Polinomijalne matrice

Vujičić, Matea

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Vujičić

POLINOMIJALNE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc Maja Starčević

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom radu u glavnini promatramo polinomijalne matrice. Budući da promatramo polinomijalne matrice, u prvom poglavlju ćemo se podsjetiti upravo definicije polinoma te nekih teorema i rezultata koji su važni za razumijevanje novih pojmova te ćemo ih koristiti u narednim poglavljima. Osim polinoma, prisjetit ćemo se i definicije matrice te nekih pojmova i svojstava koje vežemo uz matrice kao što su determinanta, inverz, karakteristični polinom, minora, lijeva i desna ekvivalentna matrica itd.
Nakon uvodnog dijela koji služi kao podsjetnik, definirat ćemo polinomijalnu matričnu funkciju, odnosno polinomijalnu matricu kako ćemo je kraće zvati. Vidjet ćemo da su definicije množenja, zbrajanja i množenja skalarom zapravo vrlo slične onima klasičnih matrica. Uočit ćemo da kod množenja polinomijalnih matrica, isto kao i kod klasičnih matrica, komutativnost ne vrijedi općenito. Sukladno tome, dokazat ćemo teoreme o dijeljenju polinomijalnih matrica iz kojih ćemo vidjeti da postoji lijevi i desni kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinomijalnih matrica, upravo zbog nekomutativnosti množenja matrica. Pokazat ćemo da ako imamo dvije kvadratne matrice i ako je ona koja je djelitelj regularna, onda postoje jedinstveni lijevi i desni kvocijent i ostatak te ćemo vidjeti algoritme za pronalaženje tih matrica.
Vidjet ćemo poveznicu između malog Bézoutova teorema i generaliziranog Bézoutova teorema koji je zapravo njegov analogon. Ponovit ćemo elementarne transformacije i vidjeti da zapravo jednako utječu na polinomijalne matrice kao i na klasične matrice. Što se tiče linearne nezavisnosti polinomijalnih vektora, odnosno stupaca polinomijalnih matrica, vidjet ćemo da je i tu sve vrlo slično kao i kod klasičnih matrica.
Osim poznatih pojmova koje smo definirali analogno kao i kod klasičnih matrica, uvest ćemo i neke nove kao što su matrice reduciranih redaka i stupaca. Uvest ćemo pojam invarijantnih polinoma te uz njega usko vezan pojam Smithove kanonske forme. Vidjet ćemo i definiciju nultočaka polinomijalnih matrica, a to su zapravo nultočke invarijantnog polinoma pripadne matrice. Rang polinomijalnih matrica definira se na sličan način kao i rang klasičnih matrica, a dokazat ćemo i neke teoreme vezane uz rang.
U zadnjem poglavlju susrećemo se s pojmom sličnosti, odnosno definicijom sličnih matrica. Definicija je relativno slična definiciji ekvivalentnih matrica, a postoje teoremi koji povezuju ta dva pojma te ćemo dokazati da određene polinomijalne matrice prvog stupnja

pridružene sličnim matricama imaju iste invarijantne polinome. Osim toga, definirat ćemo Frobeniusovu kanonsku formu polinomijalnih matrica. Izvest ćemo neke rezultate vezane uz nju i vidjeti kako se ona izračunava.

Poglavlje 1

Matrice i polinomi

Podsjetimo se najprije definicije polinoma i matrice kako bismo lakše razumjeli što je to polinomijalna matrica. Osim toga, pogledajmo i neke rezultate i teoreme koji su poznati te ćemo ih koristiti u narednim poglavljima.

1.1 Definicija polinoma i neke osnovne operacije nad polinomima

S obzirom na to da je polinom dosta širok pojam što se tiče koeficijenata, mi ćemo opisati polinome koje ćemo koristiti u ostatku rada.

Definicija 1.1.1. *Neka je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Funkciju $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ definiranu s*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{1.1}$$

nazivamo polinomom p u varijabli x nad poljem $\mathbb{F}$ i pritom su $a_i \in \mathbb{F},\ i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}_0$ te je $a_n \neq 0$ ako je $n \neq 1$. Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma p, a_0 je slobodni član, a_n je vodeći član, a n je stupanj polinoma p ($n = deg p$).

