

# Učinci magnetskog polja na jednoelektronski spektar dvodimenzionalnog elektronskog plina

---

**Tomić, Kristina**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2016**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:193438>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-03**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

SMJER: FIZIKA I KEMIJA, NASTAVNIČKI

**Kristina Tomić**

Diplomski rad

**Učinci magnetskog polja na  
jednoelektronski spektar  
dvodimenzionalnog elektronskog plina**

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

4. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2016.

Zahvaljujem svojoj obitelji, mentoru doc. dr. sc.  
Danku Radiću i v.pred. dr.sc. Gorjani Jerbić-Zorc  
na podršci, strpljenju i pomoći pri izradi ovog rada.

## Sažetak

U ovom diplomskom radu promatrali smo utjecaj magnetskog polja na dvodimenzionalni plin slobodnih elektrona, na elektron na dvodimenzionalnoj kristalnoj rešetci te na elektron na kvazi - jednodimenzionalnoj kristalnoj rešetci. Uveli smo magnetsko polje u sustav načelom minimalne supstitucije te opisali neke klasične aspekte polja poput magnetovodljivosti u okviru Sommerfeldovog modela metala. Proučavane su kvazi-klasične veličine poput elektronskih orbita u faznom prostoru i ciklotronske mase. U smislu kvantnomehaničkog opisa riješena je Schrödingerova jednačba za elektron u magnetskom polju u tri karakteristične geometrije: slobodni elektron, elektron na pravokutnoj kristalnoj rešetci u okviru aproksimacije čvrste veze i elektron u kvazi-jednodimenzionalnoj geometriji te je izračunat pripadni jednoelektronski spektar i valne funkcije. Pokazano je da magnetsko polje ima fundamentalni učinak "jednodimenzionalizacije" elektronskog spektra, a na pravokutnoj rešetci vodi na pojavu iznimno kompleksnog spektra fraktalne strukture (tzv. "Hofstadterov leptir"). Također, iz sadržaja diplomskog rada, odabrana je prikladna tema koja je prilagođena za nastavni sat iz predmeta Fizika u prirodoslovnoj gimnaziji.

# **The influence of magnetic field on the one - electron spectrum of two – dimensional electron gas**

## **Abstract**

In this diploma thesis we considered the influence of the magnetic field on two-dimensional electron gas, the electrons on a two-dimensional lattice and the electrons in a quasi – one - dimensional lattice. We introduced the magnetic field in the system using the principle of minimal substitution and described some aspects of classical fields like magneto – conductance within the Sommerfeld model of metals. We have also studied the quasi-classical traits of the electron gas in the magnetic field like electronic orbits in the phase space and the cyclotron mass. In terms of quantum-mechanical description we solved the Schrödinger equation for the electron in the magnetic field in three characteristic geometries: free electron, electron on a rectangular lattice within the tight – binding approximation, and an electron in a quasi-one-dimensional geometry and calculated the corresponding one-electron energy spectrum and wave functions. We showed that the magnetic field has a fundamental effect of “one - dimensioning” the electronic spectrum, while the rectangular lattice leads to the occurrence of a highly complex spectrum with fractal structure (so-called "Hofstadter's butterfly"). Furthermore, we selected a suitable topic from the contents of this diploma thesis and adapted it to form a Physics lesson in the high school.

## Sadržaj

<b>Uvod</b> .....	1
<b>1. Klasični aspekti djelovanja magnetskog polja na nabijenu česticu</b> .....	2
1.1 Hamiltonove jednačbe .....	2
1.2 Minimalna supstitucija .....	3
1.3 Lorentzova sila .....	4
<b>2. Magnetovodljivost u okviru Sommerfeldovog modela</b> .....	6
2.1 Plin slobodnih elektrona .....	6
2.2 Fermijeva energija .....	8
2.3 Fermi - Diracova funkcija raspodjele .....	10
2.4 Elektronska gustoća stanja .....	11
2.5 Hallov efekt .....	11
<b>3. Kvantni aspekti djelovanja magnetskog polja na dvodimenzionalni elektronski plin...</b>	15
3.1 Ciklotronska frekvencija .....	15
3.2 Ciklotronska rezonancija .....	17
Azbel - Kanerova ciklotronska rezonancija .....	19
3.3 Jednoelektronski energijski spektar .....	20
3.4 Degeneracija Landauovih nivoa .....	23
3.5 Gustoća Landauovih nivoa .....	25
3.6 Vizualizacija Landauovih nivoa .....	27
<b>4. Elektron na kristalnoj rešetci u magnetskom polju</b> .....	29
<b>5. Kvazi – jednodimenzionalna rešetka i učinci magnetskog polja na elektron</b> .....	36
5.1 Organski vodiči .....	36
5.2 Učinci magnetskog polja .....	37
<b>6. Primjer nastavnog sata</b> .....	41
<b>7. Zaključak</b> .....	47
<b>8. Popis literature</b> .....	48

## Uvod

Učinci magnetskog polja na elektronski spektar materijala još uvijek su u fokusu istraživanja fizike kondenzirane materije iako prvi radovi iz tog područja datiraju od prve polovine dvadesetog stoljeća s istraživanjima Landaua, Azbela, Peierlsa, de Haasa, van Alphen, Onsagera i dr. Visokotemperaturni supravodiči, niskodimenzionalni materijali poput grafena, kvazi-jednodimenzionalni organski vodiči i slični sustavi anomalne dimenzionalnosti nakon izlaganja magnetskom polju pokazuju niz i dalje neobjašnjenih fenomena. Svi ti fenomeni pružaju motivaciju za proučavanje učinaka magnetskog polja ponajprije na elektronski spektar materijala, a potom i na niz kolektivnih fenomena poput kvantnih oscilacija, valova gustoće naboja i spina, nabojnih pruga (eng. „stripes“), kvantnih topoloških efekata itd. koji iz njega proizlaze. Ovaj rad predstavlja uvod u to područje u vidu upoznavanja s osnovnim svojstvima i izučavanja magnetskih učinaka na spektar u tri najjednostavnija karakteristična sustava: plin slobodnih elektrona, elektrone na pravokutnoj kristalnoj rešetci i elektrone u jednostavnoj kvazi-jednodimenzionalnoj geometriji te služi kao temelj i platforma za daljnje izučavanje učinaka magnetskog polja kako na elektronske spektre materijala, tako i na vezane fenomene.

# 1. Klasični aspekti djelovanja magnetskog polja na nabijenu česticu

## 1.1 Hamiltonove jednačbe

U klasičnoj mehanici, hamiltonijan sustava definira se kao zbroj kinetičkih i potencijalnih energija čestica u sustavu izraženih kao funkcije položaja i količina gibanja. Količina gibanja  $n$ -te čestice  $\vec{p}_n$  povezana je s brzinom čestice  $\dot{\vec{r}}_n$  relacijom:  $\vec{p}_n = m_n \dot{\vec{r}}_n$ , gdje je  $m_n$  masa čestice.

Kinetička energija čestice dana je izrazom

$$K = \sum_{n=1}^N \frac{|\vec{p}_n|^2}{2m_n},$$

dok je potencijalna energija  $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N)$ . Hamiltonijan sustava dan je izrazom

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \sum_{n=1}^N \frac{|\vec{p}_n|^2}{2m_n} + U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) \quad (1.1)$$

gdje je  $\vec{p} \equiv (\vec{p}_1, \vec{p}_2 \dots \vec{p}_N)$ ,  $\vec{r} \equiv (\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N)$ .

Jednačbe gibanja sustava za  $n$ -tu česticu dane su Hamiltonovim jednačbama:

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.2)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i}, \quad (1.3)$$

gdje je  $i = (x, y, z)$  indeks Kartezijeve koordinate u trodimenzionalnom prostoru.

Rješenja Hamiltonovih jednačbi dat će trajektoriju čestice izraženu preko položaja i količina gibanja kao funkcija ovisnih o vremenu. U sustavu opisanom konzervativnim silama ukupna je energija očuvana :

$$H(\vec{p}(t), \vec{r}(t)) = H(\vec{p}(0), \vec{r}(0)) = E.$$



## 1.2 Minimalna supstitucija

Lagrangian čestice naboja  $q$  i mase  $m$ , koja se giba u elektromagnetskom, polju je

$$L = \sum_i \frac{m}{2} \dot{r}_i^2 + \sum_i q \dot{r}_i A_i - q\varphi, \quad (1.4)$$

gdje su  $\vec{A}$  i  $\varphi$ , redom, vektorski i skalarni potencijal i na sljedeći su način povezani s magnetskim i električnim poljem:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (1.5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

Euler – Lagrangeova jednadžba dana je izrazom

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0, \quad (1.7)$$

i može se definirati

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}. \quad (1.8)$$

Iz lagrangiana je moguće konstruirati hamiltonijan koristeći Legendreovu transformaciju:

$$H = \sum_i \dot{r}_i p_i - L, \quad (1.9)$$

te se kombiniranjem izraza (1.4), (1.8) i (1.9) dolazi do hamiltonijana za nabijenu česticu u elektromagnetskom polju :

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} (p_i - qA_i)^2 + q\varphi. \quad (1.10)$$

Hamiltonijan za česticu u elektromagnetskom polju može se, dakle, dobiti iz odgovarajućeg hamiltonijana za nenabijenu česticu uvođenjem supstitucije

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}. \quad (1.11)$$

Ovo nazivamo *načelo minimalne supstitucije*, još poznato u literaturi i kao *Peierlsova supstitucija*.

### 1.3 Lorentzova sila

Uvrštavanjem hamiltonijana za nabijenu česticu u elektromagnetskom polju (1.10) u Hamiltonove jednačbe (1.2) i (1.3) dobiju se izrazi

$$\dot{p}_i = m \frac{dv_i}{dt} + q \frac{dA_i}{dt}, \quad (1.12)$$

$$\dot{p}_i = \frac{q}{m} (p_i - qA_i) \frac{\partial A_i}{\partial r_i} - q \frac{\partial \varphi}{\partial r_i}, \quad (1.13)$$

gdje je  $v_i$  komponenta brzine  $n$ -te čestice.

Izjednačavanjem izraza (1.12) i (1.13) te uz korištenje relacije

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (1.14)$$

dolazi se do izraza

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left[ \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \frac{d\vec{A}}{dt} \right] - q \vec{\nabla} \varphi. \quad (1.15)$$

$\frac{d\vec{A}}{dt}$  je potpuna derivacija  $\vec{A}$  po vremenu, koju možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}, \quad (1.16)$$

što odražava fizikalnu činjenicu da potpuna derivacija  $\vec{A}$  po vremenu ima dva izvora: izravnu vremensku ovisnost  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  i dodatnu vremensku ovisnost koja proizlazi iz činjenice da se nabijena čestica giba po putanji koja također ima vremensku ovisnost  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  gdje je  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

Kombiniranjem izraza (1.15) i (1.16) te korištenjem vektorskog identiteta za trostruki vektorski produkt

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad \text{tj.} \quad \vec{v} \times (\vec{V} \times \vec{A}) = \vec{V} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{V})$$

dobije se

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times (\vec{V} \times \vec{A}) - q \left( \vec{V}\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right). \quad (1.17)$$

Konačno, uvrštavanjem izraza (1.5) i (1.6) dolazi se do

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}, \quad (1.18)$$

što je izraz za Lorentzovu silu na nabijenu česticu u elektromagnetskom polju, tj.

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}. \quad (1.19)$$

## 2. Magnetovodljivost u okviru Sommerfeldovog modela metala

### 2.1 Plin slobodnih elektrona

U modelu slobodnih elektrona pretpostavlja se da se vodljivi elektroni u metalu potpuno slobodno gibaju u unutrašnjosti uzorka unutar kojeg su vezani potencijalom površine. Prema ovom modelu elektroni se gibaju uzorkom bez sudara (interakcija), slično kao molekule idealnog plina, te u tom smislu govorimo o *plinu slobodnih elektrona*. [1]

Elektronski plin je kvantni plin fermiona; samo jedan elektron popunjava jedno kvantno stanje i u režimu jake degeneracije stanja se redom popunjavaju od najnižeg ka višima. Svaki atom otpušta  $Z$  valentnih elektrona u kondenzat pri čemu ostaju  $Z$  puta ionizirani atomi koji čine pozitivnu pozadinu koja održava nabojnu neutralnost sustava.

U Sommerfeldovom modelu elektron se tretira kao čestica koja s drugim elektronima ne interagira kulonski. Iako se očekuje da elektroni interagiraju međusobno i s ioniziranim atomima zbog inherentnog prisustva dugodosežnih kulonskih interakcija, u Sommerfeldovu modelu elektroni se efektivno ponašaju kao plin neinteragirajućih čestica. [1] Takav opis nalazi opravdanje u okviru Thomas – Fermijevog modela dielektričnog odziva koji uvodi zasjenjenje i elektron „pretvara“ u kvazičesticu.

Jedan elektron možemo opisati valnom funkcijom  $\psi(\vec{r})$  uz naznaku koju od dvije moguće orijentacije spina elektron posjeduje. Ako elektron nema interakcija, jednoelektronska valna funkcija povezana s energijom  $E$  zadovoljava vremenski neovisnu Schrödingerovu jednadžbu

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (2.1)$$

gdje je  $m_e$  masa elektrona. Vežanost elektrona potencijalom površine u volumen  $V$  može se prikazati nametanjem rubnih uvjeta na jednadžbu (2.1). Odabrat ćemo volumen  $V$  koji odgovara volumenu kocke stranice  $L = V^{1/3}$ . U tri dimenzije mogu se nametnuti rubni uvjeti

$$\psi(x + L, y, z) = \psi(x, y, z)$$

$$\psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z)$$

$$\psi(x, y, z + L) = \psi(x, y, z),$$

koji se nazivaju *Born-van Karmanovi* ili *periodički rubni uvjeti*. [2]

Rješenja jednadžbe (2.1) su oblika ravnog vala

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (2.2)$$

gdje je  $\vec{k}$  valni vektor, a pripadne energije dane su izrazom

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \quad (2.3)$$

Fronte ravnog vala  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  su ravnine okomite na vektor  $\vec{k}$  (jer su fronte ravnog vala definirane jednadžbom  $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const.}$ ) i periodične uzduž linija paralelnih s vektorom  $\vec{k}$ , s valnom duljinom  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ . [2] Nametanjem periodičkih rubnih uvjeta, postaju dopuštene samo određene diskretne vrijednosti  $\vec{k}$  takve da vrijedi

$$e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1. \quad (2.4)$$

Vrijedi  $e^{2\pi ni} = 1$ , gdje je  $n$  cijeli broj. Tada komponente valnog vektora  $\vec{k}$  moraju biti

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (2.5)$$

gdje su  $n_x, n_y, n_z$ , cijeli brojevi.

