SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Neven Trgovec

BAZNI OKVIRI I RIESZOVE BAZE HILBERTOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavamo bazne okvire i Rieszove baze, objekte koji se prirodno pojavljuju u Hilbertovim prostorima.

Bazne okvire su u svom radu eksplicitno još 1952. uveli matematičari R.J. Duffin i A.C. Shaeffer, a danas primjenu nalaze u brojnim područjima kao što su teorija operatora, kodiranje ili rekonstrukcija signala. Niz u Hilbertovom prostoru je Rieszova baza ako je dobiven djelovanjem nekog invertibilnog operatora na ortonormiranu bazu tog prostora, a ime duguje mađarskom matematičaru Frigyesu Rieszu (1880-1956).

Cilj ovog rada je dati detaljan pregled svojstava baznih okvira i Rieszovih baza, dati neke njihove karakterizacije te ih, uz pomoć dodatnih uvjeta, povezati.

U 1. poglavlju dajemo pregled teorije normiranih prostora, polazeći od najosnovnijih pojmova poput neprekidnosti. Nakon toga, uvodimo pojam bezuvjetne konvergencije redova u Banachovim prostorima, a poglavlje završavamo definiranjem centralnih objekata rada - Rieszovih baza i baznih okvira.

U 2. poglavlju uvodimo pojmove približno Rieszovih baza, Besselovih baznih okvira i bezuvjetnih baznih okvira. Kao ključan rezultat poglavlja, pokazat ćemo da su navedeni pojmovi, uz neke dodatne uvjete, međusobno ekvivalentni.

U 3. poglavlju definiramo viškove baznih okvira i prezentiramo njihova osnovna svojstva. Pokazat ćemo da je višak baznog okvira jednak dimenziji jezgre pripadnog operatora sinteze i karakterizirat ćemo duale baznih okvira pomoću njihovih viškova.

Poglavlje 1

Normirani prostori - osnove

U ovom poglavlju prvo navodimo često korištene osnovne pojmove i rezultate iz teorije normiranih prostora, nakon čega slijedi pregled pojmova i rezultata vezanih uz Rieszove baze, Besselove nizove i bazne okvire, a koji će biti važni u glavnom dijelu rada.

1.0 Normirani prostori

U ovom potpoglavlju, promatramo proizvoljne vektorske prostore, a $\mathbb{F}$ koristimo kao zajedničku oznaku za $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, kad god nije nužno odabrati točno određeno polje.

Definicija 1.0.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x \in X$;
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo normiranim prostorom.

Primjer 1.0.2. *Uobičajeni primjeri normiranih prostora, s pripadnim normama, su neki od sljedećih:*

$(\mathbb{F}, |\cdot|)$ (norma je ovdje, dakle, standardna apsolutna vrijednost u $\mathbb{F}$).

$(\mathbb{F}, \|\cdot\|_1), \|(x_1, ..., x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

$(\mathbb{F}, \|\cdot\|_2), \|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$.

$(\mathbb{F}, \|\cdot\|_\infty), \|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$.

Primjer 1.0.3. *Slično, uz oznaku $C([a, b])$ za vektorski prostor svih neprekidnih realnih ili kompleksnih funkcija na segmentu $[a, b]$, imamo:*

$(C([a, b]), \|\cdot\|_1), \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt.$

$(C([a, b]), \|\cdot\|_2), \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$

$(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty), \|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in [a, b]\}.$

Definicija 1.0.4. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in X$;
2. $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X$;
4. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in X$;
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \forall x, y \in X$.

Uređeni par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazivamo unitarnim prostorom. Na proizvoljnom unitarnom prostoru, formulom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ prirodno je zadana norma koju u nastavku podrazumijevamo.

Primjer 1.0.5. *U vektorskim prostorima iz ranijih primjera, najjednostavniji primjeri skalarnih produkata su:*

$(\mathbb{F}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle), \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}.$

$(C([a, b]), \langle \cdot, \cdot \rangle), \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$

Zbog kompletnosti uvodnog pregleda, navodimo i standardne definicije neprekidnih funkcija, kao i konvergentnih, odnosno Cauchyjevih nizova u normiranim prostorima.

Definicija 1.0.6. *Neka su X i Y normirani prostori i $f : X \to Y$. Kažemo da je funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in X$ ako*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tako da} \ \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon.$$

Funkcija f je neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako je neprekidna u svakoj točki $x_0 \in S$. Kažemo da je f uniformno neprekidna na skupu $S \subseteq X$ ako vrijedi

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tako da} \ x_1, x_2 \in S, \|x_1 - x_2\| < \delta \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| < \epsilon.$$

Definicija 1.0.7. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*
Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ ako

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \textit{tako da} \ n_0 \leq n \implies \|x_n - x\| < \epsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \textit{tako da} \ n_0 \leq m, n \implies \|x_m - x_n\| < \epsilon.$$

U nastavku, definirat ćemo elementarne topološke pojmove te iskazati njihova svojstva. Dokazi svih tvrdnji navedenih u ovom potpoglavlju mogu se pronaći u [1, Poglavlje 1.].

Definicija 1.0.8. *Kažemo da je podskup S normiranog prostora X ograničen ako postoji broj $M > 0$ takav da vrijedi $\|x\| \leq M, \forall x \in S$.*

Definicija 1.0.9. *Neka je X normiran prostor. Kažemo da je skup $S \subseteq X$ otvoren ako je S unija neke familije otvorenih kugala. Prazan skup, po definiciji, smatramo otvorenim. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako je skup $X \setminus F$ otvoren.*

Definicija 1.0.10. *Zatvarač $\overline{A}$ proizvoljnog skupa $A \subseteq X$ definiramo kao najmanji zatvoren skup u X koji sadrži A.*

Definicija 1.0.11. *Kažemo da je skup S kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S.*

Definicija 1.0.12. *Kažemo da je normiran prostor X separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\overline{S} = X$. Još kažemo da je S gust u (ili na) X.*

Propozicija 1.0.13. *Neka je X normiran prostor. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(a) Skup $A \subseteq X$ je zatvoren ako i samo ako sadrži limese svih konvergentnih nizova svojih članova.

(b) Kompaktan podskup normiranog prostora je zatvoren i ograničen.

Sada ćemo definirati i potpune prostore te jednu specijalnu vrstu takvih, Hilbertove prostore. Upravo u Hilbertovim prostorima nalaze se svi objekti kojima ćemo se baviti u radu.

Također, navodimo standardnu definiciju (apsolutne) konvergencije redova u normiranim prostorima te jednu poznatu karakterizaciju potpunih prostora.

Definicija 1.0.14. *Kažemo da je normiran prostor potpun (ili Banachov) ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun unitaran prostor naziva se Hilbertovim prostorom.*

Definicija 1.0.15. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergira k vektoru $x \in X$ ako je $x = \lim_{n\to\infty} s_n$, gdje je $(s_n)_n$ niz parcijalnih suma niza $(x_n)_n$, tj. $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.*

Red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ u normiranom prostoru konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Teorem 1.0.16. *Normiran prostor X je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ vektora iz X konvergira (obično) u X. U tom slučaju, vrijedi $\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.*

Za kraj uvodnog pregleda teorije normiranih prostora, uvodimo pojam ograničenog linearnog operatora na normiranim prostorima i neke njegove karakterizacije.

Definicija 1.0.17. *Neka su X i Y normirani prostori. Kažemo da je linearan operator $A : X \to Y$ ograničen ako postoji $M > 0$ takav da vrijedi $\|Ax\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$. Skup svih ograničenih linearnih operatora s X u Y označavamo s $\mathbb{B}(X,Y)$ ili, ako je $X = Y$, s $\mathbb{B}(X)$.*

Teorem 1.0.18. *Neka su X i Y normirani prostori te neka je $A : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

(a) A je neprekidan u nekoj točki $x_0 \in X$;

(b) A je neprekidan na X;

(c) A je uniformno neprekidan na X;

(d) A je ograničen.