Polinom (1.1) nazivamo normiranim polinomom ukoliko vrijedi da je $a_n = 1$, a ako su $a_i = 0$ za $i = 0, 1, \ldots, n$, nazivamo ga nul polinomom.
Za dva polinoma p i q kažemo da su jednaki ako vrijedi $(\forall x \in \mathbb{F})$

$$p(x) = q(x).$$

U nastavku ćemo definirati neke elementarne operacije nad polinomima. Suma dvaju polinoma p i q definiranih s

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

$$q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

definirana je na sljedeći način:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i, & n > m \\ \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i, & n = m \; . \\ \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i, & n < m \end{cases}$$

Produkt polinoma p i skalara λ definiramo na sljedeći način:

$$(\lambda p)(x) = \lambda p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i.$$

Produkt polinoma p i q definiran je na sljedeći način:

$$(pq)(x) = p(x)q(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i,$$

gdje je $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$ za $i = 0, 1, \ldots, n+m$ i $a_k = 0$ za $k > n$, $b_k = 0$ za $k > m$.

Razliku dvaju polinoma definiramo slično kao i zbroj. Naime, razlika dvaju polinoma p i q je zapravo zbroj $p + (-1)q$.
Uz polinome su usko vezane i racionalne funkcije.

Definicija 1.1.2. *Funkciju f nazivamo racionalnom funkcijom ako se može zapisati na sljedeći način:*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

gdje su p i q polinomi, a polinom q nije nul-polinom.

Skup polinoma (1.1) nad poljem $\mathbb{F}$ označit ćemo s $\mathbb{F}[x]$.

Sljedeća definicija nam je važna za razumijevanje skupa polinoma zato što je $\mathbb{F}[x]$ zapravo prsten polinoma.

Definicija 1.1.3. *Neka je dan neprazan skup R i dvije binarne operacije; $+ : R \times R \to R$ i $\cdot : R \times R \to R$. Uređenu trojku $R = (R, +, \cdot)$ zovemo prstenom ukoliko je ispunjeno sljedeće:*

1. $(R, +)$ *je komutativna grupa;*

2. $(R, \cdot)$ *je polugrupa, tj. binarna operacija* $\cdot$ *je asocijativna;*

3. *Vrijedi distributivnost operacije* $+$ *prema operaciji* $\cdot$*, odnosno* $\forall x, y, z \in R$

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z, \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z. \end{aligned}$$

Teorem 1.1.4 (teorem o dijeljenju polinoma)**.** *Za svaka dva polinoma* $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ *postoje jedinstveni polinomi* $q, r \in \mathbb{F}[x]$ *takvi da vrijedi* $p_1 = p_2 \cdot q + r$ *i pritom je* $\deg r < \deg p_2$*.*

Definicija 1.1.5. *Neka je* $p \in \mathbb{F}[x]$*. Broj* $x_1 \in \mathbb{F}$ *za koji vrijedi* $p(x_1) = 0$ *nazivamo nultočkom polinoma* p*.*

Napomenut ćemo jedno važno svojstvo nultočke polinoma. Ako je x_1 nultočka polinoma p, onda je polinom p djeljiv (bez ostatka) polinomom p_1, $p_1(x) = x - x_1$.
Osim ovoga svojstva, napomenut ćemo i to da svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva. Zatim, svaki polinom stupnja $n \geq 1$ ima n kompleksnih nultočaka brojeći njihovu kratnost, a može se faktorizirati na sljedeći način:

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

gdje su $x_1, \ldots, x_n$ nultočke polinoma p.

1.2 Definicija matrice i osnovna svojstva

U ovom poglavlju ćemo se prisjetiti definicije matrice te nekih pojmova vezanih uz matrice kako bismo što bolje razumjeli nove definicije, rezultate i teoreme koje ćemo objasniti u poglavljima koja dolaze. Kao i kod polinoma polje $\mathbb{F}$ je polje kompleksnih ili realnih brojeva.