U trodimenzionalnom recipročnom prostoru, dozvoljeni valni vektori su samo oni čije su komponente dane koordinatama koje leže uzduž tri navedene osi i cjelobrojni su višekratnici od  $\frac{2\pi}{L}$ . [2]

## 2.2 Fermijeva energija

Osnovno stanje sustava  $N$  neinteragirajućih elektrona u volumenu  $V$  može se konstruirati tako što se izračunaju njihova jednoelektronska energijska stanja, nakon čega se ta stanja mogu popuniti na način koji dopušta Paulijev princip isključenja, tj. najviše jedan elektron u jednom jednoelektronskom stanju. Uz svaku vrijednost vektora  $\vec{k}$ , povezana su dva elektronska stanja; po jedno za svaku orijentaciju spina.[1]

Na temperaturi  $T = 0$ , stanja se sukcesivno popunjavaju od najnižeg dostupnog (stanje s najnižim  $k$ ), sve do stanja najviše energije koje nazivamo *Fermijevim nivoom*, a odgovara najvećem iznosu valnog vektora  $k_F$  koji se naziva *Fermijev valni vektor*. Sva stanja s  $k$  većim od  $k_F$  ostaju nepopunjena. Kad svih  $N$  elektrona zauzme energijska stanja, u osnovnom stanju ispunit će sferu u recipročnom prostoru čiji je radijus  $k_F$  (*Fermijeva kugla* - Slika 2.1).[2]

Broj tih elektrona je

$$N = 2 \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \left( \frac{4}{3} \pi k_F^3 \right) V \quad (2.6)$$

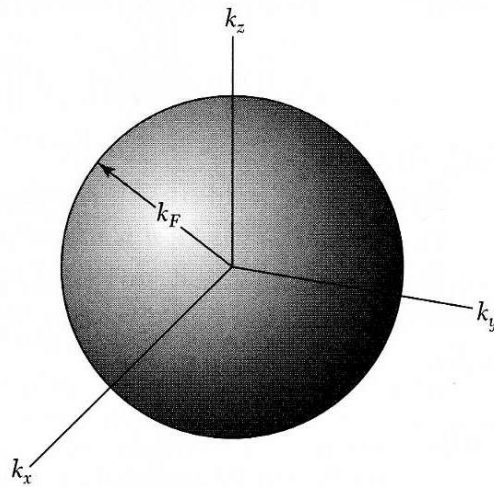
gdje je  $\frac{V}{(2\pi)^3}$  broj dozvoljenih vrijednosti  $k$  po volumenu recipročnog prostora, a faktor 2 dodan radi degeneracije elektronskih stanja zbog spina.

Dakle,  $k_F$  je dan uvjetom

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.7)$$

pri čemu je elektronska koncentracija  $n = \frac{N}{V}$ .

Površina Fermijeve sfere je ekvienergetska ploha koja odvaja popunjena od nepopunjenih stanja i naziva se *Fermijeva površina*.



Slika 2.1. Fermijeva kugla. U osnovnom stanju sustava  $N$  slobodnih elektrona na  $T = 0$  popunjena stanja sustava čine kuglu radijusa  $k_F$  u recipročnom prostoru, gdje je  $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$  energija elektrona s valnim vektorom  $k_F$ . [3]

Na temelju izraza (2.3) i (2.7) *Fermijeva energija* dana je izrazom

$$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.8)$$

### 2.3 Fermi – Diracova funkcija raspodjele

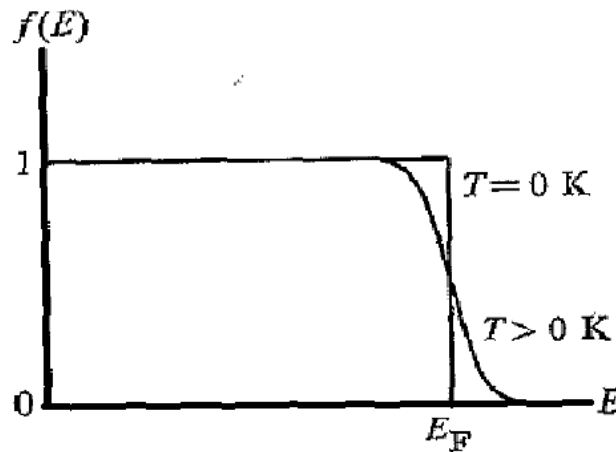
Elektronski plin sastoji se od fermiona koji zadovoljavaju Fermi – Diracovu statistiku s funkcijom raspodjele

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{k_B T}} + 1}, \quad (2.9)$$

gdje je  $\mu$  kemijski potencijal. [4]

Na  $T=0$ , kemijski potencijal jednak je Fermijevoj energiji.

Na  $T \neq 0$ , funkcija raspodjele značajno varira samo u  $k_B T$  - okolini kemijskog potencijala, što znači da će na konačnoj temperaturi samo elektroni unutar  $k_B T$  oko  $\mu$  moći sudjelovati u termodinamičkim fenomenima.



Slika 2.2. Fermi – Diracova funkcija raspodjele  $f(E)$  u ovisnosti o energiji elektrona  $E$ , na temperaturi  $T = 0$  K i  $T > 0$  K.  $E_F$  je Fermijeva energija u kojoj se nalazi točka infleksije funkcije  $f(E)$ . [1]



## 2.4 Elektronska gustoća stanja

Funkcija koja opisuje broj elektronskih stanja u intervalu energije između  $E$  i  $E + dE$  naziva se *gustoća stanja*  $g(E)$  i definirana je izrazom

$$g(E) = \sum_{\kappa} \delta(E - E_{\kappa}), \quad (2.10)$$

gdje sumacija ide preko svih kvantnih brojeva sustava  $\kappa$ . Za plin slobodnih elektrona, gustoća stanja je

$$g(E) = \begin{cases} 2 \frac{Lm_e}{\pi\hbar} \frac{1}{\sqrt{2m_e E}}, & (1\text{-D}) \\ \frac{L^2 m_e}{\pi\hbar^2}, & (2\text{-D}) \\ \frac{L^3 m_e}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{2m_e E}, & (3\text{-D}) \end{cases} \quad (2.11)$$

Kako su samo elektroni u  $k_B T$  - okolini Fermijeve energije termički aktivni, samo elektronska gustoća stanja na Fermijevoj energiji,  $g_F$ , važna je za termodinamičke izračune.

Za gustoću stanja na Fermijevoj energiji dobije se [2]

$$\left. \frac{dn}{dE} \right|_{E_F} \equiv g_F = \frac{3}{2} \frac{n}{E_F}. \quad (2.12)$$

## 2.5 Hallov efekt

Hallov efekt se opaža kad se na uzorak primijeni magnetsko polje  $\vec{B}$  okomito na gustoću struje  $\vec{J}$  koja prolazi uzorkom. Tada se *Hallovo polje*, i konsekvntno *Hallov napon*, inducira u smjeru okomitom na smjerove  $\vec{J}$  i  $\vec{B}$ . Uz pretpostavku koordinatnog sustava u kojem struja protječe uzorkom u smjeru paralelnom s osi  $x$ , a magnetsko polje paralelno je s osi  $z$ , Hallovo polje se inducira u smjeru osi  $y$ . U električnom i magnetskom polju, sila koja djeluje na elektron je Lorentzova sila (1.19) (Slika 2.3). [1]

Gustoća struje  $\vec{J}$  koju stvaraju elektroni je

$$\vec{j} = -\frac{ne}{m_e}\vec{p}, \quad (2.13)$$

gdje je  $n$  koncentracija elektrona,  $-e$  naboj elektrona,  $m_e$  masa elektrona, a  $\vec{p}$  srednja vrijednost elektronske količine gibanja.

Promotrimo promjenu količine gibanja elektrona u vremenu  $dt$  pod utjecajem vanjske sile  $\vec{f}(t)$ . Vjerojatnost da se elektron sudari tj. rasprši na defektu u jedinici vremena proporcionalna je s  $\tau^{-1}$ , gdje je  $\tau$  relaksacijsko vrijeme. Dakle, vjerojatnost sudara u vremenu  $dt$  jednaka je  $\frac{dt}{\tau}$ . Količina gibanja  $\vec{p}$  u vremenu  $dt$  mijenjat će se na sljedeći način:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}(t) - \frac{\vec{p}}{\tau}, \quad (2.14)$$

gdje je drugi član izraza potječe od gušenja „trenjem“ pri elektronskim sudarima s defektima tj. od procesa koji vode na električni otpor. Kombiniranjem s izrazom (1.18), jednadžba (2.14) postaje

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e}\vec{E} - \frac{e}{m_e}\vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{\tau}. \quad (2.15)$$

Promotrimo stacionarno rješenje jednadžbe (2.15) u kojem lijeva strana jednadžbe iščezava. Komponente stacionarne brzine elektrona bit će

$$v_x = -\frac{e\tau}{m_e}E_x - \frac{e\tau}{m_e}v_y B \quad (2.16)$$

$$v_y = -\frac{e\tau}{m_e}E_y + \frac{e\tau}{m_e}v_x B \quad (2.17)$$

$$v_z = -\frac{e\tau}{m_e}E_z. \quad (2.18)$$

Uvrstimo li izraze (2.16), (2.17) i (2.18) u izraz (2.13), dobije se izraz

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

što je Kirchhoffova formulacija Ohmovog zakona.

Veličinu

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c \tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + (\omega_c \tau)^2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

nazivamo *tenzorom magnetovodljivosti* gdje je  $\omega_c \equiv \frac{eB}{m_e}$  ciklotronska frekvencija kruženja elektrona u magnetskom polju i  $\sigma_0 \equiv \frac{e^2 n \tau}{m_e}$  vodljivost vodiča bez utjecaja vanjskog magnetskog polja.

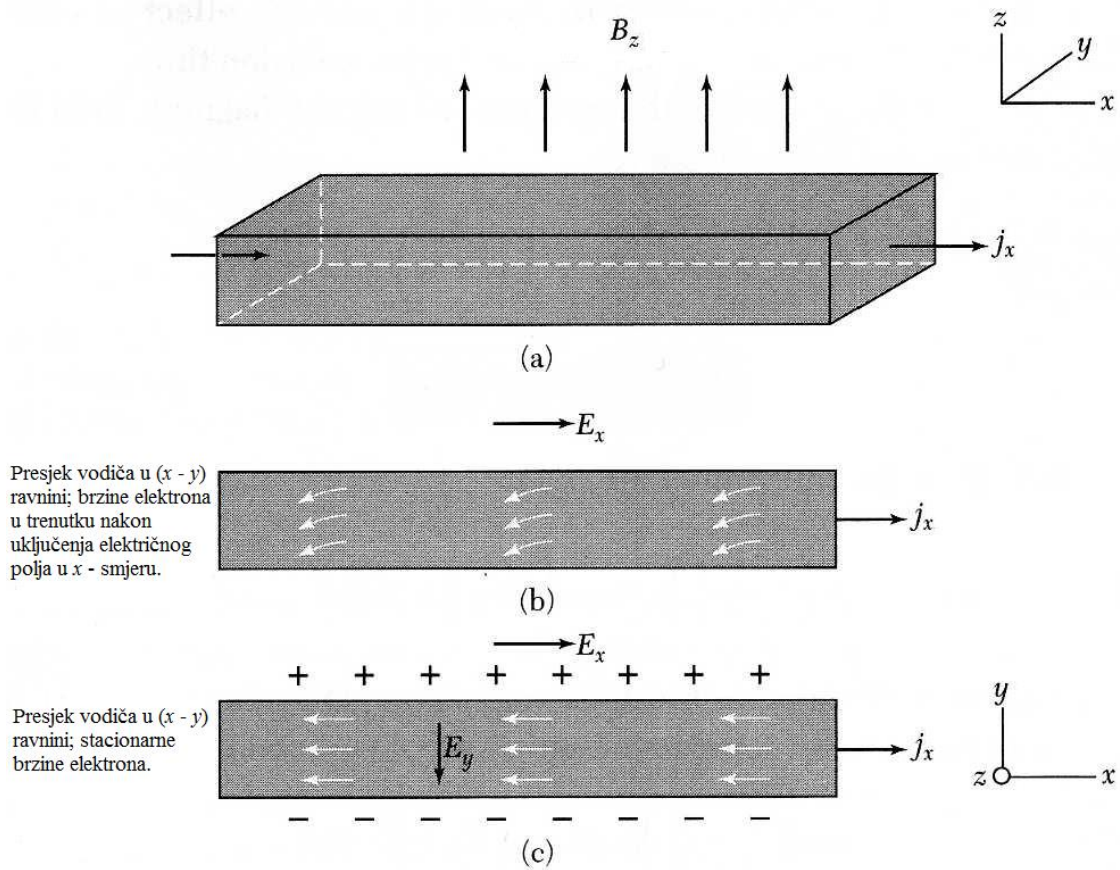
Iako je pri jakim poljima vodljivost  $\sigma_{xx}$  zanemariva, to ne znači da nema prolaska struje u tom smjeru jer je gustoća struje u  $x$ - smjeru povezana i s Hallovim poljem u  $y$  – smjeru preko vodljivosti  $\sigma_{xy}$  koja potječe od magnetskog polja. Hallovo polje određeno je uvjetom da u smjeru  $y$  ne protječe struja, tj. da je  $j_y = 0$ ;

