\phi)\Big) = r^{-1}(\cos\phi - i \sin\phi).$$

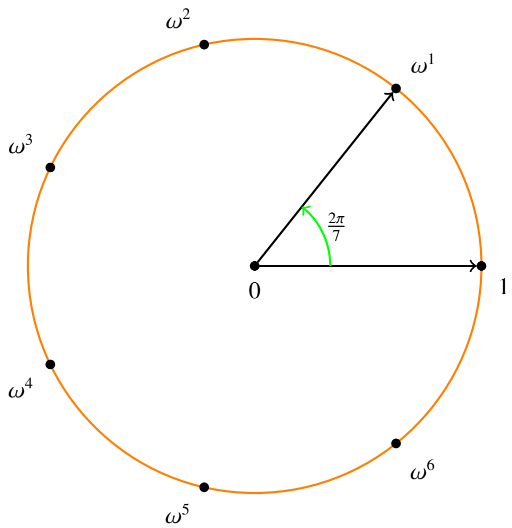
Glavna prednost kompleksnih brojeva nad realnim jest ta što negativni kompleksni brojevi imaju kvadratni korjen. Općenito, broj z se zove n-ti korjen od w ako zadovoljava $z^n = w$. Neka su z i w dani su svojoj polarnoj formi

$$z = r(\cos\phi + i \sin\phi), \qquad w = R(\cos\Phi + i \sin\Phi)$$

Koristeći (2.4) dobivamo da $z^n = w$ je ekvivalentno s $r^n = R$ i $n\phi = \Phi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Rješavajući to u odnosu na r i ϕ dobivamo

$$r = \sqrt[n]{R}, \qquad \phi = \frac{\Phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Ovdje je k proizvoljni cijeli broj, no s obzirom da dodavanjem višekratnika od n cijelom broju k ne mijenja se vrijednost od z, dovoljno je uzeti vrijednosti $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Dakle, bilo koji kompleksni broj w različit od nule ima točno n korjena reda n. U kompleksnoj ravnini, n-ti korjeni kompleksnog broja različitog od nule su vrhovi pravilnog n-terokuta sa središtem u ishodištu. Na slici 2.3 su prikazani sedmi korjeni od 1.



Slika 2.3: Sedmi korjeni od 1

Ako je n prirodan broj, n-ti korjeni od 1 su rješenja od $z^n = 1$.
Uvođenjem primitivnog korjena reda n

$$\omega := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

slijedi da su n-ti korjeni od 1 potencije $1 = \omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ od ω.

Riješavanjem problema izvlačenja korijena u sustavu kompleksnih brojeva, ostali smo s još jednim problemom realne aritmetike - nemogućnosti dijeljenja s nulom. Da bi riješili navedeni problem proširit ćemo kompleksnu ravninu s idealnim elementom, *točkom beskonačnosti* koju označavamo s ∞ i definiramo

$$\frac{1}{0} := \infty, \qquad \frac{1}{\infty} := 0.$$

Uniju kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ i točke beskonačnosti nazivamo *proširena kompleksna ravnina* i označavamo s $\hat{\mathbb{C}}$, to jest

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

2.2 Analitički pejsaž

Realne funkcije prikazujemo njihovim grafovima te je prirodno da sada želimo imati prikaz kompleksnih funkcija. Tu brzo nailazimo na problem jer graf kompleksne funckcije $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$G_f := \Big\{(z, f(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : z \in D\Big\}$$

"živi" u $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ koji ima četiri realne dimenzije. Želimo ostati u tri dimenzije te nam stoga treba zamjena za četvrtu dimenziju. Ideja analitičkih pejsaža jest uključiti nedostajeću informaciju o funkciji pomoću boja.

Analitički pejsaž A_f funkcije $f : D \subset \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ je graf njene apsolutne vrijednosti,

$$A_f := \{(z, |f(z)|) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{R}}_+ : z \in D\},$$

gdje je $\hat{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$.

Analitički pejsaži uključuju samo modul funkcije i izostavljaju njezin argument. Da bi izbjegli višeznačnost modula, umjesto njega koristiti ćemo fazu funkcije. S obzirom da se faza kompleksnih brojeva različitih od nule nalazi na jediničnom krugu $\mathbb{T}$ i točke na krugu se mogu prirodno kodirati pomoću boja slijedi da je boja idealan kandidat za vizualizaciju faze.

Obojani analitički pejsaž

Obojani analitiči pejsaž kompleksne funkcije je graf njenog modula obojan sukladno fazi funkcije. Formalno, obojani analitički pejsaž C_f funkcije $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ je skup

$$C_f := \{(z, |f(z)|, \psi(f(z))) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{R}}_+ \times \hat{\mathbb{T}} : z \in D\},$$

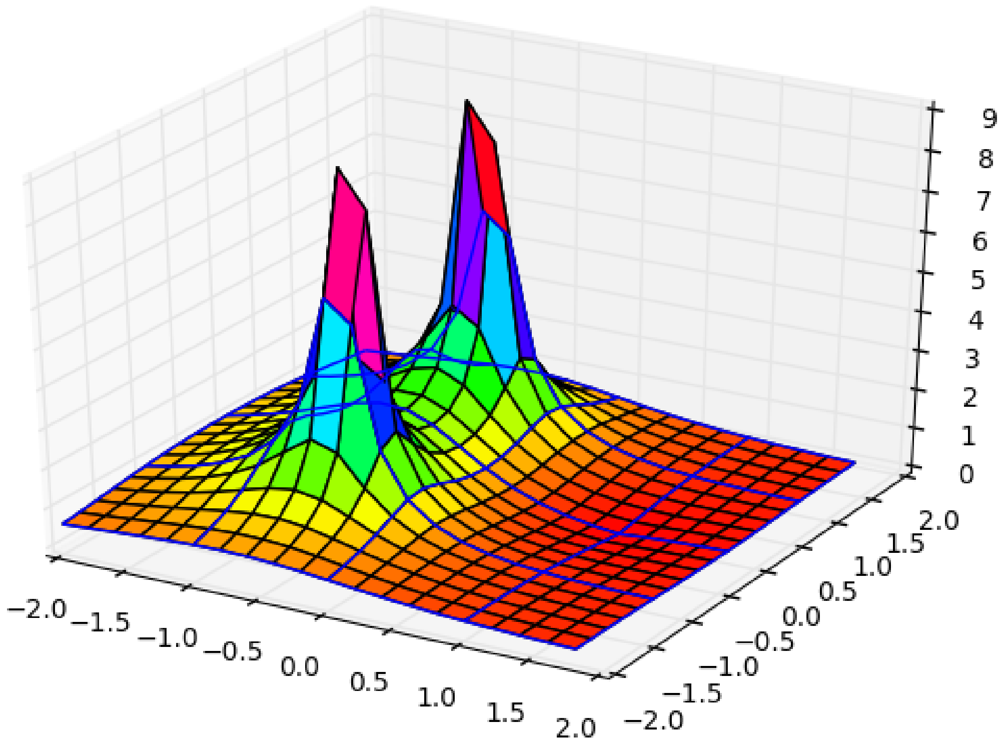
gdje je z pozicija početne točke, $|f(z)|$ je visina točke i faza $\psi(f(z))$ određuje njenu boju te $\hat{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \cup \{0, \infty\}$.

Slika 2.4 prikazuje obojani analitički pejsaž funkcije

$$f(z) = (z - 1)/(z^2 + z + 1) \tag{2.12}$$

u kvadratu $|\operatorname{Re} z| \le 2$, $|\operatorname{Im} z| \le 2$. Funkcija ima nul točku u $z_0 = 1$, a u točkama $z_1 := (-1 + \sqrt{3}i)/2$ i $z_2 := (-1 - \sqrt{3}i)/2$ nazivnik od $f(z)$ nestaje. Stavljamo $f(z_{1/2}) := \infty$ i kažemo da su z_1 i z_2 *polovi* od f.

Ako modul funkcije varira u velikom rasponu bolje je koristiti logaritamsko skaliranje na vertikalnoj osi. Takva reprezentacija je također prirodnija s obzirom da su $\log|f|$ i $\arg f$ konjugane harmonijske funkcije.



Slika 2.4: Obojani analitički pejsaž

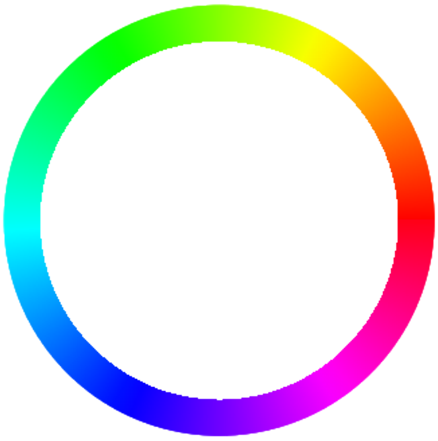
Shema boja za fazu

Kodiranje boja faze nikako nije jedinstveno, no jasno je da se preferiraju zasićene boje zbog lakšeg prepoznavanja i razlikovanja. Kotač boja je prikazan na slici 2.5.

Vidimo da je krug s bojama rotiran tako da su pozitivne vrijednosti kodirane s crvenom bojom, a negativne s plavom bojom. Također, posebnim vrijednostima nula i beskonačnost su pridružene crna i bijela boja, respektivno.

2.3 Prikaz boja

Problem vizualizacije kompleksnih funkcija možemo smatrati riješenim ako koristimo obojane analitičke pejsaže. No primijetimo da je površina modula tridimenzionalni objekt koji se najčešće mora prikazati na dvodimenzionalnoj površini papira ili ekrana. Takav pri-



Slika 2.5: Kotač boja

kaz često uzrokuje probleme s obzirom da zanimljivi elementi (kao na primjer nul-točke) postanu nevidljivi ili se teško otkrivaju.

Bojanje domene

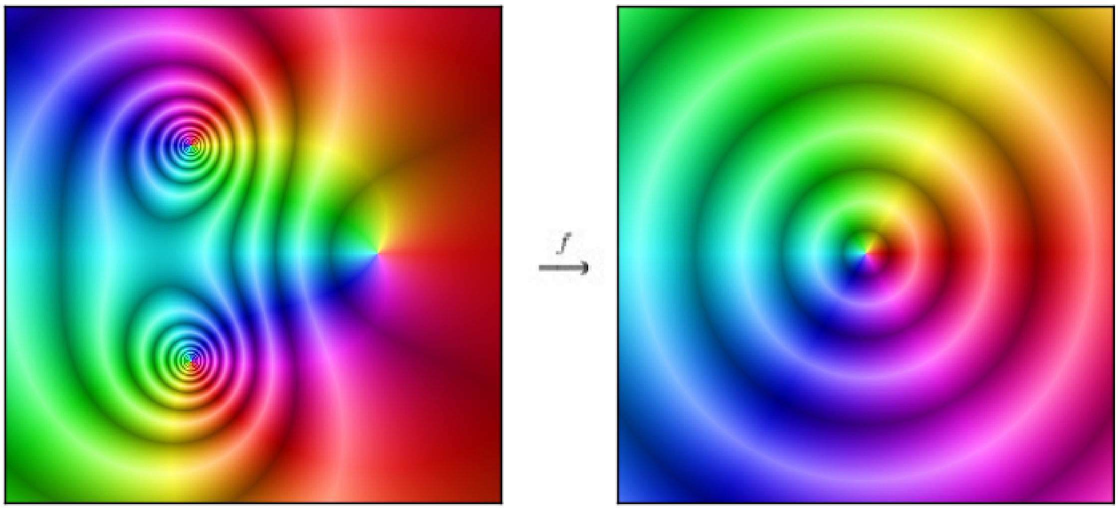
Postoji alternativni pristup, jednostavniji i općenitiji, gdje se boje ne koriste samo za prikaz faze funkcije, već također za potpuno kodiranje njenih vrijednosti koristeći dvodimenzionalnu shemu boja.

Korištenje tehnika bojanja je uobičajeno već desetljećima, na primjer za prikaz visina ili temperatura na kartama, no u većini slučajeve one prikazuju realne funkcije koristeći jednodimenzionalnu shemu boja. Dvodimenzionalne sheme boja koje se koriste za vizualizaciju kompleksnih funkcija se koriste od kasnih 1980-tih.

Slika 2.6 prikazuje bojanje domene za primjer funkcije (2.12). Povezana shema boja za vrijednosti u kompleksnoj ravnini je prikazana na desnoj strani slike. Faza funkcije je kodirana kao "boja", točnije nijansa, dok jačina to jest lakoća odgovaraju modulu funkcije. Svaka točka z u domeni funkcije f nosi istu boju kao njena slika $f(z)$.

U usporedbi s obojanim analitičkim pejsažem, bojanje domena ima prednost da su funkcije prikazane u dvije dimenzije što olakšava vizualizaciju složenijih funkcija.

Slike nastale tehnikom bojanja domene su često vrlo lijepe, no s druge strane mogu biti donekle mutne i nejasne što čini teškim na primjer pronalaženje nul-točaka. Nadalje, tipično modul funkcije varira u velikom rasponu vrijednosti dok ljudsko oko nije jako



Slika 2.6: Bojanje domene funkcije $f(z) = (z-1)/(z^2+z+1)$

osjetljivo na različite nijanse sive te stoga shema boja mora biti prikladno usklađena s funkcijom. Dakle, stalno korištenje iste standardizirane sheme boja za sve funkcije nije pogodno i ne daje zadovoljavajuće rezultate.

Fazni portreti

Pogledajmo što se dogodi ako zaboravimo na modul i prikažemo samo fazu funkcije, naravno kodiranu s bojama. *Fazni portret* je ono što vidimo gledajući na obojani analitički pejsaž ravno s vrha u smjeru okomitom na xy ravninu.

Slika 2.7 prikazuje fazni portret za primjer funkcije (2.12).