Definicija 1.2.1. *Za prirodne brojeve* m *i* n*, preslikavanje* $A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$ *nazivamo matricom dimenzija* $m \times n$ *s elementima iz polja* $\mathbb{F}$*.*

Uobičajeno je djelovanje svake takve funkcije A napisati u tabličnom obliku (s m redaka i n stupaca) tako da u i-ti redak i j-ti stupac pišemo funkcijsku vrijednost $A(i, j) = a_{ij}$. U tom smislu kažemo da matrica A ima m redaka i n stupaca i pišemo jednostavnije

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Brojeve m i n nazivamo dimenzijama matrice A.
Podsjetimo se sada definicija zbrajanja i množenja matrica.

Definicija 1.2.2. *Neka su dane dvije matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ dimenzija $m \times n$. Njihov zbroj definiran je na sljedeći način:*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Prije definicije množenja matrica, podsjetit ćemo se da matrice moraju biti ulančane kako bismo ih mogli množiti, odnosno broj stupaca prve matrice mora biti jednak broju redaka druge matrice.

Definicija 1.2.3. *Neka je matrica A dimenzija $m \times n$ i matrica B dimenzija $n \times p$. Umnožak matrica A i B definiramo kao matricu dimenzija $m \times p$ čiji je opći element*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Sada se podsjetimo nekih svojstava množenja matrica. Za matricu A dimenzija $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ ćemo pisati $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Vrijede sljedeće jednakosti:

1. $A(B + C) = AB + AC$ gdje je $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ i $C \in \mathbb{F}^{n \times k}$;
2. $(A + B)C = AC + BC$ gdje je $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ i $C \in \mathbb{F}^{n \times k}$;
3. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ gdje je $\lambda \in \mathbb{F}$ skalar, $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$;
4. $A(BC) = (AB)C$ gdje je $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ i $C \in \mathbb{F}^{k \times l}$;
5. $IA = A,\ AI = A$ gdje je $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, a I jedinična matrica dimenzija $n \times n$.

Sljedeće čega ćemo se podsjetiti je definicija determinante matrice. Da bismo definirali determinantu, najprije trebamo definirati permutaciju na skupu $\{1, \dots, n\}$.

Definicija 1.2.4. *Permutacija π na skupu $S = \{1, \dots, n\}$ je bijekcija $\pi : S \to S$.*

Neka je $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ uređena n-torka dobivena permutacijom skupa $S = \{1, \dots, n\}$. Brojevi i_p i i_q su u inverziji ako je $p > q$ i $i_p < i_q$ gdje su $p, q \in \{1, \dots, n\}$ i $p \neq q$.

Definicija 1.2.5. *Determinanta kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ dimenzija $n \times n$ je broj*

$$detA = \sum_{\pi \in \Pi_n} (-1)^{k(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}$$

pri čemu je Π_n skup svih permutacija $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, a $k(\pi)$ je broj inverzija u permutaciji π.

Sada ćemo ponoviti neka važna svojstva determinante koja ćemo također koristiti u narednim poglavljima.

1. Determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na glavnoj dijagonali.

2. Ako dva stupca ili dva retka zamijene mjesta, onda determinanta mijenja predznak.

3. Ako su dva stupca ili dva retka jednaka, determinanta je jednaka nuli.

4. Ako imamo barem jedan nul-stupac ili barem jedan nul-redak, determinanta je jednaka nuli.

5. Ako nekom stupcu ili retku dodamo linearnu kombinaciju preostalih redaka ili stupaca, determinanta se ne mijenja.

6. Ako je neki stupac ili redak linearna kombinacija preostalih stupaca ili redaka, onda je determinanta jednaka nuli.

7. Determinanta produkta dviju matrica A i B jednaka je produktu determinanti tih dviju matrica, odnosno
$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$
Ovo svojstvo slijedi iz Binet-Cauchyjeva teorema.

8. Determinanta matrice jednaka je determinanti njoj transponirane matrice, tj.
$$\det A = \det A^T.$$

9. Ako je A kvadratna matrica dimenzija $n \times n$ i λ skalar, onda vrijedi
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{A}.$$

10. Ako neki redak ili stupac matrice pomnožimo skalarom $\lambda \neq 0$, tada je determinanta nove matrice determinanta stare matrice pomnožena skalarom λ.

