Korteweg-de Vries jednadžba

Trstenjak, Ariana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ariana Trstenjak

KORTEWEG-DE VRIES JEDNADŽBA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Siniša Slijepčević

Zagreb, srpanj, 2017.g.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj majci

Sadržaj

Uvod

Vjerujem da mnoge fascinira pogled na more i morske valove koji se razbijaju o stijene. Generacije koje su odrasle prije upotrebe modernih tehnologija mogu biti fascinirane činjenicom da danas možemo međusobno komunicirati i uspostaviti kontakt s bilo kojeg mjesta na zemlji ili pak gledati televizijski prijenos s površine Mjeseca. Fizičari i matematičari fascinirani su činjenicom da razne vrste valova mogu pokazivati univerzalne valne pojave kao što su interferencija ili refleksija, te da ih možemo opisivati valnim jednadžbama, koje mogu biti čak i identične za opis raznovrsnih tipova valova i valnih pojava. U ovom radu govorit ćemo o valovima samotnjacima - nelinearnoj valnoj pojavi – otkrivenoj davne 1834. godine u valovima vode, te o njihovim rješenjima. U prvom dijelu rada susresti ćemo se s kratkom poviješću i fizikalnom motivacijom kako bi se napravila svojevrsna uveritra za daljni dio. U drugome dijelu obraditi ćemo osnovne pojmove koji su nužni za daljnje shvaćanje postojanja rješenja valova samotnjaka. U zadnjem pak dijelu pozabaviti ćemo se sa zanimljivom primjenom istih.
Valovi samotnjaci do danas su pronađeni u raznim sustavima, te su i danas (možda više nego ikad prije) u fokusu mnogih istraživanja moderne fizike. Kako postoje razne vrste valova, pomalo je nezahvalno napisati općenitu a opet dovoljno preciznu i točnu definiciju tog pojma. Općenito možemo reći da je val poremećaj koji se prostire u prostoru i vremenu i prenosi energiju. Nadalje, elektromagnetski valovi su titranja električnih i magnetskih polja koja se međusobno induciraju u prostoru i vremenu i tako prostiru vakuumom ili nekim sredstvom. Valove zvuka pak čine mehaničke vibracije u nekom sredstvu koje se kroz taj medij prostiru i prenose energiju; na primjer, vibracijske promjene tlaka u zraku možemo čuti kao zvuk. Čak se i materija npr. subatomske čestice mogu ponašati kao valovi i pokazivati valne pojave poput interferencije. Valove materije opisujemo Schrodingerovom valnom jednadžbom odnosno kvantnom mehanikom.
Valom samotnjakom nazivamo lokalizirani valni paket, koji putuje sam, a pri tome ne mijenja svoj oblik i brzinu. No, umjesto općenitih i maglovitih definicija, više možemo naučiti promatrajući i proučavajući neki fizikalni sustav u prirodi ili postavljajući pitanja i diskutirajući o mogućim odgovorima, što ćemo pokušati upravo u ovome radu.

1 Fizikalna motivacija

1.1 Opći oblik Korteweg-de Vries jednadžbe

U ovom poglavlju ćemo pobliže objasniti kako se dugi valovi na plitkim vodama mogu zapisati u obliku jednadžbe koja se naziva Korteweg-de Vries (KdV) jednadžba, te ćemo se uvesti kroz kratku povijest stvaranja iste. Ona u svom najjednostavnijem obliku glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{1.1}$$

Nelinearnost leži u srednjem članu, koji predstavlja produkt valne funkcije i prostorne derivacije valne funkcije, dok je jednadžba trećeg reda. Ova jednadžba je prvobitno osmišljena za opisivanje valova na plitkim vodama. Međutim, danas se ona koristi u raznim područjima fizike i opisuje sustave različitih priroda kao što su:
• magnetohidrodinamički valovi u plazmi,
• anharmonička rešetka,
• longitudinalni disperzivni valovi u elastičnom štapu,
• valovi pritiska u tekuće-plinovitim smjesama,
• rotirajući tok niz cijev.

Korteweg-de Vries jednadžba se još može zapisati kao

$$u_t(x,t) + u(x,t)u_x(x,t) + u_{xxx}(x,t) = 0, \tag{1.2}$$

gdje je $u(x,t)$ odgovarajuće polje varijabli, t je vrijeme, a x je prostorna koordinata u smjeru širenja vala. KdV jednadžba se koristi za opis *slabih nelinearnih dugih valova* u mnogim područjima fizike i inžinjerstva. Ona opisuje kako val evoluira pod utjecajem slabe linearnosti i slabe disperzije. Ako pretpostavimo da derivacija po x skalira kao ε, gdje je ε parametar karakterističan za duge valove, tada amplituda skalira kao ε^2, a vrijeme kao ε^{-3}. KdV jednadžba je karakterizirana rješenjem *valova samotnjaka, tj. usamljenih valova* ili eng. *solitary waves*,

$$u = a\,\mathrm{sech}^2(\gamma(x - Vt)), \tag{1.3}$$

gdje je

$$V = 2a = 4\gamma^2.$$

Ovdje je a amplituda vala, $\mathrm{sech}(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ hiperbolički sekans, a γ valni broj. Ovo rješenje opisuje familiju ravnomjernih izoliranih valova pozitivnog polariteta karakteriziranih s valnim brojem γ, gdje je brzina V proporcionalna valnoj amplitudi a i kvadratu valnog broja tj. γ^2. Stoga, veći valovi su uži i brže putuju.

1.2 Kratka povijest

KdV jednadžba (1.1) je dobila ime po poznatom radu, čiji su autori Korteweg i de-Vries koji je objavljen 1895.godine, u kojemu oni pokazuju da se dugi valovi malih amplituda na slobodnoj površini vode mogu opisati jednadžbom

$$\xi_t + c\xi_x + \frac{3c}{2h}\xi\xi_x + \frac{ch^2}{6}\left(1 - \frac{W}{3}\right)\xi_{xxx} = 0 \tag{1.4}$$

Ovdje je $\xi(x, t)$ visina od povšine vode, tj. povišenje površine vode od neuznemirujućeg položaja h, dok je $c = (gh)^{1/2}$ fazna brzina dugog vala, te je izraz

$$W = \frac{T}{gh^2}$$

tzv. *Weber broj* kojim se mjere efekti napetosti površine (φT je koeficijent napetosti površine, a φ je gustoća vode). Transformacijom do referentnog bloka (val i okolina), pri brzini c ((x, t) je zamjenjen s $(x - ct, t)$) i naknadnim reskaliranjem pokazuje se ekvivalencija između (1.2) i (1.4). Iako jednadžba (1.4) danas nosi ime KdV, jednadžbu (1.4) je prvobitno opisao Boussinesq 1877.godine.

1.3 Russelovo opažanje

Rješenje usamljenih valova su pronašli Korteweg i de-Vries, ali ga je prije njih direktno opisao Boussinesq 1871.godine i Rayleigh 1876.godine (iako oni nisu koristili napetosti površine) motivirani John Scott Russellom i njegovim eksperimentom u Union Canalu 1834.godine. No, ubrzo je otkriveno da KdV jednadžba nije stogo važeća ako površinska napetost nije uzeta u obzir i ukoliko ne vrijedi

$$0 < W < \frac{1}{3},$$

jer se tada javlja rezonancija između *valova samotnjaka* i kratkih kapilarnih valova (valovi kraći od 1.7 cm koji su pokretani silom napetošču površine vode).
Valove samotnjake otkrio je škotski znanstvenik John Scott Russell 1834. godine, blizu

gradića Edinburgha, gdje je radio kao inžinjer na uskim kanalima vode kojima se najčešće transportirao ugljen. John Scott Russell jednog je dana promatrao brod koji se gibao kanalom i zamijetio novi tip vala. Nekoliko godina kasnije je napisao: *"Promatrao sam gibanje broda koji su u uskom kanalu vrlo brzo vukla dva konja. Brod se naglo zaustavio, ali velika količina vode koja se akumulirala ispred pramca, snažno pobuđena, nastavila je gibanje. Stvorio se jedan jedini val i velikom se brzinom zakotrljao niz kanal ostavljajućii brod iza sebe. Val je bio u obliku glatke uzvisine, dobro definiranog oblika, te se nastavio gibati niz kanal bez promjene oblika i bez smanjenja brzine. Slijedio sam val jašući na konju nekih osam do devet milja. On se još kotrljao niz kanal bez promjene oblika, duljine od oko tridesetak stopa i oko jednu do jednu i pol stope visine. Visina mu se tada počela smanjivati i nakon potjere od još milju do dvije izgubio sam ga iz vida u zavojima kanala. To je opis događaja iz mjeseca kolovoza 1834. godine kada sam se prvi puta susreo s jedinstvenom i prelijepom pojavom koju sam nazvao Val translacije."*
Nakon svog otkrića g. Russell je napravio niz pokusa u kojima je dalje istraživao otkrivenu valnu pojavu. Međutim, možda i zbog toga što se njegovo otkriće u to doba nije činilo tako značajno kao danas, teorijsko objašnjenje *valova samotnjaka* čekalo je šezdesetak godina. Godine 1895., dvojica su Nizozemaca, Korteweg i de Vries, krečući od temeljnih zakona hidrodinamike izveli jednadžbu – danas ju zovemo Korteweg-de Vries (KdV) jednadžba – koja matematički opisuje *val samotnjak* u plitkoj vodi. Ključna stvar u njihovom opisu *vala samotnjaka* jest nelinearnost. Razvojem računarske tehnike omogućeno je da se numeričkim proračunima dođe do nekoliko različitih tipova jednadžbi koje daju solitonska rješenja. Ipak, Korteweg–de Vriesova jednadžba je do danas vjerojatno najpoznatija nelinearna disperzivna jednadžba.

Slika 1: Union kanal

2 Osnove teorije postojanja rješenja KdV jednadžbe

2.1 Uniformno neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora

U ovom poglavlju definirati ćemo neke osnovne pojmove koji su usko vezani za parcijalne diferencijalne jednadžbe, a potrebni su za shvaćanje egzistencije i jedintvenosti rješenja Korteweg-de Vries jednadžbe.

Definicija 2.1.1. *Neka je X Banachov prostor. Familija ograničenih operatora* $T(t)$ *,* $0 \leq t < \infty$*, s X u X je polugrupa ograničenih linerarnih operatora na X ako vrijedi*
(i) $T(0) = I$*, gdje je I identiteta,*
(ii) $T(t + s) = T(t)T(s)$*, za svaki* $t, s \geq 0$.

Definicija 2.1.2. *Polugrupa ograničenih linerarnih operatora* $T(t)$ *je uniformno neprekidna ako*

$$\lim_{t \downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \tag{2.1}$$

Definicija 2.1.3. *Linearni operator A definiran s*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ postoji} \right\} \tag{2.2}$$

i

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}\bigg|_{t=0}, \text{ za } x \in D(A) \tag{2.3}$$

je infinitezimalan generator polugrupe $T(t)$*, gdje je* $D(A)$ *domena od A.*

Iz Definicije (2.1.1) je jasno da ako je $T(t)$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora da je tada

$$\lim_{s \to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Teorem 2.1.4. *Linearni operator A je infinitezimalan generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je A ograničen linearan operator.*

Korolar 2.1.5. *Neka je $T(t)$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora. Tada vrijedi slijedeće*
(i) Postoji konstanta $\omega \geq 0$ takva da $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.
(ii) Postoji jedinstven ograničen linearan operator A takav da $T(t) = e^{tA}$.
(iii) Operator A u (ii) djelu je infinitezimalan generator od $T(t)$.
(iv) Preslikavanje $t \to T(t)$ je diferencijabilno i vrijedi

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A. \tag{2.4}$$

2.2 Jako neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora

Definicija 2.2.1. *Polugrupa $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ ograničenih lineranih operatora na Banachovom prostoru X je jako neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora ako je*

$$\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x, \text{ za svaki } x \in X. \tag{2.5}$$

Jako neprekidnu polugrupu ograničenih linearnih operatora na X ćemo zvati C_0 polugrupa.

Teorem 2.2.2. *Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa. Tada postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ takve da vrijedi*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \text{ za } 0 \leq t < \infty. \tag{2.6}$$

Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa. Iz Teorema (2.2.2) slijedi da postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ takve da $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ za $t \geq 0$. Ako je $\omega = 0$ kažemo da je $T(t)$ *uniformno ograničen* i štoviše ako je $M = 1$ kažemo da je $T(t)$ *C_0 polugrupa kontrakcija*.
Neka je A linearan, ne nužno ograničen, operator na X. Rezolventi skup $\rho(A)$ od A je skup svih kompleksnih brojeva λ za koje je $\lambda I - A$ invertibilna, tj. $(\lambda I - A)^{-1}$ je ograničen lineran operator na X.
Familija $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ ograničenih linearnih operatora se naziva *rezolventa od A*.