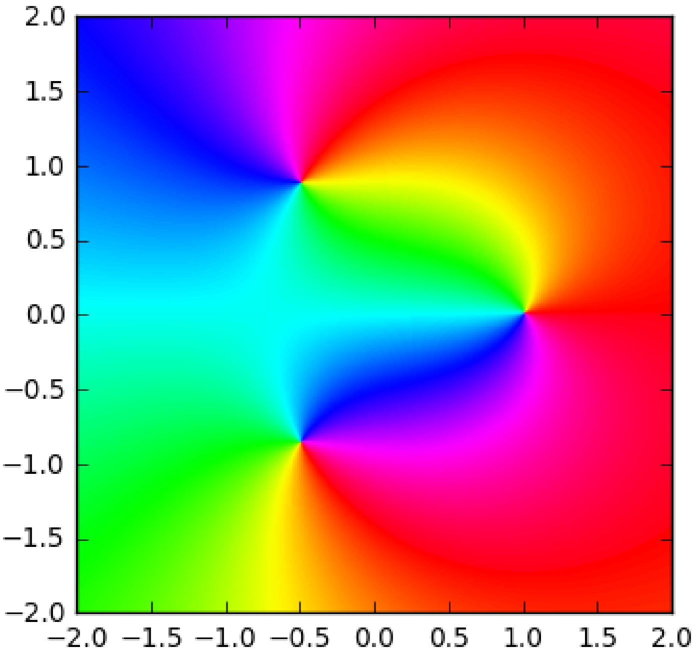
Za formalnu definiciju, neka je f kompleksna funkcija na skupu D. Tada preslikavanje

$$\Psi_f : D \to \hat{\mathbb{T}}, \quad z \mapsto \psi(f(z))$$

određuje *fazu* od f te njen graf

$$P_f := \{(z, \Psi_f(z)) : z \in D\}$$

nazivamo *fazni portret* ili *fazni graf* od f. Ako $\hat{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \cup \{0, \infty\}$ poistovjetimo s kotačem boja tada fazni portret funkcije možemo interpretirati kao sliku.



Slika 2.7: Fazni portret

Usporedba faznih portreta i analitičkih pejsaža

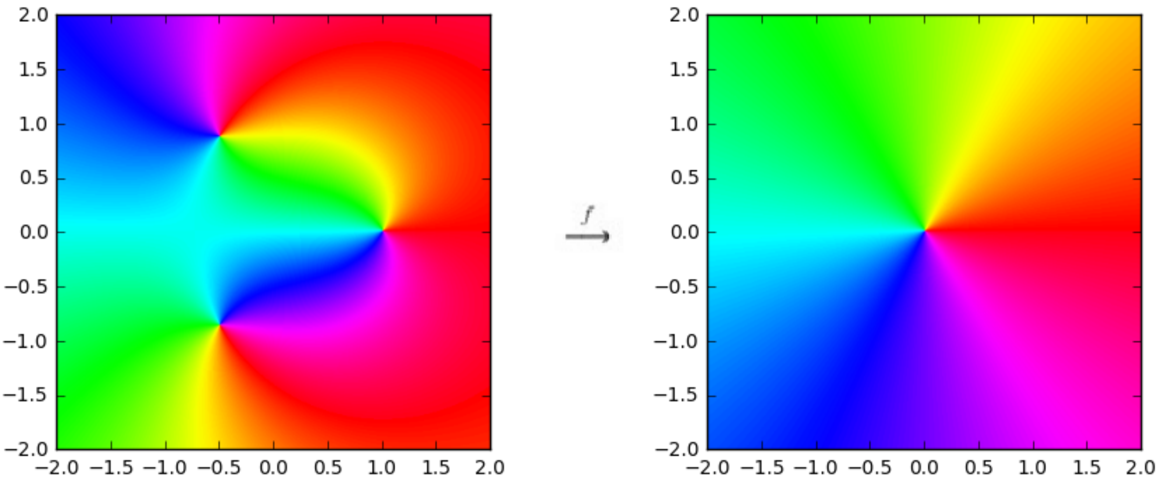
Možemo reći da su fazni portreti komplementarni (neobojanim) analitičim pejsažima u smislu da jedan zanemaruje modul, a drugi fazu funkcije. Takvim gledanjem se može činiti da s faznim portretima se ne dobiva puno, no zapravo postoje neke ključne prednosti faznih portreta nad analitičkim pejsažima.

Prije svega, fazni portret je dvodimenzionalna slika koja se može odmah interpretirati. Nadalje, u usporedbi s rasponom modula tipične funkcije, raspon faze funkcije je poprilično mali s obzirom da je podskup proširenog jediničnog kruga. Dakle, vizualna rezolucija je puno viša za fazu nego za apsolutnu vrijednost što nam dopušta da sve funkcije reprezentiramo s istom shemom boja. Rekonstrukcija nedostajećih informacija je jednostavnija i točnija s faznim portretima.

S druge strane, fazni portreti nisu pogodni za vizualizaciju svih kompleksnih funkcija s obzirom da dvije različite funkcije mogu imati isti fazni portret kada se razlikuju samo u modulu. Situacija se mijenja kad se ograničimo samo na klasu holomorfnih funkcija koje su u potpunosti okarakterizirane, do na pozitivni skalirajući faktor, svojim faznim portretima.

Poboljšani fazni portreti

S obzirom da faza zauzima samo jednu dimenziju postoji dosta mjesta u prostoru boja da ugradimo dodatne informacije o funkciji. Primjerice, kodiranje modula u nijansama sive bi nas vodilo nazad do tradicionalnog bojanja domene. No možemo napraviti i neke zanimljivije preinake. Koju preinaku ćemo izabrati ovisi o svojstvima koja želimo naglasiti i možda također o funkciji koju istražujemo. Promotrimo sada fazni portret iz drugog gledišta.



Slika 2.8: Fazni portret kao povlačenje unazad obojane w-ravnine

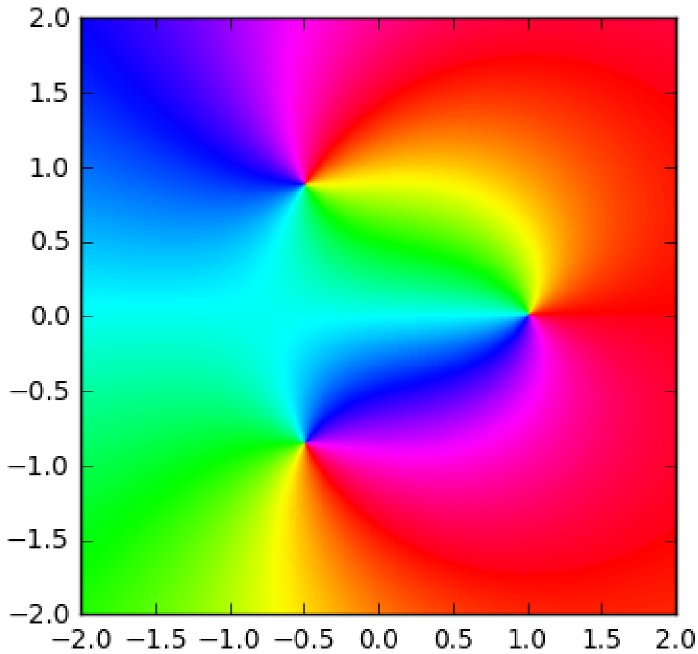
Slika 2.8 prikazuje funkciju f koja preslikava kompleksnu z-ravninu u kompleksnu w-ravninu. Kako bi generirali fazni portret od f prvo bojamo w-ravninu sukladnu fazi njenih točaka. U sljedećem koraku svaka točka z u domeni od f dobiva istu boju kao vrijednost $f(z)$ u w-ravnini. Ukratko, fazni portret na lijevoj strani je povlačenje slike na desnoj strani s funkcijom f.

Pogledajmo što bi se dogodilo ako bi pokušali prebaciti sliku u drugom smjeru. Povlačenje unaprijed slike iz z-ravnine u w-ravninu preko f znači da boja svake točke z u domeni D je prebačena na odgovarajuću točku $f(z)$ u rasponu od f. No to stvara konflikt uvijek kad su dvije točke z_1 i z_2 obojane drugačije, a f poprima iste vrijednosti u z_1 i z_2.

Dok je povlačenje unaprijed problematično, jasno je da svaka slika u w-ravnini se može povući unazad u z-ravninu s funkcijom f. Ovo omogućava puno opcija za modifikaciju i poboljšanje sheme boja faznih portreta.

Fazni portret na primjeru funkcije

Slika 2.9 opet prikazuje primjer $f(z) = (z - 1)/(z^2 + z + 1)$. Kao što je već napomenuto, tri posebne točke gdje se sve boje prikupljaju odgovaraju jednoj nul-točki i dvoma polovima funkcije. Primjetimo da se nul-točke i polovi mogu razlikovati prema uređenosti boja u njihovoj okolini.



Slika 2.9: Fazni portret

Pažljivijim pregledavanjem otkrivamo da bi mogla postojati još jedna posebna točka u svijetlo plavom području na negativnoj realnoj osi. To je točka križanja dvije linije iste boje. Takve točke zovemo *sedlo*.

Izokromatski skupovi

Kako bi detaljnije istražili strukturu faznih portreta uvodimo *izokromatske skupove*. Za funkciju f na domeni D definirani su na sljedeći način

$$S(c) := \{z \in D : \psi(f(z)) = c\}, \quad c \in \hat{\mathbb{T}}.$$

Ako je točka c na jediničnom krugu označena s odgovarajućom bojom na kotaču boja tada je $S(c)$ skup svih točaka u D koje imaju istu boju c.

Na slici 2.9 plava linija i luk koji ju siječe čine izokromatski skup $S(-1)$.

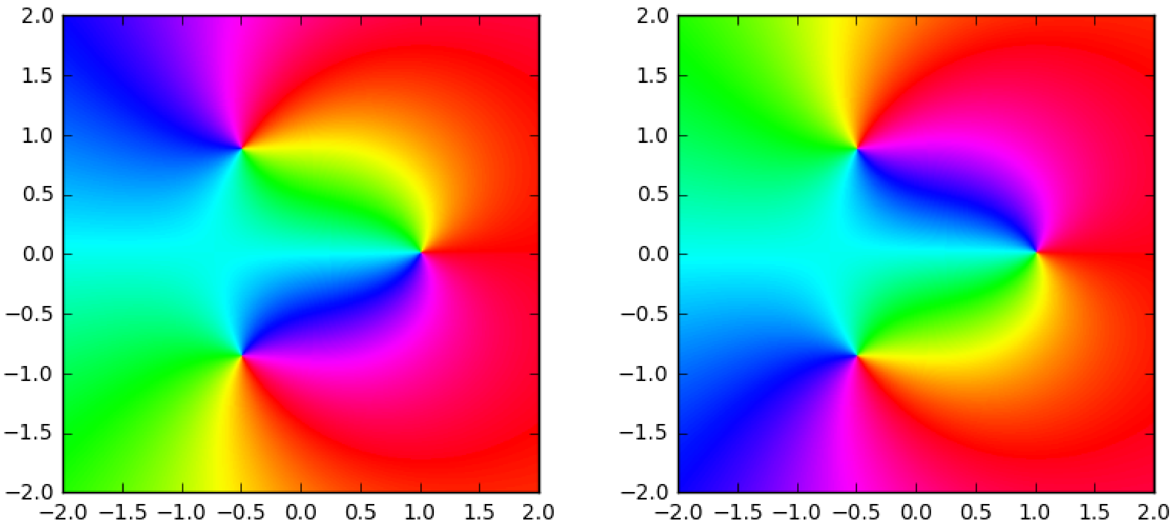
Kompleksne i holomorfne funkcije

Ako ne uvedemo dodatna ograničenja poput neprekidnosti ili diferencijabilnosti, izokromatski skupovi kompleksnih funkcija mogu biti proizvoljni, no to nije istina za holomorfne funkcije.

Kao što ćemo vidjeti u odjeljku 2.8, *holomorfne funkcije* su gotovo jedinstveno određene s njihovim faznim portretima (vidi teorem 3.1.3), no to ne vrijedi za općenite funkcije. Primjerice, funkcije f (holomorfna) i g (ne holomorfna) definirane s

$$f(z) = (z-1)/(z^2+z+1), \qquad g(z) = (\bar{z}-1)\cdot(\bar{z}^2+\bar{z}+1), \tag{2.13}$$

imaju istu fazu (osim u nul-točkama i polovima) iako su u potpunosti različite. Slika 2.10 prikazuje dva fazna portreta funkcija f i g definiranih u (2.13).



Slika 2.10: Fazni portret funkcija f (lijevo) i g (desno)

2.4 Holomorfne funkcije

Holomorfne funkcije, unatoč tome što čine manjinu unutar klase svih kompleksnih funkcija, su od ključne važnosti i u teoriji i praksi te posjeduju mnoga posebna i neočekivana svojstva. Krenut ćemo s jednostavnim funkcijama kao što su eksponencijalne funkcije, polinomi i racionalne funkcije, a nastavit ćemo s redovima potencija i dobivanjem funkcija na većim domenama.