1.1 Bezuvjetna konvergencija redova u Banachovim prostorima

U ovom potpoglavlju uvodimo pojam bezuvjetne konvergencije te iskazujemo temeljne rezultate vezane uz istu. Dokazi svih navedenih tvrdnji mogu se pronaći u [1, Poglavlje 2.1.] i [2, Poglavlje 1.1.].

Definicija 1.1.1. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira u X za bilo koju permutaciju σ skupa $\mathbb{N}$.*

Teorem 1.1.2. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Banachovom prostoru X. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira apsolutno, onda konvergira i bezuvjetno.*

Teorem 1.1.3. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u Hilbertovom prostoru H te neka je $(c_n)_n$ proizvoljan niz skalara. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako je $(c_n)_n \in \ell^2$. Nadalje, red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako isti red konvergira bezuvjetno.*

Definicija 1.1.4. *Neka je X unitaran prostor. Ortonormiran niz $(e_n)_n$ u X je ortonormirana baza za X ako za svaki $x \in X$ postoji niz skalara $(c_n)_n$ takav da vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n. \tag{1.1}$$

Napomena 1.1.5. *(a) Ako je niz $(e_n)_n$ ortonormirana baza za unitaran prostor X, tada je X separabilan.*

(b) Ako je niz $(e_n)_n$ ortonormirana baza za unitaran prostor X, tada red u 1.1 konvergira bezuvjetno.

(c) Koeficijenti c_n u 1.1 su oblika $c_n = \langle x, e_n \rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. jedinstveno su određeni s x. Ova je tvrdnja posljedica neprekidnosti skalarnog produkta u svakom argumentu.

(d) Ako je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u unitarnom prostoru X, tada za svaki x iz X vrijedi Besselova nejednakost, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

(e) U svakom separabilnom unitarnom prostoru X postoji ortonormiran niz $(e_n)_n$ takav da je $\overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = X$. Također, u separabilnom unitarnom prostoru, svaki ortonormiran skup je konačan ili prebrojiv.

Teorem 1.1.6. *Neka je* $(e_n)_n$ *ortonormiran niz u unitarnom prostoru* X. *Promotrimo sljedeća svojstva:*

(a) $(e_n)_n$ *je ortonormirana baza za* X,

(b) $(e_n)_n$ *je fundamentalan u* X, *tj.* $\overline{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = X$,

(c) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \forall x \in X$,

(d) $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle, \forall x, y \in X$,

(e) $(e_n)_n$ *je maksimalan u* X, *tj. ako je* $\langle x, e_n \rangle = 0$ *za sve* n, *tada je nužno* $x = 0$.

Tada vrijedi (a) $\iff$ *(b)* $\iff$ *(c)* $\iff$ *(d)* $\implies$ *(e). Ako je* X *Hilbertov prostor, tada je svojstvo (e) ekvivalentno s preostala četiri svojstva. Posebno, svaki separabilan unitaran prostor ima ortonormiranu bazu.*

Ovaj dio završavamo iskazom Orliczevog teorema, kojeg ćemo iskoristiti u dokazu Teorema 2.1.11, ključnog rezultata 2. poglavlja. Dokaz Orliczevog teorema može se pronaći u [5, Teorem 3.16.].

Teorem 1.1.7 (Orlicz). *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Hilbertovom prostoru takav da red* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konvergira bezuvjetno. Tada vrijedi* $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$.

1.2 Topološka i Rieszova baza

Prije definicije jednog od centralnih pojmova rada, Rieszove baze, definirat ćemo topološku bazu i navesti neke elementarne rezultate. Svi dokazi iz ovog potpoglavlja mogu se pronaći u [2, Poglavlje 1.2.].

Definicija 1.2.1. *Kažemo da je niz* $(x_n)_n$ *topološka baza (ili, jednostavno, baza) normiranog prostora* X *ako za svaki* x *iz* X *postoji jedinstven niz skalara* $(a_n(x))_n$ *takav da vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n. \tag{1.2}$$

Ponekad pišemo $((x_n)_n, (a_n)_n)$ kako bismo naglasili vezu između topološke baze i niza koeficijenata, tj. funkcionala koji se uz nju prirodno pojavljuju.

Primijetimo, ortonormirana baza unitarnog prostora H je i baza za H u smislu gornje definicije. Također, ako je $(x_n)_n$ baza normiranog prostora X, iz jedinstvenosti zapisa u 1.2 slijedi da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n \neq 0$.

Definicija 1.2.2. *Neka je* $(x_n)_n$ *baza normiranog prostora* X. *Kažemo da je* $(x_n)_n$

(a) bezuvjetna baza ako red u 1.2 konvergira bezuvjetno za svaki x *iz* X;

(b) ograničena baza ako vrijedi $0 < inf_n\|x_n\| \leq sup_n\|x_n\| < \infty$.

Definicija 1.2.3. *Neka su* X *i* Y *Banachovi prostori. Kažemo da je baza* $(x_n)_n$ *za* X *ekvivalentna bazi* $(y_n)_n$ *za* Y *i pišemo* $(x_n)_n \sim (y_n)_n$ *ako postoji bijektivan ograničen operator* $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ *takav da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $y_n = Ax_n$.

Teorem 1.2.4. *Neka su* X *i* Y *Banachovi prostori te neka su* $(x_n)_n$ *i* $(y_n)_n$ *baze prostora* X *i* Y*, redom. Sljedeće su tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(a) $(x_n)_n \sim (y_n)_n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *konvergira u* X *ako i samo ako* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$ *konvergira u* Y.

Za kraj ovog dijela, definirat ćemo Rieszovu bazu te iskazati neka njena svojstva, odnosno karakterizacije.

Definicija 1.2.5. *Niz* $(x_n)_n$ *u Hilbertovom prostoru* H *je Rieszova baza za* H *ako postoje ortonormirana baza* $(e_n)_n$ *prostora* H *i bijekcija* $T \in \mathbb{B}(H)$ *takvi da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $x_n = Te_n$.

Dokaz tvrdnje teorema koji slijedi može se pronaći u [2, Propozicija 1.2.26.]

Teorem 1.2.6. *Neka je* H *Hilbertov prostor. Tada vrijedi:*

(a) Svaka Rieszova baza za H *je bezuvjetna i ograničena.*

(b) Sve Rieszove baze za H *su međusobno ekvivalentne.*

(c) Ako je $(x_n)_n$ *Rieszova baza za* H *i ako je* $S \in \mathbb{B}(H, K)$ *bijekcija, tada je* $(Sx_n)_n$ *Rieszova baza za* K.

Opširnija karakterizacija Rieszovih baza dana je u [5, Teorem 7.13.], a ovdje navodimo samo njen dio koji ćemo koristiti u nastavku rada.

Teorem 1.2.7. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Hilbertovom prostoru* H. *Tada je ekvivalentno:*

(a) $(x_n)_n$ *je Rieszova baza za* H.

(b) $(x_n)_n$ *je baza za* H *te za proizvoljan niz skalara* $(c_n)_n$ *vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \text{ konvergira} \iff (c_n) \in \ell^2.$$

Korolar 1.2.8. *Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza Hilbertovog prostora H, tada postoje konstante A i B takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H.$$

1.3 Besselovi nizovi i bazni okviri

Nakon Rieszove baze, u ovom odjeljku uvodimo pojam Besselovog niza i baznog okvira, zajedno s nekim važnim svojstvima, čiji dokazi se mogu pronaći u [2, Poglavlje 1.3., 2.1. i 2.2.].

Definicija 1.3.1. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H Besselov ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H. \tag{1.3}$$

Primjer 1.3.2. *Promotrimo prostor ℓ^2. Po Teoremu 1.4.6. iz [1], znamo da je taj prostor Hilbertov. Nadalje, neka je $(e_n)_n$ kanonska ortonormirana baza tog prostora (n-ta komponenta niza $(e_n)_n$ na n-tom mjestu u nizu ima jedinicu, a na ostalima nule, iz čega trivijalno slijedi da se radi o ortonormiranoj bazi za ℓ^2).*

Kako je, po Teoremu 1.1.6, za svaki x iz ℓ^2 zadovoljeno $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2$, posebno, za svaki x vrijedi i 1.3, pa je $(e_n)_n$ Besselov niz u ℓ^2.