Korolar 2.2.3. *Ako je A infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $T(t)$ tada je $D(A)$, domena od A gusta u X i A je zatvoreni linearni operator.*

2.3 Dual polugrupe

Neka je X Banachov prostor s dualom X'. Neka je S linearan operator s gustom domenom $D(S)$ u X. Prisjetimo se da je adjungirani operator S^* operatora S linearni operator s

$D(S^*) \subset X'$ u X' definiran s:
$D(S^*)$ je skup svih elemenata $x^* \in X'$ za koje postoji $y^* \in X'$ takav da

$$\langle x^*, Sx\rangle = \langle y^*, x\rangle \text{ za svaki } x \in D(S), \tag{2.7}$$

te ako je $x^* \in D(S^*)$ tada je $y^* = S^*x^*$.
Osim toga, za svaki $x \in X$ defniramo *dualni skup* $F(x) \subseteq X'$ kao

$$F(x) = \{x^* : x^* \in X', \langle x^*, x\rangle = ||x||^2 = ||x^*||^2\}. \tag{2.8}$$

Definicija 2.3.1. *Linearni operator A je disipativan ako za svaki $x \in D(A)$ postoji $x^* \in F(x)$ takav da $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Korolar 2.3.2. *Neka je A gusto definiran zatvoren linearan operator. Ako su oba, A i A^* disipativna, tada je A infinitezimalan generator od C_0 polugrupe kontrakcija na X.*

Teorem 2.3.3 (Stone's teorem)**.** *A je infinitezimalan generator od C_0 grupe unitarnih operatora na Hilbertovom prostoru ako i samo ako je iA hermitski operator, tj. $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$.*

Dokaz. Ako je A infinitezimalan generator od C_0 grupe unitarnih operatora $U(t)$ tada je A gusto definiran po Korolaru (2.2.3) i za $x \in D(A)$ vrijedi slijedeće:

$$-Ax = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(U(-t)x - x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(U(t)^*x - x) = A^*x \tag{2.9}$$

$$\Rightarrow A = -A^* \Rightarrow iA = (iA)^* \Rightarrow A \text{ je } \textit{self-adjoint}.$$

Ako je *iA self-adjoint* tada je A gusto definiran i $A = -A^*$. Tada za svaki $x \in D(A)$ imamo:

$$Ax, x) = (x, A^*x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)} \tag{2.10}$$

i štoviše $Re(Ax, x) = 0$ za svaki $x \in D(A)$, tj A je disipativan. Kako je $A = -A^*$ slijedi i da je $Re(A^*x, x) = 0$ za svaki $x \in D(A^*) = D(A)$, tj A^* je disipativan. Zbog pretpostavke teorema slijedi da su A i A^* zatvoreni i jer je $A^{**} = A$, oba A i $A^* = -A$ su infinitezimalni generatori C_0 polugrupe na H po Korolaru (2.3.2). Ako su $U_+(t)$ i $U_-(t)$ polugrupe generirane pomoću A i A^* definiramo

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & t \geq 0 \\ U_-(-t) & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Tada je $U(t)$ grupa i budući da je $U(t)^{-1} = U(-t)$, $||U(t)|| \leq 1$, $||U(-t)|| \leq 1$ slijedi da je $R(U(t)) = X$, te je $U(t)$ izometričan za svaki t i $U(t)$ je grupa unitarnih operatora na H. □

Korolar 2.3.4. *Neka je A infinitezimalan generator od C_0 polugrupe kontrakcija. Neka je B disipativan i $D(B) \supset D(A)$, te*

$$||Bx|| \leq \alpha||Ax|| + \beta||x||, zax \in D(A), \tag{2.12}$$

gdje je $0 \leq \alpha < 1$, $\beta \geq 0$. Tada je $A + B$ infinitezimalan generator od C_0 polugrupe kontakcija.

2.4 Evolucija hiperboličkih jednadžbi

U ovom poglavlju ćemo pretpostaviti da familija $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ zadovoljava uvjete (H_1) - (H_3) koje ćemo zadati. Uvjeti (H_1) - (H_3) se često koriste u hiperboličkom slučaju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, dok su u paraboličkom slučaju operatori $A(t)$, $t \geq 0$ pretpostavljeni kao infinitezimalni generatori analitičke polugrupe.

Definicija 2.4.1. *Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa i neka je A pripadni infinitezimalni generator. Kažemo da je podskup Y od X A-dopustiv ako je invarijantan podskup od $T(t)$, $t \geq 0$ i restrikcija $\tilde{T}(t)$ od $T(t)$ u Y je C_0 polugrupa u Y.*

Definicija 2.4.2. *Neka je X Banachov prostor. Kažemo da je familija $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ infinitezimalnih generatora od C_0 polugrupa na X stabilna (čvrsta) ako postoje konstante $M \geq 1$ i ω takve da*

$$\rho(A(t)) \supset (\omega, \infty), \text{ za } t \in [0, T] \tag{2.13}$$

i

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda : A(t_j) \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k}, \text{ za } \lambda > k, \tag{2.14}$$

za svaki konačan segment $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq T$, $k = 1, 2, ...$

Za $t \in [0, T]$ neka je $A(t)$ infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $S_t(s)$, $s \geq 0$ na X. Imamo slijedeće pretpostavke:

(H_1) $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ je stabilna familija sa stabilnim konstantama M i ω.

(H_2) Y je $A(t)$ - dopustiv za $t \in [0, T]$ i familija $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ dijelova $\tilde{A}(t)$ od $A(t)$ u Y je stabilna familija u Y sa stabilnim konstantama $\tilde{M}$ i $\tilde{\omega}$.

(H_3) Za $t \in [0, T]$, $D(A(t)) \supset Y$, $A(t)$ je ograničen operator iz Y u X i $t \to A(t)$ je neprekidno u $B(Y, X)$ s normom $\|\cdot\|_{Y\to X}$.

Za slijedeću lemu trebat će nam još jedna pretpostavka.

(H_2^+) Postoji familija $\{Q(t)\}_{t\in[0,T]}$ izomorfizama s Y u X takva da za svaki $v \in Y$, $Q(t)v$ je neprekidno diferencijabilna u X na $[0, T]$ i

$$Q(t)A(t)Q(t)^{-1} = A(t) + B(t), \tag{2.15}$$

gdje je $B(t)$, $0 \leq t \leq T$ jako neprekidna familija ograničenih operatora na X.

Lema 2.4.3. *Uvjeti (H_1) i $(H_2)^+$ povlače uvjet (H_2).*

Definicija 2.4.4. *Familija ograničenih linearnih operatora $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$, na X zovemo evolucijski sustav ako su zadovoljeni slijedeći uvjeti*
(i) $U(s, s) = I, U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$, $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$
(ii) $(t, s) \to U(t, s)$ je jako neprekidno za $0 \leq s \leq t \leq T$.

Za slijedeći teorem će nam trebati još neki uvjeti, pa navedimo ih.

(E_1) $\|U(t, s)\| \leq Me^{\omega(t-s)}$, za $0 \leq s \leq t \leq T$.

(E_2) $\dfrac{\partial^+}{\partial t}U(t, s)v|_{t=s} = A(s)v$, za $v \in Y$, $0 \leq s \leq T$.

(E_3) $\dfrac{\partial}{\partial s}U(t, s)v = -U(t, s)A(s)v$ za $v \in Y$, $0 \leq s \leq t \leq T$.

(E_4) $U(t, s)Y \subset Y$, za $0 \leq s \leq t \leq T$.

(E_5) za svaki $v \in Y$, $U(t, s)v$ je neprekidna u Y za $0 \leq s \leq t \leq T$.

Teorem 2.4.5. *Neka je $A(t)$, $0 \leq t \leq T$ infinitezimalan generator od C_0 polugrupe na X. Ako familija $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ zadovoljava uvjete (H_1), (H_2^+) i (H_3) onda postoji jedinstveni razvoj sustava $U(t, s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ u X koji zadovoljava (E_1) - (E_5).*

2.5 Evolucija kvazilinearnih jednadžbi

U ovom poglavlju ćemo promatrati Cauchyjev problem za kvazilinearnu jednadžbu

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} + A(t, u)u = 0, \ 0 \leq t \leq T \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.16}$$

u Banachovom prostoru X.
Ovdje linearni operator $A(t, u)$ ovisi eksplicitno o rješenju u. U suštini, teorija kvazilinearnih inicijalnih problema je pomalo komplicirana. Radi jednostavnosti, promatrat ćemo slabo rjšenje početnog problema (2.16).
Neka je $u \in C([0, T]; X)$ i promotrimo linearan inicijan problem

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + A(t, u)v = 0, \ 0 \leq t \leq T \\ v(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Ako ovaj problem ima jedinstveno slabo rješenje $v \in C([0, T]; X)$ za svaki $u \in C([0, T]; X)$ tada je definirano preslikavanje $u \mapsto v = F(u)$ s $C([0, T]; X)$ u samog sebe. Fiksne točke tog preslikavanja definiraju slabo rješenje od (2.16). Da bismo pokazali egzistenciju lokalnog slabog rješenja od (2.16) pokazat ćemo da osim odgovarajućih uvjeta, uvijek postoji T', $0 < T' \leq T$ takav da restrikcija od preslikavanja F u $C([0,T];X)$ je kontrakcija koja preslikava neku kuglu s $C([0,T];X)$ u samu sebe. Kontrakcija preslikavanja će tada implicirati egzistenciju jedinstvene fiksne točke u od F u tu kuglu, te će u tada po definiciji iščezavati u slabo rješenje od (2.16). Za nastavavti dalje trebat ćemo neke pripreme. Počet ćemo s egzistencijom slabog rješenja linearnog problema (2.17). Za to će nam ponovo trebati uvjeti (H_1) - (H_3).

Definicija 2.5.1. *Neka je B podskup od X i za svaki $0 \leq t \leq T$ i $b \in B$ neka je $A(t,b)$ infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $S_{t,b}(s)$, $s \nearrow 0$ na X. Kažemo da je familija operatora $\{A(t,b)\}, (t,b) \in [0,T] \times B$ stabilna ako postoje konstante $M \geq 1$ i ω takve da*

$$\rho(A(t,b)) \supset (\omega, \infty), \text{ za } (t,b) \in [0,T] \times B \tag{2.18}$$

i

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda : A(t_j, b_j) \right\| \leq M(\lambda - \omega)^{-k} \text{ za } \lambda > k \tag{2.19}$$

i za svaki konačan segment $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq T$, $b_j \in B$, $1 \leq j \leq k$.

Neka su X i Y Banachovi prostori takvi da je Y gust i ugrađen u X. Neka je $B \subset X$ takav da za svaki $(t,b) \in [0,T] \times B$ je $A(t,b)$ infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $S_{t,b}(s)$, $s \nearrow 0$ na X.
Neka vrijedi i slijedeći uvjeti:

$(\tilde{H}_1)$ Familija $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ je stabilna.

$(\tilde{H}_2)$ Y je $A(t,b)$ - dopustiv za $(t,b) \in [0,T] \times B$ i familija $\{\tilde{A}(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ od djelova $\tilde{A}(t,b)$ od $A(t,b)$ u Y, je stabilna u Y.

$(\tilde{H}_3)$ Za $(t,b) \in [0,T] \times B$, $D(A(t,b)) \supset Y$, $A(t,b)$ je ograničen linearan operator s Y u X i $t \mapsto A(t,b)$ je kontinuirano u $B(Y,X)$ s normom $\| \cdot \|_{Y \to X}$, za svaki $b \in B$.

$(\tilde{H}_4)$ Postoji konstanta L takva da $\|A(t,b_1) - A(t,b_2)\|_{Y \to X} \leq L\|b_1 - b_2\|$ za svaki $b_1, b_2 \in B$ i $t \in [0,T]$.

Tada dolazimo do slijedeće leme.

Lema 2.5.2. *Neka je $B \subset X$ i neka $u \in C([0,T];X)$ ima vrijednosti u B. Ako je $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ familija operatora koji zadovoljavaju uvjete $(\tilde{H}_1)$ - $(\tilde{H}_4)$ tada je $\{A(t,u(t))\}_{t \in [0,T]}$ familija operatora koji zadovoljavaju uvjete (H_1) - (H_3).*

Na kratko pogledajmo slijedeći problem. Neka je za svaki t, $0 \leq t \leq T$ $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ linearan operator na X. Za početni problem

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \ 0 \leq s < t \leq T \\ u(s) = x \end{cases} \tag{2.20}$$

definiramo *operator rješenja* $U(t,s)x = u(t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$.
Kao posljedicu Leme (2.5.2) imamo slijedeći teorem.

Teorem 2.5.3. *Neka je $B \subset X$ i neka je $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ familija operatora koji zadovoljavaju uvjete $(\tilde{H}_1)$ - $(\tilde{H}_4)$. Ako $u \in C([0,T];X)$ ima vrijednosti u B tada postoji jedinstveni evolucijski sustav $U_u(t,s)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ za koji je*

$$||U_u(t,s)|| \leq Me^{\omega(t-s)}, \ 0 \leq s \leq t \leq T \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial^+}{\partial t} U_u(t,s)w \bigg|_{t=s} = A(s,u(s))w, \ za\ w \in Y, \ 0 \leq s \leq t \leq T \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U_u(t,s)w = -U_u(t,s)A(s,u(s))w, \ 0 \leq s \leq t \leq T \tag{2.23}$$

Za svaku funkciju $u \in C([0,T];X)$ s vrijednostima u B i za $u_0 \in X$ funkcija $v(t) = U_u(t,0)u_0$ je definirana kao slabo rješenje inicijalnog problema (2.17). Iz Teorema (2.5.3) slijedi da ako familija $\{A(t)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ zadovoljava uvjete $(\tilde{H}_1)$ - $(\tilde{H}_4)$ tada za svaki $u_0 \in X$ i $u \in C([0,T];X)$ s vrijednostima u B inicijalni problem (2.17) ima jedinstveno slabo rješenje v dano s

$$v(t) = U_u(t,0)u_0. \tag{2.24}$$

U nastavku ćemo trebati i slijedeći rezultat.

Lema 2.5.4. *Neka je $B \subset X$ i neka je $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ familija operatora koji zadovoljavaju uvjete $(\tilde{H}_1)$ - $(\tilde{H}_4)$. Tada postoji konstanta C_1 takva da za svaki $u, v \in C([0,T];X)$ s vrijednostima u B i za svaki $w \in Y$ vrijedi*

$$||U_u(t,s)w - U_v(t,s)w|| \leq C_1 ||w||_Y \int_s^t ||u(\tau) - v(\tau)|| d\tau. \tag{2.25}$$

Sada ćemo pokazati egzistenciju lokalnog slabog rješenja inicijalnog problema (2.17). Pretpostavimo da je početna vrijednost u_0 u Y i da je B kugla radijusa r centrirana u u_0.

Teorem 2.5.5. *Neka je $u_0 \in Y$ i $B = \{x : \|x - u_0\| \leq r\}$, $r > 0$. Neka je $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ familija linearnih operatora koji zadovoljavaju pretpostavke $(\tilde{H}_1) - (\tilde{H}_4)$ tada postoji T', $0 < T' \leq T$ takav da početni problem*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,u)u = 0, \quad 0 \leq t \leq T^{'} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.26}$$

ima jedinstveno slabo rješenje $u \in C([0,T^{'}];X)$ za $u(t) \in B$ za $0 \leq t \leq T'$.

Drukčija verzija Teorema (2.5.5) koja je često vrlo korisna u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je ona koja uključuje restrikciju skupa B koji zadovoljava uvjete $(\tilde{H}_1)$ - $(\tilde{H}_4)$ u kugli u Y, a ne u kugli u X koju smo do sada promatrali. No da bismo to nadoknadili moramo pretpostaviti slijedeća dva uvjeta.