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{-e\tau}{m_e} B. \quad (2.21)$$

Hallov efekt karakteriziran je veličinom

$$R_H \equiv \frac{E_y}{J_x B} = -\frac{1}{ne}, \quad (2.22)$$

koju nazivamo *Hallovom konstantom* i za elektrone kao nositelje naboja vrijedi  $R_H < 0$ . [1]



Slika 2.3. Hallov efekt. Uzorak poprečnog pravokutnog presjeka stavljen je u magnetsko polje  $B_z$ , kao u (a). Električno polje  $E_x$  uključeno u  $x$  – smjeru uzrokuje protjecanje struje u  $x$  – smjeru, gustoće struje  $j_x$ . Brzina elektrona trenutak nakon uključivanja električnog polja prikazana je u (b). Zakretanje elektrona duž  $y$  - smjera uzrokovano je magnetskim poljem. Zbog toga se elektroni nakupljaju na jednoj strani vodiča tj. stvara se višak negativnog naboja, dok na na drugoj strani ostaje manjak negativnog naboja, sve do uspostavljanja Hallovog polja koje je takvog smjera da poništi djelovanje Lorentzove sile uzrokovane magnetskim poljem. [3]

### 3. Kvantni aspekti djelovanja magnetskog polja na dvodimenzionalni elektronski plin

U dovoljno jakim magnetskim poljima, pokazat će se da  $\vec{k}$  više nije „dobar kvantni broj“ kojim se može opisati elektronsko stanje. Kad se zanemari periodički potencijal rešetke, moguće je problem riješiti egzaktno. Izračunat ćemo energijski spektar plina slobodnih elektrona u magnetskom polju. Kao u prethodnom poglavlju, razmatra se elektronski plin vezan u potencijalnoj jami stranica  $L_x = L_y = L_z = L$  s periodičkim rubnim uvjetima. Jedina razlika je što se ovaj put sustav nalazi u magnetskom polju  $\vec{B}$ . Problem je prvi riješio L. D. Landau 1930. godine pa se izračunata energijska stanja nazivaju *Landauovi nivoi*. [5]

#### 3.1 Ciklotronska frekvencija

U okviru kvazi – klasične slike, utjecaj magnetskog polja na elektronsko stanje impulsa  $\vec{k}$  određen je Lorentzovom silom te jednačba gibanja glasi

$$\hbar \frac{d\vec{k}}{dt} = -e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.1)$$

Iz jednačbe je vidljivo da je promjena vektora  $\vec{k}$  u smjeru okomitom na smjerove magnetskog polja i brzine, a sama brzina okomita je na ekvienigetske plohe  $E(\vec{k})$ ;

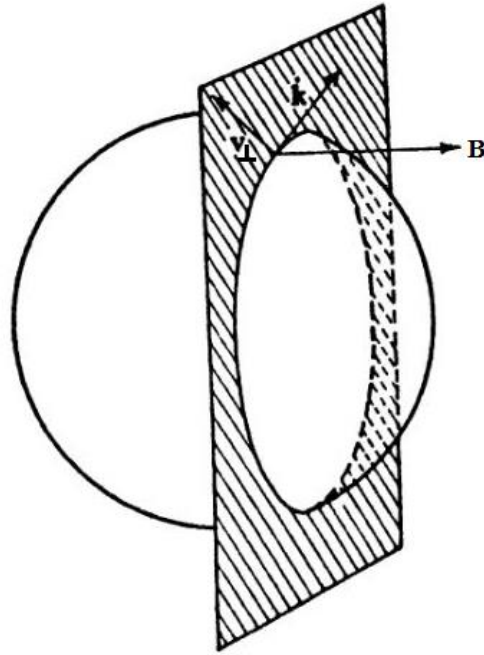
$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \vec{\nabla}_k E(\vec{k}). \quad (3.2)$$

Vektor  $\vec{k}$  tangencijalan je na orbitu definiranu kao presječnica Fermijeve površine s ravninom okomitom na  $\vec{B}$ ; jedine dozvoljene orbite u  $k$  – prostoru su one koje su opisane takvim presječnicama (Slika 3.1) . Dakle, u magnetskom polju, odabrana čestica kružno se giba po takvoj orbiti bez promjene u energiji. Ako se elektron ne rasprši, opiše kružnicu u periodu

$$T = \int_{t_1}^{t_2} dt = \frac{\hbar}{eB} \oint \frac{dk}{v_{\perp}}, \quad (3.3)$$

gdje je  $v_{\perp}$  komponenta brzine u ravnini okomitoj na  $\vec{B}$  u točki  $\vec{k}$ .

Odgovarajuća frekvencija,  $\omega_c \equiv \frac{2\pi}{T}$ , naziva se *ciklotronska frekvencija*. [6]



Slika 3.1. Orbita elektrona u magnetskom polju. Fermijeva površina presječena je ravninom okomitom na magnetsko polje, a presječnica je kružnica, jedna dozvoljena orbita elektrona. Vektor  $\vec{k}$  leži u spomenutoj ravnini i tangencijalan je na orbitu elektrona. Prikazana je promjena elektronskog stanja u vremenu pod utjecajem magnetskog polja. Brzina elektrona  $\vec{v}$  okomita je na ekvienergetsku plohu, a brzina  $v_{\perp}$  na orbitu elektrona pri čemu se nalazi u ravnini okomitoj na  $\vec{B}$ . [6]

Za slobodne elektrone vrijedi:

$$\oint \frac{dk}{v_{\perp}} = \frac{m_e}{\hbar} \oint \frac{dk}{k_{\perp}} = \frac{m_e}{\hbar} 2\pi, \quad (3.4)$$

pa se ciklotronska frekvencija može zapisati kao

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e}. \quad (3.5)$$

Za elektrone u metalu uobičajeno je izraz za ciklotronsku frekvenciju pisati na sljedeći način:

$$\omega_c = \frac{eB}{m_c}, \quad (3.6)$$

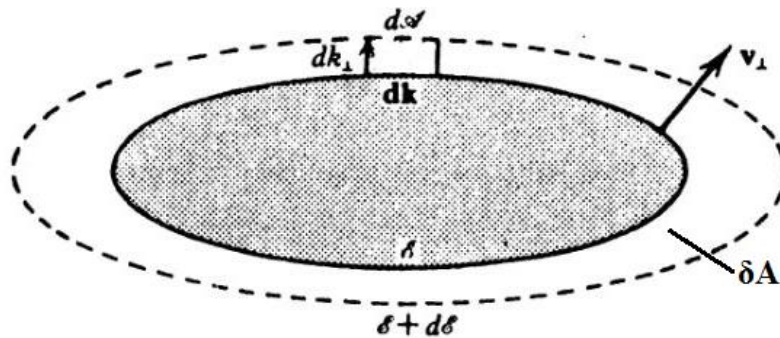
gdje je  $m_c$  ciklotronska masa. [1] Potrebno je napomenuti da ciklotronska masa nije nužno jednaka dinamičkoj masi elektrona, ona je svojstvo orbite.

Uvrštavanjem izraza (3.6) u izraz (3.3) te uz uvjet  $v_{\perp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk_{\perp}}$ , gdje je  $dk_{\perp}$  prirast vektora  $\vec{k}$  u ravnini orbite okomito na orbitu elektrona, ciklotronsku masu možemo izraziti

$$m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi} \oint \frac{dk dk_{\perp}}{dE}. \quad (3.7)$$

Promjena površine orbite (Slika 3.2), uzrokovana promjenom valnog vektora  $d\vec{k}$ , određena je izrazom  $\delta A = \oint dk_{\perp} dk$ , pa izraz (3.7) postaje

$$m_c = \frac{\hbar^2}{2\pi} \oint \frac{\partial A}{\partial E} = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial \delta A}{\partial E}. \quad (3.8)$$



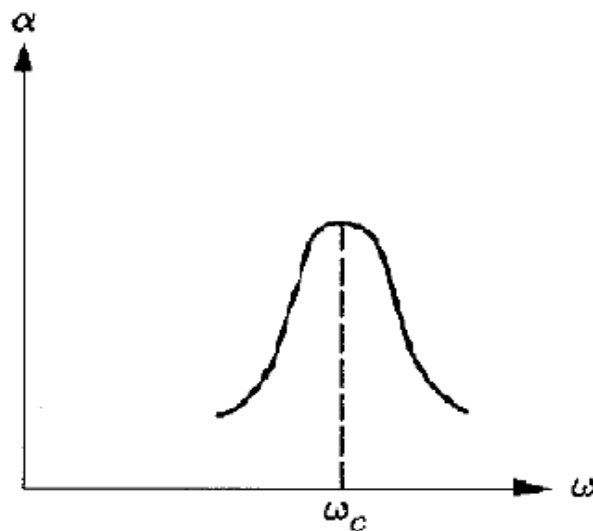
Slika 3.2. Prikazane su ekvienigetske linije energije  $E$  i  $E + dE$ .  $\delta A$  je promjena površine orbite, tj. površina kružnog vijenca između dvije ekvienigetske linije. Promjena površine orbite, uzrokovana promjenom valnog vektora  $d\vec{k}$ , određena je izrazom  $\delta A = \oint dk_{\perp} dk$ , gdje je  $dk_{\perp}$  prirast vektora  $\vec{k}$  u ravnini orbite, okomito na orbitu elektrona. [6]

### 3.2 Ciklotronska rezonancija

Kružno gibanje elektrona može se detektirati rezonancijom s vanjskim elektromagnetskim poljem pogodne frekvencije. Da bi se opazila takva rezonancija, elektron treba barem jednom obići kružnu orbitu prije nego što se rasprši. Fenomen *ciklotronske rezonancije* pruža izravnu mogućnost za mjerenje efektivne mase elektrona u metalima i karakterizaciju Fermijeve površine.

U takvom postupku, tanki uzorak se stavi u homogeno magnetsko polje  $\vec{B}$  tako da je magnetsko polje paralelno površini uzorka, te se okomito na  $\vec{B}$  uključi slabo električno polje

$\vec{E}$  frekvencije  $\omega$ . U homogenom magnetskom polju elektroni na Fermijevoj površini će se gibati po helikoidalnoj putanji, čija će projekcija na ravninu okomitu magnetskom polju ovisiti o obliku Fermijeve površine, a frekvencija projekcije gibanja bit će jednaka ciklotronskoj frekvenciji. Ako je frekvencija električnog polja jednaka ciklotronskoj frekvenciji, elektron se giba u fazi s električnim poljem i prima energiju od električnog polja. Mijenjajući frekvenciju primijenjenog električnog polja ili jakost magnetskog polja, čime se mijenja ciklotronska frekvencija, prijenos energije ostvaruje se najviše kad je  $\omega = \omega_c$ . U promatranju apsorpcije energije uzorka opazit će se *rezonancijska linija* pri  $\omega = \omega_c$  (Slika 3.3). Ciklotronska frekvencija očita se s apsorpcijske krivulje, te se potom uvrsti u izraz (3.6). [1]

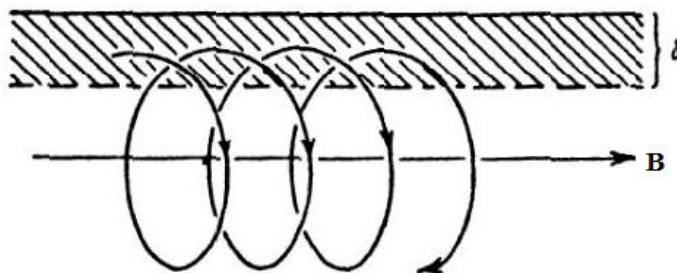


Slika 3.3. Ovisnost apsorpcijskog koeficijenta  $\alpha$  o frekvenciji primijenjenog električnog polja  $\omega$ . Krivulja apsorpcije energije u procesu ciklotronske rezonancije opisuje interakciju električnog polja s elektronima u ciklotronskom gibanju. Kad se na uzorak primijeni elektromagnetsko polje, električna komponenta signala počinje djelovati na elektrone. Kad se elektron tijekom ciklotronskog gibanja giba u fazi s električnim signalom, može primiti energiju tijekom cijelog gibanja i za slučaj kad je frekvencija primijenjenog električnog signala jednaka ciklotronskoj frekvenciji elektrona, prijenos energije je najveći i tada apsorpcijski koeficijent poprima najveću vrijednost. [1]

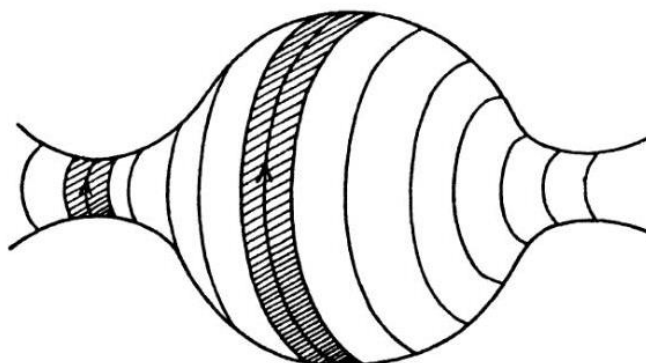


### Azbel – Kanerova ciklotronska rezonancija

Azbel – Kanerova ciklotronska rezonancija (AKCR) je metoda koja se koristi u određivanju oblika Fermijeve površine. Metalni uzorak stavi se u homogeno magnetsko polje  $\vec{B}$ , nakon čega se elektroni počinju gibati ciklotronskom frekvencijom  $\omega_c$ . Primijeni se cirkularno polarizirani elektromagnetski val frekvencije  $\omega$ , paralelno s površinom uzorka, a u smjeru paralelnom s magnetskim poljem. Električno polje može prodrijeti u uzorak samo na udaljenost  $\delta$  od površine uzorka, koja se naziva „debljina skina“ (eng. „skin effect“), pa su elektroni samo unutar te udaljenosti pod utjecajem električnog polja (Slika 3.4). Tijekom svojega ciklusa, elektron dospije u „debljinu skina“, ali po napuštanju ponovno se nađe u prostoru u kojem više nema utjecaja električnog polja. Rezonantni uvjet je i dalje zadovoljen ako se elektron ponovno vrati u „debljinu skina“ baš kada je električno polje u smjeru njegovog gibanja, pa je apsorpcija energije najveća pri  $\omega = l\omega_c$ , gdje je  $l \in \mathbb{N}$ . Metoda je pogodna za određivanje oblika Fermijeve površine, jer elektronima na različitim presjecima Fermijeve površine odgovaraju različite ciklotronske frekvencije. Frekvencija koja je najizraženija u apsorpciji odgovara *ekstremalnoj orbiti*, gdje je poprečni presjek Fermijeve površine u smjeru okomitom na  $\vec{B}$  najveći ili najmanji. Promjenom smjera primijenjenog magnetskog polja može se izmjeriti ekstremalne presjeke u različitim smjerovima i rekonstruirati oblik Fermijeve površine (Slika 3.5). [6]