2.5 Polinomi i racionalne funkcije

Proučit ćemo pobliže racionalne funkcije koje se mogu dobiti iz konstantnih funkcija i funkcije identiteta $id(z) = z$ koristeći četiri osnovne aritmetičke operacije, to jest koristeći zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Potencije

Najjednostavnije racionalne funkcije su potencije $f(z) = z^n$ gdje je eksponent n cijeli broj. Potencije su definirane za $n \in \mathbb{Z}$ i $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i proširene na $\hat{\mathbb{C}}$ na sljedeći način

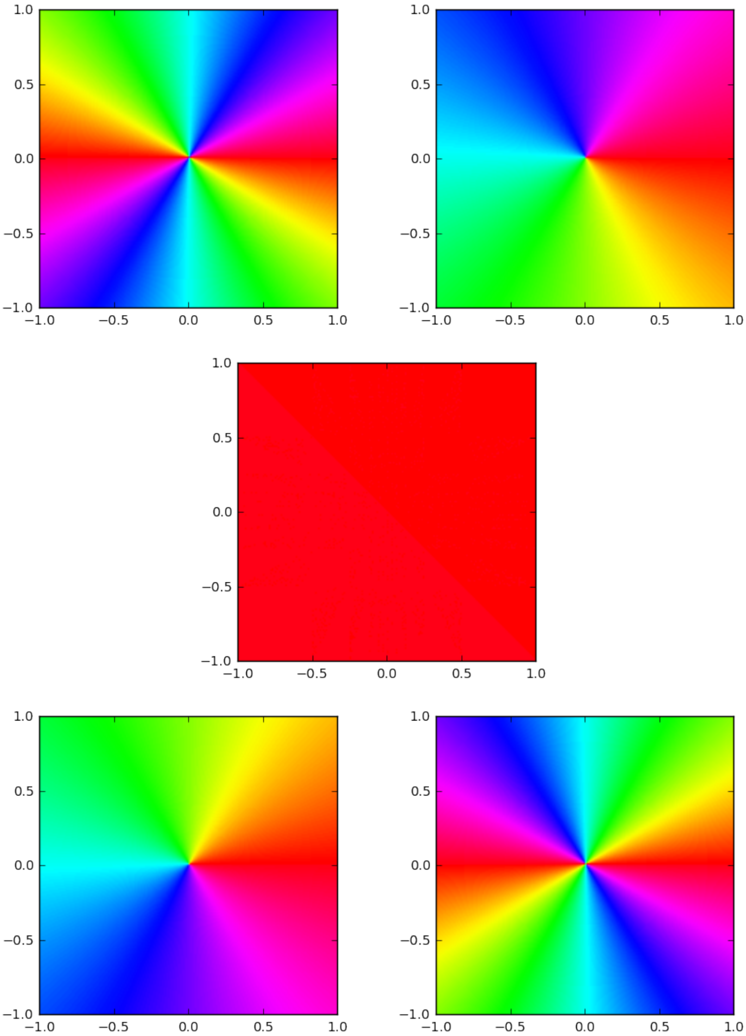
$$z^n := \begin{cases} 0, & (n > 0 \quad i \quad z = 0) \quad ili \quad (n < 0 \quad i \quad z = \infty) \\ 1, & (n = 0 \quad i \quad z = 0) \quad ili \quad (n = 0 \quad i \quad z = \infty) \\ \infty, & (n < 0 \quad i \quad z = 0) \quad ili \quad (n > 0 \quad i \quad z = \infty). \end{cases}$$

Dakle, ako je $n > 0$ tada z^n ima nul-točku u $z = 0$ i pol u $z = \infty$, dok za $n < 0$ ima pol u $z = 0$ i nul-točku u $z = \infty$. U svim navedenim slučajevima broj $r(z_0, f) = |n|$ zovemo red točke z_0, gdje je z_0 nul-točka ili pol funkcije f.

Primjetimo da smo definirali $z^0 := 1$ za sve $z \in \hat{\mathbb{C}}$, uključujući $z = 0$ i $z = \infty$. S tim definicijama smo osigurali neprekidnost svih potencija $f(z) = z^n$ gdje je $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$. Za $n \neq 0$ sve točke $w \in \hat{\mathbb{C}}$ osim $w = 0$ i $w = \infty$ imaju točno $|n|$ praslika što zapravo znači da preslikavanje $z \mapsto w = z^n$ omotava z sferu $|n|$ puta oko w sfere.

Na slici 2.11 prikazani su neki fazni portreti funkcija potencije $f(z) = z^n$ na jediničnom kvadratu $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$.

Promatramo ponašanje potencije z^n za $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ u blizini nule. Korištenjem de Moivre-ove formule zaključujemo da faza od z^n je konstantna uz zrake koje izviru iz središta. Štoviše, kada se z pomiče oko jediničnog kruga, recimo u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu, tada se faza $\psi(z^n) = z^n$ rotira na jediničnom krugu sa n-puta brzinom od z. Za $n < 0$ faza $\psi(z^n)$ putuje u suprotnom smjeru od z (to jest u smjeru kazaljke na satu). Polovi i nul-točke se mogu razlikovati prema orijentaciji boja koje se nalaze u njihovoj blizini. Za nul-točke boje imaju istu orijentaciju kao na kotaču boja dok je za polove orijentacija obrnuta. Red nul-točke ili pola se lako može iščitati iz slike, to je broj izokromatskih zraka jedne (proizvoljno odabrane) boje koje se sreću u toj točki.



Slika 2.11: Fazni portreti funkcija z^{-2}, z^{-1}, z^0, z^1, z^2 u blizini $z = 0$

Polinomi

Polinomi se formiraju korištenjem potencija i osnovnih operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Polinome najčešće zapisujemo u njihovoj *normalnoj formi*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, z \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

Kompleksni brojevi $a_0, a_1, \cdots, a_n$ se zovu *koeficijenti* polinoma. Broj n se naziva *stupanj* polinoma i pišemo $n = \deg f$. Za nulti polinom $f \equiv 0$ nije moguć zapis u normalnoj formi i njegov stupanj postavljamo na $-\infty$.

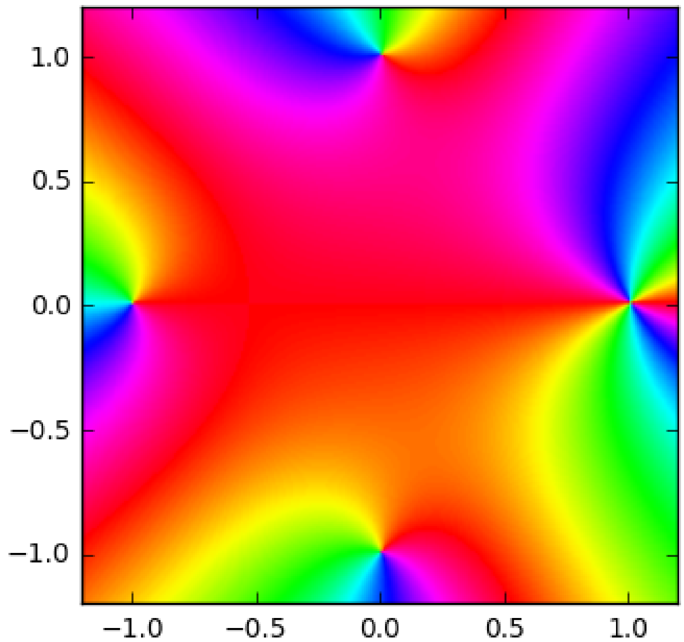
Definicija (2.14) je neprikladna za dodjeljivanje vrijednosti za f u beskonačnosti s obzirom da bi to uključivalo nedefinirane izraze poput $\infty + \infty$ ili $0 \cdot \infty$. No ipak postoji prirodna definicja od $f(\infty)$. Ukoliko želimo proširiti f do neprekidnog preslikavanja $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ može postojati najviše jedna vrijednost za $f(\infty)$. Definiramo $f(\infty)$ na sljedeći način

$$f(\infty) := \begin{cases} \infty, & \deg f \geq 1 \\ a_0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.15}$$

Da je ovo dobar izbor za $f(\infty)$ vidi se iz teorema 2.5.1 čiji dokaz se može naći u [3].

Teorem 2.5.1. *Polinomi definirani s* (2.14) *i* (2.15) *su neprekidne funkcije* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.

Slika 2.12 prikazuje fazni portret polinoma $f(z) = z^5 - z^4 - z + 1$ na kvadratu $|\operatorname{Re} z| < 1.2$, $|\operatorname{Im} z| < 1.2$. Četiri karakteristične točke gdje se sve boje susreću su $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ i $z_4 = -i$. Usporedimo fazni portret od f u blizini točaka $z_1, \cdots, z_4$ s portretima potencije z^n u blizini središta. Primjetimo da fazni portret od f u z_1, do na translaciju i blago izobličenje, izgleda kao portret od z^2 u $z = 0$. Slično, fazni portret od f u z_2, z_3, z_4 sliči portretu od z u blizini ishodišta (za z_2 i z_4 moramo dodati rotaciju).



Slika 2.12: Fazni portret polinoma stupnja 5

Da bi mogli dalje analizirati ova zapažanja moramo napraviti neku podlogu. Za početak proučit ćemo algebarske manipulacije s polinomima.

Polinomska algebra

Neka su f i g dva polinoma. Tada suma $f+g$, razlika $f-g$ i produkt $f \cdot g$, koji često zapisujemo s fg, su polinomi s

$$\deg(f \pm g) \leq \max(\deg f, \deg g), \qquad deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g.$$

Ako definiramo $n + (-\infty) := -\infty$ i $\max(n, -\infty) = \max(-\infty, n) := n$, za n cijeli broj ili $n = -\infty$, gornje relacije ostaju valjane ako su ili jedan od ili oba polinoma f i g nul-polinomi.

Kvocijent dva polinoma f i g općenito nije polinom. Kažemo da g *dijeli* f (ili f je *djeljiv* s g) ako postoji polinom q takav da je $f = g \cdot q$. Također će nam biti koristan i sljedeći teorem o dijeljenju s ostatkom čiji dokaz se može pronaći u [3].

Teorem 2.5.2 (Dijeljenje s ostatkom)**.** *Neka su f i $g \not\equiv 0$ polinomi. Tada postoje jedinstveni polinomi q (parcijalni kvocijent) i r (ostatak) gdje je $\deg r < \deg g$ takvi da je $f = gq + r$.*

Dakle, g dijeli f ako i samo ako ostatak r od dijeljenja f s g je nul-polinom. Ovaj rezultat koristimo pri proučavanju nul-točaka polinoma.

Lema 2.5.3. *Neka je f polinom stupnja većeg ili jednakog 1. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ i $f(z_0) = 0$ tada je f djeljiv s polinom $g(z) := z - z_0$.*

Dokaz. Koristeći teorem 2.5.2 dobivamo $f(z) = (z - z_0)q(z) + c$ gdje je c konstanta. Da je c konstanta slijedi iz uvjeta $\deg c = \deg r < \deg g = \deg(z - z_0) = 1$ iz kojeg dobivamo $\deg c = 0$. Ako stavimo $z = z_0$ dobivamo $c = 0$, to jest $f(z) = (z - z_0)q(z)$. □

Korištenjem leme 2.5.3 proces faktorizacije polinoma s nul-točakama se može nastaviti. Neka je $f(z) = (z-z_0)q(z)$ i z_1 nul-točka od q (ne nužno različita od z_0). Tada dobivamo $f(z) = (z - z_0)(z - z_1)q_1(z)$ i tako dalje. S obzirom da se stupanj kvocijenta q_k smanjuje sa svakim korakom ovaj proces mora doći do kraja te na kraju dobivamo sljedeći zapis polinoma f

$$f(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k} \cdot p(z), \tag{2.16}$$

gdje je p polinom stupnja $\deg f - (m_1 + m_2 + \ldots + m_k)$ bez nul-točaka. Sada se lako vidi da su nul-točke polinoma f brojevi z_j gdje je $j = 1, \cdots, k$. Eksponent m_j faktora $(z - z_j)^{m_j}$ iz izraza (2.16) se naziva *multiplicitet* ili *red* odgovarajuće nul-točke z_j.

Pogledajmo sada kako bi nam faktorizacija (2.16) mogla koristiti pri objašnjavanju zapažanja s ranijeg faznog portreta. Označimo produkt svih faktora osim jednog faktora $(z - z_j)^{m_j}$ na desnoj strani (2.16) s p_j. Dobivamo

$$f(z) = (z - z_j)^{m_j} p_j(z). \tag{2.17}$$

S obzirom da je $p_j(z_j) \neq 0$, faza od p_j je neprekidna u z_j te je

$$\psi(f(z)) = \psi((z - z_j)^{m_j}) \cdot \psi(p_j(z)) \sim c \cdot \psi((z - z_j)^{m_j}), \quad c := \psi(p_j(z)), \tag{2.18}$$

za sve z koji su dovoljno blizu z_j. Dakle, u najvećoj blizini od z_j fazni portret od f izgleda kao fazni portret od z^{m_j} u $z = 0$, pomaknut do z_j i rotiran za kut od

$$\varphi_j = -(1/m_j)\arg p_j(z_j). \tag{2.19}$$

Fazni portret je generiran s operacijom povlačenja unazad te je s tim objašnjen negativni predznak i faktor $1/m_j$ u izrazu (2.19).

Kako bi se interpretirao fazni portret od f koristimo

$$f(z) = z^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right), \quad z \neq 0. \tag{2.20}$$

i dobivamo

$$\psi(f(z)) \sim c \cdot \psi(z^n), \quad c := \psi(a^n) \tag{2.21}$$

Ekstremi

Zanima nas broj nultočaka polinoma stupnja jednakog n. Iz reprezentacije (2.16) dobivamo da je taj broj jednak $\deg f - \deg p$ gdje su sve nultočke brojane prema svojem multiplicitetu. No onda moramo moći reći nešto i o polinomu p. Slijedeći rezultati o lokalnim ekstremima polinoma će nam pomoći da dobijemo odgovore na ova pitanja.Dokazi tih rezultata se nalaze u [3].

Teorem 2.5.4 (Princip minimuma/maksimuma za polinome)**.**

(i) Ako modul $|f|$ polinoma f ima lokalni maksimum u nekoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$ tada je f konstantna.

(ii) Ako je f polinom stupnja barem 1 i $|f|$ ima lokalni minimum u nekoj točki $z_0 \in \mathbb{C}$ tada je $f(z_0) = 0$.

Korolar 2.5.5. *Svaki polinom f stupnja barem 1 ima najmanje jednu nul-točku z_0 iz $\mathbb{C}$.*

Nul-točke

Slijedi poznati teorem o nul-točkama polinoma. Dokaz teorema i njegovog korolara može se pronaći u [3].