$(\tilde{H}_5)$ Za svaki $u \in C([0,T];X)$ tako da $u(t) \in B$, $0 \leq t \leq T$ imamo $U_u(t,s)Y \subset Y$, $0 \leq s \leq t \leq T$ i $U_u(t,s)$ je jako kontinuiran u Y za $0 \leq s \leq t \leq T$.

$(\tilde{H}_6)$ Zatvoreni konveksan ograničen podskup od Y je također zatvoren u X.

Sada dolazimo do slijedećeg teorema.

Teorem 2.5.6. *Neka je $u_0 \in Y$ i $B = \{y : \|y - u_0\|_Y \leq r\}$, $r > 0$. Neka je $\{A(t,b)\}$, $(t,b) \in [0,T] \times B$ familija linearnih operatora koji zadovoljavaju pretpostavke $(\tilde{H}_1) - (\tilde{H}_6)$. Ako je $A(t,b)u_0 \in Y$ i*

$$\|A(t,b)u_0\|_Y \leq k, \text{ za } (t,b) \in [0,T] \times B \tag{2.27}$$

tada postoji $T^{'}$, $0 < T^{'} \leq T$ takav da početni problem

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,u)u = 0, \quad 0 \leq t \leq T^{'} \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.28}$$

ima jedinstveno klasično rješenje $u \in C([0,T^{'}];B) \cap C^1([0,T^{'}];X)$.

2.6 Grupe ograničenih operatora

Definicija 2.6.1. *Familija jednog parametra $T(t)$, $-\infty < t < \infty$ ograničenih linearnih operatora na Banachovom prostoru X je C_0 grupa ograničenih operatora ako vrijedi slijedeće:*
(i) $T(0) = I$,
(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *za* $-\infty < t, s < \infty$,
(iii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, $\forall x \in X$

Definicija 2.6.2. *Infinitezimalan generator A grupe $T(t)$ je definiran s*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \tag{2.29}$$

kada limes postoji, te je domena od A skup svih elemenata grupe $x \in X$.

Treba primijetiti da u (2.29) $t \to 0$ s obje strane, ne samo za $t \to 0^+$, kao što je u slučaju infinitezimalnog generatora C_0 polugrupe. Neka je $T(t)$ C_0 grupa ograničenih operatora. Iz definicije je jasno da za $t \geq 0$, $T(t)$ je C_0 polugrupa ograničenih operatora čiji je infinitezimalni generator A. Štoviše, za $t \geq 0$, $S(t) = T(-t)$ je također C_0 polugrupa ograničenih operatora čiji je infinitezimalni generator A. Dakle, ako je $T(t)$ C_0 grupa ograničenih operatora na X, oba A i $-A$ su infinitezimalni generatori pd C_0 koju obilježavaju $T_+(t)$ i $T_-(t)$. Obrnuto, ako su A i $-A$ infinitezimalni generatori od C_0 polugrupa $T_+(t)$ i $T_-(t)$ tada možemo vidjeti da je A infinitezimalni generator C_0 grupe $T(t)$ koja je dana s

$$T(t) = \begin{cases} T_+(t) & t \geq 0 \\ T_-(-t) & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

Teorem 2.6.3. *Linerani operator A je infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $T(t)$ koji zadovoljava $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ako i samo ako*
(i) A je zatvoren i $D(A)$ je gusto u X,
(ii) rezolventni skup $\rho(A)$ od A sadrži $< \omega, \infty >$ i

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \text{ za } \lambda > \omega,\ n = 1, 2, ... \tag{2.31}$$

Korolar 2.6.4. *Neka je A infinitezimalan generator od C_0 polugrupa kontrakcija $T(t)$. Ako je A_λ Yosida aproksimacija od A tada je*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \text{ za } x \in X. \tag{2.32}$$

Teorem 2.6.5. *Neka je A infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $T(t)$ na X. Ako je A_λ Yosida aproksimacija od A, tj. $A_\lambda = \lambda AR(\lambda : A)$ tada je*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{2.33}$$

Teorem 2.6.6. *A je infinitezimalni generator od C_0 grupe ograničenih operatora $T(t)$ koji zadovoljavaju $\|T(t)\| \leq Me^{\omega|t|}$ ako i samo ako*
(i) A je zatvoren i $\overline{D(A)} = X$,
(ii) svaki realni λ, $|\lambda| > \omega$, je u rezolventskom skupu $\rho(A)$ od A i za svaki λ

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq M(|\lambda| - \omega)^{-n},\ n = 1, 2, ... \tag{2.34}$$

Lema 2.6.7. *Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa ograničenih operatora. Ako za svaki $t > 0$ postoji $T(t)^{-1}$ i ograničen je operator, tada je $S(t) = T(t)^{-1}$ C_0 polugrupa ograničenih operatora čiji je infinitezimalni generator $-A$.*
Štoviše, ako je

$$U(t) = \begin{cases} T(t) & t \geq 0 \\ T(-t)^{-1} & t \leq 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

tada je $U(t)$ C_0 grupa ograničenih operatora.

Teorem 2.6.8. *Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa ograničenih operatora. Ako je $0 \in \rho(T(t_0))$ za neki $t_0 > 0$ tada je $0 \in \rho(T(t))$ za svaki $t > 0$ i $T(t)$ može biti ugrađen (umetnut) u C_0 grupu.*

Teorem 2.6.9. *Neka je $T(t)$ C_0 polugrupa ograničenih operatora. Ako za neki $s_0 > 0$, $T(s_0) - I$ je kompaktan, tada je $T(t)$ invertibilan za svaki $t > 0$ i $T(t)$ se može umetnuti u C_0 grupu.*

Teorem 2.6.10. *Neka je $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ stablina familija infinitezimalnih generatora sa stabilnim konstantama M i ω. Neka je $B(t)$, $0 \leq t \leq T$ ograničen linearan operator na X. Ako je*

$$||B(t)|| \leq K \tag{2.36}$$

za svaki $0 \leq t \leq T$ tada je $\{A(t) + B(t)\}_{t\in[0,T]}$ stabilna familija infinitezimalnih generatora sa stabilnim konstantama M i $\omega + KM$.

Teorem 2.6.11. *Neka je $Q(t)$, $0 \leq t \leq T$ familija izomofrizama s Y u X sa slijedećim pretpostavkama:*
(i) $||Q(t)||_{Y\to X}$ i $||Q(t)^{-1}||_{X\to Y}$ s uniformno ograničenom konstantom C.
(ii) Preslikavanje $t \to Q(t)$ je ograničena varijacija u $B(Y, X)$ s normom $|| \geq ||_{Y\to X}$.
Neka je $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ stabilna familija infinitezimalnih generatora na X i neka je $A_1(t) = Q(t)A(t)Q(t)^{-1}$. Ako je $\{A_1(t)\}_{t\in[0,T]}$ stabilna familija infinitezimalnih generatora na X onda je Y $A(t)$- dopustiv za $t \in [0, T]$ i $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$ je stabilna familija infinitezimalnih generatora u Y.

3 Egzistencija rješenja KdV jednadžbe

3.1 Dokaz egzistencije i jedinstvenosti KdV jednadžbe

U ovom poglavlju ćemo napokon prikazati najznačajnije iskaze ovog rada, te ćemo iskoristiti rezultate Poglavlja (2) kako bi pokazali egzistenciju teorema o lokalnom rješenju Cauchyjevog problema za KdV:

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

Kroz ovu cjelinu ćemo pretpostavljati da su sve funkcije realne varijable. Za svaki $s \in R$ uvest ćemo Hilbertov prostor $H^s(R)$, te neka je $u \in L^2(R)$, tada je

$$||u||_s = \left(\int (1+\xi^2)^s |\hat{u}(\xi)^2| d\xi \right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Linearan prostor funckija $u \in L^2(R)$ za koju je $||u||_s$ konačna je konačan nepotpun zatvoren prostor sa skalarnim produktom

$$(u,v)_s = \int (1+\xi^2)^s \hat{u}(\xi)\bar{\hat{v}}(\xi) d\xi. \tag{3.3}$$

Upotpunjenje tog prostora s normom $||\cdot||_s$ je Hilbertov prostor kojeg ćemo označavati s $H^s(R)$. Jasno je da je $H^0(R) = L^2(R)$, te je lako da provjeriti da se prostor $H^s(R)$, $s = m$, podudara s prostorom $H^m(R)$, $m \geq 1$, te da su norme u dvije različite definicije ekvivalentne, gdje je H^m definiran na slijedeći način.
Za $u \in C^m(\Omega)$ i $1 \leq p < \infty$ definiramo

$$||u||_{m,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}. \tag{3.4}$$

Ako je $p = 2$ i $u, v \in C^m$, definiramo

$$(u,v)_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx. \tag{3.5}$$

Ako je $||u||_{m,p} < \infty$ definiramo prostor $W^{m,p}(\Omega)$. To je Banachov prostor, te za $p = 2$ pišemo $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$. U slijedećoj lemi ćemo skupiti neke korisne rezultate prostora $H^s(\mathbb{R})$.

Lema 3.1.1. *(i) Za $t \geq s$, $H^t(\mathbb{R}) \subset H^s(\mathbb{R})$ i $\|u\|_t \geq \|u\|_s$ za $u \in H^t(\mathbb{R})$.*
(ii) za $s > \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ i za $u \in H^s(\mathbb{R})$

$$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_s, \tag{3.6}$$

gdje je $\|u\|_\infty = \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}\}$.

Dokaz. (i) Prvi dio dokaza je očit iz nejednakosti $(1+\xi^2)^t \geq (1+\xi^2)^s$, za $t \geq s$ i $\xi \in \mathbb{R}$.
(ii) Iz Cauchy-Schwartz nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi}\hat{u}(\xi)d\xi\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^s}\right)^{1/2}\left(\int (1+\xi^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= C\|u\|_s,
\end{aligned}$$

pa integral koji određuje u u terminima $\hat{u}$ konvergira uniformno, te je u neprekidan. Štoviše, $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_s$. □

Neka je $X = L^2(\mathbb{R}) = H^0(\mathbb{R})$ i $Y = H^s(\mathbb{R})$ za $s \geq 3$. Tada definiramo operator A_0 s $D(A_0) = H^3(\mathbb{R})$ i $A_0 u = D^3 u$ za $u \in D(A_0)$ gdje je $D = \frac{d}{dx}$.

Lema 3.1.2. *A_0 je infinitezimalan generator od C_0 grupe izometrične na X.*

Dokaz. A_0 je asimetrično-adjunktiran, tj $(A_0 u, u) = 0$ za svaki $u \in D(A_0)$. To dolazi direktno iz

$$(A_0 u, u) = \int D^3 u \cdot u dx = -\int u \cdot D^3 u dx = -(A_0 u, u), \tag{3.7}$$

gdje je druga jednakost došla iz integriranje po dijelovima tri puta. Iz (2.3.3) teorema slijedi da je A_0 infinitezimalan generator grupe izometrične na $X = L^2(R)$. □

Slijedeće ćemo definirati za svaki $v \in Y = H^s(R)$, $s \geq 3$ operator $A_1(v)$ kao $D(A_1(v)) = H^1(R)$ i za $u \in D(A_1(v))$ $A_1(v)u = vDu$. Tada imamo:

Lema 3.1.3. *Za svaki $v \in Y$ operator $A(v) = A_0 + A_1(v)$ je infnitezimalan generator od C_0 polugrupe $T_v(t)$ na X koji zadovoljava*

$$\|T_v(t)\| \leq e^{\beta t} \tag{3.8}$$

za svaki $\beta \geq \beta_0(v) = c_0\|v\|_s$, gdje je c_0 konstanta neovisna o $v \in Y$.

Dokaz. Prvo treba primjetiti da za $v \in H^s(R)$, $Dv \in H^{s-1}(R)$, $s \geq 3$ zbog Leme (3.1.1) vrijedi

$$Dv \in L^\infty \text{ i } \|Dv\|_\infty \leq C\|Dv\|_{s-1} \leq C\|v\|_s. \tag{3.9}$$

Sada za svaki $u \in H^1$ imamo

$$\begin{aligned}(A_1(v)u, u) &= \int vDu \cdot udx = \frac{1}{2}\int vDu^2dx = -\frac{1}{2}\int Dvu^2dx \\ &\geq -\frac{1}{2}\|Dv\|_\infty\|u^2\| \\ &\geq -c_0\|v\|_s\|u^2\|.\end{aligned}$$

Dakle $A_1(v) + \beta I$ je disipativno za svaki $\beta \geq \beta_0(v) = c_0\|v\|_s$. Budući da je A_0 antihermitski ($A^* = -A$), $A_0 + A_1(v) + \beta I$ je također disipativan za $\beta \geq \beta_0(v)$.
Štoviše,

$$\|(A_1(v) + \beta I)u\| \leq \|vDu\| + \beta\|u\| \leq \|v_\infty\|\|Du\| + \beta\|u\|. \tag{3.10}$$

Integracijom po dijelovima se pokaže da za svaki $u \in H^3(\mathbb{R})$ imamo

$$\|Du\| \leq \|u^{2/3}\|\|D^3u\|^{1/3} \tag{3.11}$$

i polarizacijom za svaki $\varepsilon > 0$ imamo

$$\|Du\| \leq \varepsilon\|D^3u\| + C(\varepsilon)\|u\|. \tag{3.12}$$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}\|v\|_\infty$ i supstitucijom (3.7) u (3.6) slijedi

$$\|(A_1(v) + \beta I)u\| \leq \frac{1}{2}\|A_0u\| + C\|u\|, \text{ za } u \in D(A_0), \tag{3.13}$$

međutim po Korolaru (2.3.4) $A_0 + (A_1(v) + \beta I = A(v) + \beta I$ je infinitezimalan generator od C_0 polugrupe kontrakcija od X za svaki $\beta \geq \beta_0(v)$.
Dakle, $A(v)$ je infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $T_v(t)$. □

Neka je B_r kugla radijusa $r > 0$ u Y smještena u ishodišu i sadrži familiju operatora $A(v)$, $v \in B_r$. Želimo pokazati da ta familija zadovoljava uvjete Teorema (2.5.6) Zbog specijalnog oblika familije $A(v)$, $v \in B_r$ slijedi da je potrebno dokazati slijedeća tri uvjeta.

(A_1) Familija $A(v)$, $v \in B_r$ je stabilna familija u X.