Sljedeća je tvrdnja netrivijalna, a dokazuje se pomoću Teorema o zatvorenom grafu ([1, Teorem 6.1.7.]).

Propozicija 1.3.3. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H. Tada je preslikavanje $U : H \to \ell^2$ definirano s $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_n$ ograničen linearan operator. Posebno, postoji konstanta $B > 0$ takva da vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.4}$$

Definicija 1.3.4. *Operator U iz Propozicije 1.3.3 zovemo operatorom analize pridruženim nizu $(x_n)_n$. Njegov adjungirani operator $U^* \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ zovemo operatorom sinteze.*
Konstanta B iz 1.4 se zove Besselova ograda niza $(x_n)_n$.

Uočimo, Besselova ograda nije jedinstvena jer nejednakost u 1.4 vrijedi i za bilo koju konstantu veću od B. Uz to, iz definicije operatora U, jasno je da je optimalna (minimalna) Besselova ograda jednaka $\|U\|^2$.

Propozicija 1.3.5. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru H s pripadnim operatorom analize U. Tada za svaki niz $(c_n)_n$ iz ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno, a operator sinteze U^* dan je s $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Posebno, ako je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2, vrijedi $U^*(e_n) = x_n$, iz čega slijedi $\|x_n\| \leq \|U\|$, za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 1.3.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H takav da za proizvoljan niz $(c_n)_n$ iz ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira. Tada je $(x_n)_n$ Besselov niz.*

Iz prethodnih rezultata slijedi: niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoji ograničen operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ takav da vrijedi $Te_n = x_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ kanonska ortonormirana baza za ℓ^2, kao u Primjeru 1.3.2. U takvoj situaciji, operator T se podudara s operatorom sinteze U^* niza $(x_n)_n$.

U nastavku dajemo uvodni pregled osnovnih činjenica o baznim okvirima, još jednom od ključnih pojmova cijelog rada.

Definicija 1.3.7. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je bazni okvir za H ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi*

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.5}$$

Kažemo da je bazni okvir napet ako vrijedi $A = B$. U slučaju da vrijedi $A = B = 1$, tj. ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2, \forall x \in H, \tag{1.6}$$

kažemo da je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir.
Bazni okvir je egzaktan ako niz koji dobijemo izostavljanjem bilo kojeg njegovog elementa više nije bazni okvir za H.

Ograde baznog okvira očito nisu jedinstvene. Maksimalan A i minimalan B u 1.5 nazivamo optimalnim ogradama baznog okvira i u nastavku ćemo ih označavati s A_{opt} i B_{opt}.

Nadalje, ako je $(x_n)_n$ bazni okvir, tada je red $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$ apsolutno konvergentan red nenegativnih realnih brojeva, iz čega, po Teoremu 1.1.2, slijedi da konvergira i bezuvjetno.

Primjer 1.3.8. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H. Tada vrijedi:*

(a) $(e_n)_n$ je egzaktan Parsevalov bazni okvir za H;

(b) $e_1, 0, e_2, 0, e_3, ...$ *je Parsevalov bazni okvir za* H*, ali nije egzaktan;*

(c) $2e_1, e_2, e_3...$ *je egzaktan bazni okvir za* H*, ali nije Parsevalov* $(A = 1, B = 2)$*;*

(d) $e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, e_3, ...$ *nije bazni okvir (nije čak ni Besselov niz);*

(e) $e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, ...$ *je očito fundamentalan niz, ali nije i bazni okvir za* H *jer prva nejednakost u 1.5 ne vrijedi ni za koji* $A > 0$.

Iz prve nejednakosti u 1.5, jasno je da je svaki bazni okvir nekog Hilbertovog prostora maksimalan, pa je, po Teoremu 1.1.6, i fundamentalan. S druge strane, posljednji niz iz prethodnog primjera govori nam da fundamentalnost niza ne implicira to da je on i bazni okvir.

Iz gornjeg komentara izravno slijedi da ako niz nije fundamentalan, nije ni bazni okvir, pa zaključujemo da ne postoje konačni bazni okviri beskonačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora. Također, zbog fundamentalnosti baznih okvira, konačni bazni okviri konačnodimenzionalnih Hilbertovih prostora su naprosto konačni sustavi izvodnica tih prostora.

Tvrdnje o ograničenim operatorima između Hilbertovih prostora iz sljedeće propozicije dokazuju se pomoću Banach-Steinhausovog teorema, čiji je dokaz dan u [1, Teorem 5.3.2.].

Propozicija 1.3.9. *Neka su* H *i* K *Hilbertovi prostori te neka je* $T \in \mathbb{B}(H, K)$*. Tada vrijedi:*

(a) $R(T)$ *je zatvoren ako i samo ako je* $R(T^*)$ *zatvoren.*

(b) T *je surjektivan ako i samo ako je* T^* *ograničen odozdo.*

(c) Ako je $R(T)$ *zatvoren,* TT^* *je invertibilan na* $R(T)$.

Bazne okvire i operatore analize/sinteze povezuje sljedeći teorem:

Teorem 1.3.10. *Neka je* $(x_n)_n$ *bazni okvir u Hilbertovom prostoru* H*. Tada je njegov operator analize* U *ograničen i ograničen odozdo te je operator sinteze* U^* *surjektivan. Obratno, ako je operator* $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ *surjektivan, tada je niz* $(x_n)_n, x_n = Te_n, n \in \mathbb{N}$*, gdje je* $(e_n)_n$ *kanonska baza za* ℓ^2*, bazni okvir za* H*, a operator analize mu se podudara s* T^*.

Pojam dualnog baznog okvira koristit ćemo u 3. poglavlju rada, a ovdje ga definiramo te navodimo neke rezultate koji će nam biti potrebni.

Prije definicije kanonskog duala, napomenimo još da je iz Propozicije 1.3.9 primijenjene na operator U^* jasno da je kompozicija U^*U invertibilan operator na $R(U^*)$.

Definicija 1.3.11. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te neka je U njegov operator analize. Bazni okvir $(y_n)_n$ definiran s $y_n = (U^*U)^{-1}x_n, n \in \mathbb{N}$ zovemo kanonskim dualom baznog okvira $(x_n)_n$.*

Iz prethodne definicije lako slijedi da kanonski dual $(y_n)_n$ baznog okvira $(x_n)_n$ zadovoljava formulu $x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, y_n\rangle x_n, \forall x \in H$.

Definicija 1.3.12. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Svaki niz $(y_n)_n$ u H koji zadovoljava*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, y_n\rangle x_n, \forall x \in H,$$

nazivamo dualom baznog okvira $(x_n)_n$.

Kanonski dual baznog okvira je, sukladno ovoj definiciji, i dual baznog okvira.

Primijetimo, ako s V označimo operator analize dualnog baznog okvira za bazni okvir $(x_n)_n$, a s U operator analize baznog okvira $(x_n)_n$, tada izravno iz prethodne definicije slijedi $U^*V = I$, odnosno $V^*U = I$.

Propozicija 1.3.13. *Neka su H i K Hilbertovi prostori te neka su $T \in \mathbb{B}(H, K)$ i $S \in \mathbb{B}(K, H)$ takvi da vrijedi $ST = I$. Tada vrijedi $N(S) = (I - TS)(N(T^*))$.*

Propozicija 1.3.14. *Neka su H i K Hilbertovi prostori te neka je $T \in \mathbb{B}(H, K)$ ograničen odozdo. Tada je $T(T^*T)^{-1}T^*$ ortogonalni projektor na $R(T)$.*

Propozicija 1.3.15. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te neka je U njegov operator analize. Ako je $(y_n)_n$ bazni okvir prostora H s pripadnim operatorom analize V, tada je ekvivalentno:*

(a) $(v_n)_n$ je dualan baznom okviru $(x_n)_n$.

(b) V^* je oblika $V^* = (U^*U)^{-1}U^* + W(I - U(U^*U)^{-1}U^*)$, za neki $W \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$.