Slika 3.4. Azbel – Kanerova ciklotronska rezonancija. Putanja elektrona prikazana je shematski. Šrafirana površina označava „debljinu skina“, tj. debljinu metala u koju električno polje može prodrijeti. Tijekom gibanja elektron napušta i ponovno ulazi u „debljinu skina“ u kojoj apsorpira energiju. Rezonantni uvjet može se zadovoljiti za svaku frekvenciju električnog polja za koju vrijedi  $\omega = l\omega_c$ , gdje je  $l \in \mathbb{N}$ . Ekstremalnoj orbiti Fermijeve površine, u kojoj je poprečni presjek Fermijeve površine u smjeru okomitom na  $\vec{B}$  najveći ili najmanji, odgovarat će frekvencija koja je najizraženija u apsorpciji. [6]



Slika 3.5. Orbite elektrona na dijelovima Fermijeve površine uvijek su u smjeru okomitom na magnetsko polje i prikazane su kružnicama. Ekstremalne orbite Fermijeve površine su najmanjeg ili najvećeg poprečnog presjeka okomito na primijenjeno magnetsko polje i na slici su istaknute šrafiranim područjem oko same orbite. Smjer obilaska elektrona po orbiti naznačen je strelicom. Promjenom smjera magnetskog polja može se odrediti ekstremalne presjeke Fermijeve površine u različitim smjerovima i rekonstruirati oblik Fermijeve površine. [6]

### 3.3 Jednoelektronski energetska spektar

Slobodni elektroni u magnetskom polju zadovoljavaju Schrödingerovu jednadžbu

$$\frac{1}{2m_e} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + e\vec{A} \right)^2 \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (3.9)$$

gdje smo koristili načelo minimalne supstitucije (1.11) i za operator količine gibanja  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ .

Vektorski potencijal  $\vec{A}$  za magnetsko polje u z – smjeru  $\vec{B} = (0, 0, B)$  dan je u simetričnom baždarenju izrazom

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} = -\frac{By}{2} \hat{x} + \frac{Bx}{2} \hat{y}. \quad (3.10)$$

Magnetsko polje invarijantno je na baždarnu transformaciju

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \quad (3.11)$$

gdje je  $\Lambda$  neka skalarna funkcija. Izborom

$$\vec{\nabla}\Lambda \equiv \frac{By}{2}\hat{x} + \frac{Bx}{2}\hat{y}, \quad (3.12)$$

dobivamo vektorski potencijal u tzv. *Landauovom baždarenju*

$$\vec{A} = (0, Bx, 0). \quad (3.13)$$

Uvrštavanjem izraza (3.13) u jednađbu (3.9), ona postaje

$$\frac{1}{2m_e} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + eBx\hat{y} \right)^2 \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3.14)$$

Lijeva strana jednađbe (3.14) predstavlja hamiltonijan sustava koji glasi

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eBx}{\hbar} i \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right]^2. \quad (3.15)$$

Djelovanjem hamiltonijana sustava na valnu funkciju  $\psi$ , Schrödingerova jednađba (3.14) poprima oblik

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{eBx}{\hbar} i \right)^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m_e E}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (3.16)$$

Jednađba (3.16) eksplicitno ovisi jedino o  $x$ , a implicitno o  $y$  i  $z$ , pa valnu funkciju stoga možemo zapisati u obliku

$$\psi(x, y, z) = e^{ik_y y} e^{ik_z z} u(x). \quad (3.17)$$

Uvrsti li se izraz (3.17) u izraz (3.16) dobije se

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[ \left( k_y + \frac{eBx}{\hbar} \right)^2 + k_z^2 + \frac{2m_e E}{\hbar^2} \right] u(x) = 0. \quad (3.18)$$

Naprave li se sljedeće supstitucije :

$$E' \equiv E - \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2, \quad (3.19)$$

$$x_0 \equiv -\frac{\hbar k_y}{m_e \omega_c}, \quad (3.20)$$

jednadžba (3.18) postaje

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} u''(x) + \frac{m_e}{2} \omega_c^2 (x - x_0)^2 u(x) = E' u(x). \quad (3.21)$$

Jednadžba (3.21) je Schrödingerova jednadžba harmonijskog oscilatora, s ishodištem pomaknutim za konstantu  $x_0$ , koji oscilira frekvencijom  $\omega_c$  oko ravnotežnog položaja. [5]

Valne funkcije su oblika

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m_e \omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m_e \omega}{2\hbar} (x - x_0)^2} H_n \left( \sqrt{\frac{m_e \omega}{\hbar}} (x - x_0) \right), \quad (3.22)$$

gdje je  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  Hermiteov polinom.

Spektar jednadžbe (3.21) je oblika

$$E'_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.23)$$

odnosno, s obzirom na izraz (3.19),

$$E_n = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_e} k_z^2, \quad (3.24)$$

gdje je  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Prema izrazu (3.24) vidljivo da je se energija elektrona sastoji od dva člana: prvi član koji potječe od ciklotronskog gibanja u ravnini okomitoj na magnetsko polje kvantiziran u stanja harmonijskog oscilatora i drugi član koji je dio kinetičke energije koja dolazi od gibanja paralelnog s magnetskim poljem ( $z$  – smjer). [6]

Doprinos ukupnoj energiji od gibanja u smjeru okomitom na magnetsko polje kvantiziran je u jedinicama  $\hbar\omega_c$ , čime se pokazuje da energija elektronskog plina kao cjeline ovisi o jakosti magnetskog polja. Ovi kvantizirani energijski nivoi nazivaju se *Landauovi nivoi*.

Za *dvodimenzionalni elektronski plin*, u prisustvu okomitog magnetskog polja, izraz (3.24) postaje

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3.25)$$

tj. elektronski spektar sastoji se samo od diskretnih vrijednosti energija ( Landauovih nivoa) koje odgovaraju ciklotronskom gibanju.[5]

Iz pripadnog rješenja

$$\psi_n(x, y) = e^{-ik_y y} u_n(x) \quad (3.26)$$

vidi se da se u dvije dimenzije, pod utjecajem magnetskog polja, elektron u Landauovom baždarenju opisuje kao ravni val u  $y$  – smjeru i harmonijski oscilator s težištem valne funkcije u  $x_0$  u  $x$  – smjeru.

### 3.4 Degeneracija Landauovih nivoa

Nakon izračuna energija elektronskih stanja, postavlja se pitanje koliko takvih stanja postoji i koliko ih se nalazi na svakom Landauovom nivou. Razmatramo potencijalnu jamu, kutiju stranica  $L_x, L_y, L_z$ . Prema (2.5),  $k_x$  je kvantiziran u jedinicama  $\frac{2\pi}{L_x}$ , a  $k_y$  u jedinicama  $\frac{2\pi}{L_y}$ . [2]

Točka  $x_0$  predstavlja težište elektronske valne funkcije koja fizički mora biti lokalizirana unutar uzorka,

$$0 < x_0 < L_x. \quad (3.27)$$

To ima za posljedicu da  $k_y$ , iako energija (3.25) ne ovisi o njemu, ne može poprimiti proizvoljnu vrijednost iz beskonačnog skupa za dani  $n$ . Kombiniranjem izraza (3.5), (3.20) i (3.27), za dozvoljene vrijednosti varijable  $k_y$  vrijedi [6]

$$0 < k_y < \frac{m_e \omega_c}{\hbar} L_x. \quad (3.28)$$

Zbog rubnih uvjeta na  $k_y$  (2.5) i (3.28), na svakom Landauovom nivou postoji samo  $p$  dozvoljenih različitih vrijednosti  $k_y$ , gdje je

$$p = \frac{L_y}{2\pi} \frac{m_e \omega_c}{\hbar} L_x = \frac{1}{2\pi} \frac{eB}{\hbar} L_x L_y. \quad (3.29)$$

Svaki nivo energije  $E_n$  (3.25), s odabranim  $n$ , bit će  $p$  - puta degeneriran. Iz izraza (3.29) također je vidljivo da će se stupanj degeneracije Landauovih nivoa, tj. broj stanja iste energije, povećavati proporcionalno s povećanjem jakosti magnetskog polja. [5]

Uvede li se *kvant toka magnetskog polja*

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e}, \quad (3.30)$$

izraz (3.29) može se zapisati na sljedeći način:

$$p = \frac{B}{\Phi_0} L_x L_y. \quad (3.31)$$

Kako je  $BL_x L_y$  ukupni magnetski tok kroz uzorak, degeneracija Landauovih nivoa  $p$  može se odrediti kao omjer ukupnog magnetskog toka i kvanta toka magnetskog polja, što znači da svako stanje „nosi“ po jedan kvant toka magnetskog polja.

Postojanje vanjskog magnetskog polja narušilo je dosadašnju kvantizaciju, prema (2.5). Veličine  $k_x$  i  $k_y$  više nisu „dobri kvantni brojevi“. [5] Valne funkcije (3.17) više ne odgovaraju jedinstvenom odabiru skupa ovih parametara. Novi kvantni broj koji opisuje plin slobodnih elektrona u magnetskom polju sada je samo indeks Landauovog nivoa  $n$ . U tom smislu kažemo da je spektar u magnetskom polju postao jednodimenzionalan.

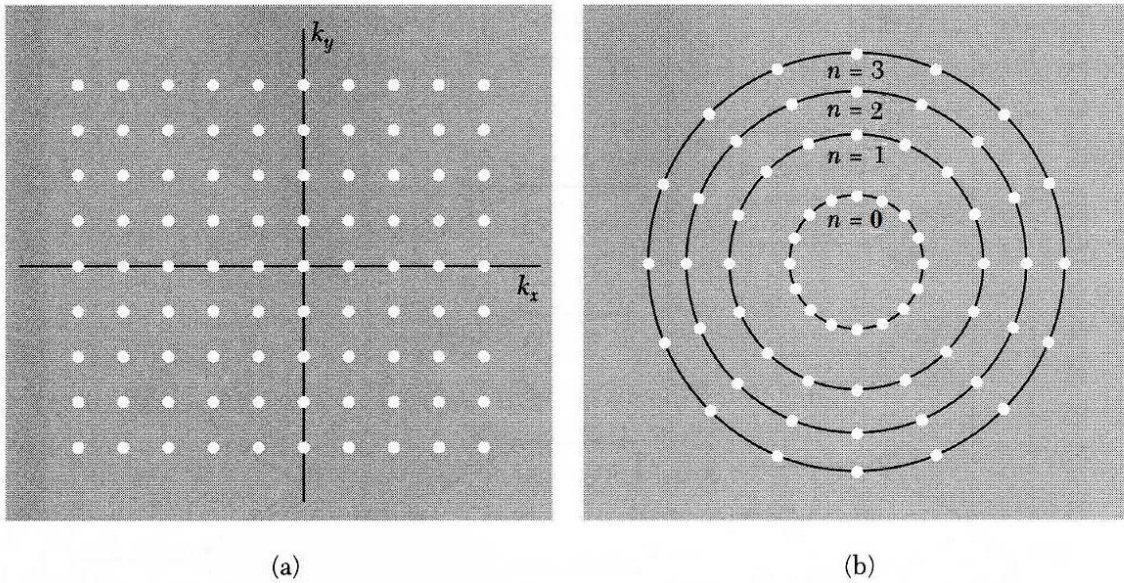
### 3.5 Gustoća stanja Landauovih nivoa

Broj elektronskih stanja na svakom nivou energije  $E_n$  dan je izrazom (3.29). Gustoća stanja tada je suma ekvidistantnih Diracovih delta funkcija jednakog težinskog faktora (degeneracije)  $p$

$$g_{2D}(B, E) = \sum_n p \delta \left[ E - \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.32)$$

Elektronska stanja energije između  $E$  i  $E + dE$  nalaze se u kružnom vijencu radijusa  $k_\perp$  i širine  $dk_\perp$ , čija je površina:  $dA = 2\pi k_\perp dk_\perp$ . Prema izrazu (3.8), površinu kružnog vijenca možemo zapisati na sljedeći način:

$$dA = \frac{2\pi m_e}{\hbar^2} dE. \quad (3.33)$$



Slika 3.6. Prikazana su dozvoljena elektronska stanja dvodimenzionalnog elektronskog plina u odsutstvu magnetskog polja predstavljena točkama u recipročnom prostoru (a). U prisustvu magnetskog polja, točke koje predstavljaju stanja slobodnih elektrona ograničene su na kružnice u prijašnjoj  $(k_x, k_y)$  - ravnini (b). Broj stanja na svakoj kružnici jednak je  $p$  i dan je izrazom (3.27). [3]