(A_2) Postoji izomorfizam iz Y u X takav da za svaki $v \in B_r$ je $SA(v)S^{-1} - A(v)$ ograničen operator na X i vrijedi

$$\|SA(v)S^{-1} - A(v)\| \leq C_1, \text{ za svaki } v \in B_r. \tag{3.14}$$

(A_3) za svaki $v \in B_r$, $D(A(v)) \supset Y$, $A(v)$ je ograničen linearan operator iz Y u X i

$$||A(v_1) - A(v_2)||_{Y \to X} \leq C_2 ||v_1 - v_2||. \tag{3.15}$$

Primjećujemo da je (A_1) ekvivalentan uvjetu $(\tilde{H}_1)$ iz 2.poglavlja, te da (A_2) povlači $(\tilde{H}_2)$ i $(\tilde{H}_5)$ što se može lako vidjeti iz Leme (2.4.3) i Teorema (2.4.5) Uvjet (A_3) povlači $(\tilde{H}_3)$ i $(\tilde{H}_4)$, dok je $(\tilde{H}_6)$ zadovoljen ako su oba X i Y refleksivni. Napokon, ako $||u_0||_s < r$ i $v \in B_r$ tada

$$\begin{aligned}
||A(v)u_0|| &\leq ||D^3 u_0|| + ||vDu_0|| \\
&\leq ||D^3 u_0|| + ||v||_\infty ||Du_0|| \\
&\leq ||u_0||_3 (1 + r) \\
&\leq r(1 + 3) = k
\end{aligned}$$

i uvjet (2.27) Teorema (2.5.6) je zadovoljen. Radi dokazivanja da familija $A(v)$, $v \in B_r$ zadovoljava uvjete (A_1) - (A_3) trebat ćemo još jedan rezultat.
Neka je

$$\Lambda^s f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ix\xi} (1 + \xi^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) d\xi. \tag{3.16}$$

Nije teško za provjeriti da je Λ^s izomorfizam s $Y = H^s(\mathbb{R})$ u $X = L^2(\mathbb{R})$. Za danu funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$ neka je M_f operator multiplikacije funkcije f, tj $M_f u = fu$. Tada imamo slijedeću tvrdnju.

Lema 3.1.4. *Neka je $f \in H^s(\mathbb{R})$, $s > \dfrac{3}{2}$ i neka je $T = (\Lambda^s M_f - M_f \Lambda^s)\Lambda^{1-s}$. Tada je T ograničeni operator na $X = L^2(\mathbb{R})$ i*

$$||T|| \leq C || \operatorname{grad} f ||_{s-1} \tag{3.17}$$

Dokaz. Fourierovom transformacijom T je integral operator s jezgrom

$$k(\xi, \eta) = ((1 + \xi^2)^{s/2} - (1 + \eta^2)^{s/2}) \hat{f}(\xi - \eta) + (1 + \eta^2)^{(s-1)/2}. \tag{3.18}$$

Budući da je

$$|(1 + \xi^2)^{s/2} - (1 + \eta^2)^{s/2}| \leq s|\xi - \eta|(1 + \xi^2)^{(s-1)/2}(1 + \eta^2)^{(s-1)/2} \tag{3.19}$$

imamo

$$\begin{aligned}
k(\xi, \eta) &\leq s(1 + \xi^2)^{(s-1)/2} |\xi - \eta| \hat{f}(\xi - \eta)(1 + \eta^2)^{(1-s)/2} + s|\xi - \eta| \hat{f}(\xi - \eta) \\
&= k_1(\xi, \eta) + k_2(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

Za pokazati da je T ograničen potrebno je pokazati da su operatori T_1 i T_2 s jezgrama $k_1(\xi, \eta)$ i $k_2(\xi, \eta)$ ograničeni.
Koristeći inverznu Fourierovu transformaciju imamo

$$T_1 = s\Lambda^{s-1} M_g \Lambda^{1-s}, T_2 = sM_g \tag{3.20}$$

gdje je M_g operator multiplikacije funkcije g za koju je $\hat{g}(\xi) = |\xi|\hat{f}(\xi)$. Iz Leme (3.1.1) (ii) slijedi

$$||g||_\infty \leq C||g||_{s-1} \leq C||\mathrm{grad} f||_{s-1}. \tag{3.21}$$

Sada je

$$||T_1 u|| = s||\Lambda^{s-1} M_g \Lambda^{1-s} u|| = s||M_g \Lambda^{1-s} u||_{s-1} \leq s||g||_\infty ||u|| \tag{3.22}$$

i

$$||T_2 u|| = s||gu|| \leq s||g||_\infty ||u||. \tag{3.23}$$

Štoviše, oba operatora T_1 i T_2 su oba ograničena na X. Kombinacijom (3.21) s (3.20) i (3.23) dobivamo željenu ocjenu (3.17). □

Sada imamo:

Lema 3.1.5. *Za svaki $r > 0$ familija operatora $A(v)$, $v \in B_r$ zadovoljava uvjete (A_1) - (A_3).*

Dokaz. Neka je $r > 0$ fiksan. Iz Leme (3.1.3) slijedi da ako $\beta \geq c_0 r$, $A(v)$ je infinitezimalan generator od C_0 polugrupe $T_v(t)$ koja zadovoljava $||T_v(t)|| \leq e^{\beta t}$ i štoviše $A(v)$, $v \in B_r$ je stabilna familija u X (zbog Definicije (2.5.1)) Kako smo spomenuli gore $S = \Lambda^s$ je izomorfizam s $Y = H^s(\mathbb{R})$ na $X = L^2(\mathbb{R})$. Jednostavnim računom se pokaže da za svaki $u, v \in Y$ imamo

$$(SA(v)S^{-1} - A(v))u - (S(vD)S^{-1} - vD)u = (Sv - vS)S^{-1}Du \tag{3.24}$$

i pomoću Leme (3.1.4) imamo

$$\begin{aligned} ||(SA(v)S^{-1} - A(v))u|| &= ||(\Lambda^s M_v - M_v \Lambda^s)\Lambda^{1-s}\Lambda^{-1}Du|| \\ &\leq ||(\Lambda^s M_v - M_v \Lambda^s)\Lambda^{1-s}||||\Lambda^{-1}Du|| \\ &\leq C||\mathrm{grad} v||_{s-1}||u|| \\ &\leq C||v||_Y||u||. \end{aligned}$$

Budući da je Y gust u X slijedi da

$$||SA(v)S^{-1} - A(v)|| \leq C||v||_Y \leq Cr, \tag{3.25}$$

te da je (A_2) zadovoljen. Konačno zbog $s \geq 3$, $D(A(v)) \supset Y$ za svaki $v \in Y$ i za svaki $v \in B_r$

$$\begin{aligned} \|A(v)u\| &\leq \|D^3u\| + \|vDu\| \\ &\leq \|D^3u\| + \|v\|_\infty \|Du\| \\ &\leq (1 + C\|v\|_s)\|u\|_s \\ &\leq (1 + Cr)\|u\|_Y, \end{aligned}$$

tj. $A(v)$ je ograničen operator s Y u X. Nadalje, ako su $v_1, v_2 \in B_r$, $u \in Y$ imamo

$$\begin{aligned} \|A(v_1 - A(v_2))u\| &= \|(v_1 - v_2)Du\| \\ &\leq \|v_1 - v_2\| \|Du\|_\infty \\ &\leq C\|v_1 - v_2\| \|u\|_Y. \end{aligned}$$

□

Iz Leme (3.1.5) slijedi da familija $A(v)$, $v \in B_r$ zadovoljava uvjete (A_1) - (A_3) nepomenutih gore i štoviše po tim uvjtima sve pretpostavke Teorema (2.5.6) su zadovoljene za $r > \|u_0\|_s$. Posljedica toga je:

Teorem 3.1.6. *Za svaki $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$ postoji $T > 0$ takav da početni problem*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 & t \geq 0, -\infty < x < \infty \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3.26}$$

ima jedinstveno rješenje $u \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Ovim teoremom je pokazano postojanje rješenja KdV jednadžbe.

3.2 Oblik rješenja

Sada kada smo pokazali egzistenciju rješenja KdV jednadžbe pogledajmo kako ono izgleda.
Do (1.2) smo došli na slijedeći način. I dalje proučavamo KdV jednadžbu koje će sada biti oblika

$$u_t(x, t) + 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0, \tag{3.27}$$

gdje broj 6 označava faktor skaliranja za lakši opis rješenja. Cilj nam je naći egzaktno rješenje, bez početnih i rubnih uvjeta, a to rješenje ćemo zvati valovi samotnjaci. KdV je hiperbolička parcijalna diferencijalna jednadžba. Hiperbolička znači da opisuje povratni

dinamički proces.
Podsjetimo se da je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x,0) = z(x_0) \end{cases} \tag{3.28}$$

oblika

$$u(x,t) = z(x-ct). \tag{3.29}$$

Najprije pođimo od pretpostavke da tražimo rješenje u obliku putujućeg vala. Prema tome, ovisnost valne funkcije o prostoru i vremenu mora biti oblika

$$u(x,t) = z(x-ct), \tag{3.30}$$

gdje je c brzina prostiranja vala duž x - osi. Označavajući fazu valne funkcije sa $\xi = x - ct$, početnu KdV jednadžbu možemo zapisati u slijedećem obliku

$$-c\frac{dz}{d\xi} + 6z\frac{dz}{d\xi} + \frac{d^3z}{d\xi^3} = 0. \tag{3.31}$$

gdje integrirajući prethotnu jednadžbu dolazimo do

$$-cz + 3z^2 + \frac{d^{2z}}{d\xi^2} = 0 \tag{3.32}$$

Djelovajući na gornji izraz s $\frac{dz}{d\xi}$ dolazimo do slijedećeg

$$-cz\frac{dz}{d\xi} + 3z^2\frac{dz}{d\xi} + \frac{d^{2z}}{d\xi^2}\frac{dz}{d\xi} = c_1\frac{dz}{d\xi}, \tag{3.33}$$

odnosno

$$-czdz + 3z^2dz + \frac{d^{2z}}{d\xi^2}dz = c_1dz. \tag{3.34}$$

Ponovnim integriranjem imamo

$$-\frac{c}{2}z^2 + z^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = c_1z + c_2. \tag{3.35}$$

U slučaju kada $x \to \pm\infty \Rightarrow z, \frac{dz}{d\xi}, \frac{d^2z}{d\xi^2} \to 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, pa tada dolazimo do zaključka da je

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = z^2(c-2z) \Rightarrow \frac{dz}{z\sqrt{c-2z}} = d\xi. \tag{3.36}$$

Separacijom varijabli imamo slijedeće

$$\int_0^z \frac{d\sigma}{\sigma\sqrt{c-2\sigma}} = \int_0^\xi d\eta, \tag{3.37}$$

gdje početna točka može biti transformirana.
Transformacijom dolazimo do slijedećeg:

$$\sigma = \frac{1}{2}c\,\mathrm{sech}^2(w) \Rightarrow c - 2\sigma = c(1-\mathrm{sech}^2(w)) = c\tanh^2(w), \tag{3.38}$$

$$w = \mathrm{sech}^{-1}\sqrt{\frac{2\sigma}{c}}, \tag{3.39}$$

gdje je

$$\mathrm{sech}(w) = \frac{1}{\cosh(w)} = \frac{2}{e^w + e^{-w}}, \tag{3.40}$$

te

$$\frac{d}{dw}\mathrm{sech}(w) = -\tanh(w)\,\mathrm{sech}(w) \tag{3.41}$$

već spomenuti hiperbolički sekans.
Time dolazimo do slijedećeg:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dw} &= \frac{c}{2}2\,\mathrm{sech}(w)(-\tanh(w)\,\mathrm{sech}(w))\\ &= -c\,\mathrm{sech}^2(w)\tanh(w)\\ &= -c\frac{1}{\cosh^2(w)}\frac{\sinh(w)}{\cosh(w)}.\end{aligned}$$

Napokon dolazimo do oblika

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{-2}{\sqrt{c}}\int_0^w \frac{1}{\mathrm{sech}^2(w)\tanh(w)}\frac{\sinh(w)}{\cosh^3(w)}dw\\ &= \frac{-2}{\sqrt{c}}\int_0^w \frac{\cosh^2(w)\cosh(w)}{\sinh(w)}\frac{\sinh(w)}{\cosh(w)}dw\\ &= \frac{-2}{\sqrt{c}}\int_0^w dw\\ &= \frac{-2}{\sqrt{c}}w.\end{aligned}$$

Došli smo do slijedećeg

$$\xi = \frac{-2}{c}\,\mathrm{sech}^{-1}\sqrt{\frac{2z}{c}} \Rightarrow z(\xi) = \frac{c}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi\right). \tag{3.42}$$

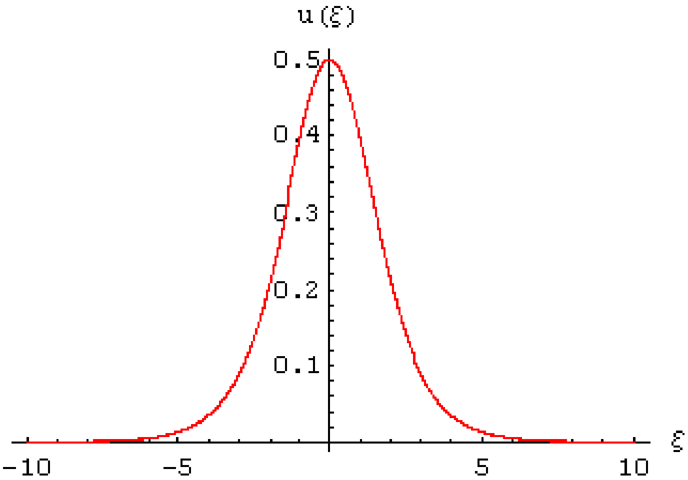
Konačno imamo sve potrebno za zapisati rješenje

$$u(x,t) = \frac{c}{2}\,\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct)\right). \tag{3.43}$$

Primijetimo da su jednadžbe (1.2) i (3.43) ekvivalentne, uzimajući u obzir da je $\gamma = \frac{\sqrt{c}}{2}$, odnosno $V = c$.