Teorem 2.5.6 (Osnovni teorem algebre)**.** *Svaki polinom f stupnja $n \geq 1$ ima točno n kompleksnih nul-točaka. Preciznije, označimo sve različite nul-točke od f s $z_1, z_2, \cdots, z_k$, njihove multiplicitete s $m_1, m_2, \cdots, m_k$. Tada vrijedi $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, te f poprima kanonsku faktorizaciju*

$$f(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{m_k}, \quad c \in \mathbb{C} \setminus 0.$$

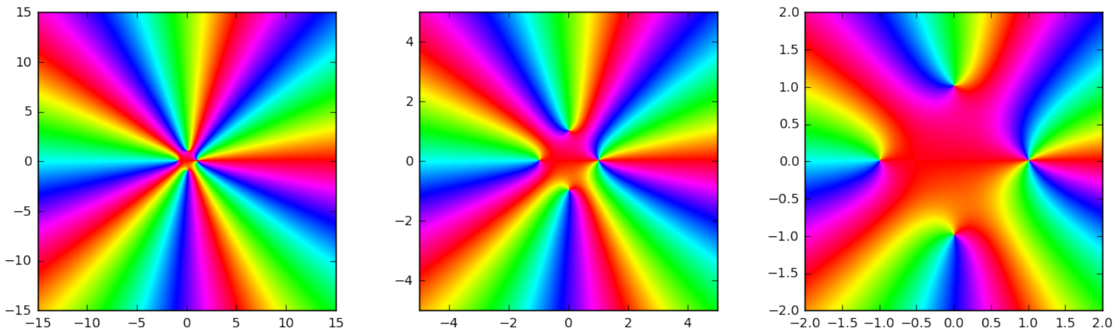
Direktna posljedica teorema 2.5.6 je sljedeći korolar.

Korolar 2.5.7. *Neka je $n \geq 0$ te pretpostavimo da su $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ i $g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$ polinomi stupnja ne većeg od n. Ako je $f(z_j) = g(z_j)$ za n+1 različitih točaka $z_0, z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$, tada je $a_j = b_j$ za $j = 0, \cdots, n$. Posebno, $f(z) = g(z)$ za sve $z \in \mathbb{C}$.*

Primjer

Polinom $f(z) = z^5 - z^4 - z + 1$ ima nul-točke u $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ i $z_4 = -i$. Nul-točka z_1 ima multiplicitet jednak 2 dok preostale nul-točke sve imaju multiplicitet jednak 1. Dobivamo kanonsku faktorizaciju od f

$$f(z) = (z - 1)^2 (z + 1)(z^2 + 1).$$



Slika 2.13: Zumiranje u fazni portret polinoma $f(z) = z^5 - z^4 - z + 1$

Pogledajmo ponovo fazni portret ove funkcije. Na lijevom prozoru slike 2.13 s najmanjim zumiranjem svi detalji su neprimjetni te samo vidimo fazni portret sličan onome od funkcije z^5 što je posljedica (2.21). Ukoliko povećamo faktor zumiranja pojave se nul-točke.

Gledajući gornje slike i fokusirajući se na jednu boju, primjerice žutu, primjećujemo da je svaka nul-točka povezana s točkom beskonačnosti s izokromatskom linijom te boje. Obratno, svaka od pet žutih linije koje izviru iz $z = \infty$ završavaju u nul-točki.

Ako bi se ova zapažanja mogla potvrditi za generalne polinome to bi nam dalo intuitivnu interpretaciju fundamentalnog teorema algebre, to jest broj žutih linija koje izviru iz beskonačnosti je jednak stupnju polinoma, svaka linija završava u nul-točki i broj linija koje završavaju u nul-točki je jednak multiplicitetu nul-točke.

Možemo ići i dalje, fiksiramo nul-točku z_0 od f i razmatramo sve izokromatske linije (od svih boja) koje završavaju u z_0. Te linije popunjavaju neko područje B u kompleksnoj ravnini. Ako izaberemo točku iz B i pustimo ju putem odgovarajuće izokromatske linije na kraju će završiti u z_0. Dakle, B je *korito privlačnosti* za nultočku z_0. Uzimajući u obzir sve nul-točke od f, njihova korita privlačnosti (skoro) prekrivaju cijelu kompleksnu ravninu.

Racionalne funkcije

U sljedećem koraku izgradnje kompleksnih funkcija dodatno dopuštamo dijeljenje te promatramo racionalne funkcije. Racionalne funkcije su kvocijenti polinoma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n}, \tag{2.22}$$

gdje je $q \not\equiv 0$. Prirodna domena od f se sastoji od svih točaka $z \in \mathbb{C}$ gdje q ne nestaje. Ukoliko brojnik p i nazivnik q imaju zajedničku nul-točku z_0 s multiplicitetima m_p i m_q, respektivno, tada zajednički faktor $(z - z_0)^m$ s $m := \min(m_p, m_q)$ se može poništiti u kvocijentu p/q. Ako to napravimo za sve zajedničke nul-točke od p i q tada dobijemo *ireducibilnu* reprezentaciju racionalne funkcije. Stupanj racionalne funkcije se definira s $\deg f = \max(\deg p, \deg q)$ gdje je $f = p/q$ ireducibilna reprezentacija od f.

Da bi proširili racionalnu funkciju na cijeli $\hat{\mathbb{C}}$ prikazujemo ju u njenoj ireducibilnoj formi $f = p/q$. U rađenju takvog prikaza smo joj možda već i proširili domenu. Nadalje definiramo $f(z) := \infty$ za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje je $q(z) = 0$. Na kraju definiramo

$$f(\infty) := \begin{cases} \infty, & \deg p > \deg q \\ a_n/b_n, & \deg p = \deg q = n \; . \\ 0, & \deg p < \deg q. \end{cases} \tag{2.23}$$

Dane definicije su prirodne jer garantiraju neprekidnost proširene funkcije.

Teorem 2.5.8. *Svaka racionalna funkcija f je neprekidno preslikavanje $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $f = p/q$ ireducibilna forma od f. Tada je f neprekidna u svim točkama $z_0 \in \mathbb{C}$ gdje je $q(z_0) \neq 0$. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ i $q(z_0) = 0$ tada stavljamo $f(z_0) := \infty = \lim_{z \to \infty} f(z)$. Konačno, definicija od $f(\infty)$ je takva da se podudara s $\lim_{z \to \infty} f(z)$. □

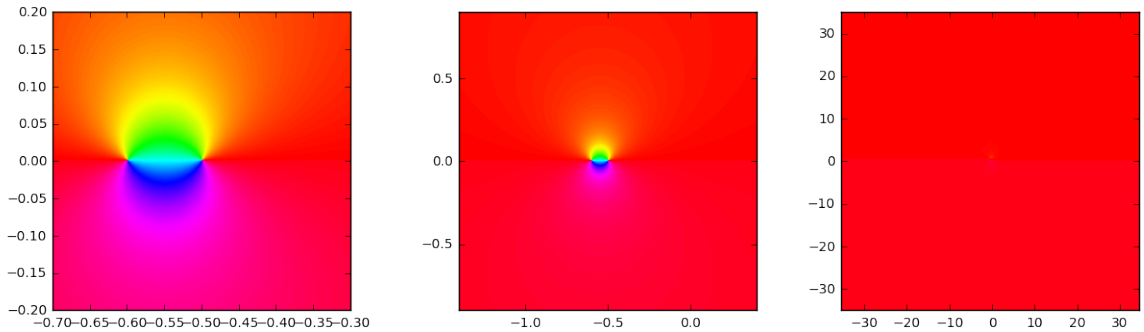
Nul-točke i polovi

Nul-točke proširene funkcije f na $\mathbb{C}$ se podudaraju s nul-točkama od p. Ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ nul-točka od p s multiplicitetom k tada $f(z) \sim c(z - z_0)^k$ u z_0 s $c \neq 0$ i kažemo da je z_0 nul-točka od f multipliciteta k. Analogno, ako $z_0 \in \mathbb{C}$ nul-točka od q s multiplicitetom k tada $f(z) \sim c(z-z_0)^{-k}$ i z_0 se naziva pol od f multipliciteta k. Definiramo $k := \deg p - \deg q$. Ako je $k < 0$ tada je točka beskonačnosti nul-točka multipliciteta $|k|$, a ako je $k > 0$ tada f ima pol multipliciteta k u beskonačnosti.

Fazni portret je sve ove činjenice uzeo u obzir te stoga izgleda slično kao portreti odgovarajućih potencija $c(z - z_0)^k$ u blizini polova i nul-točaka.

Poništavanje nul-točaka i polova

U kontrastu s nul-točkama polinoma koje uvijek imaju dalekosežni efekt, nul-točke i polinomi racionalnih funkcija na malim udaljenostima mogu gotovo poništiti jedni druge te tako postanu nevidljivi na faznom portretu. Taj efekt je prikazan na slici 2.14 za par nultočke i pola koji se približavaju centru prikazanog kvadrata.



Slika 2.14: Skoro poništavanje nul-točke i pole na može biti nevidljivo - primjer je funkcija $z + 0.5/z + 0.6$

2.6 Redovi potencija

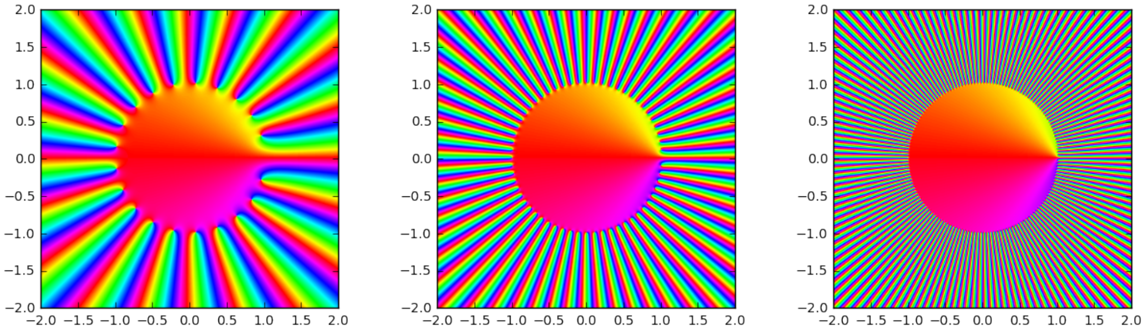
Koristeći samo četiri osnovne aritmetičke operacije ne možemo ići izvan klase racionalnih funkcija te stoga koristimo druge metode konstrukcije.

Primjer

Promotrimo beskonačni niz kompleksnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ i definirajmo niz polinoma

$$f_0(z) = a_0, \quad f_1(z) = a_0 + a_1 z, \quad f_2(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2, \quad \ldots .$$

Zanima nas što se događa s funkcijama f_n kada im se stupanj poveća. Za konkretan primjer neka su svi koeficijenti jednaki 1, to jest $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = 1$. Slika 2.15 prikazuje fazne portrete odgovarajućih polinoma stupnja 20, 60 i 150.



Slika 2.15: Fazni portret polinoma f_{20}, f_{60} i f_{150}

Primjetimo da je ponašanje ovih faznih portreta dosta drugačije, ovisno o području koje promatramo. Postoji područje u obliku diska gdje se obojanost ne mijenja puno kad se n poveća i postaje stalno za dovoljno velike n. S druge strane, u vanjskom području pruge se mijenja dosta brzo i nijedna definitvna boja se ne može dodijeliti točki u tom području za velike n. Naravno, ova tri fazna portreta nam ne govore ništa o pravom ponašanju funkcija f_n. Vidjet ćemo da ova zapažanja nisu slučajna.

Međutim, dani primjer se može jednostavno objasniti. Polinom f_n je suma konačnog geometrijskog reda koji se može eksplicitno izračunati. Za $z \neq 1$ imamo

$$f_n(z) = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}$$

i $f_n(1) = n$. Tada niz $(f_n(z))$ konvergira k limesu $1/(1 - z)$ ako je $|z| < 1$ i divergira za sve $z \in \mathbb{C}$ za koje je $|z| \geq 1$.

Redovi potencija

Istražimo sada općeniti slučaj prethodnog primjera. Fiksirajmo $z_0 \in \mathbb{C}$ i neka je $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ niz kompleksnih brojeva. Tada se

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots \tag{2.24}$$

naziva *red potencija* oko točke z_0. Brojevi a_k se nazivaju *koeficijenti*. *Parcijalne sume* reda su polinomi f_n definirani s

$$f_n(z) := a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n(z - z_0)^n. \tag{2.25}$$

Kažemo da red potencija *konvergira u točki* z ako niz kompleksnih brojeva $f_n(z)$ konvergira te njegov limes nazivamo *suma* reda potencija (2.24) u z. Inače red potencija (2.24) *divergira u točki* z. Ako red potencija konvergira za sve točke z u skupu D, njegova suma $f(z)$ definira kompleksnu funkciju $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ što zapisujemo s

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots . \tag{2.26}$$

Krug konvergencije

Sljedeći rezultat pokazuje da ponašanje reda potencija u gornjem primjeru je tipično, to jest red konvergira za sve z unutar *kruga konvergencije* oko z_0, izvan kruga red divergira. Označimo s α limes superior od $\sqrt[k]{|a_k|}$ i stavimo $R := 1/\alpha$ s uobičajenim dogovorom $1/0 := \infty$ i $1/\infty := 0$,

$$R := 1\Big/ \limsup_{h\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}. \tag{2.27}$$

R nazivamo *radijus konvergencije*.

Teorem 2.6.1 (Cauchy-Hadamard)**.** *Red potencija* (2.24) *konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z - z_0| < R$ i divergira za sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je $|z - z_0| > R$. Za svaki r za koji vrijedi $0 < r < R$ red konvergira apsolutno i uniformno na zatvorenom krugu $K_r := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.*

Dokaz teorema 2.6.1 nalazi se u [3].

Svojstva sume reda

Suma konvergentnog reda potencija definira funkciju na krugu konvergencije D. U sljedećem teoremu iskazujemo jedno njihovo važno svojstvo. Dokaz teorema nalazi se u [3].

Teorem 2.6.2 (Neprekidnost sume)**.** *Suma reda potencija je neprekidna funkcija na krugu konvergencije.*

Holomorfne funkcije

Do sada smo promatrali redove potencija i funkcije koje su nastale kao njihove sume. Sada nas zanima obrat, to jest ako dobivenu funkciju f na nekoj domeni $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ možemo lokalno prikazati kao sumu reda potencija.