Kao kraj uvodnog dijela, navodimo tvrdnju koja, u svom korisnom specijalnom slučaju, opisuje svojstvo ortonormiranih baza kad su iste projicirane na neki zatvoren potprostor ambijentnog prostora.

Propozicija 1.3.16. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. Tada je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H ako i samo ako vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\langle x, x_n\rangle x_n, \forall x \in H. \tag{1.7}$$

Posebno, ako je $(f_n)_n$ *ortonormirana baza Hilbertovog prostora* H *i ako je* M *zatvoren potprostor prostora* H*, tada je niz* $(Pf_n)_n$ *Parsevalov bazni okvir za* M*, pri čemu je* P *ortogonalni projektor na* M*.*

Poglavlje 2

Približno Rieszove baze

U ovom poglavlju uvodimo pojam približno Rieszove baze te prezentiramo karakterizacije približno Rieszovih baza pomoću nekih specijalnih vrsta baznih okvira.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H približno Rieszova baza za H ako postoji konačan indeksni skup S takav da je $(x_n)_{n \notin S}$ Rieszova baza za H.*

Nadalje, kažemo da je bazni okvir $(x_n)_n$ Besselov ako konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, gdje je $(c_n)_n$ neki niz skalara, povlači da je $(c_n)_n \in \ell^2$.

Konačno, bazni okvir $(x_n)_n$ je bezuvjetni bazni okvir ako je, kad god red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira za neki niz skalara $(c_n)_n$, ta konvergencija bezuvjetna.

Ako je $(x_n)_n$ Rieszova baza za H, tada iz Teorema 1.2.7 slijedi da, ako je $(c_n)_n$ niz skalara, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \iff (c_n)_n \in \ell^2. \tag{2.1}$$

S obzirom na to da je zahtjev konvergencije reda na lijevoj strani gornje ekvivalencije ekvivalentan zahtjevu konvergencije tog reda bez konačno mnogo članova, iz Definicije 2.1.1 slijedi da 2.1 vrijedi i za približno Rieszove baze $(x_n)_n$.

Nadalje, ako je $(x_n)_n$ bilo koji bazni okvir, pa čak i proizvoljan Besselov niz, iz Propozicije 1.3.5 vidimo da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira bezuvjetno za sve ℓ^2-nizove $(c_n)_n$. Spajanjem gornjih komentara u jedinstvenu tvrdnju, zaključujemo:

Napomena 2.1.2. *Neka je $(x_n)_n$ približno Rieszova baza Hilbertovog prostora H. Tada, ako je $(c_n)_n$ niz skalara, vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira} \iff (c_n)_n \in \ell^2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \textit{ konvergira bezuvjetno.}$$

Iz navedenih opaski i polazne definicije, zaključujemo da je svaka približno Rieszova Baza ujedno Besselov bazni okvir, te da je svaki Besselov bazni okvir ujedno i bezuvjetni bazni okvir.

Sada uvodimo pojam sličnih baznih okvira.

Definicija 2.1.3. *Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ bazni okviri Hilbertovih prostora H i K, redom. Kažemo da su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ slični bazni okviri ako postoji invertibilan operator $T \in \mathbb{B}(H, K)$ takav da vrijedi $y_n = Tx_n$, za sve n.*

Uočimo, svaki bazni okvir je, po definiciji kanonskog duala, sličan svom kanonskom dualu. Nadalje, jer su, u skladu s oznakama iz prethodne definicije, operatori T i T^{-1} neprekidni, bazni okvir $(y_n)_n$ koji je sličan približno Rieszovoj bazi/Besselovom baznom okviru/bezuvjetnom baznom okviru, i sam je približno Rieszova baza/Besselov bazni okvir/bezuvjetni bazni okvir.

Niz tvrdnji koje slijede služi kao priprema za Teorem 2.1.11, glavni rezultat čitavog poglavlja, u kojem ćemo dati detaljnu karakterizaciju približno Rieszovih baza. Počinjemo s dva tehnička rezultata koja se koriste u dokazu tvrdnje da je jezgra operatora sinteze Besselovog baznog okvira konačnodimenzionalna.

Lema 2.1.4. *Neka je X Banachov prostor, Y normiran prostor te neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ operator ograničen odozdo, tj. postoji $m > 0$ takav da vrijedi*

$$m\|x\| \leq \|Ax\|, \forall x \in X.$$

Tada je slika operatora A zatvorena.

Dokaz. Neka je $(y_n)_n$ konvergentan niz u $R(A)$ te neka je $y = lim_{n\to\infty}y_n$. Trebamo dokazati da vrijedi $y \in R(A)$.

Kako je $(y_n)_n$ niz elemenata iz slike operatora A, za svaki n iz $\mathbb{N}$ postoji $x_n \in X$ takav da vrijedi $Ax_n = y_n$.

Neka je $\epsilon > 0$. Niz $(y_n)_n$ je konvergentan pa je i Cauchyjev, što znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $m, n \geq n_0$ vrijedi $\|y_m - y_n\| < m\epsilon$. Za takve m i n, imamo: $m\|x_m - x_n\| \leq \|A(x_m - x_n)\| = \|Ax_m - Ax_n\| = \|y_m - y_n\| < m\epsilon$, tj. $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili ograničenost odozdo operatora A. Dakle, niz $(x_n)_n$ je Cauchyjev.

Zbog potpunosti prostora X, postoji $x \in X$ takav da vrijedi $x = lim_{n\to\infty}x_n$. No, sada je $Ax = A(lim_{n\to\infty}x_n) = lim_{n\to\infty}Ax_n = lim_{n\to\infty}y_n = y$, pri čemu smo koristili neprekidnost operatora A. Iz $Ax = y$ slijedi $y \in R(A)$, što smo i trebali dokazati. □

Lema 2.1.5. *Svaki bazni okvir je sličan baznom okviru oblika $(Pe_n)_n$ zatvorenog potprostora M prostora ℓ^2, gdje je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2, a P je ortogonalni projektor na M.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Kako je U ograničen odozdo, po prethodnoj lemi, njegova je slika zatvorena u ℓ^2.

Neka je, nadalje, $P \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na $R(U)$. Prema Propoziciji 1.3.16, slijedi da je $(Pe_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za $R(U)$. Dokazat ćemo da je taj bazni okvir sličan baznom okviru $(x_n)_n$.

Kako je $R(U)^\perp = N(U^*)$, vidimo za proizvoljan niz skalara $(c_n)_n$ vrijedi

$$U^*((c_n)_n) = U^*((P + I - P)(c_n)_n) = U^*(P(c_n)_n) + \underbrace{U^*((I - P)(c_n)_n)}_{=0} = U^*(P(c_n)_n).$$

Posebno, zbog načina djelovanja operatora sinteze, imamo

$$x_n = U^* e_n = U^* P e_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zbog zatvorenosti prostora $R(U)$, sada je dovoljno pokazati da je U^* invertibilan operator ako promatramo njegovo djelovanje s $R(U)$ na H. No, injektivnost je trivijalna, a surjektivnost slijedi iz tvrdnje (b) Propozicije 1.3.9. □

Rezultati koje smo naveli koriste se kod dokazivanja teorema koji slijedi. Njegov dokaz, zbog opširnosti tehničkih detalja koji nisu od fundamentalnog značaja za nastavak naših razmatranja, ne navodimo, a u cijelosti se može pronaći u [2, Poglavlje 2.4.].

Teorem 2.1.6. *Neka je $(x_n)_n$ Besselov bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Tada je $N(U^*)$ konačnodimenzionalan.*

Prije ključnog rezultata cijelog poglavlja, dokazat ćemo nekoliko pomoćnih tvrdnji.

Lema 2.1.7. *Neka je X Banachov prostor te neka je $A \in \mathbb{B}(X)$ operator za koji vrijedi*

$$\|I - A\| < 1.$$

Tada je operator A invertibilan.