Napomena 1.2.6. *Transformacije iz svojstva 2, 5 i 10 nazivaju se elementarnim transformacijama.*

Determinante računamo samo za kvadratne matrice, odnosno matrice dimenzija $n \times n$. Prisjetimo se sada regularnosti te inverza matrice.

Definicija 1.2.7. *Kvadratna matrica A dimenzija $n \times n$ je regularna (invertibilna, nesingularna) ako postoji matrica A^{-1} jednakih dimenzija tako da vrijedi*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

gdje je I jedinična matrica dimenzija $n \times n$.
Za matricu koje nije invertibilna kažemo da je singularna.

Napomena 1.2.8. *Inverz matrice je jedinstven.*

Definicija 1.2.9. *AdjA, odnosno adjunkta kvadratne matrice A je matrica koja na (i, j)-tom mjestu ima broj $(-1)^{(i+j)} \cdot detA^{\tau}_{ij}$ (zovemo ga kofaktorom ili algebarskim komplementom elementa a_{ij}), gdje je A^{τ}_{ij} matrica dobivena iz transponirane matrice A^{τ} izbacivanjem i-tog retka i j-tog stupca.*

Napomenut ćemo važan identitet koji povezuje adjunktu matrice i njezin inverz. Naime, vrijedi

$$\mathrm{Adj}A = \det A \cdot A^{-1}.$$

Definicija 1.2.10. *Minora matrice A je determinanta manje kvadratne matrice koja je dobivena brisanjem jednog ili više redaka i stupaca matrice A. Ukoliko je minora dobivena brisanjem samo jednog retka i samo jednog stupca kvadratne matrice, tada je nazivamo minorom prvog stupnja.*

Neka je $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ kvadratna matrica. Tada je minora elementa a_{ij} determinanta matrice koja je dobivena brisanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice A. Podsjetimo se sada definicije karakterističnog polinoma matrice jer će nam ona trebati u narednim poglavljima.

Definicija 1.2.11. *Neka je dana kvadratna matrica A dimenzija $n \times n$. Karakteristični polinom matrice A označavamo s ϕ i definiramo kao*

$$\phi(x) = det[I_n x - A],$$

gdje je I_n jedinična kvadratna matrica dimenzija $n \times n$. Nultočke karakterističnog polinoma matrice A nazivamo svojstvenim vrijednostima matrice A.

Poglavlje 2

Definicija polinomijalne matrice i teoremi o dijeljenju

2.1 Definicija i osnovne operacije polinomijalnih matrica

Definicija 2.1.1. *Polinomijalna matrična funkcija, kraće polinomijalna matrica nad poljem $\mathbb{F}$ je funkcija čije su vrijednosti matrice, pri čemu se elementi matrice definiraju kao polinomi nad poljem $\mathbb{F}$. Polinomijalna matrica A definirana je za $x \in \mathbb{F}$ na sljedeći način*

$$A(x) = \left[a_{ij}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}, \; a_{ij} \in \mathbb{F}[x]. \tag{2.1}$$

Uređeni par (m, n) nazivamo dimenzijama polinomijalne matrice A gdje m predstavlja broj redaka, a n broj stupaca matrica iz slike funkcije A. Dimenzije od A označavamo s $m \times n$. Skup polinomijalnih matrica dimenzije $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ označavat ćemo s $\mathbb{F}^{m\times n}[x]$. Izrazimo sada matricu (2.1) u formi matričnog polinoma

$$A(x) = A_q x^q + \ldots + A_1 x + A_0, \; A_k \in \mathbb{F}, \; k = 0, 1, \ldots, q. \tag{2.2}$$

Ako A_q nije nul matrica, onda broj q nazivamo stupnjem matrice A te ga označavamo s $\deg A$.

Primjer 2.1.2. *Neka je matrica A polinomijalna matrica iz $\mathbb{R}^{2\times 2}[x]$ zadana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x + 1 & x + 2 \\ 3x^2 + 2x - 5 & 3x^2 + 1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Svaku polinomijalnu matricu možemo napisati u formi matričnog polinoma pa tako i matricu (2.3)*:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = A_2 x^2 + A_1 x + A_0. \tag{2.4}$$

Matrica (2.4) iz gornjeg primjera ima stupanj $\deg A = 2$.