Definicija 2.6.3. *Funkcija $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ je holomorfna u točki z_0 iz $\mathbb{C}$ ako postoji neprazan krug $D_r(z_0) \subset D$ oko z_0 tako da restrikcija od f na $D_r(z_0)$ je suma konvergentnog reda potencija sa središtem z_0,*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r. \tag{2.28}$$

Primjetimo da prema definiciji, holomorfnost od f u z_0 implicira da je z_0 unutrašnja točka domene D.

Operacije s holomorfnim funkcijama

Slijedi teorem o holomorfnosti suma, produkata, kvocijenta i kompozicija funkcija čiji dokaz se može pronaći u [3].

Teorem 2.6.4. *Ako su f i g holomorfne u z_0, tada su i $f + g$, $f - g$ i fg holomorfne u z_0. Ako je $g(z_0) \neq 0$ tada je i f/g holomorfna u z_0. Ako je f holomorfna u z_0 i g holomorfna u $w_0 := f(z_0)$ tada je $g \circ f$ holomorfna u z_0.*

Primjetimo da kompozicija $g \circ f$ ne treba postojati na domeni od f, nego samo u dovoljno maloj okolini od z_0.

2.7 Uvod u holomorfne funkcije

Funkcija $f : D \to \hat{\mathbb{C}}$ je holomorfna u točki $z_0 \in D$ ako se može razviti u red potencija u z_0, to jest postoji otvoreni krug D_0 sa središtem u z_0 koji je sadržan u D i

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_k(z - z_0)^k + \ldots \quad z \in D_0. \tag{2.29}$$

Sljedeći teorem pokazuje da suma f konvergentnog reda potencija nije samo holomorfna u svojem središtu z_0, nego i na bilo kojoj točki z_1 iz njenog kruga konvergencije. Nadalje nam govori kako se koeficijenti reda potencija u z_1 mogu odrediti iz koeficijenata iz z_0. Dokazi sljedećeg teorema 2.7.1 i leme 2.7.3 nalaze se u [3].

Teorem 2.7.1 (Weierstrassov teorem preuređivanja)**.** *Suma reda potencija je holomorfna u svakoj točki njegovog kruga konvergencije. Ako je f dana s* (2.29) *za $|z - z_0| < r$ i z_1 zadovoljava $|z_1 - z_0| < r$ tada je*

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_1) + \ldots + b_k(z - z_1)^k + \ldots \quad |z - z_1| < r_1, \tag{2.30}$$

gdje je $r_1 := r - |z_1 - z_0|$ i koeficijenti b_k su dani s konvergentnim nizom

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n \Big(z_1 - z_0\Big)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{2.31}$$

Definicija 2.7.2. *Za kompleksnu funkciju $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kažemo da je holomorfna na A ako je A podskup od D i f je holomorfna u svakoj točki od A. Kažemo da je f holomorfna funkcija ako je holomorfna u svakoj točki domene. Funkcija koja je holomorfna na cijeloj kompleksnoj ravnini se naziva cijela funkcija.*

Lema 2.7.3. *Za svaku kompleksnu funkciju $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ skup A_f svih točki iz D u kojima je f holomorfna je otvoren.*

Iz teorema 2.6.2 slijedi da je svaka holomorfna funkcija neprekidna. Teorem 2.6.4 nam govori da su suma, razlika i produkt dvije holomorfne funkcije f i g holomorfne na D, dok je kvocijent f/g holomorfan na skupu $\{z \in D : g(z) \neq 0\}$. Također, kompozicija $g \circ f$ holomorfnih funkcija $f : D_f \to D_g$ i $g : D_g \to \mathbb{C}$ je holomorfna na D_f.

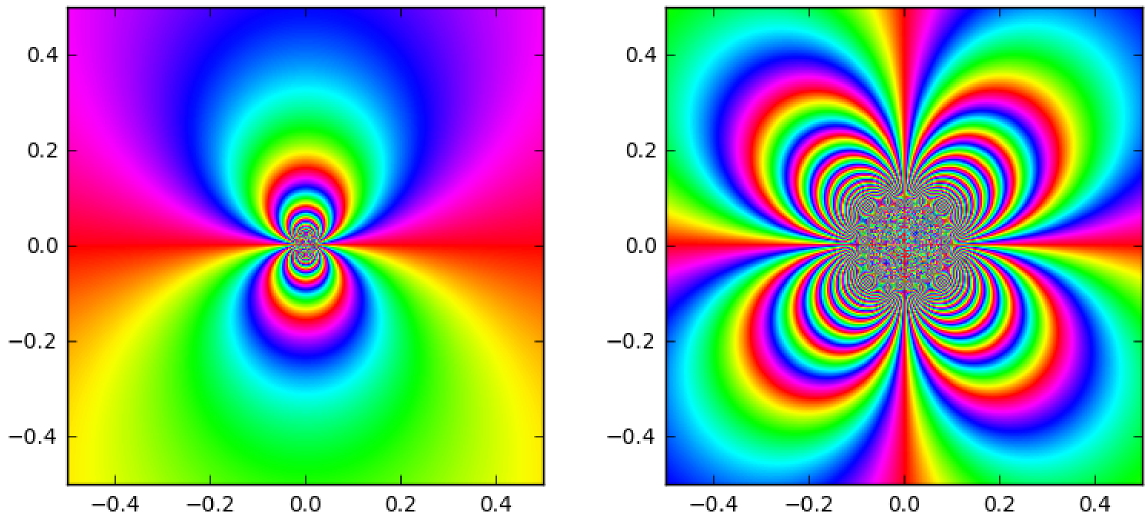
Polinomi, eksponencijalna funkcija i trigonometrijske funkcije sinus i kosinus su cijele funkcije. Racionalna funkcija f je holomorfna na skupu $\{z \in \mathbb{C} : f(z) \neq \infty\}$.

Primjer 2.7.4. *Funkcija f definirana na probušenoj ravnini $\dot{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ s $f(z) = \exp(1/z)$ je holomorfna prema teoremu 2.6.4. Ova funkcija ne može biti proširena do holomorfne funkcije u $z_0 = 0$ s obzirom da bi proširena funkcija bila neprekidna u z_0, ali $f(z) \to \infty$ ako je $z \in \mathbb{R}_+$ i $z \to 0$ dok $f(z) \to 0$ ako je $-z \in \mathbb{R}_+$ i $z \to 0$.*

Slika 2.16 prikazuje fazne portrete funkcija $f(z) = \exp(1/z)$ i $f(z) = \exp(1/z^2)$ u kvadratu definiranom s $\operatorname{Re} z < 1$, $\operatorname{Im} z < 1$. Divlje ponašanje blizu središta je tipično za funkcije s takozvanim bitnim singularitetom.

Primjer 2.7.5 (Jacobi Theta funkcije)**.** *Zanimljiva porodica cijelih funkcija su Jacobi Theta funkcije koje su dane s nizom*

$$\vartheta(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2k\pi i z}, \qquad z \in \mathbb{C},$$



Slika 2.16: Fazni portret funkcija $f(z) = \exp(1/z)$ i $f(z) = \exp(1/z^2)$

gdje je q kompleksni parametar s modulom manjim od jedan, to jest $|q| < 1$. Da bi pokazali da je ϑ cijela, promotrimo red potencija

$$f(z) := \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2} z^k = qz + q^4 z^2 + q^9 z^3 + q^1 6z^4 + \dots .$$

Ovaj red konvergira za sve $z \in \mathbb{C}$ jer vrijedi

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|q|^{k^2}} = \limsup_{k\to\infty} |q|^k = 0,$$

i iz toga slijedi da je funkcija f cijela funkcija. Funkcija g definirana s $g(z) := \exp(2\pi i z)$ je također cijela i nema nul-točaka u $\mathbb{C}$ te je stoga i njena recipročna funkcija $1/g$ cijela. Konačno,

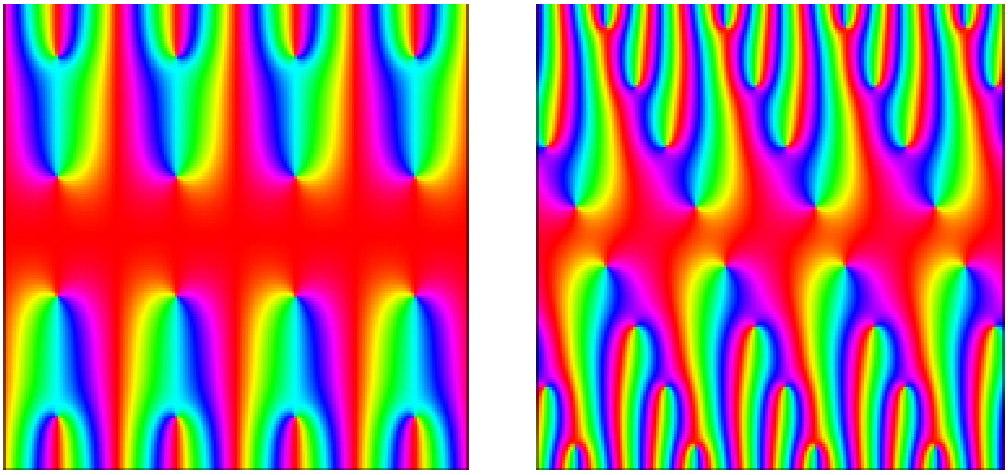
$$\vartheta(z) = 1 + f(g(z)) + f(1/g(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcija g, i posljedično ϑ, je periodična funkcija s periodom 1. Parametar q je često reprezentiran s $q = \exp(i\pi\tau)$ gdje je τ kompleksan broj s $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Slika 2.17 prikazuje fazne portrete dvije Jacobi Theta funkcije s parametrima $\tau = i$ i $\tau = -1/4 + i/2$ u kvadratu $\operatorname{Re} z < 2$, $\operatorname{Im} z < 2$.

Lokalne normalne forme

Sljedeći cilj je generalizirati teorem o faktorizaciji polinoma.



Slika 2.17: Fazni portret dvije Jacobi Theta funkcije, izvor [3]

Teorem 2.7.6 (Lokalna normalna forma)**.** *Neka je $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna na D. Ako f nije konstantna u blizini od $z_0 \in D$ tada postoje pozitivni cijeli broj m i holomorfna funkcija $g : D \subset \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ s $g(z_0) \neq 0$ takvi da za sve $z \in D$ vrijedi*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^m g(z). \tag{2.32}$$

Cijeli broj m i funkcija g su jedinstveni.

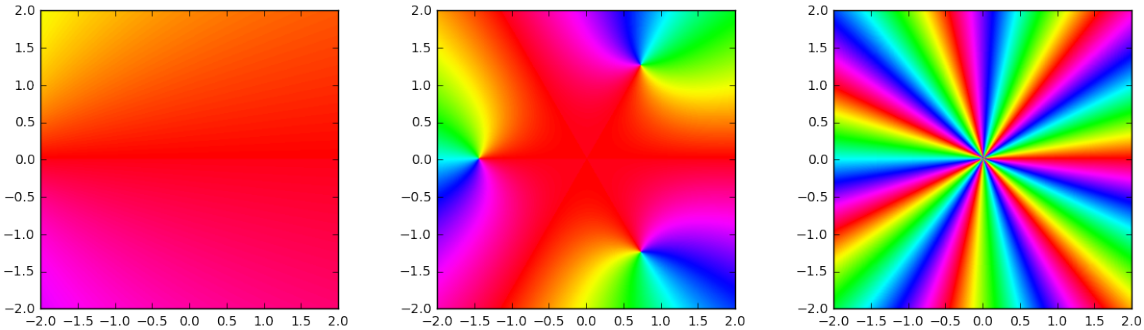
Dokaz teorema 2.7.6 nalazi se u [3].

Red funkcije u točki

Normalna forma iz teorema 2.7.6 opisuje lokalno ponašanje holomorfne funkcije u blizini neke točke z_0. Najbitniji parametar u ovoj reprezentaciji je cijeli broj m.

Definicija 2.7.7. *Cijeli broj m u prikazu* (2.32) *se zove red ili multiplicitet funkcije f u z_0 i pišemo $m = ord(f, z_0)$. Ako je f konstantna u blizini od z_0 definiramo $ord(f, z_0) := \infty$. Posebno, ako je $f(z_0) = 0$ tada kažemo da je m red ili multiplicitet nultočke z_0*

Red $m = \mathrm{ord}(f, z_0)$ funkcije f u z_0 se može lako iščitati iz faznog portreta. Slika 2.18 prikazuje tri tipična fazna portreta. Slike lijevo i u sredini odgovaraju slučajevima kada $f(z_0) \neq 0$. Slučaj za $m = 1$ je prikazan skroz lijevo. Ako je m veći od 1 vidimo obojano sedlo. Slika za $m = 3$ je prikazana u sredini. U oba slučaja je broj izokromatskih linija koje prolaze kroz z_0 jednak m, to jest $2m$ izokromatskih zraka izvire iz z_0.



Slika 2.18: Fazni portret u blizini točke z_0 za normalne forme

Ako je z_0 nul-točka reda m dobivamo fazni portret na desnoj strani. Ovdje se izokromatske linije svih boja susreću u z_0 i broj takvih linija pojedine boje je jednak m. Za objašnjenje ovih zapažanja primjetimo da je $g(z)$ skoro konstantna i blizu $g(z_0)$ ako je z blizu z_0. Lako se vidi da se faza od f ne mijenja i fazni portreti su lagano poremećeni ako je g zamjenjena s $g(z_0)$.

2.8 Holomorfne funkcije na ravninskim domenama

Želimo dobiti nekoliko osnovnih rezultata o holomorfnim funkcijama.

Kao što smo već vidjeli u odjeljku 2.7, prirodno je zahtjevati da skup domene D holomorfne funkcije bude otvoreni skup. Sada ćemo još dodatno pretpostaviti da je D povezan. Ovo nije prejaka pretpostavka s obzirom da svaki otvoreni skup u $\mathbb{C}$ je disjunktna unija domena, no dosta će nam pomoći pojednostaviti stvari. Ta pretpostavka je posebno važna kod dizanja lokalnih iskaza o redovima potencija na globalne rezultate o holomorfnim funkcijama.