Dokaz. Stavimo $B = I - A$. Kako je, po pretpostavci, $\|B\| < 1$, vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|B^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = \frac{1}{1 - \|B\|} < \infty.$$

Prostor $\mathbb{B}(X)$ je, kao prostor ograničenih linearnih operatora s potpunom kodomenom, i sam potpun. To, pak, povlači konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} B^n$. Nadalje, vrijedi

$$(I - B)(\sum_{n=0}^{\infty} B^n) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n - \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = I,$$

te, slično,

$$(\sum_{n=0}^{\infty} B^n)(I-B) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n - \sum_{n=0}^{\infty} B^{n+1} = I.$$

Kako je $I - B = I - (I - A) = A$, dokazali smo da je operator A zaista invertibilan. Štoviše, iz dokaza vidimo da vrijedi $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I-A)^n$. □

Lema 2.1.8. *Neka je $(e_n)_n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H te neka je $(z_n)_n$ niz u H takav da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2 < 1$. Tada je $(z_n)_n$ Rieszova baza prostora H.*

Dokaz. Neka je $m \in [0,1)$ takav da vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2 = m^2$. Po pretpostavci, vrijedi $m < 1$. Trebamo pokazati da je preslikavanje $V : H \to H$ zadano s $Ve_n = z_n, \forall n \in \mathbb{N}$, dobro definiran, ograničen i invertibilan operator na H. Po prethodnoj lemi, za dokaz te tvrdnje dovoljno je pokazati da je $I - V$ ograničen operator za koji vrijedi $\|I - V\| \leq m < 1$.

Za proizvoljan $y = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$, koristeći Cauchy-Schwarzovu nejednakost, imamo

$$\|(I-V)y\| = \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n(e_n - z_n) \right\|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} |c_n| \cdot ||(e_n - z_n)|| \overset{C-S}{\leq} \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \|e_n - z_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq m \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = m\|y\|,$$

gdje smo u posljednjoj nejednakosti koristili odabir broja m.

Iz gornjeg niza nejednakosti izravno slijedi $I - V \in \mathbb{B}(\ell^2)$ i $||I - V|| \leq m < 1$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 2.1.9. *Neka je H Hilbertov prostor, $(e_n)_n$ ortonormirana baza tog prostora te neka je operator A konačnog ranga. Tada vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$.*

Dokaz. Operator A konačnog ranga N može se zapisati kao

$$A = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m \langle \cdot, f_m \rangle g_m,$$

pri čemu su λ_m njegove singularne vrijednosti, a $(f_m)_m$ i $(g_m)_m$ ortonormirani nizovi u H.

Posebno, imamo

$$\|Ae_n\|^2 = \|\sum_{m=1}^{N} \lambda_m \langle e_n, f_m\rangle\|^2 = \sum_{m=1}^{N} |\lambda_m \langle e_n, f_m\rangle|^2,$$

zbog ortonormalnosti niza $(g_m)_m$.
Dakle, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{N} |\lambda_m \langle e_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{N} |\lambda_m|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, f_m\rangle|^2 \leq$$
$$\sum_{m=1}^{N} |\lambda_m|^2 \|f_m\|^2 = \sum_{m=1}^{N} |\lambda_m|^2 < \infty,$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti koristili Besselovu nejednakost. □

Alternativno, koristeći proizvoljnu ortonormiranu bazu $(f_j)_{j=1}^N$ za $R(A)$, tvrdnja prethodne leme dobiva se i iz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{N} |\langle Ae_n, f_j\rangle|^2 \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, A^* f_j\rangle|^2 \right) = \sum_{j=1}^{N} \|A^* f_j\|^2 < \infty.$$

Iz prethodnog niza jednakosti možemo primijetiti i da vrijednost izraza $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ ne ovisi o izboru ortonormirane baze $(e_n)_n$.

Propozicija 2.1.10. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Ako je $N(U^*)$ konačnodimenzionalan, $(x_n)_n$ je približno Rieszova baza.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\dim N(U^*) < \infty$ i stavimo $M = R(U)$. Tada je $M^\perp = R(U)^\perp = N(U^*)$. Nadalje, neka je P ortogonalni projektor na M te neka je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Po Lemi 2.1.5, $(Pe_n)_n$ je bazni okvir prostora M sličan baznom okviru $(x_n)_n$, pa je dovoljno pokazati da je $(Pe_n)_n$ približno Rieszova baza za M.

Po pretpostavci, $M^\perp$ je konačnodimenzionalan pa je i rang operatora $I - P$ konačan. Prema Lemi 2.1.9, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|(I-P)e_n\|^2 < \infty,$$

iz čega slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \|e_n - Pe_n\|^2 < 1.$$

Definirajmo niz $(z_n)_n$ kao

$$z_n = \begin{cases} e_n, & n = 1, 2, ..., N \\ Pe_n, & n = N+1, N+2, ... \end{cases}.$$

Očito je $(z_n)_n \in \ell^2$ te vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - z_n\|^2 < 1.$$

Prema Lemi 2.1.8, $(z_n)_n$ je Rieszova baza za ℓ^2, pa je i $(z_n)_{n \geq N+1} = (Pe_n)_{n \geq N+1}$ Rieszova baza za $\overline{\text{span}}\{Pe_n : n \geq N+1\}$. Također, kodimenzija prostora $\overline{\text{span}}\{Pe_n : n \geq N+1\}$ u M je konačna, jer u suprotnom $(Pe_n)_n$ ne bi mogao biti bazni okvir prostora M.

Nadalje, $(Pe_n)_n$ razapinje prostor M, pa iz prethodnog zaključka slijedi da se $(Pe_n)_{n \geq N+1}$ dodavanjem konačno mnogo članova iz skupa $e_1, e_2, ..., e_N$ može proširiti do baze za M, odnosno, dodavanjem konačno mnogo članova iz skupa $Pe_1, Pe_2, ..., Pe_n$, do Rieszove baze za M.

Formalnije, postoji skup $S \subseteq \{1, 2, ..., N\}$ takav da je $(Pe_n)_{n \in S} \cup (Pe_n)_{n \geq N+1}$ Rieszova baza za M. Dakle, zbog konačnosti skupa S, $(Pe_n)_n$ je približno Rieszova baza za M, što je i trebalo dokazati. $\square$

Poglavlje završavamo ključnim rezultatom, karakterizacijom približno Rieszovih baza, a koji većim dijelom slijedi iz dosadašnjih opservacija.

Teorem 2.1.11. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te neka je U njegov operator analize. Tada su sljedeća četiri uvjeta međusobno ekvivalentna:*

(a) $(x_n)_n$ je približno Rieszova baza;

(b) $(x_n)_n$ je Besselov bazni okvir;

(c) $dim(N(U^*)) < \infty$;

(d) $(x_n)_n$ je bezuvjetni bazni okvir.

Dokaz. Implikacija (a) $\Longrightarrow$ (b) slijedi iz Napomene 2.1.2, (b) $\Longrightarrow$ (c) je upravo tvrdnja Teorema 2.1.6, dok smo implikaciju (c) $\Longrightarrow$ (a) dokazali u prethodnoj lemi. Dovoljno je, dakle, pokazati da je svojstvo (d) ekvivalentno bilo kojem od tri preostala svojstva. Iz Napomene 2.1.2, vidimo da svojstvo (b) implicira (d), pa je dovoljno pokazati samo još obratnu implikaciju, tj. (d) $\Longrightarrow$ (b).

Dokazujemo tvrdnju uz dodatnu pretpostavku, da je $(x_n)_n$ ograničen odozdo. Dokaz u općenitom slučaju može se pronaći u [3].

Neka je $m > 0$ takav da je $||x_n|| \geq m$ za sve n. Pretpostavimo da imamo niz skalara $(c_n)_n$ takav da $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira. Prema pretpostavci, tada taj red konvergira bezuvjetno. Iz Teorema 1.1.7 slijedi $\sum_{n=1}^{\infty} ||c_n x_n||^2 < \infty$.

Konačno, $m^2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 ||x_n||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||c_n x_n||^2 < \infty$, pa je $(c_n)_n$ zaista niz iz prostora ℓ^2. Po definiciji, $(x_n)_n$ je Besselov bazni okvir, čime je dokaz završen. $\square$

Ekvivalencija svojstava (a) i (c) iz prethodnog teorema može se dokazati i bez korištenja Besselovih baznih okvira. Implikaciju (c) $\Longrightarrow$ (a) smo dokazali u Propoziciji 2.1.10, a pokazat ćemo i kako izravno dokazati obrat.