3.3 Solitonsko rješenje

Rješenje (3.43) KdV jednadžbe (1.2) se naziva solitonsko rješenje i ono što se odmah može uočiti su odlike karakteristične za sve solitone:
• amplituda vala raste s brzinom,
• širina vala se brzinom smanjuje.
Brži valovi su dakle bolje lokalizirani i imaju veću amplitudu od sporijih.
Treba primjetiti da je za razliku od linearnih valnih jednadžbi, gdje je faktor odnosno amplituda valne funkcije stvar početnih uvjeta ili normiranja (jer u linearnom homogenom slučaju vrijedi da ako je u rješenje, tada je i Cu rješenje za proizvoljnu konstantu C), ovdje zbog nelinearnosti je amplituda određena samom jednadžbom. To je općenito svojstvo nelinearnih jednadžbi.



Slika 2. Na slici je grafički prikazano rješenje (3.43).

Kao što vidimo iz slike, apscisa predstavlja fazu $\xi = x - ct$, a ordinata amplitudu vala. Za brzinu je uzeta vrijednost $c = 1$.

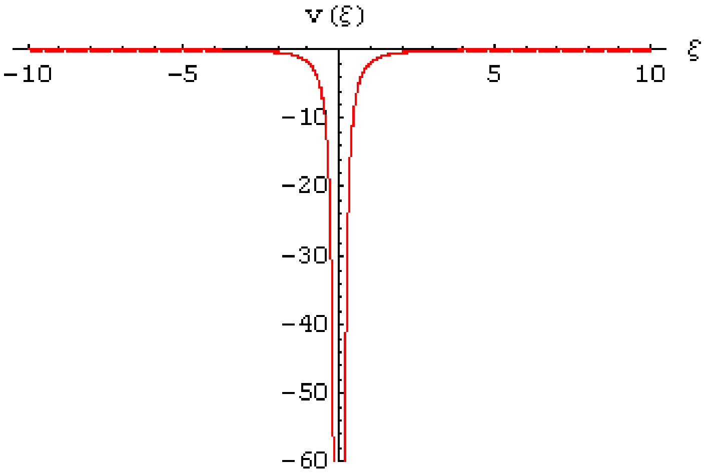
Oblik ovog solitona je gladak, simetričan, sa izraženim maksimumom i vrlo brzo trne. Primjetimo da grafikon solitona s proizvoljnom brzinom c izgleda potpuno jednako; dovoljno je promijeniti skalu ordinate $u \to cu$ uz istovremenu promjenu skale apscise $\xi \to \frac{\xi}{\sqrt{c}}$. Ukoliko si želimo predočiti kretanje ovog vala u prostoru i vremenu, dovoljno je uočiti da se prostorna točka u kojoj je faza jednaka nuli ($x - ct = 0$) ravnomjerno kreće brzinom c u pozitivnom smjeru x - osi. Isto vrijedi i za bilo koju drugu vrijednost faze, tako da se cijela forma vala, bez promjene oblika, ravnomjerno translatira u pozitivnom smjeru x - osi brzinom c.

3.4 Dubletsko rješenje

Do sada smo promatrali samo jednosolitonske valove, tj. rješenja koja predstavljaju izolirani soliton koji se kreće u prostoru. Da bismo proučili interakciju dva solitona, ne možemo superponirati dva solitona (linearna superpozicija ne vrijedi), već je potrebno naći *dubletsko* rješenje KdV jednadžbe. Dubletsko rješenje je funkcija koja je rješenje jednadžbe, a u jedinstvenom analitičkom izrazu obuhvaća dva prostorno odvojena solitona. Drugim riječima, dubletsko rješenje je jedna formula koja opisuje kretanje dva vala. Fizikalno zadovoljavajuće dubletsko rješenje se dobiva pomoću tzv. *Bäcklundove transformacije*, kombinacijom rješenja (3.43) i jednog drugog rješenja jednadžbe.

$$v(x - ct) = \frac{c}{2\sinh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}x - ct\right)}, \tag{3.44}$$

gdje je $\sinh(x)$ hiperbolički sinus. Da je i ovo zaista rješenje polazne jednadžbe, može se provjeriti uvrštavanjem. Međutim, ovo rješenje je neregularno, tj. ono nije fizikalno prihvatljivo zbog divergencije u području gdje faza $x - ct$ iščezava.
Ovo rješenje, samo po sebi nije od interesa, ali se (nelinearnom) superpozicijom ovog i prethodnog rješenja dobija opet regularno rješenje.



Slika 3. Iregularno rješenje (3.44) prikazano je grafički u ovisnosti o fazi.

I brži i sporiji val asimptotski zadržavaju oblik za $t \to \pm\infty$. Međutim, ono što je interesantno za uočiti ovdje je pomak u fazi koji se događa oko trenutka $t = 0$. Sporiji val doživljava fazni pomak unazad, a brži fazni pomak unaprijed. U stvari ovo se događa je kao da oko trenutka $t = 0$ dva solitona zamijene uloge. Ovaj efekat je izraženiji što je manja razlika između brzina dva solitona.

4 Primjena

Sada kada smo vidjeli da postoji jedinstveno rješenje KdV jednadžbe i pokazali kako ono izgleda, u ovom posljednjem poglavlju ćemo se posvetiti primjeni te jednadžbe u raznim oblicima i prirodnim pojavama.

4.1 Periodični valovi

Tzv. periodični ili eng. *cnoidal* valovi su nelinearno i periodično rješenje KdV jednadžbe. Korteweg i de-Vries su našli rješenje *valova samotnjaka* (1.2) i što je još važnije pokazali da postoji ograničen broj članova familije rješenja periodičnih valova opisanih eliptičkim funkcijama i zajednički nazvan periodični valovi,

$$u = b + a\,\mathrm{cn}^2(\gamma(x - Vt); m), \tag{4.1}$$

gdje je

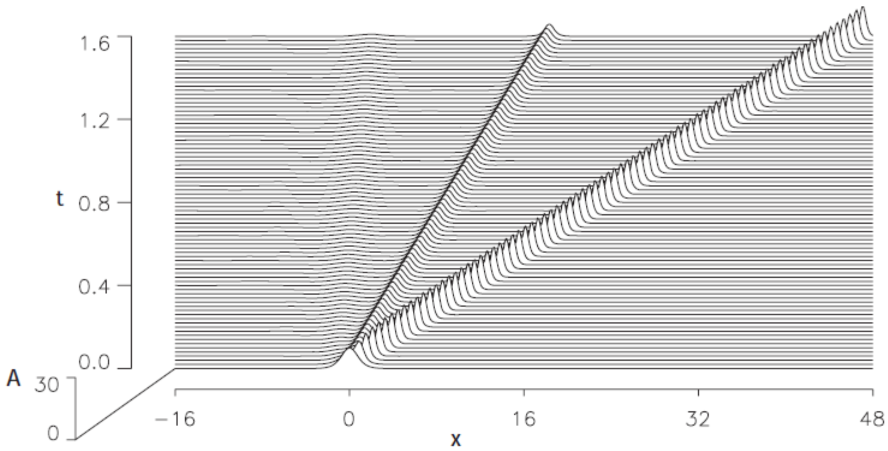
$$V = 6b + 4(2m - 1)\gamma^2, \ a = 2m\gamma^2. \tag{4.2}$$

Ovdje je $\mathrm{cn}(x; m)$ Jacobian eliptične funkcije modula m, $0 < m < 1$. Kada $m \to 1 \Rightarrow cn(x; m) \to \mathrm{sech}(x)$ i tada se periodični val (4.1) pretvara u val samotnjak (1.2) koji se sada giba na površini nivoa b. S druge strane, kada $m \to 0 \Rightarrow \mathrm{cn}(x; m) \to \cos(2x)$ i periodični val (4.1) opada u linearni sinusoidni val (u tom slučaju $a \to 0$).

4.2 Solitoni

Kao što je već navedeno, nakon istraživanja Korteweg i de-Vriesa, interes za valove samotnjake i KdV jednadžbu je opao sve do 1965. godine kada su Zabusky i Kruskal otkrili solitone (niz valova samotnjaka koji čuva svoj oblik dok se širi konstantnom brzinom). Izraz soliton je izveden od engleskog *solitary wave*, u prijevodu osamljeni val. U širem smislu, pod njim se podrazumijevaju valovi koji su ograničeni u prostoru (lokalizirani) i kreću se ne mijenjajući svoj oblik. U užem smislu, solitonima se označavaju rješenja određenih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi (solitonskih jednadžbi) uz odgovarajuće rubne uvjete, koji osiguravaju lokaliziranost. Poznata je pojava da disperzija utječe na valni paket tako da se njegov oblik mijenja, tj. da se s vremenom širi, a njegova lokalizacija gubi. Zanimljivo je, međutim, da u određenim uvjetima postoje nelinearni valovi čija nelinearnost upravo kompenzira disperziju, tako da val, šireći se, neograničeno zadržava svoj oblik. Ovo su solitoni u užem smislu riječi.

Pomoću numeričke integracije KdV jednadžbe oni su demonstrirali da se val samotnjak (1.2) može generirati od početnih uvjeta i opstati unatoč sudarima s drugim valovima samotnjacima, te su na temelju tih sudara došli do termina soliton. Njihovo nevjerojatno otkriće, popraćeno teoretksim istraživanjima Gardnera, Greena, Kruskala i Miura-e pokazuje da je KdV jednadžba integrabilna po *inverzu raspršenja transformacije* (metoda rješavanja nekih nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, tj. neka vrsta generalizirane Fourierove transformacije) što dovodi do drugih otkrića i označava nastanak soliton teorije koja je poznata do danas. To implicira da je val samotnjak ključna komponenta potrebna za opisivanje ponašanja dugih, slabih, nelinearnih valova. Konkretnije, općeniti lokalni početni uvjeti će dovesti do, kad $t \to \pm\infty$, generiranja konačnog broja solitona i nekih disperzijskih radijacija.



Slika 4. Generiranje tri solitona od lokalnih inicijalnih uvjeta u KdV jednadžbi (1.2)

4.3 Dvosmjerna KdV jednadžba

KdV jednadžba je jednosmjerna. Dvo-dimenzionalna verzija KdV jednadžbe (u prostoru) je Kadomtsev-Patviashvili (KP) jednadžba, koju su 1970.godine otkrili Kadomtsev i Patviashvili, a oblika je

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x \pm u_{yy} = 0 \tag{4.3}$$

Ova jednadžba uključuje efekte slabe difrakcije (fizikalne pojave koja nastaje zbog skretanja valova iza ruba zapreke na koju valovi naiđu) u y-smjeru, gdje derivacija po y skalira kao ε^2, a derivacija po x skalira kao ε. Kao i Kdv jednadžba ova je također integrabilna. Kada imamo "+" predznak u (4.3) zovemu ju KPII jednadžba, i u tom slučaju se može pokazati da je val samotnjak (1.2) stabilan za poprečan poremećaj. S druge strane, jednadžbu s "−" predznakom zovemo KPI jednadžba za koju je val samotnjak (1.2) nestabilan, te u tom slučaju ova jednadžba predstavlja solitone. I ova jednadžba je također integrabilna. Ako uzmemo u obzir jake poprečne efekte i/ili dvosmjerno širenje u x-smjeru, uobičajno je zamijeniti KdV jednadžbu s Boussinesq sustavom jednadžbi; koji kombinira disperzijsku aproksimaciju dugog vala s vodećim nelinearnim izrazom i dolazi do nekoliko asimptotskih ekvivalentnih formi.
Vodeni valovi pripadaju KPII slučaju.

4.4 KdV kao kanonski model jednadžbe

Iako se KdV jednadžba (1.1) povjesno povezuje s vodenim valovima, može se koristiti i u mnogim drugim fizikalnim kontekstima koji mogu biti izvedeni iz početne jednadžbe. Tipičan ishod je jednadžba oblika

$$u_t + cu_x + \mu u u_x + \lambda u_{xxx} = 0. \tag{4.4}$$

Ovdje je c brzina linearnog dugog vala koja ovisi i parametrima fizikalnog sustava, a μ i λ su koeficijenti kvadratne nelinearne i linearne disperzije koji su određeni iz svojstva istog linearnog dugog vala, te isto kao i c ovise o fizikalnom sustavu. Treba primjetiti da linearizacija od (4.4) ima linearnu disperziju oblika $\omega = ck - \lambda k^3$ za linearni sinusoidni val frekvencije ω i valnog broja k. Ovaj izraz je samo dio punog izraza disperzijske relacije promatranog vala, koji identificira koeficijent λ. Slično, koeficijent μ se može indentificirati brzinom koja je uvjetovana amplitudom vala. Transformacijom do *referentnog bloka* (sastoji se od apstraktnog koordinatnog sustava i niza fizikalnih točaka koji imaju svoje jedinstveno mjesto u koordinatnom sustavu i standardne mjere) koji se giba brzinom c i slijedećim reskaliranjem može se pokazati da se (4.4) može transformirati u kanonski oblik (1.2). Specijalno neka je,

$$\mu u = 6A\tilde{u}, \; x - ct = \left(\frac{\lambda}{A}\right)^{1/2} \tilde{x}, \; t = \left(\frac{\lambda}{A^3}\right)^{1/2} \tilde{t}, \tag{4.5}$$

gdje je A konstantna brzina skalirajućeg faktora umetnuta da bi transformirane varijable ostale bez dimenzije. Prikladan izbor za A je $A = |c|$, $c \neq 0$. Tada, nakon micanja eksponenta jednadžba (4.4) prelazi u oblik (1.2). Jednadžba (4.4) se koristi u proučavanju unutarnjih valova u atmosferi, oceanu, planetarnim valovima, plazma valovima, akustičnim valovima, valovima u elastičnim štapovima i mnogim drugim fizikalnim kontekstima.