Teorem 2.8.1 (Teorem identiteta, princip jedinstvenosti)**.** *Neka su f i g holomorfne funkcije na domeni D. Ako postoji niz $(z_n) \subset D \setminus \{z_0\}$ takav da $z_n \to z_0 \in D$ i $f(z_n) = g(z_n)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ tada je $f(z) = g(z)$ za sve $z \in D$.*

Dokaz teorema 2.8.1 nalazi se u [3].

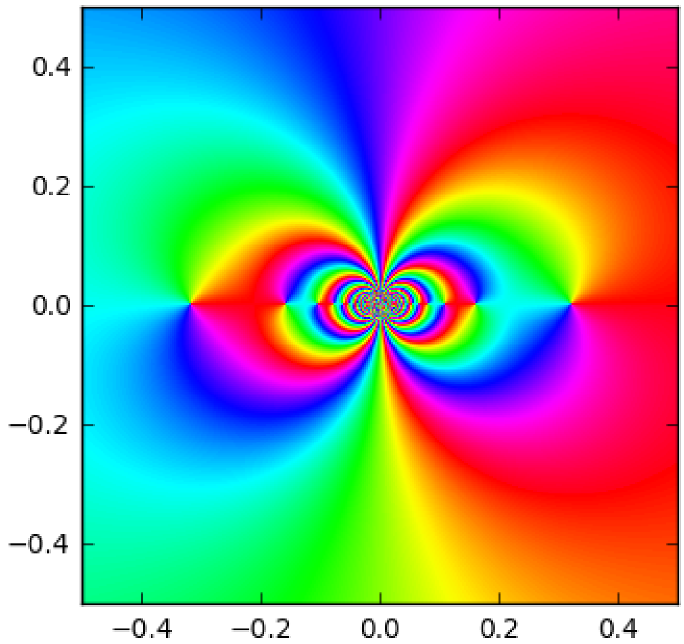
Nultočke holomorfne funkcije

Prethodni teorem nam daje začuđujuću činjenicu da funkcija koja je holomorfna na domeni je u potpunosti određena svojim vrijednostima na proizvoljno malom krugu. Slijedi još jedan rezultat koji se tiče nultočaka takve funkcije. Dokaz tog rezultata može se pronaći u [3].

Korolar 2.8.2. *Neka je $f \neq 0$ holomorfna funkcija na domeni D i K kompaktni podskup od D. Tada je broj nultočaka funkcije f konačan.*

Međutim holomorfna funkcija $f \neq 0$ može imati i beskonačno mnogo nultočaka na D. Ukoliko se to dogodi nultočke moraju imati gomilište z_0 u $\hat{\mathbb{C}}$. S obzirom da z_0 se ne može nalaziti u D, mora biti na granici od D (to promatramo kao podskup od $\hat{\mathbb{C}}$). Za cijelu funkciju jedino moguće gomilište nultočaka je točka beskonačnosti. Primjer takve funkcije je trigonometrijska funkcija sinus. Zamjenom varijable z s $1/z$ dobivamo sljedeći primjer.

Primjer 2.8.3. *Funkcija* $\sin(1/z)$ *je holomorfna na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *i ima nultočke* $z_k = 1/(k\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, *koje se gomilaju u ishodištu. Slika 2.19 prikazuje ovu funkciju u kvadratu* $\operatorname{Re} z < 1/2$, $\operatorname{Im} z < 1/2$.



Slika 2.19: Fazni portret funkcije $\sin(1/z)$

Ekstremi

Sa sljedećim rezultatom dobivamo generalizaciju principa minumuma i maksimuma za polinome. Njegov dokaz nalazi se u [3].

Teorem 2.8.4 (Princip maksimuma i minimuma)**.** *Neka je $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Tada $|f|$ nema lokalni maksimum na D i svaki lokalni minimum od $|f|$ je nul-točka od f.*

Princip maksimuma iz prethodnog teorema se može preformulirati na sljedeći način. Ako je f holomorfna na domeni D i $|f|$ poprima lokalni maksimum u $z_0 \in D$ tada je f konstantna na D.

Poglavlje 3

Vizualizacija kompleksnih funkcija

3.1 Svojstva holomorfnih funkcija

Princip otvorenog preslikavanja

Sljedeće zanimljivo svojstvo holomorfnih funkcija je iskaz o lokalnom ponašanju nekonstantnih holomorfnih funkcija.

Praslika $f^{-1}(V)$ otvorenog skupa V je uvijek otvoreni skup kada je f neprekidna funkcija. Analogna izjava za sliku $f(U)$ otvorenog skupa U nije općenito istinita, no istinita je za nekonstantne holomorfne funkcije.

Teorem 3.1.1 (Princip otvorenog preslikavanja)**.** *Neka je $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfna i nekonstantna na domeni D. Ako je $U \subset D$ otvoreni skup tada je $f(U)$ također otvoreni.*

Dokaz teorema 3.1.1 može se pronaći u [3]. Princip otvorenog preslikavanja nam baca novo svjetlo na princip minimuma i maksimuma. Naime, za svaki $z_0 \in D$ slika $f(U)$ svake okoline U od z_0 sadrži okolinu od $f(z_0)$ tako da $|f|$ ne može imati ni lokalni maksimum ni pozitivni lokalni minimum u z_0.

Jedinstvenost za fazne portrete

Kako bi utvrdili do koje mjere je holomorfna funkcija određena sa svojim faznim portretom, iskazujemo još jednu izravnu posljedicu principa otvorenog preslikavanja.

Korolar 3.1.2. *Ako je f holomorfna na domeni D i jedna od funkcija $|f|$,* $\operatorname{Re} f$ *ili* $\operatorname{Im} f$ *je konstantna na otvorenom podskupu U od D tada je f konstantna na D.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da f nije konstantna. Tada iz teorema 3.1.1 slijedi da je $f(U)$ otvoreni skup. Ako je $|f|$ konstantna tada bi $f(U)$ bio sadržan u krugu $\{z :$

$|z| = |f|\}$ kompleksne ravnine te iz toga slijedi da $f(U)$ nije otvoren što je kontradikcija te f mora biti konstantna. Ako je $\operatorname{Re} f$ konstantna tada bi $f(U)$ bio sadržan u vertikalnoj liniji $\{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} f\}$ kompleksne ravnine te iz toga ponovo slijedi da $f(U)$ nije otvoren. Slično, ako je $\operatorname{Im} f$ konstantna tada bi $f(U)$ bio sadržan u vertikalnoj liniji $\{z : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} f\}$ kompleksne ravnine te iz toga slijedi da $f(U)$ nije otvoren. Dakle, u svim slučajevima dolazimo do kontradikcije te slijedi da je f konstantna. □

Sljedeći rezultat nam govori da holomorfne funkcije s istim faznim portretom na nekoj domeni su zapravo iste. Dakle, fazni portreti doista pružaju individualan prikaz holomorfnih funkcija.

Teorem 3.1.3. *Ako su f i g holomorfne funkcije na domeni D i imaju istu fazu (fazni portret) na otvorenom skupu $U \subset D$ tada je g pozitivni višekratnik od f, to jest $g(z) = cf(z)$ za sve $z \in D$ i neku pozitivnu konstantu c.*

Dokaz. Tvrdnja je trivijalno istinita ukoliko je f nul-funkcija. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. To znači da možemo naći krug $V \subset U$ koji ne sadrži nultočke od f. Tada je kvocijent g/f holomorfan na V i pišući $f = |f|\psi(f)$ i $g = |g|\psi(g)$ gdje je po pretpostavci teorema $\psi(f) = \psi(g)$ vidimo da g/f poprima samo pozitivne realne vrijednosti. Tada prema korolaru 3.1.2 slijedi da g/f mora biti pozitivna konstanta na cijelom D. □

3.2 Primjeri osnovnih vrsta funkcija

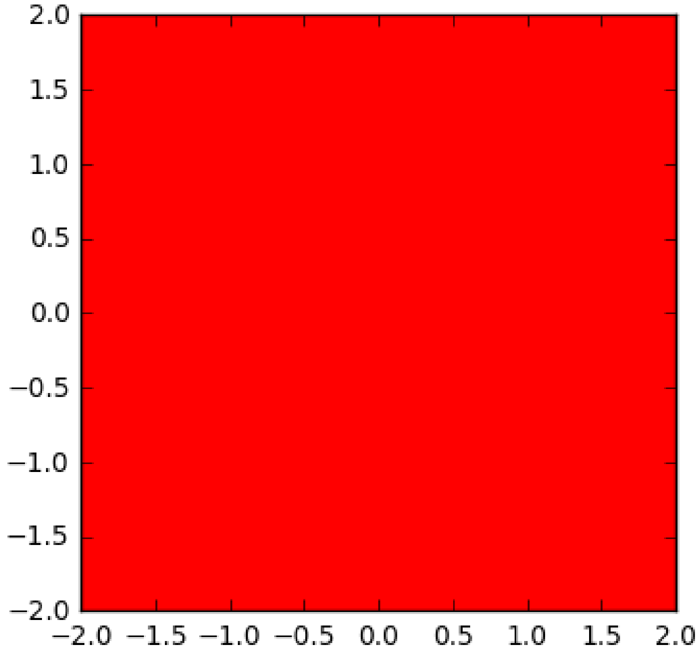
Slijedi prikaz faznih portreta na više primjera različitih kompleksnih funkcija.

Konstanta

Konstantna funkcija dodjeljuje isti kompleksni broj svakom kompleksnom broju iz njene domene. Dakle prirodno je zaključiti da će se prikaz takvih funkcija sastojati od jedne boje konstantnog inteziteta što se može vidjeti na slici 3.1.

Identiteta

Na slici 3.2 se nalazi prikaz *funkcije identitete* koja svakom kompleksnom broju dodjeljuje samog sebe. Primjetimo da se sve boje sreću u jedinoj nultočki funkcije, a respored boja je isti kao na kotaču boja, to jest pozitivne vrijednosti poprimaju crvenu boju, a negativne plavu.



Slika 3.1: Fazni portret funkcije $f(z) = 1$ na $|\operatorname{Re} z| < 2$, $|\operatorname{Im} z| < 2$

Konjugat

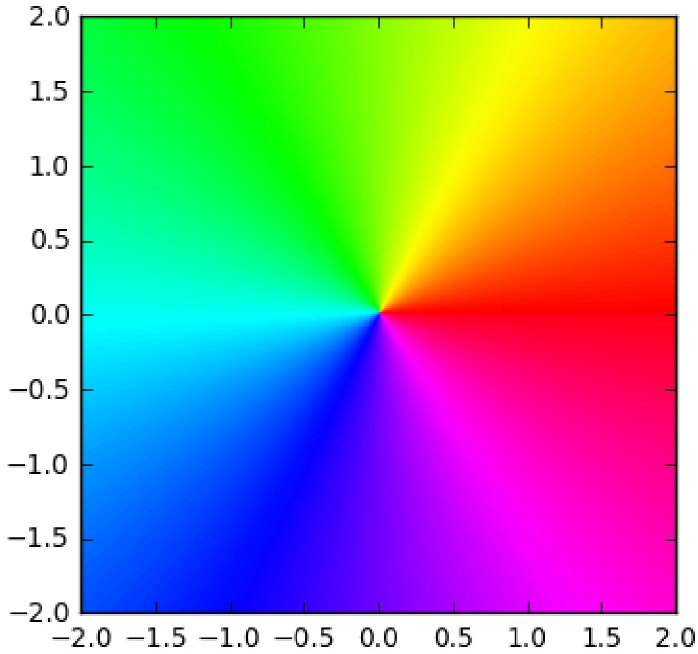
Svakom kompleksnom broju dodijeljujemo njegov konjugat. Prikaz *funkcije konjugata* nalazi se na slici 3.3. Fazni portret konjugata je sličan onom od identitete, imaju istu nultočku dok su boje preslikane simetrično s obzirom na x os što se može i očekivati s obzirom na definiciju kojugiranog kompleksnog broja.

Linearna funkcija

Na slici 3.4 prikazana je *linearna funkcija* $f(z) = (1 + i)z + 1$. Primjetimo da se na slici jasno vidi nul-točka funkcije $z_0 = -1/2 + 1/2i$.

Polinomi stupnja dva

Kvadratna funkcija $f(z) = z^2$ i *polinom stupnja dva* $f(z) = z^2 - 2$ prikazani su na slici 3.5. Primjetimo da su njihovi fazni portreti dosta različiti. Kvadratna funkcija ima jednu nultočku stupnja 2 što se lako može iščitati iz slike. Naime, sve boje se sreću u jednoj točki, to je nultočka, a ako fiksiramo jednu proizvoljnu boju vidimo da iz nultočke uvijek izviru



Slika 3.2: Fazni portret funkcije $f(z) = z$ na $|\operatorname{Re} z| < 2$, $|\operatorname{Im} z| < 2$

dvije zrake te boje što odgovara multiplicitetu nultočke. Na faznom portretu odabranog primjera polinoma stupnja dva vidimo dvije crne točke koje označavaju nultočke koje se razlikuju samo u predznaku te su simetrično preslikane s obzirom na y os.