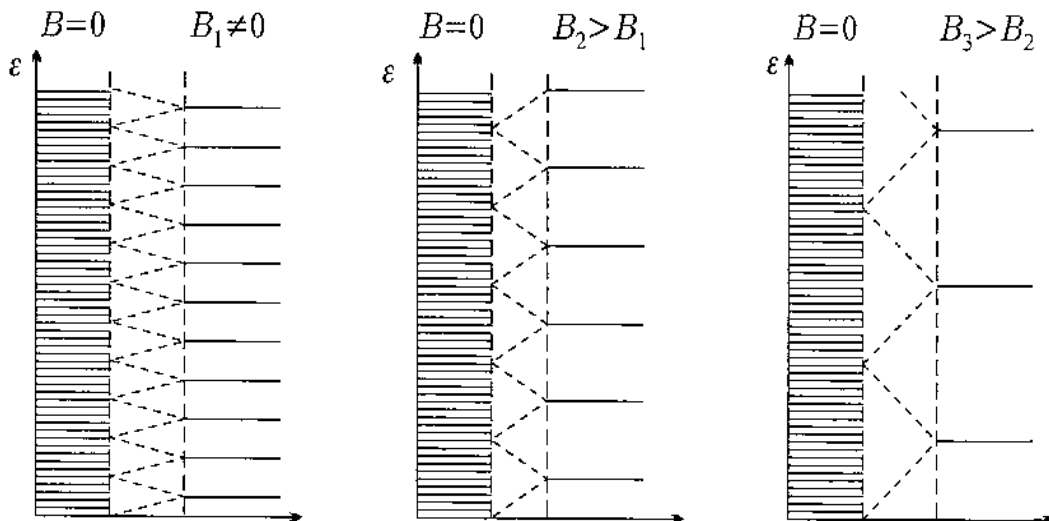
Broj stanja  $dN$  u rasponu energija između  $E$  i  $E + dE$  može se izračunati dijeljenjem površine  $dA$  s površinom recipročnog prostora  $\left(\frac{2\pi}{L_x}\right) \left(\frac{2\pi}{L_y}\right)$

$$dN = dA \left( \frac{2\pi}{L_x} \frac{2\pi}{L_y} \right)^{-1} = \frac{m_e}{2\pi\hbar^2} L_x L_y dE. \quad (3.34)$$

Gustoća stanja  $\frac{dn}{dE}$ , po jedinici površine kružnog vijenca u dvodimenzionalnom elektronskom plinu, tada je

$$g_{2D}(E) = \frac{m_e}{2\pi\hbar^2}. \quad (3.35)$$

Ako je  $dE$  interval energije koji odgovara  $\hbar\omega_c$ , iz (3.35) dobije se, za ovakvu gustoću stanja, da se unutar raspona energije  $\hbar\omega_c$  nalazi broj stanja jednak stupnju degeneracije Landauovog nivoa (3.30). Pokazuje se da je efekt magnetskog polja stvaranje kvantiziranih orbita u recipročnom prostoru te da se stanja slobodnih elektrona smještaju na najbližu takvu orbitu. Dakle, najnižih  $p$  stanja, koji bi u odsustvu magnetskog polja popunili raspon energije  $\hbar\omega_c$ , postaju degenerirani na najnižem Landauovom nivou ( $n = 0$ ) na energiji  $\frac{\hbar\omega_c}{2}$ . Sljedećih  $p$  stanja, iz raspona  $\hbar\omega_c < E < 2\hbar\omega_c$ , u magnetskom polju smješteno je na Landauov nivo ( $n = 1$ ) energije  $3\frac{\hbar\omega_c}{2}$ , itd. (Slika 3.7). [5]



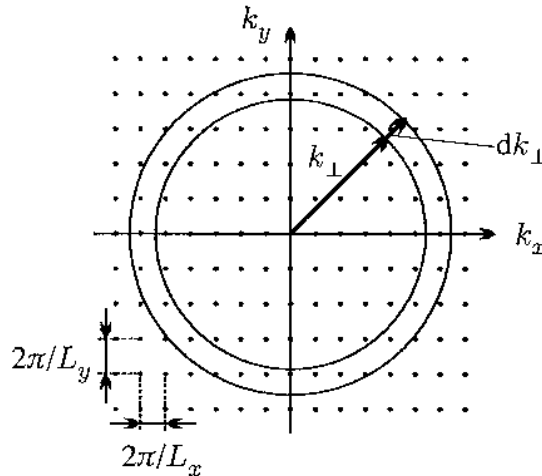
Slika 3.7. Energijski nivoi dvodimenzionalnog elektronskog plina za tri različite vrijednosti magnetskog polja, pri čemu je  $B_3 > B_2 > B_1$ . Što je magnetsko polje jače, to je udaljenost između dva susjedna Landauova nivoa veća, a time i degeneracija stanja; sve više stanja zauzima jedan Landauov nivo. Kvazi - kontinuum elektronskih stanja pri uključenju magnetskog polja pretvara se u skup kvantiziranih ("oštrih") degeneriranih stanja.



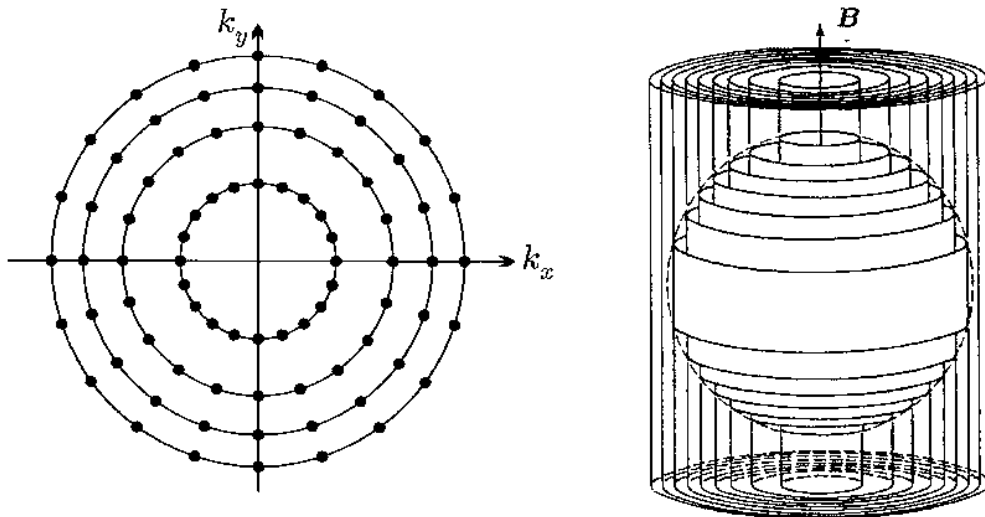
### 3.6 Vizualizacija Landauovih nivoa

Zanemarimo li  $z$  – koordinatu, linije konstantne energije Landauovih nivoa energije  $E$  su kružnice u  $(k_x, k_y)$  – ravnini. Novih  $p$  stanja neće biti lokalizirano ni u kojoj točki na kružnici, nego će u kvazi-klasičnoj slici rotirati po toj kružnici frekvencijom  $\omega_c$ . Kad je magnetsko polje isključeno, u recipročnom prostoru nalazi se jedno elektronsko stanje po površini recipročnog prostora  $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ . Dozvoljene vrijednosti komponentne valnog vektora  $\vec{k}$  dane su prema (2.5). Kad se magnetsko polje uključi, elektronska stanja iz kružnog vijenca smještaju se na jedan Landauov nivo, predstavljen kružnicom. Kako su stanja na svakoj kružnici  $p$  - degenerirana, kružnice nastaju tako da je površina kružnog vijenca između dvije susjedne kružnice uvijek jednaka (Slike 3.8 i 3.9). Površina faznog prostora koja odgovara stanjima degeneriranima na jednom Landauovom nivou je [5]

$$\delta A = \oint 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} = \frac{2\pi m_e}{\hbar} \omega_c = \frac{2\pi e B}{\hbar}. \quad (3.36)$$



Slika 3.8. Dozvoljene vrijednosti komponenti valnog vektora  $k_x$  i  $k_y$  za slobodni elektronski plin bez prisustva magnetskog polja. Volumen recipročnog prostora koji otpada na jednu točku iznosi  $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ . [2]



Slika 3.9. Kad se magnetsko polje uključi, stanja u jednom kružnom vijencu smještaju se na najbliži Landauov nivo, prikazan kružnicom. Prikaz Landauovih nivoa: za 2D sustav to su kružnice u  $(k_x, k_y)$  – ravninini (a), a za 3D sustav to su cilindri ucrtanim u Fermijevu kuglu (b). U tri dimenzije gibanje u ravnini okomitoj na magnetsko polje potpuno je kvantizirano u Landauove nivoe, dok je gibanje u smjeru paralelnom s magnetskim poljem slobodno. Popunjena stanja smještena su na cilindrima (eng. „*Landau tubes*“).[6]

#### 4. Elektroni na kristalnoj rešetci u magnetskom polju

U Sommerfeldovom modelu elektroni u metalu se razmatraju kao neinteragirajuće čestice u potencijalnoj jami, a periodički potencijal kristalne rešetke u kojem se elektroni gibaju je zanemaren. Uvođenjem potencijala kristalne rešetke  $V(\vec{r})$  Schrödingerova jednažba postaje [1]

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (4.1)$$

Potencijal kristalne rešetke je periodičan, s istom translacijskom simetrijom kao i sama rešetka,

$$V(\vec{r} + \vec{R}) = V(\vec{r}), \quad (4.2)$$

gdje je  $\vec{R}$  translacijski vektor rešetke. Prema *Blochovom teoremu*, rješenje Schrödingerove jednažbe je oblika

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}), \quad (4.3)$$

gdje funkcija  $u_{\vec{k}}(\vec{r})$  ima istu translacijsku simetriju kao i rešetka, tj.  $u_{\vec{k}}(\vec{r} + \vec{R}) = u_{\vec{k}}(\vec{r})$ .

U *aproksimaciji čvrste veze*, kristal tretiramo kao sustav slabo interagirajućih neutralnih atoma, između kojih elektron može tunelirati, i pretpostavljamo da je kristalni potencijal velik. U ovakvoj aproksimaciji, elektron dugo vremena „kruži“ oko matičnog atoma prije nego „skoči“ na neki od susjednih. [1]

Promotrimo elektrone na koje osim magnetskog polja djeluje i periodički potencijal kristalne rešetke. Primjena vanjskog magnetskog polja za posljedicu ima kvantizaciju površine povezane s magnetskim tokom, a periodički potencijal zahtjeva translacijsku simetriju rešetke. Jedino su za neke iznose polja dva uvjeta kompatibilna i pokazat ćemo da u tom slučaju energijski spektar poprima jedinstven oblik. Efekti su najizraženiji u dvodimenzionalnim sustavima s primijenjenim okomitim magnetskim poljem. U aproksimaciji čvrste veze u kvadratnoj kristalnoj rešetci, koju ćemo razmatrati, rezultat je kompleksni samoslični spektar.

Schrödingerova jednađba za elektron u periodičkom potencijalu u dvije dimenzije, s primijenjenim magnetskim poljem u Landauovom baždarenju, je [5]

$$\frac{1}{2m_e}(-i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A})^2\psi + V(x, y)\psi = E\psi, \quad (4.4)$$

gdje je  $V(x, y)$  periodičan i vrijedi

$$V(x + ma, y + nb) = V(x, y); \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad (4.5)$$

$a$  i  $b$  su konstante rešetke.

Kad se uključi magnetsko polje, valna funkcija postaje [7]

$$\psi \rightarrow \psi e^{i\frac{e}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{l}} \quad (4.6)$$

jer se pojavi dodatni fazni pomak koji je proporcionalan linijskom integralu vektorskog potencijala. Kako bi valna funkcija bila jedinstvena, fazna promjena po bilo kojoj zatvorenoj krivulji mora iznositi

$$\oint \frac{e}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{l} = 2\pi n, \quad (4.7)$$

gdje je  $n \in \mathbb{Z}$ . Linijski integral od  $\vec{A}$  po zatvorenoj krivulji jednak je magnetskom toku kroz površinu zatvorenu krivuljom. Magnetski tok kvantiziran je u jedinicama  $\Phi_0$  (3.30). Zbog periodičkog potencijala, prema Blochovom teoremu valna funkcija mora biti oblika

$$\psi(\vec{r} + \vec{T}) = \psi(\vec{r})e^{i\vec{k}\cdot\vec{T}}, \quad (4.8)$$

gdje je  $\vec{T} = m\vec{a} + n\vec{b}$ . Pretpostavimo da smo primijenili takvo magnetsko polje da vrijedi

$$\vec{B}\cdot\vec{S} = \Phi, \quad (4.9)$$

gdje je  $\Phi$  tok magnetskog polja kroz površinu  $S = ab$ . Ako je  $\Phi = \Phi_0$ , onda za obilazak oko jedinične ćelije, ili nekoliko jediničnih ćelija, valna funkcija ostaje jedinstvena.[7] U općenitom slučaju kad je

$$\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{p}{q}, \quad (4.10)$$

gdje su  $p, q \in \mathbb{Z}$ , uzimamo grupu od  $q$  jediničnih ćelija kao novu jediničnu ćeliju. Time nova jedinična ćelija sigurno sadržava  $p$  kvanata magnetskog toka. Jer trebamo  $q$  starih ćelija za jednu novu, za posljedicu imamo cijepanje svake elektronske vrpce na  $q$  novih vrpca. [7]

U poluklasičnoj aproksimaciji, interpretiramo valni vektor kao klasičnu količinu gibanja, a brzinu  $\vec{v}_{\vec{k}} = \vec{\nabla}_{\vec{k}} E(\vec{k})$  kao klasičnu derivaciju položaja  $\vec{r}$ .