4.4.1 Generalizirani valovi samotnjaci

Glavna važnost asimptotskog širenja koja vodi do KdV jednadžbe (4.4) je ta da ne bi trebalo biti povezanosti između linearnog dugog vala brzine c i bilo kojeg drugog dijela linearnog spektra promatranog sustava. Postoji implicitna pretpostavka kod izvođenja (4.4), a to je da su valovi samotnjaci prostorno lokalizirani. Budući da možemo pretpostaviti da u širokom području rješenja vrijedi linearna dinamika, to znači da možemo iskoritити relaciju disperzije $\omega = \omega(k)$ na cijeli leariziri sustava za sinusoidne valove valnog broja k i frekvencije ω kako bi testirali da li je ondje doista prostorna lokalizacija. Kako se sva rješenja od (4.4) gibaju brzinom bliskoj brzini linearnog dugog vala c, prostorna lokalizacija zahtjeva da ne bude povazanosti između c i bilo koje druge linearne fazne brzine

$$C(k) = \frac{\omega(k)}{k},$$

tj. nema realnih rješenja za bilo koji konačan realan ne-nul k za koji je $c = C(k)$ (jer bismo tada imali povezanost).
Za vodene valove bez površinske napetosti gornji uvjet je zadovoljen budući da je fazna brzina $C(k)$ dana s

$$C^2(k) = \frac{g\tanh(kh)}{k}, \tag{4.6}$$

i trne monotono iz linearnog dugog vala brzine $c = C(0) = (gh)^{1/2}$ kako k raste iz nule u beskonačno. Ukoliko je površinska napetost uključena i ako je *Weber broj* takav da je

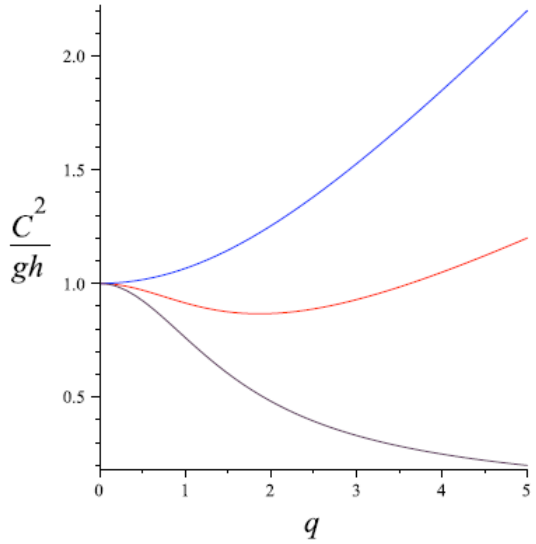
$$0 < W < \frac{1}{3}$$

jer se tada javlja rezonanca između dugog vala i kratkog kapilarnog vala. U tom slučaju cijeli sustav se ne može poduprijedi na prostorno lokaliziranom valu samotnjaku, te umjesto toga postoje *generalizirani valovi samotnjaci*. Oni imaju centralnu jezgru, opisanu za KdV jednadžbu malih amplituda, ali u širem području imaju ne-propadajuće oscilacije koje se zajedno šire s valnim brojem koji je otprilike dan rezonancijskim uvjetom. Amplitude ovih oscilacija su eksponencijalno male naspram amplitude centralne jezgre i zbog toga se bilo koje asimptotsko širenje koje vodi do KdV jednadžbe (4.4) ne može njome opisati.

4.4.2 Utjecaj napetosti vodene površine

U slučaju vodenih valova s površinskom napetošću, rezonanca proizlazi zbog grafa od $C(k)$ koji je sada oblika

$$\frac{C^2(k)}{gh} = \frac{(1 + Wq^2)\tanh(q)}{q}, \; q = kh, \; W = \frac{T}{gh^2}. \tag{4.7}$$



Slika 5. $W = 0.0$ (crna), $W = 0.2$ (crvena), $W = 0.4$ (plava)

Graf nije monoton kad je $0 < W < \frac{1}{3}$ kao što je bez napetosti vodene površine, tj. kad je $W = 0$. Iako treba primjetiti da kad je $W > \frac{1}{3}$ graf je ponovno monoton i ponovno nastaje izvorni val samotnjak. Slična situacija se događa za unutarnje valove, gdje do rezonance dolazi zbog disperzije. Za prvi unutarnji val nema rezonance te izvorni valovi samotnjaci postoje, ali za više unutarnje valove postoji rezonanca između linearnog dugog vala brzine c s te razine i fazne brzine $C(k)$ s niže razine, što vodi do generaliziranja valova samotnjaka. Da zaključimo, za val na vodi bez površinske napetosti, $W = 0$, čisti val samotnjak može postojati za brzinu veću od c, jer nema trenja. Ukoliko je *Weber broj* takav da je $0 < W < \frac{1}{3}$ tada se usklađenost događa između dugog i kratkog vala. U tom slučaju, cijeli sustav ne može podupirati prostorno lokaliziran valu samotnjaku i umjesto toga postoje generalizirani valovi samotnjaci. U slučaju kada je $W > \frac{1}{3}$ graf postaje monoton i ponovno postoji izvorni val samotnjak, sada s brzinom manjom od c.

4.5 Proširena KdV jednadžba

U nekim fizikalnim slučajevima potrebno je proširiti KdV jednadžbu (4.4) s višim redom kubnog nelinearnog izraza oblika $\Sigma u^2 u_x$. Nakon transformacije i reskaliranja, dopunjena jednadžba (4.4) se može transformirati u tzv. *proširenu KdV jednadžbu* ili *Gardnerovu jednadžbu*

$$u_t + 6uu_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.8}$$

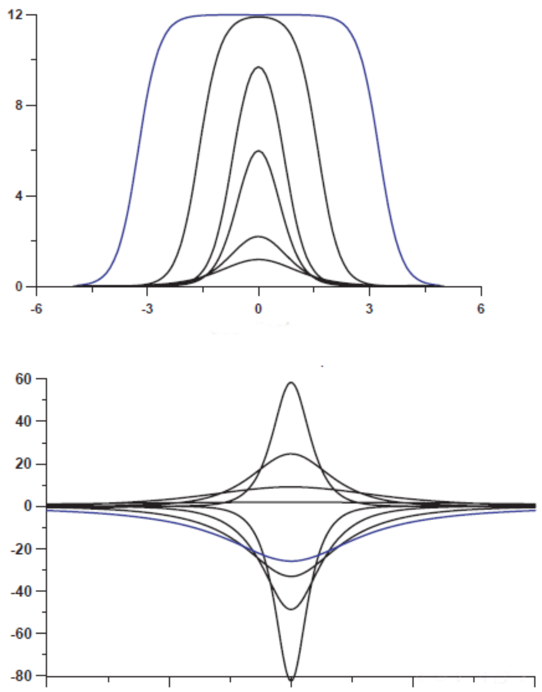
Kao i KdV i proširena KdV jednadžba je integrabilna po inverznom raspršenju transformacije. Koeficijent β može biti pozitivan ili negativan, a struktura rješenja ovisi upravo o predznaku β. Rješenje takvog vala samotnjaka je dano s

$$u = \frac{a}{b + (1-b)\cosh^2(\gamma(\theta - V\tau))}, \tag{4.9}$$

gdje je

$$V = a(2 + \beta a) = 4\gamma^2, \; b = \frac{-\beta a}{2 + \beta a}. \tag{4.10}$$

Treba razmotriti dva slučaja.
Ako je $\beta < 0$ tada postoji jedinstvena familija rješenja tako da $0 < b < 1$ i $a > 0$. Kako b raste iz 0 u 1, amplituda a raste iz 0 do maksimuma od $\frac{-1}{\beta}$, gdje brzina V također raste iz 0 do maksimuma od $\frac{-1}{\beta}$. U slučaju kada $b \to 1$ rješenje (4.9) je opisano tzv. *bujan* val samotnjak, koji ima ravan vrh amplitude $a_m = \frac{-1}{\beta}$. U slučaju kada je $\beta > 0$, $b < 0$ postoje dvije familije valova samotnjaka. Jedna je definirana s $-1 < b < 0$, koji ima $a > 0$, i kako b pada s 0 na -1, amplituda od a raste s 0 na ∞, dok brzina V također raste s 0 na ∞. Druga familija je definirana s $-\infty < b < -1$, koja ima $a < 0$, te kako b raste s $-\infty$ do -1, amplituda a pada s $\frac{-2}{\beta}$ do $-\infty$. Slijedeća slika pokazuje rješenje vala samotnjaka (4.9) od proširene KdV jednadžbe (4.8).



Slika 6. Gornji dio slike je za $\beta < 0$, a donji za $\beta > 0$.

U graničnom slučaju kad $b \to -1$ imamo

$$u = a\,\mathrm{sech}\,2\gamma(\theta - V\tau), \tag{4.11}$$

gdje je

$$V = \beta a^2 = 4\gamma^2,$$

gdje a može biti bilo kojeg predznaka. S druge strane, kada $b \to -\infty$, $\gamma \to 0$, val samotnjak iz (4.9) prelazi u algebarski oblik

$$u = \frac{a_0}{1 + \dfrac{\beta a_0^2 \theta^2}{4}}, \tag{4.12}$$

gdje je

$$a_0 = \frac{-2}{\beta}.$$

4.6 Valovi samotnjaci u prirodnim okruženjima

U mnogim fizikalnim situacijama potrebno je uzeti i obzir činjenicu da se valovi samotnjaci prenose kroz varijable iz prirodnih okruženja. To znači da su koeficijenti c, λ, μ u (4.4) funkcije ovisne o x, dok se dodatan izraz $c\left(\frac{Q_x}{2Q}\right)u$ treba uključiti, gdje je Q_x faktor povećanja. Tada se (4.4) može zamijeniti s

$$u_t + cu_x + c\frac{Q_x}{2Q}u + \mu u u_x + \lambda u_{xxx} = 0 \tag{4.13}$$

Nakon zamjene s novim varijablama,

$$X = \left(\int^x \frac{dx}{c}\right) - t,\ B = Q^{1/2}u, \tag{4.14}$$

KdV jednadžba je dobivena za $B(x, X)$, tj.

$$B_x + \nu(x)BB_X + \delta(x)B_{XXX} = 0, \tag{4.15}$$

gdje su

$$\nu = \frac{\mu}{cQ^{1/2}},\ \delta = \frac{\lambda}{c^3}. \tag{4.16}$$

Ovdje je pretpostavljeno da je

$$\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial X}. \tag{4.17}$$

Općenito, jednadžba (4.15) nije integrabilna i mora se riješiti numerički, iako mi ćemo doći do nekih asimptotskih rješenja.
Postoje dvije različite situacije koje treba razmotriti. Prvo, pretpostavimo da se koeficijenti $\nu(x), \delta(x)$ u (4.15) razlikuju obzirom na duljinu vala samotnjaka, te treba razmotriti slučaj kada se koeficijentima brzo izmjene vrijednosti iz ν_-, δ_- u $x < 0$ u vrijednosti ν_+, δ_+ u $x > 0$. Tada se ravnomjeran val samotnjak može širiti u području $x < 0$ koji je dan s

$$B = b \operatorname{sech}^2(\gamma(X - Wx)), \tag{4.18}$$

gdje je

$$W = \frac{\nu_- b}{3} = 4\delta_- \gamma^2.$$

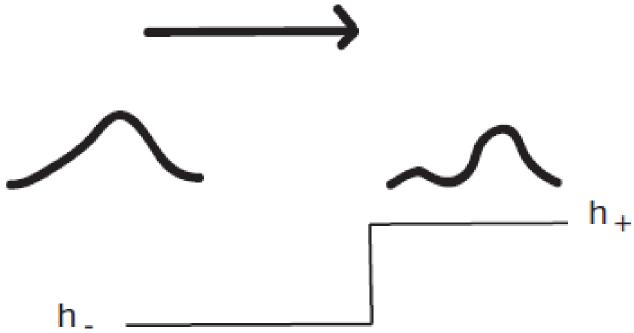
Kroz područje $x \approx 0$ će proći bez velike promjene, ali pri dolasku u područje $x > 0$ više neće biti dopušteno rješenje od (4.15) koje sada ima konstantne koeficijente ν_+, δ_+. Umjesto toga, s $x = 0$ izraz (4.18) stvori početne uvjete za novu KdV jednadžbu s konstantnim koeficijentima.
Koristeći inverzne transformacije raspršivanja, rješenje u $x > 0$ može se konstruirati, te u tom slučaju spektralni problem ima eksplicitno rješenje. Rezultat je taj da se početni val samotnjak cijepa na N solitona i nešto radijacije. Broj dobivenih N solitona određen je iz omjera koeficijenata $R = \frac{\nu_+ \delta_-}{\nu_- \delta_+}$. Ako je $R > 0$, tj. nema promjene u polaritetu valova samotnjaka, tada je $N = 1 + \frac{(8R+1)^{1/2} - 1}{2}$. Kako R raste od nule, novi soliton (počevši od amplitude nula) je dobiven kako R uspješno prolazi kroz vrijednost $\frac{m(m+1)}{2}$, $m = 1, 2, ...$ Ali, ako je $R < 0$, tj. postoji promjena u polaritetu, tada niti jedan soliton nije dobiven, te se val samotnjak raspada u radijaciju.
Npr, za vodene valove imamo

$$c = (gh)^{1/2}, \mu = \frac{3c}{2h}, \lambda = \frac{ch^2}{6}, Q = c, \tag{4.19}$$

te

$$\nu = \frac{3}{2hc^{1/2}}, \delta = \frac{h^2}{6c^2}, \tag{4.20}$$

gdje je h dubina vode.
Može se pokazati da će se val samotnjak u vodi, koja se širi iz dubine h_- na dubinu h_+, raspasti na N solitona, gdje je N gore naveden s pripadnim $R = \left(\frac{h_-}{h_+}\right)^{9/4}$, ako je $h_- > h_+$, $N \geq 2$, ali ako je $h_- > h_+$ tada je $N = 1$ te solitoni dalje nisu dobivni.



Slika 7. Cijepanje vala samotnjaka, tj. korak promjene.