Definicija 2.1.3. *Ako je $n = m$ i $\det A_q \neq 0$, onda matricu* (2.2) *nazivamo regularnom.*

U nastavku ćemo definirati osnovne operacije nad polinomijalnim matricama.
Suma dviju polinomijalnih matrica A i B definiranih s

$$A(x) = \Big[a_{ij}(x)\Big]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots n}} = \sum_{k=0}^{q} A_k x^k,$$

$$B(x) = \Big[b_{ij}(x)\Big]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots n}} = \sum_{k=0}^{r} B_k x^k$$

jednakih dimenzija $m \times n$ definirana je na sljedeći način

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) =$$

$$= \Big[a_{ij}(x) + b_{ij}(x)\Big]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots n}} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{r}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{q} A_k x^k & q > r \\ \sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k & q = r \\ \sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} B_k x^k & q < r \end{cases}.$$

Ako je $q = r$ i $A_q + B_q \neq 0$, onda je suma polinomijalna matrica stupnja q, a ako je $q = r$ i $A_q + B_q = 0$, onda je ta suma polinomijalna matrica stupnja manjeg od q. Osim toga, vrijedi

$$\deg(A + B) \leq \max\Big\{\deg A, \deg B\Big\}. \tag{2.5}$$

Produkt polinomijalne matrice A i skalara λ definiramo na sljedeći način

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x) = \Big[\lambda a_{ij}(x)\Big]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}.$$

Iz ovoga slijedi da za $\lambda \neq 0$ vrijedi da je $\deg \lambda A = \deg A$.
Razliku dviju polinomijalnih matrica definiramo slično kao i zbroj. Razlika dviju polinomijalnih matrica A i B definira se kao $A - B = A + (-1)B$.

Što se tiče množenja dviju matrica, ono je moguće ako i samo ako je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Produkt matrica A i B koje su definirane na sljedeći način

$$A(x) = \Big[a_{ij}(x)\Big]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} = \sum_{k=0}^{q} A_k x^k,$$

$$B(x) = \left[b_{ij}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} = \sum_{k=0}^{r} B_k x^k$$

definira se kao

$$(AB)(x) = A(x)B(x) = \left[c_{ij}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}} = \sum_{k=0}^{q+r} C_k x^k, \tag{2.6}$$

gdje je

$$C_k = \sum_{l=0}^{k} A_l B_{k-l}, \; k = 0, 1, \dots, q+r, \tag{2.7}$$

pri čemu stavimo $A_l = 0, \; l > q, \; B_l = 0, \; l > r$. Iz (2.7) slijedi da je $C_{q+r} = A_q B_r$. Vrijedi relacija

$$\deg(AB) \leq \deg A + \deg B.$$

Napomena 2.1.4. *U slučaju da je barem jedna od matrica A_q i B_r regularna, onda imamo jednakost, odnosno*

$$deg(AB) = degA + degB.$$

Naime, ako je $A_q B_r = 0$ i ako je npr. A_q regularna, onda množenjem s A_q^{-1} slijeva dobivamo $B_r = 0$, a to nije moguće jer je to vodeća matrica u zapisu polinomijalne matrice.

Primjer 2.1.5. *Zadane su polinomijalne matrice A i B s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 + x & 2x^2 - 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - x & x^2 + x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} -x + 2 & x - 1 \\ \frac{1}{2}x & -\frac{1}{2}x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je njihov produkt polinomijalna matrica AB dana s

$$(AB)(x) = A(x)B(x) = \begin{bmatrix} x^2 + \frac{1}{2}x & 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3 \\ \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x & -x^2 + \frac{3}{2}x + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{2} & -1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stupanj dobivene polinomijalne matrice nije jednak zbroju stupnjeva matrica koje smo množili, nego je za jedan manji. To je zbog

$$A_2 B_1 = 0$$

gdje su

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Polinomijalnu matricu $A(x) = A_q x^q + \ldots + A_1 x + A_0$ također možemo zapisati tako da umjesto varijable x stavimo neku matricu X. Neka je

$$\begin{aligned} A_d(X) &= A_q X^q + \ldots + A_1 X + A_0, \\ A_l(X) &= X^q A_q + \ldots + X A_1 + A_0. \end{aligned}$$