Promotrimo što se događa s elektronima u vrpca u poluklasičnoj aproksimaciji. Promatramo jednu elektronsku vrpcu u aproksimaciji čvrste veze za kvadratnu rešetku konstante  $a$  s disperzijskom relacijom bez prisustva magnetskog polja

$$E(k_x, k_y) = -2t (\cos(k_x a) + \cos(k_y a)), \quad (4.11)$$

gdje je  $t$  tzv. transfer integral proporcionalan vjerojatnosti preskoka elektrona na susjedni atom. Supstitucijom

$$\vec{k} \rightarrow \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + e\vec{A} \right) \quad (4.12)$$

i korištenjem Landauovog baždarenja  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$  konstruiramo efektivni Lifshitz – Onsagerov hamiltonijan [8]

$$H = -2t \left\{ \cos \left[ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} a \right] + \cos \left[ \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{\hbar} Bx \right) a \right] \right\}. \quad (4.13)$$

Hamiltonijan sadrži operatore translacije  $e^{a\frac{\partial}{\partial x}}$  i  $e^{a\frac{\partial}{\partial y}}$  koji pomiču valnu funkciju za konstantu rešetke  $a$  u  $x$  i  $y$  – smjeru

$$e^{a\frac{\partial}{\partial x}} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + a\hat{x}), \quad (4.14)$$

i

$$e^{a\frac{\partial}{\partial y}} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + a\hat{y}). \quad (4.15)$$

Kombiniranjem izraza (4.13), (4.14) i (4.15), Schrödingerova jednadžba postaje

$$-t \left[ \psi(\vec{r} + a\hat{x}) + \psi(\vec{r} - a\hat{x}) + e^{i\frac{eaBx}{\hbar}} \psi(\vec{r} + a\hat{y}) + e^{-i\frac{eaBx}{\hbar}} \psi(\vec{r} - a\hat{y}) \right] = E\psi(\vec{r}). \quad (4.16)$$

Iz izraza (4.16) vidi se da je valna funkcija u  $(x, y)$  povezana s četiri najbliža susjeda u kristalnoj rešetci. [9]

U aproksimaciji čvrste veze *Wannierove funkcije*  $\phi(\vec{r} - \vec{R}_i)$  su prikladnije za korištenje [5], pa valnu funkciju jednoelektronskog stanja možemo raspisati u bazi Wannierovih funkcija,

$$\psi(\vec{r}) = \sum_i g(\vec{R}_i) \phi(\vec{r} - \vec{R}_i), \quad (4.17)$$

gdje su  $g(\vec{R}_i)$  koeficijenti u razvoju po čvorovim rešetke  $\vec{R}_i$  [5]. Uvrštavanjem izraza (4.17) u jednadžbu (4.16) dobije se

$$-t \left[ g(\vec{R}_i + a\hat{x}) + g(\vec{R}_i - a\hat{x}) + e^{i\frac{eaBx}{\hbar}} g(\vec{R}_i + a\hat{y}) + e^{-i\frac{eaBx}{\hbar}} g(\vec{R}_i - a\hat{y}) \right] = E g(\vec{R}_i). \quad (4.18)$$

Specificiranjem točaka rešetke kao  $\vec{R}_i \equiv (ma, na)$  s cjelobrojnim koordinatama  $(m, n)$  te uz supstituciju  $E' = -\frac{E}{t}$ , jednadžba (4.18) može se zapisati kao

$$\left[ g(m+1, n) + g(m-1, n) + e^{i\frac{ea^2Bm}{\hbar}} g(m, n+1) + e^{-i\frac{ea^2Bm}{\hbar}} g(m, n-1) \right] = E' g(m, n). \quad (4.19)$$

Zbog Landauovog baždarenja, samo  $x$  – komponenta se pojavljuje u faznom faktoru (4.7), te se stoga rješenje u  $y$  – smjeru može zapisati kao ravni val

$$g(m, n) = e^{ikna} g(m). \quad (4.20)$$

Kombiniranjem izraza (4.20) i (4.19) dolazi se do jednadžbe

$$g(m+1) + g(m-1) + 2 \cos(2\pi m\alpha + ka) g(m) = E' g(m), \quad (4.21)$$

gdje je

$$\alpha \equiv \frac{ea^2B}{2\pi\hbar}. \quad (4.22)$$

Parametar  $\alpha$  je bezdimenzionalna veličina, predstavlja broj kvanata toka magnetskog polja kroz primitivnu ćeliju. Također, ovaj se parametar može interpretirati kao omjer dva karakteristična perioda ovog problema: jedan je period gibanja elektrona  $\frac{a^2 m}{2\pi\hbar}$  u stanju s kristalnom količinom gibanja  $\frac{2\pi}{a}\hbar$ , a drugi period jednak je recipročnoj ciklotronskoj frekvenciji. [10]

Po definiciji, kvazi – periodične funkcije imaju dva ili više iracionalno povezana (nekomenzurabilna) perioda. [7]

Uz sve napravljene supstitucije, Schrödingerova jednažba (4.16) pretvorila se u jednodimenzionalnu diferencijsku jednažbu (4.21).

Rekurzivnu jednažbu (4.21) možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} g(m+1) \\ g(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E' - 2 \cos(2\pi m\alpha + ka) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(m) \\ g(m-1) \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

gdje  $2 \times 2$  matricu nazivamo  $A(m)$ . Korištenjem svojstva rubnih uvjeta na  $g(m)$  da se u početnu točku vrati nakon  $N$  koraka, jednažba, kojom se metodom transfer matrica [10] mogu izračunati svojstvene vrijednosti energija, je

$$\prod_{m=1}^N \begin{pmatrix} E' - 2 \cos(2\pi m\alpha + ka) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (4.24)$$

Ako su matrice  $A(m)$  periodične u  $m$ , dugi produkti matrica  $A(m)$  sastojat će se u ponavljanju jednog bloka matrica  $A(m)$ , s periodom  $q$  [5]. Uvjet koji se nameće na  $\alpha$  je da mora postojati cijeli broj  $p$  takav da vrijedi:

$$2\pi\alpha(m+q) - k = 2\pi\alpha m - k + 2\pi p,$$

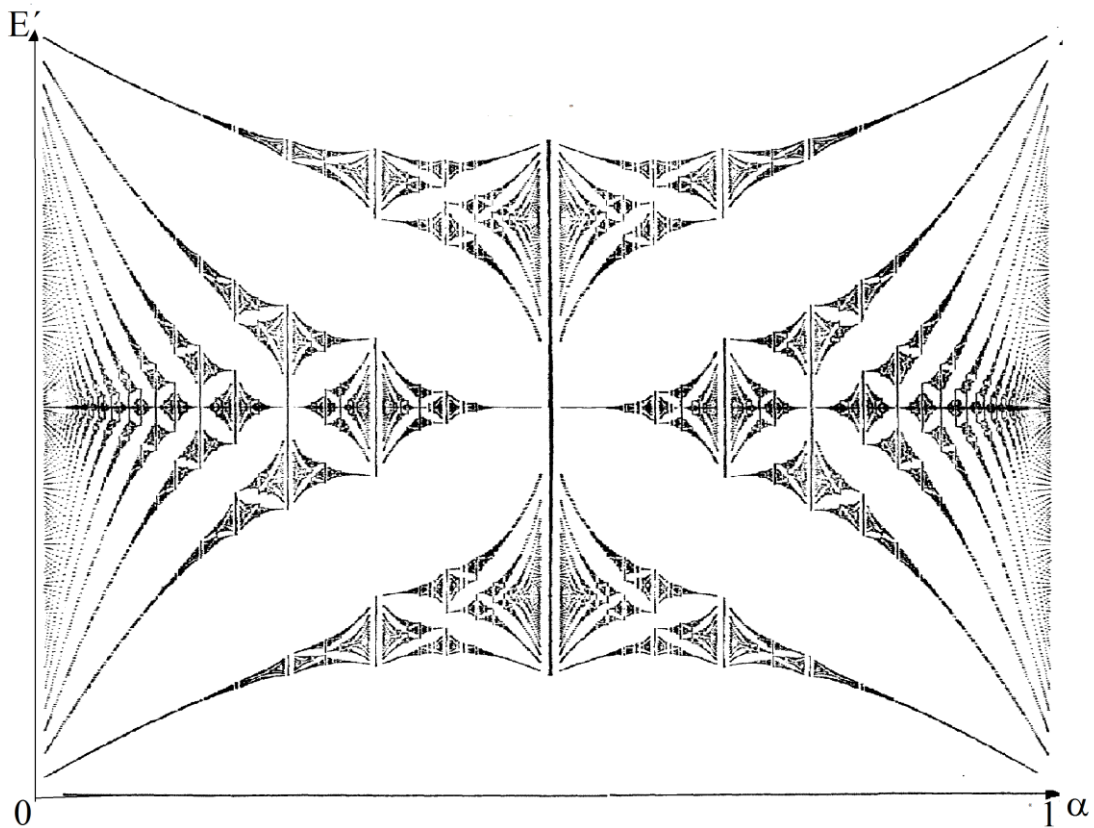
što se svodi na

$$\alpha = \frac{p}{q}. \quad (4.25)$$

Kad je uvjet (4.25) zadovoljen, Blochova se vrpca podijeli u  $q$  novih vrpca. [10]

Na temelju jednadžbe (4.23) može se izračunati energijski spektar koji je prikazan na Slici 4.1. Spektar je samoslične strukture i naziva se „*Hofstadterov leptir*“. Manifestirana samosličnost (fraktalnost) posljedica je kvantizacije toka magnetskog polja, tj. uvjeta za jedinstvenost valne funkcije. Energijske vrpce i energijski procijepi javljaju se na svim vrijednostima energije. Interval vrijednosti prikazane varijable  $\alpha$  je  $0 < \frac{\Phi}{\Phi_0} < 1$ . U donjem lijevom kutu slike ( $\alpha = 0$ ) vidimo skup linija čiji se nagibi povećavaju s 1, 2, 3, itd. To su Landauovi nivoi s energijama  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ . Pogledamo li  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{2}$ , vidjet ćemo dvije vrpce koje se susreću. Za  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{2}{3}$ , vidimo tri vrpce odvojene dvama procijepima, za  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{3}{5}$  vidimo 5 vrpce i 4 procijepa. Za  $\frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{2}$ , vidimo dvije vrpce, no promijenimo li iznos magnetskog polja vrlo malo, npr. na  $\frac{499,999}{1,000,000}$ , na tome mjestu imat ćemo 1 milijun vrpce odvojenih sličnim brojem procijepa.[9] Uvijek smo infinitezimalno blizu dobivanja beskonačnog broja procijepa u sustavu. Ako je  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $q$  je nova periodičnost sustava i nastat će toliko novih vrpce. Ovaj složeni energijski spektar možemo protumačiti tako da povučemo analogiju s atomima u sustavu u aproksimaciji čvrste veze. Disperziju u aproksimaciji čvrste veze dobijamo tako da pretpostavimo da su elektroni uglavnom lokalizirani oko svojih matičnih atoma, sa svojim atomskim valnim funkcijama i malom vjerojatnošću preskoka na prve susjede. Bez vanjskog magnetskog polja, svaka atomska energijska razina tada će dati energijsku vrpcu čija je disperzijska relacija dana izrazom (4.11). Kad se magnetsko polje uključi, vrpca se podijeli u Landauove nivoe. Između degeneriranih Landauovih nivoa postoji mogućnost tuneliranja, pa će se svaki Landauov nivo proširiti u Landauovu vrpcu. Svaka od Landauovih vrpce ponovno će se podijeliti u diskretne Landauove nivoe pod utjecajem magnetskog polja, tj. postat će skup kvantiziranih nivoa [9]. Iteracija se nastavlja sve dok postoji iracionalna vrijednost  $\frac{\Phi}{\Phi_0}$ . Samosličnost strukture i beskonačne serije energijskih procijepa rezultiraju iz iteracija.[5]





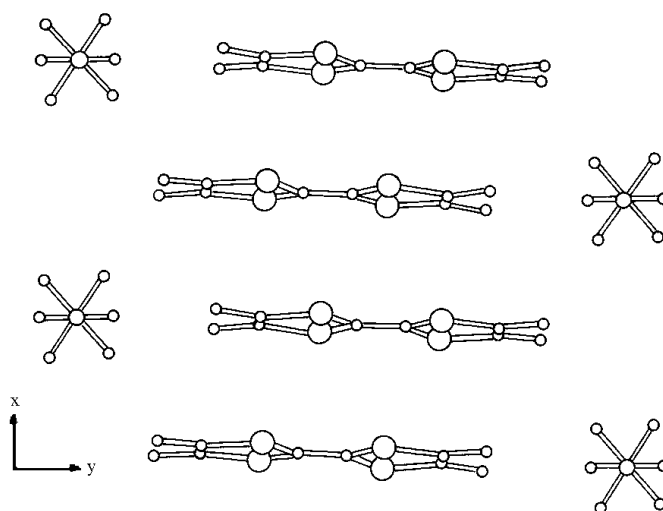
Slika 4.1. Prikaz energijskog spektra elektrona unutar jedne jedinične ćelije kvadratne rešetke pod utjecajem magnetskog polja, tzv. Hofstadterov leptir prema D. Hofstadteru koji ga je prvi izračunao i grafički prikazao 1976. godine.  $E'$  je bezdimenzionalna energija,  $E' = -\frac{E}{t}$ , a  $\alpha$  omjer magnetskog toka kroz jediničnu ćeliju i kvanta magnetskog toka  $\alpha = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ . Kad se magnetsko polje uključi, energijska vrpca se podijeli u Landauove nivoe. Između degeneriranih Landauovih nivoea postoji mogućnost tuneliranja, pa će se svaki Landauov nivo pretvoriti u Landauovu vrpca. Svaka od Landauovih vrpca ponovno će se podijeliti pod utjecajem magnetskog polja, postat će skup kvantiziranih nivoea.[10] Ovakvim iteracijama dolazi se na samoslični (fraktalni) spektar, prikazan na slici, gdje zacrtnjenje predstavlja dozvoljene energije sustava (vrpce), a bjeline su zabranjena područja energije (procijepi) između vrpca.

## 5. Kvazi - jednodimenzionalna rešetka i učinci magnetskog polja na elektron

Pojam *kvazi-jednodimenzionalni (Q1D)* materijali odnosi se na materijale koji imaju jako anizotropnu kristalnu strukturu ili anizotropno preklapanje elektronskih valnih funkcija na susjednim čvorovima rešetke. Smanjivanje dimenzionalnosti recipročnog prostora s tri dimenzije na dvije ili jednu, ima za posljedicu izraženije efekte fluktuacija [11] te samim time elektronski sustav može postati nestabilan spram formiranja osnovnog stanja nove simetrije.