4.7 Polako-promjenjiv val samotnjak

Sada ćemo razmotriti suprotnu činjenicu, tj. kada su koeficijenti $\nu(x)$, $\delta(x)$ u (4.15) polako promjenjivi uzevši u obzir valnu duljunu vala samotnjaka. U ovom slučaju iskoristit ćemo pertubaciju (uznemiravanje) u kojoj je vodeći izraz

$$B \sim b\,\mathrm{sech}^2\,\gamma(X - \int_{x_0}^{x} W dx), \tag{4.21}$$

gdje je

$$W = \frac{\nu b}{3} = 4\delta\gamma^2.$$

ovdje je amplituda vala $b(x)$ i otuda su $W(x)$, $\gamma(x)$ sporo promjenjive funkcije ovisen o x. Njihove varijacije su najviše određene uzmemo li u obzir da KdV jednadžba (4.15) zadovoljava zakon sačuvanja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B^2 dX = \mathrm{const} \tag{4.22}$$

koji izražava sačuvanje toka fluida. Ubacivanjem (4.21) u (4.22) dobivamo

$$\frac{2b^2}{3\gamma} = \mathrm{const},\ b = \mathrm{const}\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{1/3}. \tag{4.23}$$

To je eksplicitna jednadžba za varijaciju (promjenu) amplitude $b(x)$ u terminima $\nu(x)$ i $\delta(x)$. Kakogod, KdV jednadžba (4.15) također zadovoljava zakon sačuvanja mase

$$\int_{-\infty}^{+\infty} B dX = \text{const.} \tag{4.24}$$

Iako polako promjenjiv val samotnjak čuva tok fluida, ne može istovremeno čuvati i masu. Umjesto toga, popraćen je s *pratećim sprudom* (izbočinom) (eng. *trailing shelf*) male amplitude, ali velike duljine dane s razinom B_s, tako da to čuvanje mase daje

$$\int_{-\infty}^{\phi} B_s dX + \frac{2b}{\gamma} = \text{const,} \tag{4.25}$$

gdje je $\phi = \int_{x_0}^{x} W dx$ ($X = \phi$ daje lokaciju vala samotnjaka), a drugi izraz je masa vala samotnjaka. Različitost doprinosi amplitudi $B_- = B_s(X = \phi)$ izbočine vala samotnjaka,

$$\frac{3\gamma_x}{\nu\gamma^2}. \tag{4.26}$$

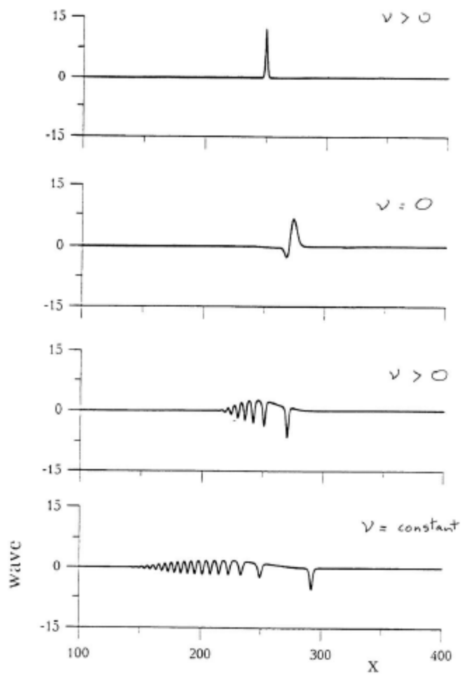
Ovo pokazuje da valni broj γ raste (pada) kako se val samotnjak deformira, te da vodeća izbočina amplitude B_- ima isti (suprotan) polaritet kao val samotnjak.
Rezultati pokazuju da za vodeni val samotnjak širenje preko promjenjive dubine $h(x)$, amplituda varira kao h^{-1}, dok vodeća izbočina ima pozitivan (negativan) polaritet zavisan o samom valu $h_x < (>)0$.

4.8 Kritična točka; proširena KdV jednadžba

Situacija koja je od značajnog interesa događa se ako koeficijent $\nu(x)$ mijenja predznak u nekim određenim lokacijama (treba primijetiti da u većini fizikalnih sustava koeficijent linearne disperzije δ u (4.15) ne iščezava za bilo koji x). Ovo zajednički proizlazi za unutarnje valove samotnjake u oceanima uz obalu gdje je, u pravilu, u dubljim vodama $\nu < 0$, $\delta > 0$ tako da su unutarnji valovi samotnjaci koji se šire uz obalu, zapravo *valovi depresije*. Dok u plićim vodama, gdje je $\nu > 0$, opstaju jedino uzdignuti unutarnji valovi samotnjaci. Problem tada proizlazi ako se unutarnji *val depresije* može pretvoriti u jedan ili više povišenih valova samotnjaka kada je kritična toka, gdje ν mijenja predznak, prijeđena. Rješenje ovisi o tome kako brzo koeficijent ν mijenja. Ako ν prođe kroz nulu brzo u usporedbi s lokalnom širinom vala samotnjaka, tada je val samotnjak uništen i pretvara se u valni niz radijacije.
S druge strane, ako se ν mijenja dovoljno sporo iz (4.16) proizlazi da

$$\nu \to 0 \Longrightarrow B \to 0 \Longrightarrow u \sim |\nu|^{1/3} \to 0, \text{dok} B_- \sim |\nu|^{-8/3} \to \infty. \tag{4.27}$$

Kako god, ako amplituda vala samotnjaka pada, amplituda prateće izbočine, koja ima suprotan polaritet, raste neodređeno sve dok nije dosegnuta točka prije kritične točke gdje asimptotska teorija slabo promjenjivog vala samotnjaka ne vrijedi. Kombinacija ove prateće izbočine i deformacije vala samotnjaka daje nam odgovarajuće inicijalne uvjete za jedan ili više valova samotnjaka suprotnog polariteta, koji izlaze na površinu kad je kritična točka prijeđena.

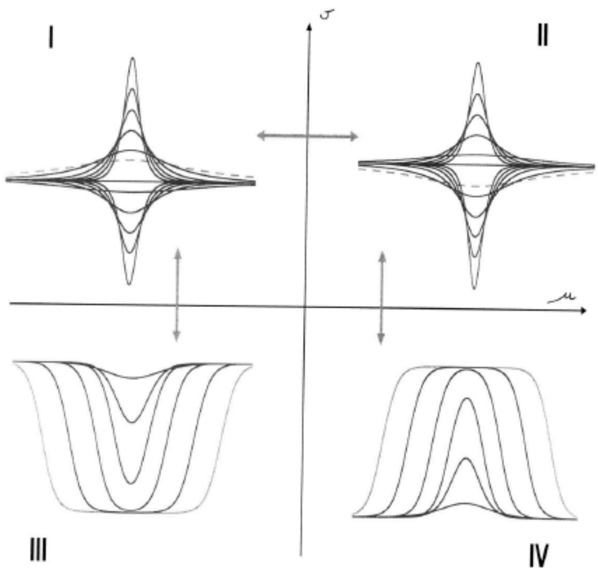


Slika 8. Prikaz valova samotnjaka obzirom na promjenu predznaka koeficijenta $\nu(x)$

Jasno je da će biti nužno u situacijama kao ovdje, gdje je $\nu \approx 0$, dodati kubni nelinearni izraz u (4.15), tako što ćemo ga pretvoriti u Gardner jednadžbu s varijabilnim koeficijentima (4.8), tj.

$$B_x + \nu(x)BB_X + \chi(x)B^2B_X + \delta(x)B_{XXX} = 0. \tag{4.28}$$

Ovaj slučaj su proučavali Grimshaw, Pelinvsky i Talipova (1999.g.) koji su pokazali da ishod ovisi o predznaku koeficijenta χ kubnog nelinearnog izraza u (4.28). Ako je $\chi > 0$ tako da val samotnjak bilo kojeg polariteta može postojati ako je $\nu = 0$, tada val samotnjak zadržava svoj polaritet (podsjeća na *val depresije*) dok je kritična točka prijeđena. S druge strane, ako je $\chi < 0$ tako da niti jedan val samotnjak ne može postojati kad $\nu = 0$, tada se *val depresije* može pretvoriti u jedan ili više nagiba valova samotnjaka.



Slika 9. Prijelazi/promjena vala samotnjaka kako χ i ν mijenjaju predznak.

4.9 KdV jednadžba sa silom

Do sada smo razmatrali situaciju kada se valovi samotnjaci pojave kao rješenja inicijalnog problema KdV jednadžbe (1.2). To je prikladno u mnogim slučajevima. Npr. u oceanu, atmosferi, laboratorijskim eksperimentima se unutarnji valovi samotnjaci mogu generirati kad je dio vode s najvećom gustoćom dan kao lokalno promaknuće. Kao što je opisano u prethodnom poglavlju, to dolazi od početnih uvjeta. Kad početno pomaknuće ima ispravan polaritet, ono će se razviti u konačan broj valova samotnjaka. Ovakav se scenarij često događa u priobalnom oceanu kad je barotropska plima u interakciji s kontinentalnim grebenom (izbočinom) što osigurava nužan pomak djela vode s najvećom gustoćom. Ovo s vremenom prelazi u širenje unutarnjih valova samotnjaka. Kakogod, KdV valovi samotnjaci se mogu također stvoriti direktnim prisilnim mehanizmom. Slična situacija odvija se kada je tok fluida u interakciji s lokalnom topografskom preprekom u tzv. kritičnim situacijama. Ovdje je kritični dotok onaj koji podupire linerni dugi val brzine nula. U tom slučaju generirani valovi su u nemogućnosti izbjeći okolinu prepreke, te se može reći da su direktno prisiljeni pod udarom. Nemogućnost brzog širenja valova od područja udara znači da je nelinearnost potrebna izvana. To ćemo pokazati naknadno. Tada je KdV jednadžba (1.2) zamijenjena s tzv. KdV jednadžbom sa silom, čiji je princip rješenja tzv. *undular bore.* Najprije ćemo opisati *undular bore*.

4.9.1 Rješenja KdV jednadžbe sa silom; ne-disipativan tok

Specifično rješenje KdV jednadžbe, ili eng. *undular bore*, je široko korišten u literaturi u mnoštvu konteksta i nekoliko različitih značenja. Ovdje trebamo razjasniti da smo koncentrirani na ne-disipativni tok (sustav u kojem se pojačava kaotično gibanje), u čijem slučaju je *undular bore* bitno nestabilan. U suštini, *undular bore* je oscilatorna izmjena između dva različita osnovna stanja. Jednostavan prikaz *undular bore* može biti dobiven iz rješenja KdV jednadžbe (1.2) s početnim uvjetima kada je

$$u = u_0 H(-x), \tag{4.29}$$

gdje ćemo prvo pretpostaviti da je $u_0 > 0$, a $H(x)$ je Heavisideova funkcija ($H(x) = 1$ ako je $x > 0$, te $H(x) = 0$ ako je $x < 0$). Rješenje se može dobiti inverznom transformacijom raspršenja. Međutim, korisinije je uzeti asimptotsku metodu koju su razvili Gurevich i Pitaevskii i Whitham samostalno 1974.godine. U ovom pristupu, rješenje od (1.2) s inicijalnim uvjetima je predstavljeno kao tzv. prilagođeni periodični niz valova (4.29), koji je ovdje dopunjen s glavnim izrazom d, koji je

$$u = a[b(m) + \mathrm{cn}^2(\gamma(x - Vt); m)] + d, \tag{4.30}$$

gdje je

$$b(m) = \frac{1-m}{m} - \frac{E(m)}{mK(m)}, a = 2m\gamma^2 \tag{4.31}$$

i

$$V = 6d + 2a\left(\frac{2-m}{m} - \frac{3E(m)}{mK(m)}\right). \tag{4.32}$$

Podsjećamo se da kad modul $m \to 1$ ovo postaj val samotnjak, a kad $m \to 0$ smanjuje se u sinusoidni val male amplitude.
Asimptotska metoda Gurevich i Pitaevskii i Whitham dopušta da izraz (4.30) opiše modul periodičnog valnog niza u kojem amplituda a, glavni nivo d, brzina V i valni broj γ polako variraju funkcijama od x i t. Ovdje je asimptotsko rješenje koje odgovara inicijalnim uvjetima (4.29) konstruirano u obliku sličnih varijabli $\frac{x}{t}$ i dano s

$$\frac{x}{t} = 2u_0\left(1 + m - \frac{2m(1-m)(K(m))}{E(m) - (1-m)K(m)}\right), \text{ za } -6u_0 < \frac{x}{t} < 4u_0, \tag{4.33}$$

$$a = 2u_0 m,\ d = u_0\left(m - 1 + \frac{2E(m)}{K(m)}\right). \tag{4.34}$$

Ispred valnog niza gdje je $\frac{x}{t} > 4u_0$, $u = 0$ i na kraju toga $m \to 1$, $a \to 2u_0$, $d \to 0$ vodeći val je val samotnjak amplitude $2u_0$ zavisan o glavnom nivou nula. Iza valnog niza gdje $\frac{x}{t} < -6u_0$, $u = u_0$ i na kraju toga $m \to 0$, $a \to 0$, $d \to u_0$; valni niz je sada sinusoida s valnim broje γ koji je dan s $6\gamma^2 \approx u_0$. Nadalje, može se pokazati da na svakom pojedinačnom vrhu u valnom nizu $m \to 1$ kad $t \to \infty$. U ovom smislu *undular bore* napreduje, tj. širi se niz valova samotnjaka.

4.9.2 Asimptotsko rješenje; podijeljeni val

Ako je $u_0 < 0$ u inicijalnom uvjetu (4.30) tada je rješenje *undular bore* analogno opisu (4.30) i (4.33) i ono ne postoji. Umjesto toga, asimptotsko rješenje je *podijeljeni val*

$$u = 0 \text{ za } x > 0,$$

$$u = \frac{x}{6t} \text{ za } u_0 < \frac{x}{6t} < 0,$$

$$u = u_0 \text{ za } \frac{x}{6t} < u_0 < 0. \tag{4.35}$$

Mali oscilatorni valni niz je potreban da izgladi diskontinuitete (prekide) u u_x za $x = 0$ i $x = -6u_0$.