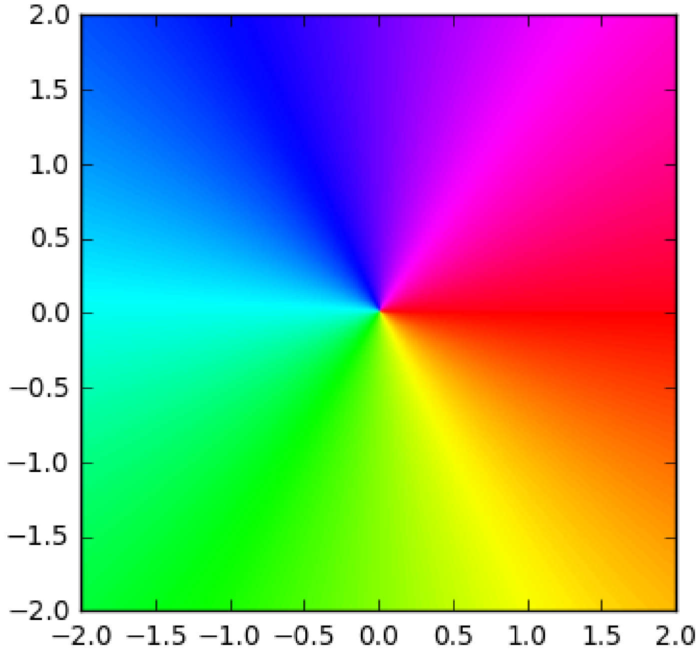
Polinomi stupnja tri

Pogledajmo dva primjera *polinoma stupnja tri*. Prvi je funkcija $f(z) = (z-2)(z+1)(z+2-i)$ koja ima tri nul-točke multipliciteta 1, dok je drugi primjer funkcija $f(z) = (z-2)(z+1)^2$ koja ima jednu nultočku multipliciteta dva i jednu multipliciteta jedan što se jasno može vidjeti iz slike 3.6.

Eksponencijalna funkcija

Na slici 3.7 se nalazi prikaz kompleksne *eksponencijalne funkcije* $f(z) = \exp z$.

Kompleksna eksponencijalna funkcija je periodična, štoviše njen period se sastoji od samo imaginarnog dijela $2\pi i$ te se stoga na slici boje vertikalno ponavljaju.



Slika 3.3: Fazni portret funkcije $f(z) = \bar{z}$ na $|\operatorname{Re} z| < 2$, $|\operatorname{Im} z| < 2$

Trigonometrijske funkcije

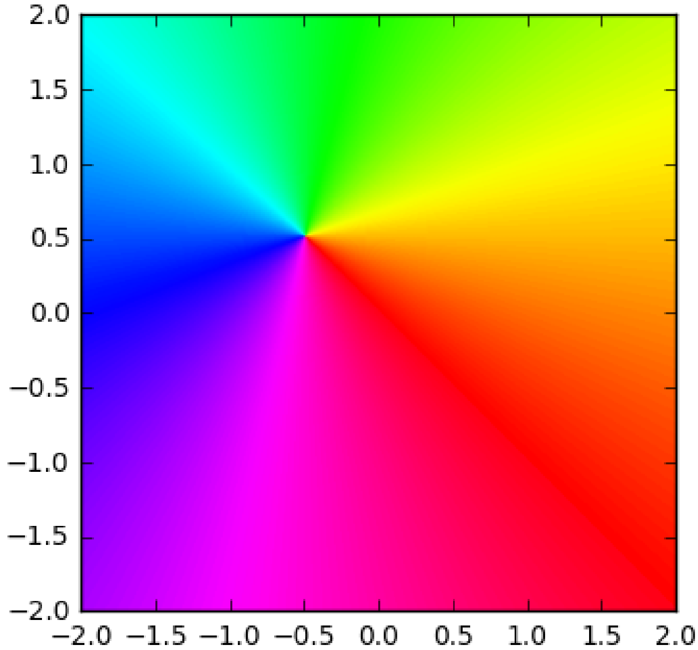
Prikaz trigonometrijske funkcije *sinus* nalazi se na slici 3.8.

Kompleksna funkcija sinus je, kao i njena realna verzija, periodična s periodom 2π. No ono što je iznenađujuće i po čemu se kompleksna i realna funkcija sinus razlikuju te što lako možemo vidjeti na faznom portretu je to što kompleksni sinus ima funkcijske vrijednosti čija apsolutna vrijednosti je veća od jedan.

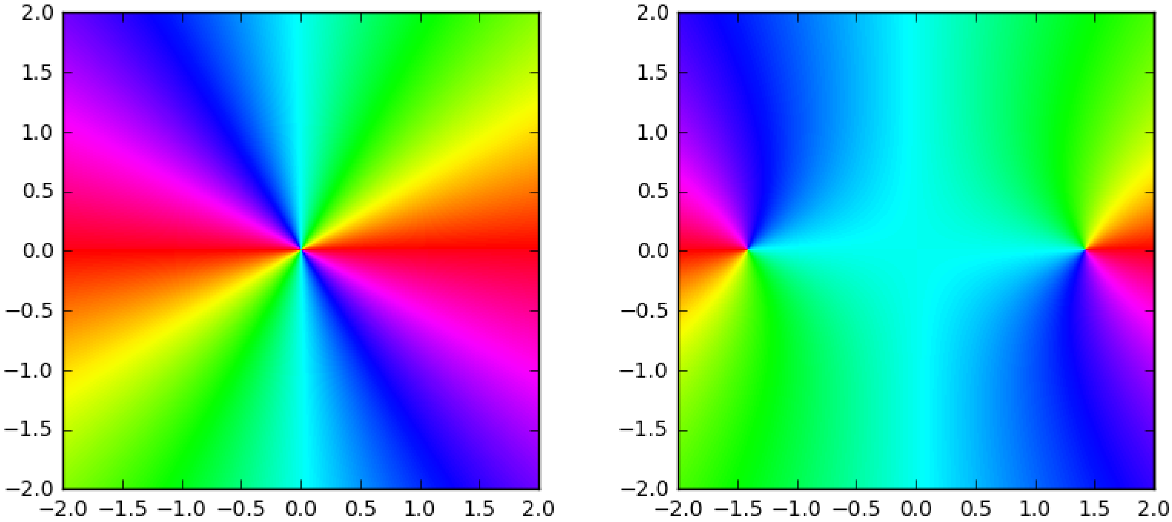
Kvadratni korjen

Funkcija *kvadratni korjen* $f(z) = \sqrt{z}$ prikazana je na slici 3.9.

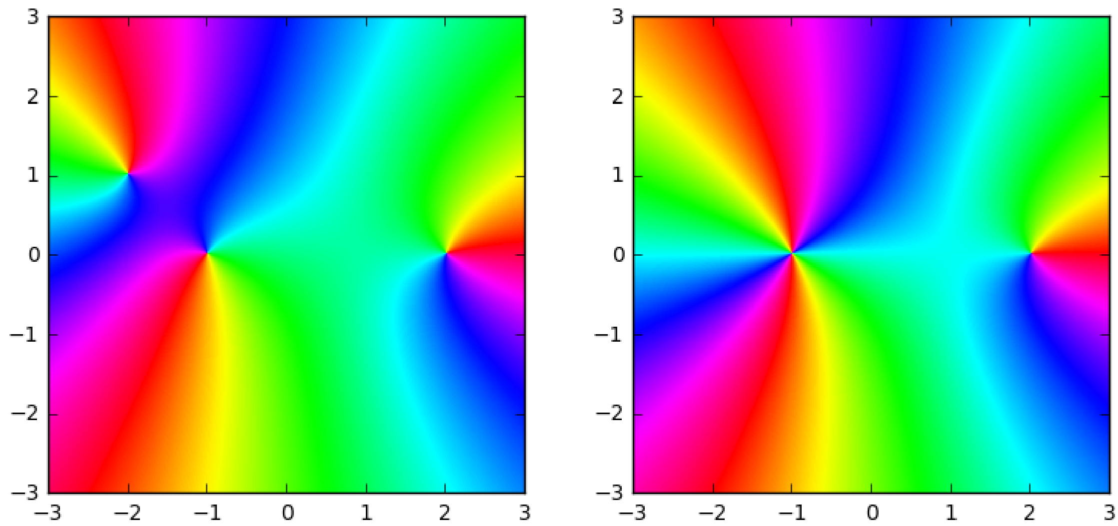
Uočimo na slici da funkcija kvadratni korjen ima ”rez” u točkama negativnog dijela realne osi dok je drugdje neprekidna. Primjetimo da je kvadratni korjen zapravo inverz kvadratne funkcije koja nije injekcija te da bi dobili inverz moramo napraviti restrikciju na domenu na kojoj je injekcija. Takva domena je primjerice poluravnina s pozitivnim dijelom realne osi.



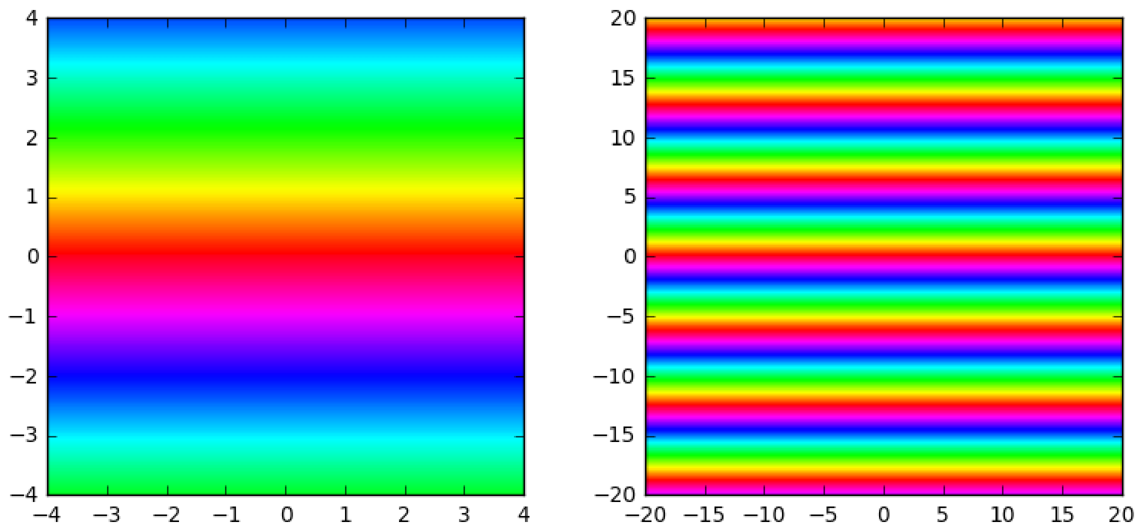
Slika 3.4: Fazni portret funkcije $f(z) = (1 + i)z + 1$ na $|\operatorname{Re} z| < 2$, $|\operatorname{Im} z| < 2$



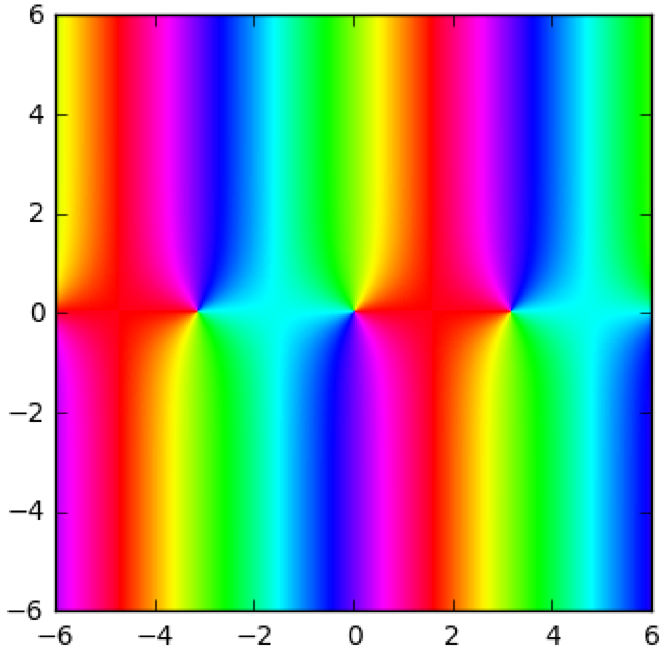
Slika 3.5: Fazni portreti funkcija z^2 i $z^2 - 2$ na $|\operatorname{Re} z| < 2$, $|\operatorname{Im} z| < 2$



Slika 3.6: Fazni portreti funkcija $(z-2)(z+1)(z+2-i)$ i $(z-2)(z+1)^2$ na $|\operatorname{Re} z| < 3$, $|\operatorname{Im} z| < 3$



Slika 3.7: Fazni portret funkcije $f(z) = \exp z$ na $|\operatorname{Re} z| < 4$, $|\operatorname{Im} z| < 4$ i na $|\operatorname{Re} z| < 20$, $|\operatorname{Im} z| < 20$



Slika 3.8: Fazni portret funkcije $f(z) = \sin(z)$ na $|\operatorname{Re} z| < 6$, $|\operatorname{Im} z| < 6$

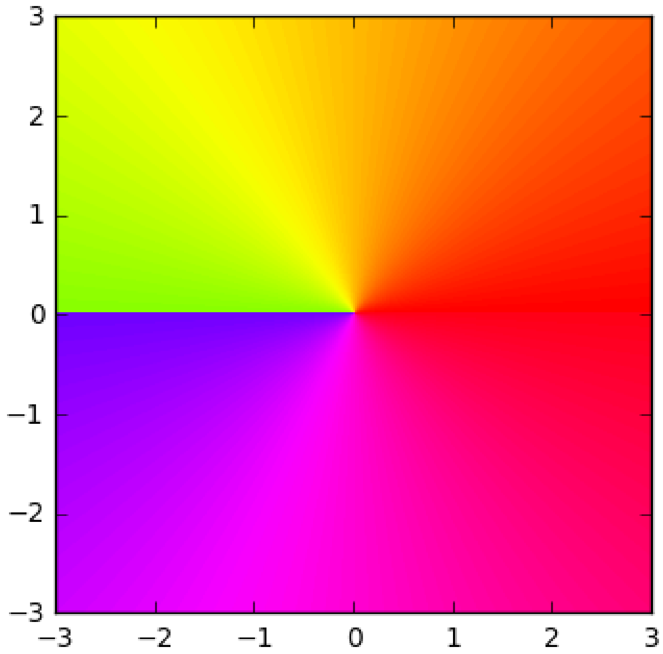
Logaritam

Na slici 3.10 prikazana je kompleksna *logaritamska funkcija* $f(z) = \log(z)$.