Pretpostavimo, dakle, da je $(x_n)_n$ približno Rieszova baza Hilbertovog prostora H te s U označimo njegov pripadni operator analize. Nadalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(x_n)_{n \geq k+1}$ Rieszova baza prostora H. Označimo s $(e_n)_n$ kanonsku bazu prostora ℓ^2 te neka je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ invertibilan operator takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Te_n = x_{k+n}$. Kako je $x_n = U^* e_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $T = U^* S^k$, pri čemu je $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ unilateralni operator pomaka.

Neka je sada $M_k = \text{span}\{e_1, e_2, ..., e_k\}$. Očito vrijedi $M_k = N((S^k)^*)$, iz čega slijedi $M_k^{\perp} = R(S^k)$. Tvrdimo da vrijedi $M_k^{\perp} \cap N(U^*) = \{0\}$.

Neka je $x \in M_k^{\perp} \cap N(U^*)$. Kako je $M_k^{\perp} = R(S^k)$, postoji v takav da je $x = S^k v$. No, jer je $x \in N(U^*)$, vrijedi $0 = U^* x = U^* S^k v = Tv$, iz čega, jer je operator T invertibilan, slijedi $v = 0$, tj. $x = 0$, što smo i htjeli pokazati.

Označimo sada s $P_k : N(U^*) \to M_k$ ortogonalni projektor na M_k. Ako je za neki $x \in N(U^*)$ zadovoljeno $P_k x = 0$, tada je očito $x \in M_k^{\perp} \cap N(U^*)$, pa je $x = 0$. Dakle, P_k je injektivan, a kako je prostor M_k po konstrukciji konačan, slijedi upravo $\dim N(U^*) < \infty$.

Poglavlje 3

Viškovi baznih okvira

Višak baznog okvira $(x_n)_n$ definira se kao najveći broj elemenata (moguće i ∞) koji se mogu ukloniti iz $(x_n)_n$, a da taj niz i dalje bude fundamentalan u ambijentnom Hilbertovom prostoru H.

U ovom ćemo poglavlju taj pojam precizno opisati, a zatim i navesti nekoliko karakterizacija i važnih svojstava viškova baznih okvira te pokazati da su viškovi međusobno dualnih baznih okvira jednaki. U Teoremu 3.1.11, dovest ćemo u vezu višak baznog okvira s time postoji li Parsevalov dual tog baznog okvira.

Definicija 3.1.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Višak baznog okvira $(x_n)_n$ definira se kao*

$$e((x_n)_n) = \sup \{card(S) : \overline{span}\{x_n : n \notin S\} = H\}.$$

Napomena 3.1.2. *Ako je $e((x_n)_n) = m \in \mathbb{N}$, tada je iz definicije jasno da za bilo koji $k, 1 \leq k \leq m$, postoji indeksni skup T kardinalnosti k takav da je $\overline{span}\{x_n : n \notin T\} = H$. Slično, ako je $e((x_n)_n) = \infty$, gore opisan skup T kardinalnosti k može se pronaći za sve $k \in \mathbb{N}$.*

Teorem 3.1.6 ključan je rezultat o viškovima baznih okvira. Ipak, prije njega, potrebna su nam dva pomoćna rezultata.

Lema 3.1.3. *Neka je $(x_n)_n$ približno Rieszova baza Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Pretpostavimo da je S konačan indeksni skup za koji je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus S}$ Rieszova baza za H. Tada vrijedi $dimN(U^*) = card(S)$.*

Dokaz. Prema Teoremu 2.1.11, jer je $(x_n)_n$ Rieszova baza, znamo da je $dimN(U^*) < \infty$. Označimo s M sliku operatora U. Tada je $N(U^*) = M^\perp$. Neka je, nadalje, $P \in \mathbb{B}(\ell^2)$ projektor na M i neka je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2. Kako je, prema Lemi 2.1.5, $(Pe_n)_n$ bazni okvir sličan baznom okviru $(x_n)_n$, slijedi da je $(Pe_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus S}$ Rieszova baza za M. Posebno, jer je svaki operator koji ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora preslikava u Rieszovu bazu invertibilan, invertibilan je i operator $P|_{\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\}} : \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\} \to M$.

Za svaki $x \in \ell^2$ je, jer je P projektor na M, $Px \in M$. Kako je $(Pe_n)_n$ Rieszova baza za M, postoji jedinstven $y \in \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\}$ takav da je $Px = Py$. Dakle, vrijedi $x - y \in N(P) = M^{\perp}$.

Operator $P|_{\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\}}$ je invertibilan pa je i injektivan. Iz toga i gornje diskusije, slijedi

$$\ell^2 = N(P) \dot{+} \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\},$$

pri čemu je suma direktna.

Kako je $N(U^*) = M^{\perp}$ i $N(P) = M^{\perp}$, vrijedi $\dim(N(U^*)) = \dim(N(P))$. Nadalje, jer su dimenzije direktnih komplemenata istog zatvorenog potprostora međusobno jednake, imamo

$$\dim(N(P)) = \dim((\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\})^{\perp}) = \dim(\text{span}\{e_n : n \in S\}) = \text{card}(S),$$

tj. zaista je $\dim(N(U^*)) = \text{card}(S)$, što je i trebalo dokazati. □

Lema 3.1.4. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H. Pretpostavimo da je S konačan indeksni skup takav da je $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\} = H$. Tada je $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus S}$ bazni okvir prostora H.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je, za neki $k \in \mathbb{N}$, $S = \{1, 2, ..., k\}$. $(x_n)_{n>k}$ je očito Besselov niz jer je definicijska nejednakost i dalje zadovoljena. Operator analize tog niza dan je s $U_1 = (S^*)^k U$, gdje je $S \in \mathbb{B}(\ell^2)$ operator unilateralnog pomaka, a U je operator analize za $(x_n)_n$.

Neka je V operator analize proizvoljnog dualnog baznog okvira za $(x_n)_n$. Tada je $V^*U = I$. Stavimo $V_1 = (S^*)^k V$. Nadalje, neka je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2 te neka je P_k projektor na $\overline{\text{span}}\{e_1, e_2, ..., e_k\}$.

Tada je $V_1^* U_1 = ((S^*)^k V)^* (S^*)^k V = V^* S^k (S^*)^k U = V^*(I - P_k)U = I - V^* P_k U$, tj. $I - V_1^* U_1$ je kompaktan operator.

Prema zadatku 181 iz [4], U_1 ima zatvorenu sliku. Dakle, prema Propoziciji 1.3.9, i U_1^* ima zatvorenu sliku. S obzirom na to da je, prema polaznoj pretpostavci, slika operatora U_1^* gusta u H, U_1^* je surjekcija, pa je $(x_n)_{n>k}$ bazni okvir prostora H. □

Napomena 3.1.5. *Ako je skup S iz iskaza prethodne leme beskonačan, tada $(x_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus S}$ ne mora nužno biti bazni okvir prostora H. Naime, ako je $(e_n)_n$ ortonormirana baza Hilbertovog prostora H te promatramo bazni okvir $e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, ...$, jasno je da njegov podniz $(\frac{1}{\sqrt{n}}e_n)_n$ nije bazni okvir prostora H jer ne zadovoljava definicijske nejednakosti.*

Sada slijedi ranije spomenuti teorem, u kojem ćemo višak baznih okvira opisati pomoću pripadnog operatora sinteze.