4.9.3 Generiranje KdV jednadžbe sa silom

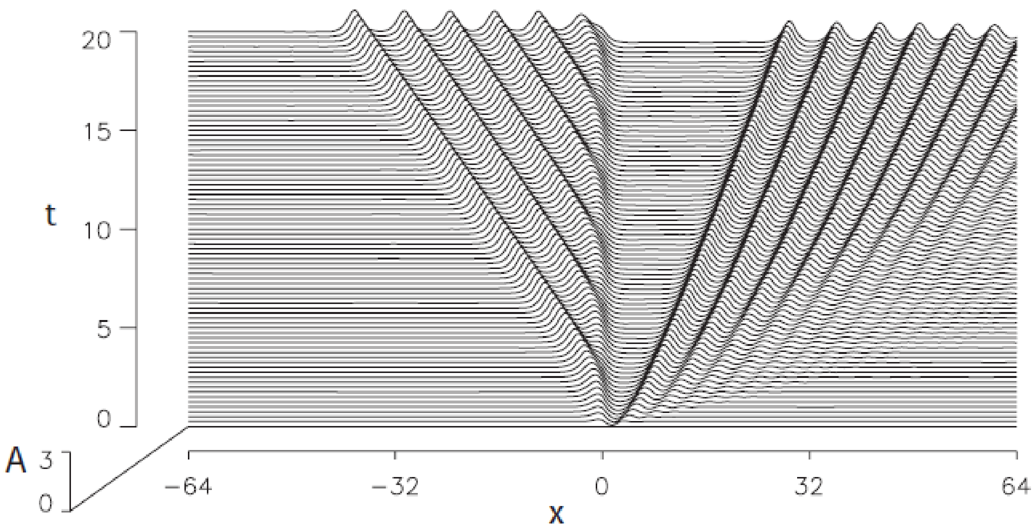
Generiranje *undular bore* zahtjeva početne uvjete u kojima $u \to u_\pm$ s $u_- > u_+$ dok $x \to \pm\infty$. Treba primjetiti da je (4.29) najjednostavniji takav uvjet. Zajednička situacija gdje se ovakav tip početnog uvjeta može generirati događa se kad nepomičan *transcrititcal* tok naiđe na lokalnu topografsku prepreku, u kontekstu da je val gust slojevit fluid. Tok $u_0(z)$ je ključan ako može podržati val čija je brzina $c \approx 0$, u okviru odnosa topološke prepreke. Pretpostavimo da je donja granica slojevitog fluida dana s $z = -h + F(x)$, gdje je $F(x)$ prostorno lokaliziran i za KdV balans. F određuje kvadratnu amplitudu vala. Neka je brzina $c = \Delta$ gdje je $\Delta << 1$ parametar jednakog reda kao i amplituda vala. Tada se može pokazati da se KdV jednadžba može zamijeniti KdV jednadžbom sa silom (fKdV)

$$u_T + \Delta u_X + \mu u u_X + \lambda u_{XXX} + \Gamma F_X(X) = 0, \tag{4.36}$$

koeficijenti μ, λ, Γ su poznati i možemo pretpostaviti da je $\lambda < 0$.
$\Delta > 0 (< 0)$ definira superkritičan (subkritičan) tok. Također slijedi da je $\mu < 0 (> 0)$ za povišenje vala samotnjaka.
fKdV jednadžba (4.36) je izvedena u mnogim fizikalnim situacijama, i to je kanonski oblik jednadžbe koja opisuje interakciju *transcritical* tok s preprekom.
Za KdV jednadžbu (4.4) možemo promjeniti fKdV jednadžbu (4.36) u slijedeći oblik

$$-u_t - \Delta u_x + 6uu_x + u_{xxx} + F_x(x) = 0. \tag{4.37}$$

Može se riješiti inicijalnim uvjetom $u(x, 0) = 0$ koji odgovara sporim uvođenjem topografskih prepreka. Važna činjenica je polarnost s prisilom, koja je, kad je polaritet pozitivan (negativan) $F(x) \geq 0 (\leq 0)$. Uzimajući u obzir skaliranje pozitivnog polariteta u originalnim dimenzijama koordinata dovodi do pozitivnog (negativnog) polariteta u jednadžbi bez dimanezija poput $\mu\Gamma > 0 (< 0)$.

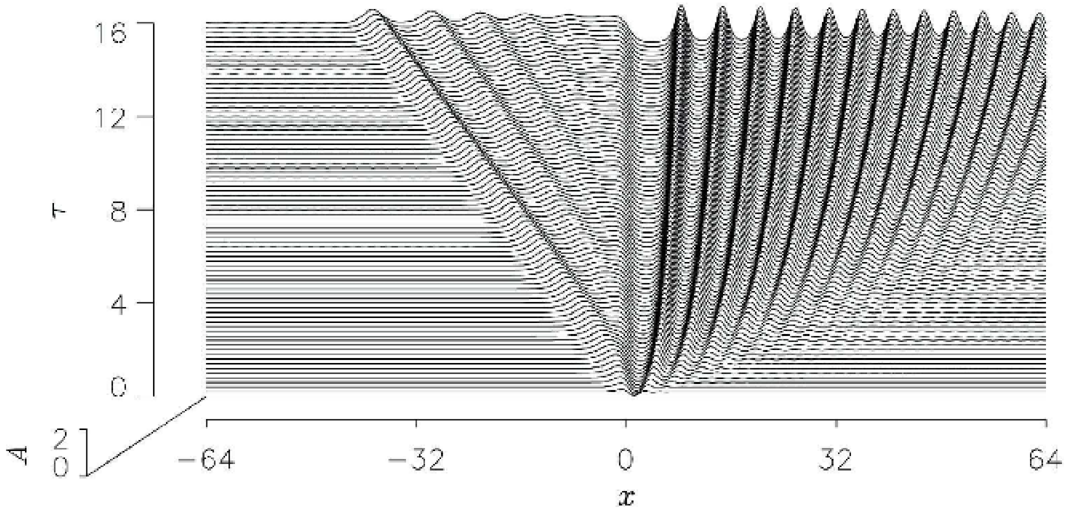


Slika 10. Rješenje fKdV jednadžbe (4.37) priekzaktnoj kritičnosti za $\Delta = 0$.

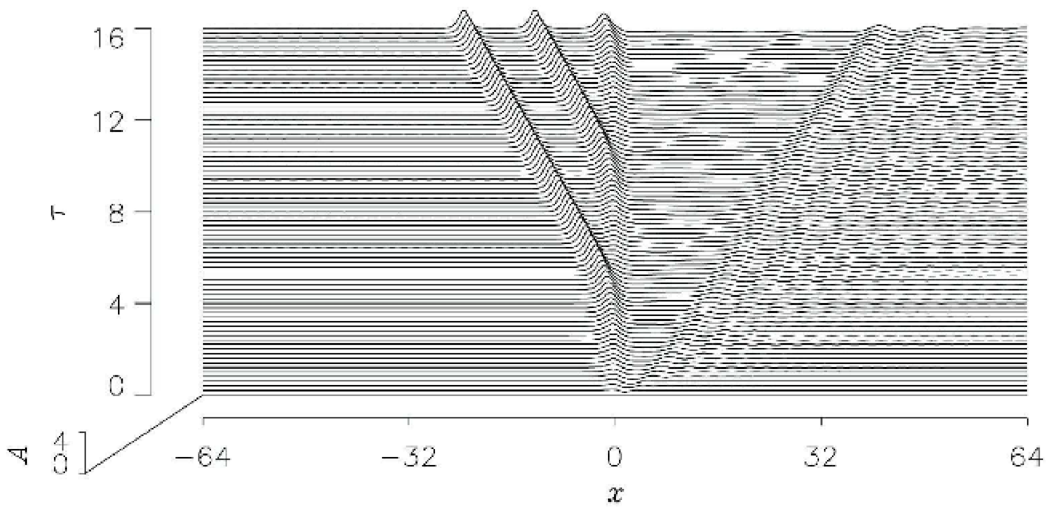
Prislnost (nije prikazano na slici) je jedino u okolini od $x = 0$ s maksimalnom vrijednosti od $F_M > 0$.

4.9.4 Rješenje KdV jednadžbe sa silom

Rješenje je karakterizirano s uzlaznim i silaznim valnim nizom povezanim s lokalnim čvrstim rješenjem preko prepreke. Za *subcritical* tok ($\Delta < 0$) ulazni valni niz oslabljuje, a za dovoljno velike $|\Delta|$ odvaja se od prepreke, dok se silazni valni niz pojačava i za dovoljno velike $|\Delta|$, te formira stacionaran zaklon valnog područja. S druge strane, za superkritičan tok ($\Delta > 0$) uzvodni valni niz pretvara se u dobro odvojen val samotnjak, dok silazni valni niz slabi i ide prema dolje. Izvor ulaznih i silaznih valnih nizova može se naći u strukturi lokalno čvrstih rješenja preko prepreke.



Slika 11. Rješenje od fKdV (4.37) za subkritičan tok, $\Delta = -1.5$.



Slika 12. Rješenje od fKdV (4.37) za superkritičan tok, $\Delta = 1.5$.

4.9.5 Rješenje KdV jednadžbe sa silom: Hidraulička aproksimacija

U *transcriticalnom* području ovo je karakteristično izmjenom od konstantnog oblika u_- uzvodno od prepreke do konstantnog oblika u_+ nizvodno od prepreke, gdje je $u_- < 0$ i $u_+ > 0$. Lako je pokazati da $\Delta = 3(u_+ + u_-)$ ne ovisi o detaljima forsiranog izraza $F(x)$. Eksplicitna determinacija od u_+ i u_- zahtjeva neka poznavanja forsiranog izraza $F(x)$. Nadalje, u *hidrauličkom* limitu gdje se linearna disperzija može zanemariti, pokaže se da je

$$6u\pm = \Delta \mp (12F_M)^{1/2}. \tag{4.38}$$

Ovaj izraz također služi za defiiranje *transcritital* područja koje je

$$|\Delta| < (12F_M)^{1/2}. \tag{4.39}$$

Odatle uzvodno od prepreke je prijelaz iz nulte faze do faze u_-, dok je nizvodan prijelaz od prepreke od u_+ do 0; svaki prijelaz efektivno je generiran s $X = 0$.

4.9.6 Rješenje KdV jednadžbe sa silom; *Undular bore*

Oba prijelaza su riješena s *undular bore* rješenjima kako je opisano gore. S $x < 0$ je detaljno opisano u (4.21) i (4.25) gdje je x zamijenjen s $\Delta t - x$, a u_0 s u_-. Zanimljiva je zona

$$\Delta - 4u_- < \frac{x}{t} < \max\{0, \Delta + 6u_-\} \tag{4.40}$$

Treba primjetiti da je ulazni valni niz ograničen da leži u $x < 0$ i odatle je potpuno realizirano $\Delta < -6u_-$. Kombinirajući ovaj kriterj s (4.30) i (4.34) dolazimo do

$$-(F_M)^{1/2} < \Delta < -\frac{1}{2}(F_M)^{1/2}, \tag{4.41}$$

gdje se sasvim izgrađeno *undular bore* rješenje može proširiti (rasti) uzvodno.
S druge strane, izraz $\Delta < -6u_-$ ili

$$-\frac{1}{2}(F_M)^{1/2} < \Delta < (F_M)^{1/2} \tag{4.42}$$

je tamo gdje je *undular bore* djelomično formiran i dodan prepreci. U ovom slučaju moduli m i Jacobijanove eliptične funkcije variraju od 1 do glavnog (vodećeg) ruba (ovo opisuje valove samotnjake) do vrijednosti $m_-(< 1)$ kod prepreke, gdje se m_- može naći u (4.33) tako što zamijenimo x s Δ i u_0 s u_-.
Prijelaz u $x > 0$ se može opisati s (4.21) i (4.25) gdje je x sada zamijenjen s $(\Delta + 6u_+)t - x$, u_0 s $-u_+$, d s $d - u_+$. Ovakvo *undular bore* rješenje je u zoni:

$$\max\{0, \Delta - 2u_+\} < \frac{x}{t} < \Delta - 12u_+. \tag{4.43}$$

Ovdje je nizvodni valni niz ograničen da leži u $x > 0$ i budući da je jedini u cjelosti jasno je da je $\Delta > 2u_+$. Kombinirajući ovaj kriterij s (4.30) i (4.34) definiramo (4.42) i posve odvojen nizvodni *undular bore* podudara se sa slučajem kada je uzvodnim *undular bore* priključen prepreci.

S druge strane (4.41), kada je uzlazni *undular bore* odvojen od prepreke, nizvodni *undular bore* je priključen prepreci s modulima $m_+(< 1)$ kod prepreke, gdje se m_+ može naći u (4.33) zamijenjujući x s $\Delta - 6u_+$, u_0 s u_+. Doduše, sada stacionaran zaklon valnog niza razvija se iza prepreke. Za slučaj kada prepreka ima negativan polaritet (tj. $F(x)$ je negativan i ne-nul osim u slučaju kada je $x = 0$) uzvodna i nizvodna rješenja su kvalilativno slična opisanima za gore navedena pozitivna forsiranja. Kakogod, rješenje u okolini prepreke ostaje privremeno, a to izaziva modulaciju *undular bore* rješenja.

Bibliografija

[1] R. Griimshaw, *Solitary Waves in fluids*, WIT Press, UK., 2007.

[2] R. Grimshaw, *Nonlinear Waves in fluids: Recent advances and modern applications*, SpringerWien, New York, 2005.

[3] R. Grimshaw i N. Smyth, *Resonant flow of stratified fluid over topography*, J. Fluid Mech, Springer, 1986.

[4] G.L.Jr. Lamb, *Elements of Soliton Theory*, John Wiley and Sons, 1980.

[5] A. Pazy, *Semigroups od Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc., 1983.

Sažetak

U ovom radu prikazana je egzistencija i jedinstvenost rješenja Korteweg-de Vries jednadžbe, određena svojstva i primjena iste.
Prvo poglavlje rada definira kanonski oblik KdV jednadžbe, te nas kroz kratak povijesni slijed uvodi u daljnje razvijanje KdV jednadžbe.
U drugom poglavlju uvode se osnovni pojmovi koji će biti potrebni za razumijevanje egzistencije i jedinstvenosti rješenja KdV jednadžbe.
U trećem poglavlju osim egzistencije rješenja KdV jednadžbe možemo vidjeti i kako ono izgleda. Također je prikazano solitonsko i dubletsko rješenje iste.
U četvrtom poglavlju je dana zanimljiva primjena KdV jednadžbe, njeni razni oblici i njihova rješenja.

Summary

This diploma thesis presents the existence and a unique solution of the Korteweg-de Vries equation, certain properties and application of the same.
The first section of the work defines the canonical form of KdV equation and introduces us through a brief historical sequence to a further development of the KdV equation.
The second section introduces the basic concept that will be needed to understand the existence and uniqueness of the KdV equation's solution.
In the third section, apart from the existence of the KdV equation, we can see how it looks. Also presented is a one-soliton and two-soliton solution.
The fourth section gives an interesting application of the KdV equation, its various forms and solutions.

Životopis

Rođena sam 07. ožujka 1992. godine u Osijeku. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja pohađala sam srednju Matematičku gimnaziju (III. gimnaziju). 2010. godine upisala sam fakultet Odjel za matematiku na Sveučilištu Josipa Juraja Strossmayera u Osijeku. Ondje sam završila preddiplomski studij matematike, te 2014. godine upisala diplomski studij Primijenjene matematike na Prirodoslvno-Matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godinama sam se bavila plesom, a kao student sam radila razne studentske poslove, te od 2016. godine do danas radim u centru za edukaciju gdje držim pripreme iz matematike.