### 5.1 Organski vodiči

Velik broj organskih tvari tvori kristalne strukture u kojima su fundamentalne strukturne jedinice linearni lanci. Nekolicina takvih tvari ima djelomično popunjene elektronske vrpce i, konsekvntno, pokazuje metalno ponašanje pri dovoljno visokim temperaturama. Također, u ovakvim materijalima prisutne su anizotropne elektronske vrpce što ih čini kvazi – jednodimenzionalnim. Planarne organske molekule, koje tvore linearne lance s velikim preklapanjem  $\pi$  – orbitala, u kombinaciji s protuionima ili molekulama dat će soli s metalnim ponašanjem. Kristalna struktura jednog takvog materijala,  $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$ , koji pripada tzv. *Bechgaardovim solima*, nastaje slaganjem organskih molekula TMTSF jednih na druge između kojih se smještaju heksafluorofosfatni ioni (Slika 5.1). [11]



Slika 5.1. Shematski prikaz kristalne strukture spoja  $(\text{TMTSF})_2\text{PF}_6$  koji pripada Bechgaardovim solima. Gotovo planarne molekule TMTSF slažu se jedna na drugu u slojeve te se u tom smjeru ( $x$  – smjer) opaža dobra vodljivost. Stupci organskih molekula međusobno su odvojeni nizovima  $\text{PF}_6^-$  iona koji su prikazani sa strana.[11]

## 5.2. Učinci magnetskog polja

Elektronska svojstva organskih vodiča, primjerice Bechgaardovih soli, redom možemo u aproksimaciji čvrste veze opisati trima transfer integralima  $t_a, t_b, t_c$  uzduž tri kristalne osi  $x, y, z$ , redom s konstantama rešetke  $a, b$  i  $c$ . Bechgaardove soli pripadaju triklinskom kristalografskom sustavu, ali se u aproksimaciji triklinska simetrija može zamijeniti ortorompskom, pa se elektronska disperzija može zapisati kao [7]

$$E(\vec{k}) = \mu - 2t_a \cos(k_x a) - 2t_b \cos(k_y b) - 2t_c \cos(k_z c), \quad (5.1)$$

gdje je  $\mu$  Fermijeva energija, pri čemu za ove materijale vrijedi

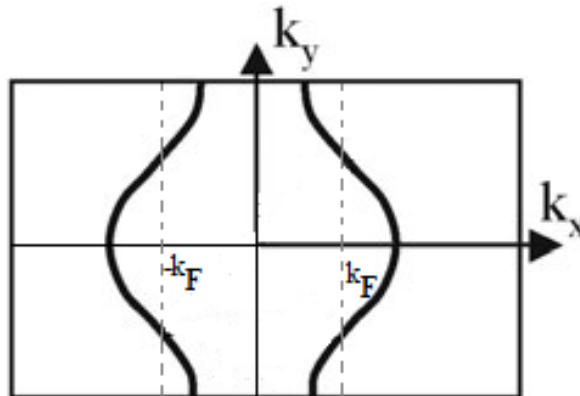
$$a : b : c = 3.65 \text{ \AA} : 7.7 \text{ \AA} : 13.5 \text{ \AA}, \quad (5.2)$$

i

$$t_a : t_b : t_c = 3000 \text{ K} : 300 \text{ K} : 10 \text{ K}. \quad (5.3)$$

U fundamentalnim izračunima  $t_c$  zanemarujemo što promatrani sustav čini jako anizotropnim dvodimenzionalnim sustavom tj. kvazi – jednodimenzionalnim.

Promatrani materijal ima  $\frac{1}{4}$  - popunjenu vrpcu i Fermijeva površina je otvorena (Slika 5.2).[9]



Slika 5.2. Otvorena Fermijeva površina kvazi – jednodimenzionalnog sustava. Fermijeva površina je zakrivljena zbog postojanja elektronskog preskoka ( $t_b$ ) u smjeru  $y$  – osi. Isprekidanom linijom prikazana je idealizirana Fermijeva površina za materijal s disperzijom samo u  $k_x$  – smjeru, tj. bez transverzalne disperzije.  $\pm k_F$  odgovara položaju Fermijevog nivoa.[12]

Linearizacijom disperzije oko Fermijeve energije duž osi  $k_x$  izraz (5.1) postaje

$$E(k_x, k_y) = \mu + v_F(|k_x| - k_F) - 2t_b \cos(k_y b) - 2t'_b \cos(2k_y b), \quad (5.4)$$

gdje je  $t'_b \equiv \frac{t_b^2}{t_a} \frac{\cos k_F a}{4 \sin^2 k_F a}$ . Zbog linearizacije disperzije, javlja se član  $t'_b$ , koji je proporcionalan s  $\frac{t_b^2}{t_a}$ , kao *efektivni doprinos* elektronskih preskoka na druge susjede. Uvedemo li operator količine gibanja  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$  i minimalnu supstituciju  $\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \frac{e}{\hbar}\vec{A}$  u Landauovom baždarenju  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ , na temelju disperzije možemo konstruirati Lifshitz – Onsagerov hamiltonijan [8] koji glasi

$$H = \mu + v_F \left( \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - k_F \right) - 2t_b \cos(k_y b + Gx) - 2t'_b \cos[2(k_y b + Gx)], \quad (5.5)$$

gdje je  $G \equiv \frac{eBb}{\hbar}$  tzv. "magnetski valni vektor" ili "vektor magnetske zone".

Rješenje Schrödingerove jednadžbe  $H\psi = E\psi$  je oblika

$$\psi(x, k_y) = e^{i\left(kx + \frac{1}{v_F G} \Gamma(k_y b + Gx) - \frac{1}{v_F G} \Gamma(k_y b)\right)}, \quad (5.6)$$

gdje je

$$\Gamma(k_y) \equiv \int_0^{k_y} T_y(k'_y) dk'_y \quad (5.7)$$

i

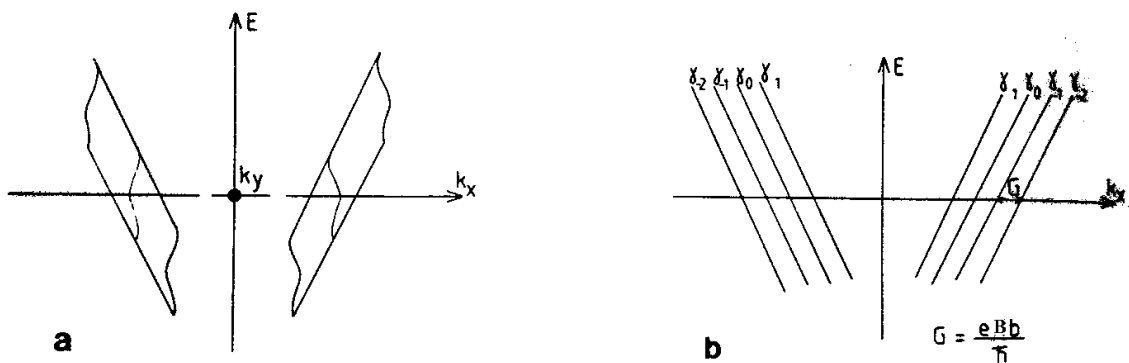
$$T_y(x, k_y) \equiv -2t_b \cos(k_y b + Gx) - 2t'_b \cos(2(k_y b + Gx)). \quad (5.8)$$

Projiciranjem valne funkcije (5.6) na ravne valove,  $\langle k_x, k_y | \psi(x, k_y) \rangle$ , dobiva se spektar sustava

$$E_k = \mu + v_F(\pm k - k_F) + Nv_F G, \quad (5.9)$$

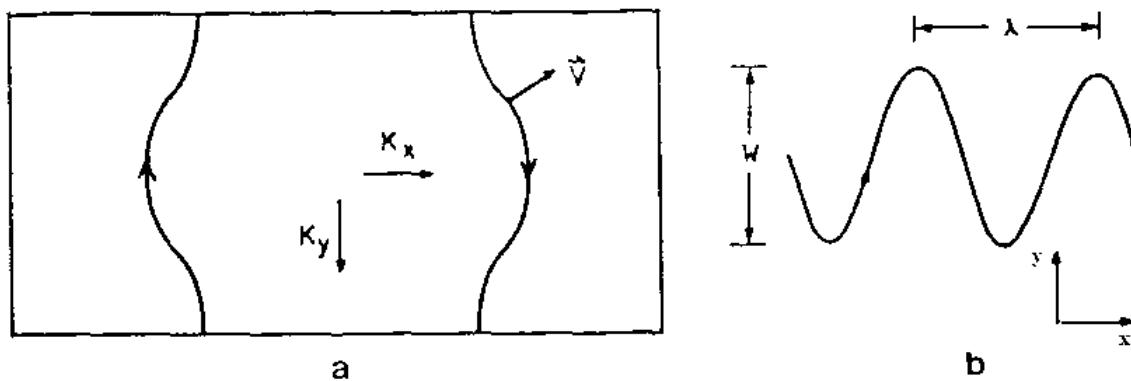
gdje je  $N \in \mathbb{Z}$ .

Iz izraza (5.9) vidimo da je spektar postao jednodimenzionalan; ovisi o jednom kvantnom broju  $k$ , a sastoji se od niza jednodimenzionalnih disperzija razmaknutih za iznos valnog vektora „magnetske zone“  $G$  (Slika 5.3).



Slika 5.3. (a) Disperzijska relacija  $E(\vec{k})$  anizotropnog dvodimenzionalnog elektronskog plina u odsutstvu magnetskog polja. (b) Po uključenju magnetskog polja, struktura disperzijske relacije postaje kvalitativno različita: sastoji se od diskretnog skupa jednodimenzionalnih disperzija. Dvije jednodimenzionalne disperzije međusobno su udaljene za  $G$ , gdje je  $G = \frac{eBb}{h}$  vektor „magnetske zone“. Promotrimo izraz (5.10) i desnu stranu spektra. Disperzija označena s  $\gamma_0$  odgovara  $E_k = v_F(k - k_F)$ , disperzija označena s  $\gamma_1$  odgovara  $E_k = v_F(k - k_F) + v_F G$ , itd. S lijeve strane, disperzija označena s  $\gamma_0$  odgovara  $E_k = v_F(-k - k_F)$ , a disperzija oznake  $\gamma_1$  odgovara  $E_k = v_F(-k - k_F) + v_F G$ , itd. [9]

Vidjeli smo da je prisustvo magnetskog polja promijenilo disperzijsku relaciju iz dvodimenzionalne u jednodimenzionalnu u smislu ovisnosti samo o jednom kvantnom broju  $k$ . U kvazi – klasičnoj slici, u prisustvu magnetskog polja, u organskom vodiču postoje samo otvorene orbite na Fermijevoj površini po kojima se elektron se giba i kad dođe do ruba Brillouinove zone ponovno se pojavi u ekvivalentnoj točki na drugom kraju zone. Brzina elektrona uvijek je okomita na Fermijevu površinu i na temelju toga možemo rekonstruirati trajektoriju elektrona u realnom prostoru koja je beskonačna u  $x$  – smjeru , a ograničena u  $y$  – smjeru (Slika 5.4).[9]



Slika 5.4. (a) Prikazana je Fermijeva ploha za kvazi – jednodimenzionalni sustav prema naznačenoj disperziji (5.4) s otvorenom orbitom elektrona u recipročnom prostoru. U kvazi-klasičnoj slici, smjer

brzine elektrona okomit je na Fermijevu površinu. Elektron se na takvoj orbiti neće vratiti u početnu točku, već valni vektor takvog stanja giba propagira do beskonačnosti. (b) Odgovarajuća trajektorija elektrona u realnom prostoru koja je ograničena u  $y$  – smjeru, a beskonačna u  $x$  – smjeru. [9]

## 6. Primjer nastavnog sata

U drugom razredu gimnazije prirodoslovnog smjera, u predmetu *Fizika*, kao dio nastavne cjeline *Elektromagnetizam*, predviđeno je da se u jednoj nastavnoj jedinici obrađuju kružno i spiralno gibanje nabijene čestice u magnetskom polju i Lorentzova sila, kao obvezna tema. Praktični primjeri gibanja nabijene čestice u magnetskom polju, primjerice načelo rada ciklotrona, predloženi su kao izborna tema.

U sklopu navedene nastavne jedinice, jedan nastavni sat može se izvesti tako da se obradi obvezni dio nastavne jedinice nakon čega će učenici samostalno obraditi izborni dio. Oblik rada korišten u izvedbi tog nastavnog sata je frontalni rad, a nastavne metode koje se koriste su metoda demonstracije i metoda razgovora. Za uspješnu izvedbu ovakvog sata potrebni ulazni obrazovni ishodi učenika su:

- navesti osnovna svojstva magnetna
- skicirati vektor magnetskoga polja u bilo kojoj točki prostora oko magnetna
- linijama magnetskog polja prikazati magnetsko polje jednoga te dvaju magnetna.

Izlazni obrazovni ishodi su:

- opisati osnovne pojmove vezane uz magnetske i elektromagnetske pojave
- matematički izraziti magnetske i elektromagnetske pojave
- primijeniti izraz za silu kojom magnet djeluje na vodič kojim teče struja
- odrediti smjer sile magnetna
- kvalitativno i kvantitativno opisati gibanje električki nabijene čestice u homogenom magnetskom polju
- pomoću izraza za Lorentzovu silu odrediti njen smjer
- objasniti načelo rada ciklotrona
- navesti izraz za ciklotronsku frekvenciju.

Da bismo ostvarili ove ishode nastavni sat ćemo organizirati u dva dijela. Sastojat će se od izvedbe eksperimenta i formulacije zadatka za učenike koji će oni samostalno izraditi. Odabrani eksperiment ima mnoge prednosti: pruža mogućnost da se učenicima jasno predoči pojava koja će se promatrati; gibanje nabijene čestice u magnetskom polju, potrebni materijali su lako dostupni, a sam eksperimentalni postav moguće je složiti u kratkom vremenu.