Teorem 3.1.6. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te neka je U njegov operator analize. Tada vrijedi $e((x_n)_n) = dimN(U^*)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$ linearno nezavisan skup u $N(U^*) \leq \ell^2$ te s $(e_n)_n$ uobičajeno označimo kanonsku bazu za ℓ^2. Tada za svaki $j \in \{1, 2, ..., m\}$ postoji jedinstven niz skalara $(y_{ji})_{i=1}^{\infty}$ takav da vrijedi

$$y_j = \sum_{i=1}^{\infty} y_{ji} e_i.$$

Nadalje, jer je $\{y_1, y_2, ..., y_m\} \subseteq N(U^*)$, vrijedi

$$0 = U^* y_j = \sum_{i=1}^{\infty} y_{ji} U^* e_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_{ji} x_i, \text{ za sve } j = 1, 2, ..., m.$$

U terminima beskonačnih matrica, gornje jednakosti možemo zapisati kao

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots \\ y_{21} & y_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica dimenzija $m \times \infty$ iz gornje jednadžbe ima m linearno nezavisnih redaka, pa ima i m linearno nezavisnih stupaca. Označimo s $k_1, k_2, ..., k_m$ indekse tih linearno nezavisnih stupaca. Tvrdimo da je niz $(x_n)_{n \neq k_1, ..., k_m}$ fundamentalan za $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = H$.

Primijetimo, iz definicije viška baznog okvira slijedi da će, ako dokažemo gornju tvrdnju, vrijediti $e((x_n)_n) \geq m$ te, jer postoji m-član linearno nezavisan skup u $N(U^*)$, i $e((x_n)_n) \geq \dim N(U^*)$.

Pretpostavimo sada da za neki $h \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ vrijedi $\langle h, x_n \rangle = 0$ za sve $n \in \mathbb{N} \setminus \{k_1, k_2, ..., k_m\}$. Trebamo dokazati $h = 0$. Uočimo, vrijedi

$$0 = \langle \sum_{i=1}^{\infty} y_{ji} x_i, h \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} y_{ji} \langle x_i, h \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} y_{jk_i} \langle x_{k_i}, h \rangle,$$

za sve $j = 1, 2, ..., m$, pri čemu posljednja jednakost slijedi iz osnovne pretpostavke o h.

U matričnom obliku, gornji sustav jednadžbi dan je s

$$\begin{bmatrix} y_{1k_1} & \dots & y_{1k_m} \\ y_{2k_1} & \dots & y_{2k_m} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{mk_1} & \dots & y_{mk_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle x_{k_1}, h\rangle \\ \langle x_{k_2}, h\rangle \\ \vdots \\ \langle x_{k_m}, h\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je, prema odabiru $y_1, y_2, ..., y_m$, matrica sustava invertibilna, slijedi da je $\langle x_{k_1}, h\rangle = ... = \langle x_{k_m}, h\rangle = 0$. Iz polazne pretpostavke o h, sada slijedi $h = 0$, što smo i htjeli dokazati. Dakle, vrijedi $e((x_n)_n) \geq \dim N(U^*)$.

Ako je $\dim N(U^*) = \infty$, tada je i $e((x_n)_n) = \infty$, pa preostaje promotriti slučaj kad je $N(U^*)$ konačnodimenzionalan.

Neka je $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $\dim N(U^*) = k$. Po Teoremu 2.1.11, $(x_n)_n$ je tada približno Rieszova baza prostora H. Neka je S konačan indeksni skup takav da je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus S}$ Rieszova baza za H. Po Lemi 3.1.3, imamo $\mathrm{card}(S) = \dim N(U^*) = k$. Ako dokažemo $(e(x_n)_n) \leq k$, iz prvog će dijela dokaza slijediti $e((x_n)_n) = k$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da vrijedi $e((x_n)_n) > k$. Prema Napomeni 3.1.2, postoji indeksni skup $T \subset \mathbb{N}$ takav da je $\mathrm{card}(T) = k+1$, a svi se x_n, za $n \in T$, mogu ukloniti iz niza $(x_n)_n$ ne narušavajući pritom fundamentalnost tako dobivenog niza.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $S = \{1, 2, ..., k\}$. Kako je $(x_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus S}$ Rieszova baza za H, postoje, po definiciji Rieszove baze, invertibilan operator $W \in \mathbb{B}(H)$ i ortonormirana baza $(f_n)_n$ prostora H takvi da vrijedi $Wx_{k+n} = f_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$. No, kako je, za neke $h_1, ..., h_k \in H$, slika djelovanja operatora W na polazni bazni okvir $(x_n)_n$ dana s $(h_1, h_2, ..., h_k, f_1, f_2, ...)$, dolazimo do kontradikcije s navedenim svojstvom skupa T jer se iz navedene slike djelovanja operatora W, s obzirom na to da je $(f_n)_n$ baza prostora H, ne može izbaciti $k + 1$ elemenata, a da se pritom očuva svojstvo fundamentalnosti. Dakle, vrijedi $e((x_n)_n) \leq k$ i, prema prvom dijelu dokaza, $e((x_n)_n) = k$. □

Napomena 3.1.7. *Ako je $(x_n)_n$ samo Besselov niz, tada se njegov višak definira kao*

$$e((x_n)_n) = sup\{card(S) : \overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N} \setminus S\} = \overline{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}.$$

Iz prvog dijela dokaza prethodnog teorema, sada vidimo da, uz iste oznake, vrijedi $e((x_n)_n) \geq dim N(U^*)$.

Nastavljamo s još nekoliko korisnih rezultata o viškovima baznih okvira.

Propozicija 3.1.8. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H te neka je U njegov operator analize. Tada vrijedi $e((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \langle (U^*U)^{-1}x_n, x_n\rangle)$.*

Dokaz. Prema Propoziciji 1.3.14, $U(U^*U)^{-1}U^*$ je ortogonalni projektor na $R(U)$. Dakle, $I - U(U^*U)^{-1}U^*$ je ortogonalni projektor na $N(U^*)$. Neka je $(e_n)_n$ kanonska baza za ℓ^2.

Koristeći Teorem 3.1.6, slijedi

$$\begin{aligned} e((x_n)_n) &= \dim N(U^*) \\ &= \mathrm{tr}(I - U(U^*U)^{-1}U^*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle (I - U(U^*U)^{-1}U^*)e_n, e_n\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\langle e_n, e_n\rangle - \langle (U^*U)^{-1}U^*e_n, U^*e_n\rangle) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \langle (U^*U)^{-1}x_n, x_n\rangle). \end{aligned}$$

□

Iz prethodne je propozicije jasno da, ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir prostora H, vrijedi $e((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - \|x_n\|^2)$.

Propozicija 3.1.9. *Neka su $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$ međusobno dualni bazni okviri Hilbertovog prostora H. Tada su viškovi tih baznih okvira jednaki.*

Dokaz. Neka su U i V pripadni operatori analize baznih okvira $(x_n)_n$ i $(y_n)_n$, redom. Trebamo dokazati da vrijedi $\dim N(U^*) = \dim N(V^*)$. Kako je $V^*U = I$, po Lemi 1.3.13, uz $T = U$ i $S = V^*$, slijedi

$$N(V^*) = (I - UV^*)(N(U^*)).$$

Dakle, vrijedi

$$\dim N(V^*) = \dim((I - UV^*)(N(U^*))) \leq \dim N(U^*).$$

Kako je $V^*U = I$ ekvivalentno s $U^*V = I$, nejednakost $\dim N(U^*) \leq \dim N(V^*)$ slijedi po simetriji, pa je zaista $\dim N(U^*) = \dim N(V^*)$. □

Sljedeći rezultat koristit ćemo u dokazu Teorema 3.1.11.

Lema 3.1.10. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim operatorom analize U. Tada vrijedi*

$$A_{opt} = \frac{1}{\|(U^*U)^{-1}\|} = min\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\}, B_{opt} = \|U^*U\| = max\{\lambda : \lambda \in \sigma(U^*U)\}$$

Dokaz. Iz Propozicije 1.3.5, dobivamo

$$U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall x \in H.$$

Nadalje, skalarnim množenjem s x, dobivamo

$$\langle U^*Ux, x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2, \forall x \in H.$$

No, sada vidimo da vrijedi $A_{opt} I \leq U^*U \leq B_{opt} I$, iz čega izravno slijedi $B_{opt} = \|U^*U\| = \|U\|^2$. S druge strane, imamo

$$A_{opt} I \leq U^*U \iff (U^*U)^{-1} \leq \frac{1}{A_{opt}} I.$$

Sada je očito $\|(U^*U)^{-1}\| \leq \frac{1}{A_{opt}}$. Pretpostavimo da vrijedi stroga nejednakost. Tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je $\|(U^*U)^{-1}\| = C$. No, iz toga slijedi $(U^*U)^{-1} \leq C \cdot I$, pa je $\frac{1}{C} I \leq U^*U$. Kako je tada $A_{opt} < \frac{1}{C}$, došli smo do kontradikcije s optimalnošću donje ograde pa je pretpostavka bila pogrešna. $\square$

Za kraj, navodimo i tvrdnju najavljenu na početku ovog poglavlja, a koja će pomoću uvedenog pojma viška baznog okvira dati jedan uvjet za egzistenciju Parsevalovog duala.