Matrice $A_d(X)$ i $A_l(X)$ nazivamo desnom, odnosno lijevom vrijednošću polinomijalne matrice A za $x = X$. Važno je napomenuti da te vrijednosti ne moraju nužno biti jednake zbog toga što općenito ne vrijedi komutativnost množenja matrica. Kod polinoma ovakva zamjena ne mijenja vrijednost polinoma, no međutim kako je X matrica, $A_d(X)$ i $A_l(X)$ nisu nužno jednake. Neka je $C = A + B$. Jasno vidimo da je $C_d(X) = A_d(X) + B_d(X)$ i $C_l(X) = A_l(X) + B_l(X)$.

Neka su dane dvije polinomijalne matrice A i B definirane s

$$\begin{aligned} A_q(x) &= A_q x^q + A_{q-1} x^{q-1} + \ldots A_1 x + A_0, \\ B_r(x) &= B_r x^r + B_{r-1} x^{r-1} + \ldots + B_1 x + B_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Teorem 2.1.6. *Ako je matrica X komutativna u odnosu na matrice A_i za $i = 1, 2, \ldots, q$ i B_j za $j = 1, 2, \ldots, r$ iz* (2.8)*, onda je lijeva vrijednost produkta matrica A i B za $x = X$ jednaka desnoj vrijednosti istog produkta.*

Dokaz. Označimo s D produkt matrica A i B te izračunajmo taj produkt:

$$D(x) = A(x)B(x) = \Big(\sum_{i=0}^{q} A_i x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{r} B_j x^j\Big) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} A_i B_j x^{i+j}.$$

Skalar x zamijenimo matricom X, iskoristimo danu komutativnost matrica i dobivamo sljedeće:

$$D_d(X) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} A_i B_j X^{i+j} = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} A_i X^i B_j X^j = \Big(\sum_{i=0}^{q} A_i X^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{r} B_j X^j\Big)$$

i

$$D_l(X) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} X^{i+j} A_i B_j = \sum_{i=0}^{q}\sum_{j=0}^{r} X^i A_i X^j B_j = \Big(\sum_{i=0}^{q} X^i A_i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{r} X^j B_j\Big).$$

Opet koristimo činjenicu da je X komutativna u odnosu na matrice A_i za $i = 1, 2, \ldots, q$ i B_j za $j = 1, 2, \ldots, r$ pa iz toga slijedi $D_d(X) = D_l(X)$. □

Sljedeći teorem je vrlo sličan teoremu o dijeljenju polinoma, no međutim postoji bitna razlika zato što kod množenja matrica komutativnost ne vrijedi općenito. Dokazat ćemo postojanje kvocijenta i ostatka prilikom dijeljenja dviju polinomijalnih matrica, ali ćemo pokazati da kvocijent i ostatak nisu nužno isti, ovisno o tome 'dijelimo li matricu slijeva ili zdesna'.

Teorem 2.1.7. *Ako je $detA \neq 0$, tada za par kvadratnih polinomijalnih matrica A i B dimenzija $n \times n$ ($degB \geq degA$) postoji par polinomijalnih matrica Q_d i R_d tako da je zadovoljena sljedeća jednakost:*

$$B(x) = Q_d(x)A(x) + R_d(x), \; degA > degR_d. \tag{2.9}$$

Također postoji par polinomijalnih matrica Q_l i R_l tako da vrijedi jednakost:

$$B(x) = A(x)Q_l(x) + R_l(x), \; degA > degR_l. \tag{2.10}$$

Dokaz. Dijeljenjem matrice $B \cdot \mathrm{Adj}A$ polinomom $\mathrm{det}A$ dobijemo par matrica Q_d i R_{d1} tako da vrijedi

$$B(x)\mathrm{Adj}A(x) = \mathrm{det}A(x)Q_d(x) + R_{d1}(x), \; \mathrm{deg}(\mathrm{det}A) > \mathrm{deg}R_{d1}. \tag{2.11}$$