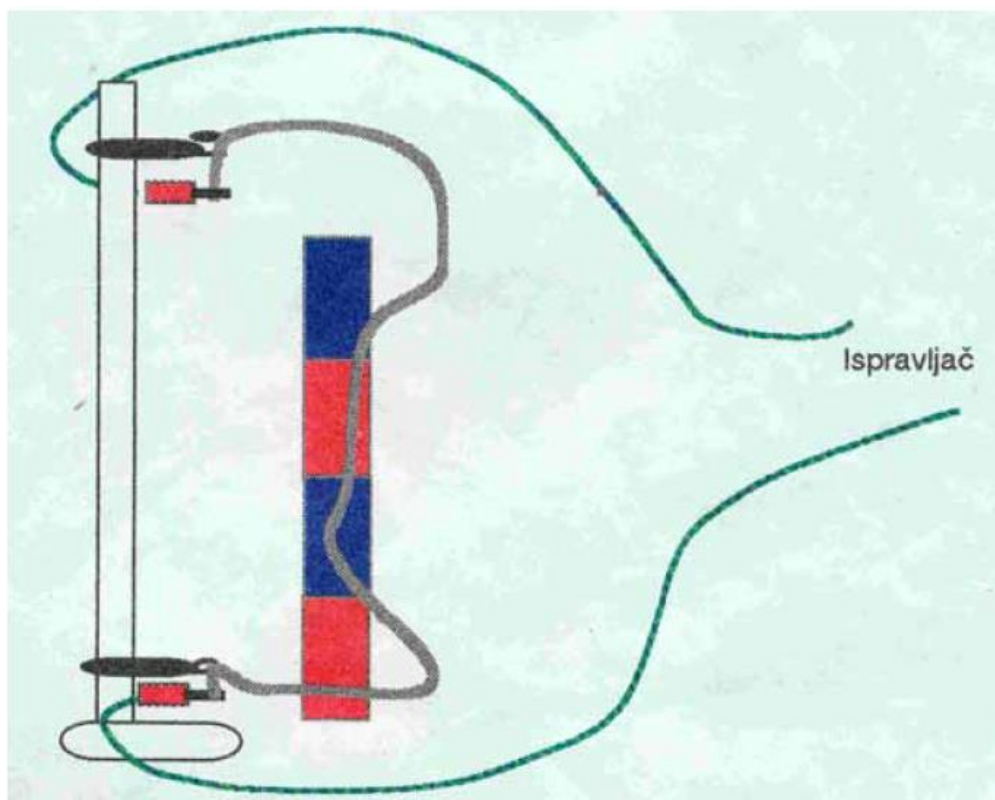
Tijek nastavnog sata je sljedeći:

## 1. Eksperiment 1

### 1.1 Eksperimentalni postav

Pribor: ispravljač izmjenične struje, traka aluminijske folije – širine 1,5 – 2,5 cm i duljine oko 70 cm, štapićasti magnet, dva vodiča (žice za spajanje), dvije krokodil štipaljke, dvije drvene štipaljke, stalak s hvataljkama.

Na stalak se pričvrste dvije hvataljke: jedna pri vrhu stalka, a druga u podnožju stalka. Hvataljke služe da bi se na njih vertikalno postavila traka aluminijske folije, ali tako da traka nije napeta nego da labavo visi. Po potrebi, kao pomoć u ovom pričvršćivanju služe dvije drvene štipaljke preko kojih se, nakon što ih se postavi na hvataljke, može lagano prebaciti aluminijska traka. Na krajeve aluminijske trake pričvrste se krokodil štipaljka dva vodiča. Drugi kraj vodiča priključi se u ispravljač. Na ispravljaču je potrebno odabrati jakost struje  $I = 0,5 \text{ A}$ . [13]



Slika 6.1. Prikaz eksperimentalnog postava u eksperimentu 1. Na slici je prikazan način postavljanja aluminijske folije na stalak te način spajanja strujnog kruga. Također se vidi potreban način primicanja magneta aluminijskoj traci. [13]



## 1.2 Izvođenje eksperimenta

Eksperiment je zamišljen kao demonstracijski. Izvodi se tako da se, nakon što se strujni krug zatvori, aluminijskoj traci približi štapićasti magnet. Tada se aluminijska traka pod utjecajem magnetskog polja štapićastog magneta spiralno omota oko štapićastog magneta. Nakon toga, magnet se odmakne, te se okrene u suprotan položaj (tako da je na mjestu N pola sada S pol, ili obrnuto) i ponovno približi. Traka će se opet omotati spiralno oko štapićastog magneta, ali u suprotnom smjeru.

No, prije samog zatvaranja strujnog kruga, ili po isključenju strujnog kruga, važno je također približiti štapićasti magnet aluminijskoj traci, kako bi se pokazalo da tada između magneta i trake nema vidljivog međudjelovanja. Za odabrani tijek pokusa gdje se najprije magnet primakne aluminijskoj traci bez zatvaranja strujnog kruga, nakon što elementima strujnog kruga počne protjecati struja, učenicima će se postaviti sljedeća pitanja:

### I. Prije uključanja strujnog kruga:

- Možemo li aluminijsku traku priključiti u strujni krug?  
(Očekivani odgovor: Možemo, aluminij je metal i provodi električnu struju)
- Što očekujete da će se dogoditi, primaknemo li magnet aluminijskoj traci?  
(Učenici navode svoje pretpostavke)
- (Traci se primakne magnet) Je li došlo do ikakvih vidljivih promjena?  
(Nije)

### II. Nakon uključanja strujnog kruga

- Što očekujete da će se dogoditi, primaknemo li magnet aluminijskoj traci?  
(Učenici navode svoje pretpostavke)
- (Traci se primakne magnet) Što uočavate?  
(Aluminijska traka se spiralno omotala oko magneta)
- Okrenemo li magnet, što očekujete da će se dogoditi?  
(Učenici navode svoje pretpostavke)
- (Primakne se okrenuti magnet) Što uočavate?  
(Traka se ponovno omota oko magneta, ali u suprotnom smjeru)

Bilo bi korisno konstruirati sljedeću tablicu te u takvu tablicu na ploči ispisati opažanja:

Tablica 1. Opažanja prilikom izvođenja demonstracijskog eksperimenta

$I = 0$	$I \neq 0$
- nema promjene oblika trake	- traka se spiralno omota oko magneta

### 1.3 Tumačenje rezultata eksperimenta

Korištenjem učeničkih odgovora danih na nastavnikova pitanja prilikom izvođenja pokusa, objasniti će se djelovanje sile na nabijene čestice koje se gibaju u magnetskom polju.

Redoslijed pitanja prilikom upućivanja učenika na zaključke je sljedeći:

- Koji je nužan uvjet da se opazi međudjelovanje aluminijske trake i štapićastog magneta?  
(Protjecanje električne struje u strujnom krugu)
- Što je električna struja?  
(Usmjereno gibanje nositelja naboja.)  
Dakle, bilo je potrebno postojanje usmjerenog gibanja naboja kako bi se opazilo međudjelovanje aluminijske trake i štapićastog magneta.
- Što se postiže okretanjem magneta?  
(okretanjem magneta promijene se položaji njegovih magnetnih polova, a time i smjer linija magnetskog polja magneta, dakle smjer djelovanja sile)
- Promotrimo način na koji se traka omotala oko štapićastog magneta. Makroskopski, opazili smo namatanje trake.  
Što je na mnogo manjoj skali zaslužno za ovakvo opažanje? (Učenike se ovdje može uputiti na Tablicu 1., a traženi odgovor je: gibanje nositelja naboja)
- Na koje načine se nositelji naboja moraju gibati kako bismo na makroskopskoj razini opazili ovakvo namatanje aluminijske trake ?  
(Spiralno (helikoidalno) gibanje zapravo je superpozicija dva gibanja nositelja naboja, kružnog gibanja, ali i gibanja po pravcu, uzduž štapićastog magneta.)
- Što je uzrok gibanja nositelja naboja po pravcu, uzduž magneta?

(gibaju se pod utjecajem električnog polja uspostavljenog u cijelom strujnom krugu, nakon zatvaranja strujnog kruga)

- Što je nužan uvjet da bismo opazili kružno gibanje?  
(Postojanje rezultantne sile okomite na smjer brzine čestice; nositelja naboja.)
- Od čega, u ovom slučaju, takva sila potječe?  
(Od utjecaja magnetskog polja štapićastog magneta)

Dakle, sila magneta je djelovala na nositelje naboja u gibanju silom okomitog smjera na smjer njihove brzine; sila magneta djeluje kao centripetalna sila.

Silu kojom magnetsko polje djeluje na naboj u gibanju matematički opisujemo na sljedeći način:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B},$$

gdje je  $q$  naboj čestice,  $\vec{v}$  brzina čestice a  $\vec{B}$  jakost vanjskog magnetskog polja.

Ako na česticu osim magnetskog polja djeluje i električno polje ukupnu elektromagnetsku silu nazivamo *Lorentzova sila* i zapisujemo na sljedeći način:

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B},$$

gdje je  $\vec{E}$  električno polje.

Nakon izvedenog prvog dijela nastavnog sata koji obuhvaća obveznu komponentu nastavne jedinice, učenike ćemo uputiti na izradu samostalnog zadatka. Svo gradivo potrebno za razumijevanje ovog zadatka obrađeno je u prvom dijelu nastavnog sata s opisanim eksperimentom kao okosnicom.

## 2. Formulacija zadatka za učenike

Ciklotron je uređaj koji koristi djelovanje magnetskog polja na nabijene čestice, učenici trebaju samostalno pronaći opis rada ciklotrona i objasniti ga te navesti primjene korištenja.

Zadatak : na temelju naučenog gradiva u ovom satu, samostalno opisati načelo rada ciklotrona, izraziti polumjer i frekvenciju gibanja čestice, te objasniti primjene korištenja ciklotrona u svakodnevnom životu.

Literatura za rješavanje zadatka:

- N. Brković, Zbirka zadataka iz fizike, II. dio, LUK d.o.o, Zagreb, 2001.
- Wikipedia, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Glavna\\_stranica](https://hr.wikipedia.org/wiki/Glavna_stranica)

## 7. Zaključak

Stanja slobodnih elektrona u Sommerfeldovom modelu metala kvantizirana su Born – van Karmanovim rubnim uvjetima. Postojanje vanjskog magnetskog polja narušilo je tu kvantizaciju; komponente količine gibanja u recipročnom prostoru više nisu „dobri kvantni brojevi“. Doprinos ukupnoj energiji od gibanja u smjeru okomitom na magnetsko polje kvantiziran je u jedinicama  $\hbar\omega_c$ , čime je pokazano da energija elektronskog plina kao cjeline koja se nalazi u vanjskom magnetskom polju ovisi o jakosti primijenjenog magnetskog polja. Novi kvantni broj, koji opisuje slobodnoelektronski plin u magnetskom polju, je samo indeks Landauovog nivoa  $n$ , a energijski spektar, u tom smislu, postao je jednodimenzionalan. U promatranom kvazi – jednodimenzionalnom sustavu, također se vidi slična „jednodimenzionalizacija“ spektra tj. ovisnost o samo jednom kvantnom broju, kao posljedica djelovanja magnetskog polja. U aproksimaciji čvrste veze u kvadratnoj kristalnoj rešetci, koju smo razmatrali, rezultat je kompleksni samoslični spektar „ Hofstadterov leptir“, tj. fraktalni skup energijskih vrpca i procijepa, nastao kao posljedica kvantizacije toka magnetskog polja kroz kristalnu rešetku. Za obradu na nastavnom satu iz predmeta Fizika, odabrana je, u sklopu nastavne cjeline Elektromagnetizam, nastavna tema Lorentzova sila i gibanje nabijene čestice u elektromagnetskom polju.

## 8. Popis literature

- [1] Omar, M.A. Elementary solid state physics: principles and applications, 4th ed Boston; Pearson, 1994.
- [2] Ashcroft, N.W, Mermin, N.D. Solid state physics, 1st ed Ithaca; Harcourt College Publishers, 1976.
- [3] Kittel, C. Introduction to solid state physics, 8th ed California; John Wiley and Sons, 2005.
- [4] Šips, V. Uvod u fiziku čvrstog stanja: udžbenik za studente Prirodoslovno – matematičkog fakulteta u Zagrebu, 2. izd Zagreb; Školska knjiga, 2003.
- [5] Solyom, J. Fundamentals of the Physics of Solids, Volume II: Electronic Properties, Berlin, Springer-Verlag, 2009.
- [6] Ziman, J.M. Principles of the theory of solids, 2nd ed. Cambridge; Cambridge University Press, 1972.
- [7] Montambaux, G. Susceptibility and instability of the quasi – one – dimensional electron gas under magnetic field: Low - dimensional conductors and superconductors 1986 / edited by D. Jérôme and L.G. Caron. New York : Plenum Press, 1987. str. 233–242.
- [8] Lifshitz, I.M., Kosevich A.M, Soviet Physics JETP 2,636 (1955); Onsager, L., Philos. Mag. 43, 1006 (1952).
- [9] Chaikin, P.M., Azbel, M. Ya., Bak, P. Effects of incommensurate potentials: Low dimensional conductors in high magnetic fields: Low - dimensional conductors and superconductors 1986 / edited by D. Jérôme and L.G. Caron. New York : Plenum Press, 1987. str. 221–230.
- [10] Hofstadter, D.R. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields // Physical Review B. Vol. 14, 6 (1976), str. 2239-2249.
- [11] Grüner, G. Density waves in solids, Reading; Addison – Wesley, 1994.
- [12] Ravy, S. Diffuse X – ray scattering studies of molecular conductors // Annu. Rep. Prog. Chem., Sect. C (2007), str. 223-260

[13] Praktikum ekperimentalne nastave fizike, *II. grupa vježbi*, vježba broj 2, <http://www.phy.pmf.unizg.hr/~ana/praktikum.htm>, 10.9.2016.