Teorem 3.1.11. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H s pripadnim optimalnim granicama A_{opt} i B_{opt} te operatorom analize U. Tada postoji dual baznog okvira $(x_n)_n$ koji je ujedno i Parsevalov bazni okvir ako i samo ako vrijede sljedeća dva svojstva:*

(a) $A_{opt} \geq 1$,

(b) $dim(R(U^*U - I)) \leq e((x_n)_n)$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $(y_n)_n$ Parsevalov dual baznog okvira $(x_n)_n$ i označimo s V njegov operator analize. Prema Propoziciji 1.3.15, V je oblika $V = U(U^*U)^{-1} + QW$, pri čemu je $Q \in \mathbb{B}(\ell^2)$ ortogonalni projektor na $R(U)^\perp$, a $W \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ je proizvoljan.

Kako je $(y_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, vrijedi $V^*V = I$, pa iz oblika operatora V slijedi

$$((U^*U)^{-1}U^* + W^*Q)(U(U^*U)^{-1} + QW) = I.$$

Jer je Q projektor na $R(U)^\perp$, vrijedi $QU = 0$, pa i $U^*Q = 0$, iz čega slijedi

$$(U^*U)^{-1} + W^*QW = I. \tag{3.1}$$

Iz 3.1 slijedi $(U^*U)^{-1} \leq I$, tj. $U^*U \geq I$. Prema prethodnoj lemi, sada imamo $A_{opt} \geq 1$.

Množenjem jednakosti 3.1 s obje strane invertibilnim operatorom $(U^*U)^{\frac{1}{2}}$, dobivamo

$$I + (U^*U)^{\frac{1}{2}}(W^*QW)(U^*U)^{\frac{1}{2}} = U^*U,$$

odnosno

$$U^*U - I = (U^*U)^{\frac{1}{2}}(W^*QW)(U^*U)^{\frac{1}{2}}.$$

Sada je

$$\dim(R(U^*U - I)) = \dim(R((U^*U)^{\frac{1}{2}}(W^*QW)(U^*U)^{\frac{1}{2}}))$$
$$= \dim(R(W^*QW)) \leq \dim(R(Q)) = \dim(R(U)^{\perp}) = e((x_n)_n),$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz Teorema 3.1.6. Time smo dokazali jednu od implikacija navedenih u teoremu.
Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da vrijede tvrdnje (a) i (b).

$U^*U - I$ je očito hermitski operator pa imamo $H = N(U^*U - I) \oplus \overline{R(U^*U - I)}$. Nadalje, označimo s T inducirani operator $T = U^*U|_{\overline{R(U^*U-I)}} : \overline{R(U^*U - I)} \to \overline{R(U^*U - I)}$.

Kako je za proizvoljan $x \in N(U^*U - I)$ zadovoljeno $U^*Ux = x$, $N(U^*U - I)$ je invarijantan potprostor za U^*U te na njemu operator U^*U djeluje kao identitet. Za proizvoljan $v \in H$, imamo jedinstvenu dekompoziciju

$$v = x + y, \; x \in N(U^*U - I), y \in \overline{R(U^*U - I)}.$$

Lako vidimo da tada vrijedi $U^*Uv = U^*U(x + y) = x + Ty$. U tom smislu, pišemo $U^*U = I \oplus T$.

Kako je tada $\sigma(T) \subseteq \sigma(U^*U)$, a otprije znamo da vrijedi $\sigma(U^*U) \subseteq [A_{opt}, B_{opt}]$ i, po pretpostavci, $A_{opt} \geq 1$, slijedi $\sigma(T) \subseteq [1, B_{opt}]$. Jer je U^*U hermitski operator, i T je hermitski te vrijedi $\langle Ty, y\rangle = \langle U^*Uy, y\rangle \geq 0$, pa je $T \geq 0$.

Neka je s $g : [1, \infty) \to [0, 1)$ dano neprekidno preslikavanje $g(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{t}}$ i stavimo $G = g(T)$. Označimo još s $P \in \mathbb{B}(H)$ ortogonalni projektor na $\overline{R(U^*U - I)}$, te neka je, koristeći pretpostavku (b), $L \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ parcijalna izometrija na $\overline{R(U^*U - I)}$ čija je slika sadržana u $N(U^*) = R(U)^{\perp}$.

Stavimo $V = U(U^*U)^{-1} + L(0 \oplus G)P$. Tada imamo

$$V^*V = ((U^*U)^{-1}U^* + P(0 \oplus G)L^*)(U(U^*U)^{-1} + L(0 \oplus G)P)$$

$$= (U^*U)^{-1} + (0 \oplus G^2) = (I \oplus T^{-1}) + (0 \oplus (I - T^{-1})) = I.$$

Kako je $V^*V = I$, uzmemo li kanonsku bazu $(e_n)_n$ za ℓ^2, niz $(v_n)_n$ definiran s $v_n = V^*e_n, n \in \mathbb{N}$, je Parsevalov bazni okvir za H. Kako je očito i $V^*U = I$, slijedi da je $(v_n)_n$ dual za $(x_n)_n$, što je i trebalo dokazati. $\square$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, skripta*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/predavanja/np-1516-final.pdf` (rujan 2017.).

[2] D. Bakić, *Notes on frames*, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf` (rujan 2017.).

[3] P.G. Casazza, O. Christensen, *Hilbert space frames containing a Riesz basis and Banach spaces which have no subspace isomorphic to* c_0, J. Math. Anal. Appl., 202 (1996), 940-950.

[4] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, 1982.

[5] C. Heil, *A Basis Theory Primer (Expanded Edition)*, Birkhäuser, 2011.

Sažetak

U ovome radu uvodimo pojmove Rieszove baze i baznog okvira u Hilbertovim prostorima te prezentiramo njihova osnovna svojstva i neke karakterizacije. Pritom kao alate koristimo rezultate iz opće teorije normiranih prostora, a koje detaljno navodimo u prvom poglavlju. U glavnom dijelu rada, definiramo približno Rieszove baze te ih, pomoću nekih posebnih vrsta baznih okvira, karakteriziramo, povezujući tako dva osnovna pojma rada. Nadalje, uvodimo pojam viškova baznih okvira koje također detaljno karakteriziramo te analiziramo neka njihova važna svojstva. Pokazuje da se da su bazni okviri s konačnim viškom tada nužno i približno Rieszove baze. Također, duale baznih okvira karakterizirali smo pomoću njihovih viškova.

Summary

In this thesis, we introduce Riesz bases and frames in Hilbert spaces and we give some of their main properties and characterisations. In doing so, we use results that are a part of general normed spaces theory, which are all stated in the first chapter. In the main part of the thesis, we define near-Riesz bases and give their characterizations in terms of some special types of frames, connecting two main objects of this thesis. Furthermore, we introduce excesses of frames, for which we also give certain characterizations, and we analyse some of their important properties. We show that frames with finite excesses are also near-Riesz bases. Also, we characterize duals of frames in relation to their excesses.

Životopis

Rođen sam 27. veljače 1994. u Zagrebu. Nakon završetka Osnovne škole Bedekovčina, upisao sam Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku. 2012. godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a 2015. diplomski studij Financijska i poslovna matematika na istom fakultetu. 2017. godine dobio sam nagradu Vijeća Matematičkog odsjeka Prirodoslovno-matematičkog fakulteta namijenjenu najuspješnijim studentima završnih godina diplomskih studija.