Ovdje se pozivamo na teorem o dijeljenju polinoma. Kako je svaki element polinomijalne matrice $B{\cdot}\mathrm{Adj}A$ polinom, na svakom elementu te matrice primjenjujemo teorem o dijeljenju polinoma. Znamo da za adjunktu matrice vrijedi $\mathrm{Adj}A(x)A(x) = I_n\mathrm{det}A(x)$ gdje je I_n jedinična matrica dimenzija $n \times n$. Pomnožimo jednakost (2.11) zdesna s $\frac{1}{\mathrm{det}A(x)} \cdot A(x)$ pa dobijemo sljedeće:

$$B(x) = Q_d(x)A(x) + R_d(x),$$

gdje smo s R_d označili $R_d = \frac{1}{\mathrm{det}A} \cdot R_{d1}A$. Iz zadnje jednakosti i $\mathrm{deg}(\mathrm{det}A) > \mathrm{deg}R_{d1}$ nam slijedi:

$$\mathrm{deg}(R_d) = \mathrm{deg}(R_{d1} \cdot A) - \mathrm{deg}(\mathrm{det}A) \leq \mathrm{deg}R_{d1} + \mathrm{deg}A - \mathrm{deg}(\mathrm{det}A) < \mathrm{deg}A.$$

Naime, najprije imamo jednakost stupnjeva koja lako slijedi iz definicije dijeljenja polinoma, a nakon toga se pozivamo na nejednakost stupnjeva koju imamo za množenje polinomijalnih matrica. Time smo dokazali (2.9). Dokažimo sada i (2.10). Dijeljenjem matrice $\mathrm{Adj}A \cdot B$ polinomom $\mathrm{det}A$, dobijemo par matrica Q_l i R_{l1} tako da vrijedi

$$\mathrm{Adj}A(x)B(x) = \mathrm{det}A(x)Q_l(x) + R_{l1}(x), \; \mathrm{deg}(\mathrm{detA}) > \mathrm{deg}R_{l1}.$$

Analogno množimo gornju jednakost slijeva s $\frac{1}{\mathrm{det}A(x)} \cdot A(x)$ pa dobijemo sljedeće:

$$B(x) = A(x)Q_l(x) + R_l(x)$$

gdje smo s R_l označili $R_l = \frac{1}{\det A} \cdot AR_{l1}$. Iz zadnje jednakosti i $\deg(\det A) > \deg R_{l1}$ nam slijedi:

$$\deg R_l = \deg(R_{l1} \cdot A) - \deg(\det A) \leq \deg R_{l1} + \deg A - \deg(\det A) < \deg A.$$

Time smo dokazali (2.10). $\square$

Napomena 2.1.8. *Parovi matrica Q_d, R_d i Q_l, R_l koje zadovoljavaju jednakosti iz prethodnog teorema nisu jednoznačno određene. Naime, ako je C takva polinomijalna matrica da zadovoljava uvjet $\deg(CA) < \deg A$, onda postoji i rastav*

$$B(x) = Q_d^{(2)}(x)A(x) + R_d^{(2)}(x),$$

gdje je

$$Q_d^{(2)}(x) = Q_d(x) + C(x),\ R_d^{(2)}(x) = R_d(x) - C(x)A(x).$$

Analogno, ako vrijedi uvjet $\deg(AC) < \deg A$, također imamo rastav

$$B(x) = A(x)Q_l^{(2)}(x) + R_l^{(2)}(x),$$

gdje je

$$Q_l^{(2)}(x) = Q_l(x) + C(x),\ R_l^{(2)}(x) = R_l(x) - A(x)C(x).$$

Primjer 2.1.9. *Za dane polinomijalne matrice A i B definirane s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B(x) = \begin{bmatrix} x+1 & x^2 \\ -x & -1 \end{bmatrix}$$

odredimo matrice Q_d i R_d te Q_l i R_l iz teorema 2.1.7. Najprije vidimo da je $\det A = x + 1$. Zatim izračunamo adjunktu matrice A:

$$AdjA(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}.$$

Dalje računamo:

$$B(x)AdjA(x) = \begin{bmatrix} -x^2+x+1 & x^3+x+1 \\ -x+1 & -2x \end{bmatrix}$$

i kao u teoremu 2.1.7

$$\begin{bmatrix} -x^2+x+1 & x^3+x+1 \\ -x+1 & -2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2 & x^2-x+2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}(x+1) + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga zaključujemo