Primijetimo da isto kao i kvadratni korjen, fazni portret logaritma ima ”rez” duž negativnog dijela realne osi. Logaritam je inverz eksponencijalne funkcije koja nije injektivna (već periodična s periodom $2\pi i$) te stoga treba napraviti restrikciju na neku horizontalnu prugu širine 2π.

Inverz

Inverz možemo promatrati kao geometrijsku trasformaciju koja zamjenjuje unutrašnju i vanjsku stranu jediničnog kruga. Na slici 3.11 se nalazi prikaz funkcije $f(z) = 1/z$. Primjetimo da fazni portret je sličan onom funkcije identitete, razlika je samo u orijentaciji boja. Razlog tome je što identitete u $z = 0$ ima nultočku dok inverz iz našeg primjer u $z = 0$ ima pol.

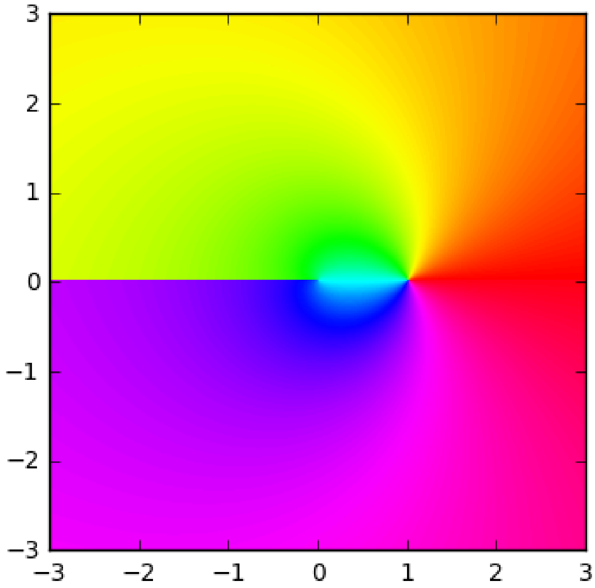


Slika 3.9: Fazni portret funkcije $f(z) = \sqrt{z}$ na $|\operatorname{Re} z| < 3$, $|\operatorname{Im} z| < 3$

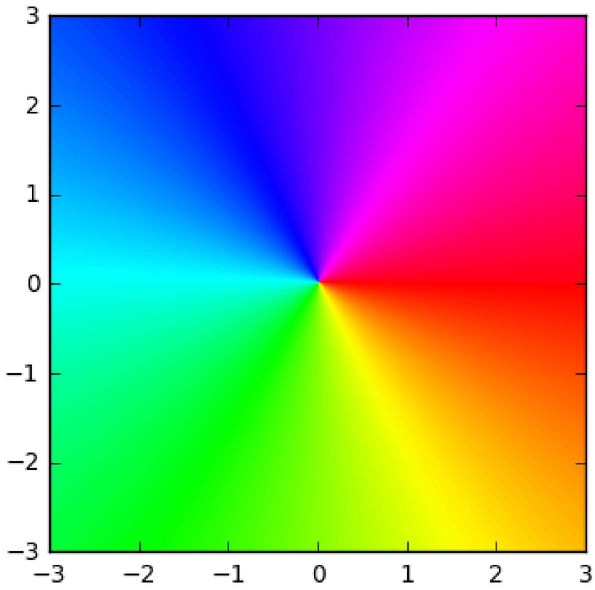
Linearni razlomak

Linearni razlomak je prikazan na slici 3.12.

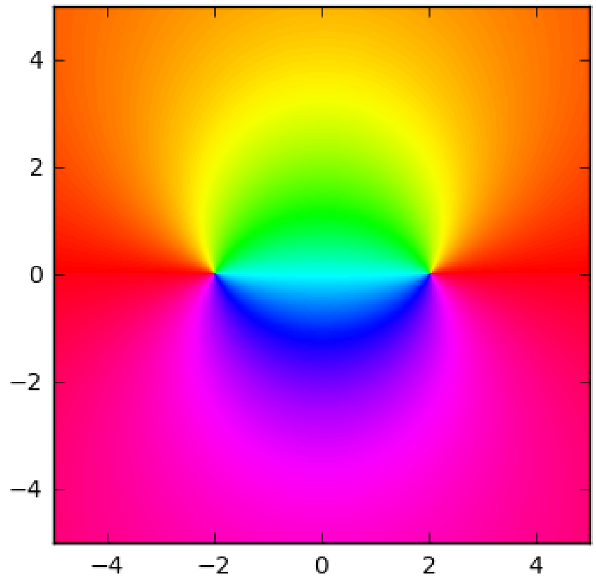
Na slici možemo vidjeti i nultočku i pol funkcije, točnije nultočka multipliciteta jedan se nalazi u točki $z_1 = 2$, a pol multipliciteta jedan se nalazi u točki $z_2 = -2$. Primjetimo da pol funkcije ima suprotnu orijentaciju boja s obzirom na nultočku te je lako prepoznatljiv na faznom portretu.



Slika 3.10: Fazni portret funkcije $f(z) = \log(z)$ na $|\operatorname{Re} z| < 3$, $|\operatorname{Im} z| < 3$



Slika 3.11: Fazni portret funkcije $f(z) = 1/z$ na $|\operatorname{Re} z| < 3$, $|\operatorname{Im} z| < 3$



Slika 3.12: Fazni portret funkcije $f(z) = \frac{z-2}{z+2}$ na $|\operatorname{Re} z| < 5$, $|\operatorname{Im} z| < 5$

Dodatak A

Korišteni Python kod

Slijedi kod u Pythonu koji se je koristio za dobivanje faznih portreta kompleksnih funkcija koje se nalaze u radu.

```
#plotfuns.py
import numpy as np
import matplotlib.cm as cm
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as colors


def fazni_portret(f, r=0.01, p=(-1, 1, -1, 1)):
    #prikazuje fazni portret zadane funkcije
    #parametri: f-dana funkcija, r-definira rezoluciju portreta, p-cetvorka koja definira podrucje prikaza u kompleksnoj ravnini
    #p se moze primiti i u drugim oblicima: kao trojka(s,r1,r2) gdje je s sredisnja tocka, r1 radijus realnog dijela, r2 radijus imaginarnog dijela,kao uredeni par (z1,z2) gdje su z1, z2 donji lijevi i gornji desni rubovi pravokutnika (z2 mora biti kompleksan), kao uredeni par (s,r) gdje je s sredisnja tocka, a r radijus za realni i imaginarni dio i kao skalar s koji definira sredisnju tocku, za radijus se uzima 1


    p = obradi_p(p)
    x = np.arange(p[0], p[1], r)
    y = np.arange(p[2], p[3], r)

    # generiranje domene
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    Z = X + 1j * Y

    # evaluacija funkcije
```

```
    fZ = f(Z)

    # Pass over for display, and return AxesImage
    return gen_portrait(Z, fZ, p)



def obradi_p(p):
  #prosiruje dobiveni p do cetvorke, vracene vrijednosti su tipa float

    if (isinstance(p, float) or isinstance(p, complex) or
        isinstance(p, int)):
        # pretvori skalar u 1-torku
        p = p,

    if len(p) == 4:
        # definirana dva intervala, gotovi smo
        outp = p
    elif len(p) == 3:
        # imamo sredisnju tocku i radijus za realni i imaginarni dio
        (s, r_re, r_im) = p

        # dozvoljen je realni ulaz
        s = complex(s)
        outp = (
            s.real - r_re, s.real + r_re,
            s.imag - r_im, s.imag + r_im
            )
    elif len(p) == 2 and type(p[1]) == complex:
        # imamo dolnju lijevu i gornju desnu tocku u kompleksnoj ravnini

        (dl, gd) = p
        dl = complex(dl)

        outp = (dl.real, gd.real, dl.imag, gd.imag)
    elif len(p) == 2:
        (s, r) = p
        s = complex(s)
        outp = (s.real - r, s.real + r, s.imag - r, s.imag + r)
    elif len(p) == 1:
        s = complex(p[0])
        outp = (s.real - 1, s.real + 1, s.imag - 1, s.imag + 1)
    else: assert(False)

    return tuple([float(v) for v in outp])


```

```
def gen_portret(Z, fZ, p, modul=False):
    #prikazuje fazni portret s dobiven poljem kompleksnih brojeva

    #razdvajamo f(Z), faza je orijentirana tako da je crveno>0 i plavo<0

    faza = np.angle(-fZ)
    modul = np.abs(fZ)


    # osnovna hsv mapa boja
    cmap = cm.hsv
    norm = colors.Normalize()
    mapper = cm.ScalarMappable(norm=norm, cmap=cmap)

    imvri = mapper.to_rgba(faza)
    return plt.imshow(imvri, origin='lower', extent=tuple(p))
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from plotfuns import fazni_portret

fazni_portret(lambda(z): z*0+1, p=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): z,0.001, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (np.abs(z)*np.abs(z))/z,0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (1+1j)*z+1,0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): z*z,0.001, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): z*z-2,0.001, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (z-2)*(z+1)*(z+2-1j),0.01, box=[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): (z-2)*(z+1)*(z+1),0.01, box=[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): np.exp(z),0.01, box=[-20,20,-20,20])
fazni_portret(lambda(z): np.exp(z),0.01, box=[-4,4,-4,4])
fazni_portret(lambda(z): np.sqrt(z),0.01, box=[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): np.log(z),0.01, box=[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): 1/((np.abs(z)*np.abs(z))/z),0.01, box
    =[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): 1/(z*z),0.01, box=[-3,3,-3,3])
fazni_portret(lambda(z): (z-2)/(z+2),0.01, box=[-5,5,-5,5])
fazni_portret(lambda(z): np.sin(z),0.01, box=[-6,6,-6,6])
fazni_portret(lambda(z): (z-1)/(z*z+z+ 1),0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): z/z, box=[-1,1,-1,1])
fazni_portret(lambda(z): (z+0.5)/(z+0.6), box=[-1,1,-1,1])
fazni_portret(lambda(z): (z+0.5)/(z+0.6), 0.001,box=[(-0.5+0j),0.9])
fazni_portret(lambda(z): (pow(z,121)/(z-1)), 0.009,box=[(1+0j),0.5])
fazni_portret(lambda(z): np.exp(1/z), 0.001,box=[-0.5,0.5,-0.5,0.5])
fazni_portret(lambda(z): np.exp(1/(z*z)),0.001,box=[-0.5,0.5,-0.5,0.5])
fazni_portret(lambda(z): np.sin(1/z),0.001,box=[-0.5,0.5,-0.5,0.5])
fazni_portret(lambda(z): np.cos(1/z),0.001,box=[-0.5,0.5,-0.5,0.5])
fazni_portret(lambda(z): np.pi*z*z,0.001,box=[-1,1,-1,1])
```

```
fazni_portret(lambda(z): 1/(1-z), box=[-10,10,-10,10])
fazni_portret(lambda(z): ((1j*z)**17-1)/(1j*z-1),0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): 3+(z)**3,0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (z)**7,0.01, box=[-2,2,-2,2])

def fun(z):
    fZ=1
    for n in range(1,20):
        fZ=fZ+z**n
    return fZ

fazni_portret(lambda(z): fun(z),0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (z-1)/(z**2+z+1),0.01, box=[-2,2,-2,2])
fazni_portret(lambda(z): (np.conjugate(z)-1)/(np.conjugate(z)**2+np.
    conjugate(z)+ 1),0.01, box=[-2,2,-2,2])

plt.show()
```

Bibliografija

[1] Neven Elezović i Daslav Petrizio, *Functions of complex variable*, (1995).

[2] Šime Ungar, *Kompleksna analiza*, PMF-Matematicki odsjek, Zagreb (2009).

[3] Elias Wegert, *Visual complex functions: an introduction with phase portraits*, Springer Science & Business Media, 2012.

[4] Elias Wegert i Gunter Semmler, *Phase plots of complex functions: a journey in illustration*, Notices AMS **58** (2010), 768–780.

Sažetak

Kompleksne funkcije su srž kompleksne analize koja igra važnu ulogu u raznim granama matematike poput algebre, geometrije, teorije brojeva te u praktičnim primjenama matematike kao što su fizika i inženjerstvo. Realne funkcije možemo lako prikazati pomoću dvo-dimenzionalnih grafova te je stoga prirodno da isto želimo i za kompleksne funkcije. S obzirom da se mi nalazimo u tro-dimenzionalnom prostoru, a za prikaz kompleksnih funkcija su potrebne četiri dimenzije jasno je da moramo nekako zamijeniti tu četvrtu dimenziju za što nam je prirodan izbor boja. Ovim radom dan je pregled nekoliko vizualnih tehnika za prikaz kompleksnih funkcija kompleksne varijable poput analitičkih pejsaža, bojanja domene i faznih portreta te je prikazana implementacija tih tehnika na primjerima funkcija.

Summary

Complex functions are the core of complex analysis which plays an important role in various branches of mathematics such as algebra, geometry, number theory and in practical applications of mathematics such as physics and engineering. Real functions can be easily represented by two-dimensional plots so it's only natural that we wish to do the same with complex functions. Considering that we live in three spatial dimensions and to depict complex functions we need four dimensions, it is clear that we need to find a substitute for the fourth dimension for which the natural choice is color. With this graduate work we are given an overwiev of several visual tehniques for depicting complex functions of complex variable like analitic landscapes, domain coloring and phase portraits. Further more we are shown their implementation on different examples of complex functions.

Životopis

Rođena sam 17. ožujka 1992. godine u Rijeci. Nakon završene osnovne škole Fran Krsto Frankopan u Omišlju upisala sam Prvu sušačku hrvatsku gimnaziju u Rijeci, opći smjer. Maturirala sam 2010. godine.

2010. godine sam upisala preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Preddiplomski studij sam završila 2013. godine. Te godine sam upisala diplomski sveučilišni studij Računarstvo i matematika na istom fakultetu. Od 2016. godine počinjem raditi u tvrtci RIS d.o.o. u uredu Rijeka na razvoju i održavanju poslovnog softvera Faros koji je integrirana cjelina ERP sustava i sustava naplate (billing).