$$Q_d(x) = \begin{bmatrix} -x+2 & x^2-x+2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ R_{d1}(x) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

a iz toga lako izračunamo

$$R_d(x) = \frac{1}{detA(x)} \cdot R_{d1}(x)A(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo sada Q_l i R_l:

$$AdjA(x)B(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^2-1 \\ -x^2-x-1 & -x^2-x \end{bmatrix}$$

i kao u teoremu 2.1.7

$$\begin{bmatrix} 1 & x^2-1 \\ -x^2-x-1 & -x^2-x \end{bmatrix} = (x+1)\begin{bmatrix} 0 & x-1 \\ -x & -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga zaključujemo

$$Q_l(x) = \begin{bmatrix} 0 & x-1 \\ -x & -x \end{bmatrix},\ R_{l1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a onda lako izračunamo

$$R_l = \frac{1}{detA(x)} A(x)R_{l1}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po napomeni 2.1.8 vidimo da matrice Q_d i R_d nisu jedinstvene. Potražimo još jedan rastav. Uzmimo konstantnu polinomijalnu matricu C definiranu s

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada računamo $C(x)A(x) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ pa vidimo da je $deg(CA) < degA$. Dalje, računajući po napomeni 2.1.8 za $Q_d^{(2)}$ i $R_d^{(2)}$ stavimo

$$Q_d^{(2)}(x) = Q_d(x) + C(x) = \begin{bmatrix} -x+2 & x^2-x+5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ R_d^{(2)}(x) = R_d(x) - C(x)A(x) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Po istoj napomeni, znamo da ni matrice Q_l i R_l nisu jedinstvene. Stoga tražimo još jedan rastav.
Uzmimo polinomijalnu matricu C definiranu s

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada računamo $A(x)C(x) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ *pa vidimo da je* $deg(AC)$ <$degA$. *Dalje, računajući po napomeni 2.1.8 za* $Q_l^{(2)}$ *i* $R_l^{(2)}$ *stavimo*

$$Q_l^{(2)}(x) = Q_l(x) + C(x) = \begin{bmatrix} 0 & x-1 \\ -x+3 & -x+1 \end{bmatrix},\ R_l^{(2)}(x) = R_l(x) - A(x)C(x) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

U teoremu 2.1.7 nismo dokazivali jedinstvenost matrica Q_d i R_d (odnosno Q_l i R_l), no međutim u sljedećem teoremu ćemo to pokazati uz drugačiji uvjet na matricu A.

Napomena 2.1.10. *Teorem 2.1.7 možemo primijeniti i ako je* $det(A(x)) = 0$ *samo za neke* x. *U gornjem primjeru* x *mora biti različit samo od* -1 *jer bismo u protivnom imali dijeljenje s nulom.*

Teorem 2.1.11. *Neka su* A *i* B *kvadratne polinomijalne matrice istih dimenzija definirane s*

$$A(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

$$B(x) = B_m x^m + B_{m-1}x^{m-1} + \ldots + B_1 x + B_0.$$

Ako je A *regularna* ($detA_n \neq 0$)*, onda postoji točno jedan par polinomijalnih matrica* Q_d, R_d *koje zadovoljavaju jednakost*

$$B(x) = Q_d(x)A(x) + R_d(x).$$

Također, postoji točno jedan par polinomijalnih matrica Q_l, R_l *koje zadovoljavaju jednakost*

$$B(x) = A(x)Q_l(x) + R_l(x).$$

Osim toga, vrijedi $degA > degR_d$, $degA > degR_l$.

Dokaz. Primijetimo najprije da u iskazu teorema nemamo uvjet $\det A \neq 0$ pa zato kvocijente i ostatke moramo konstruirati na drugačiji način nego što smo u teoremu 2.1.7.
Ako je $n > m$, onda je $Q_d = 0$ i $R_d = B$. Stoga pretpostavimo da je $m \geq n$. Pod pretpostavkom da je $\det A_n \neq 0$, postoji inverzna matrica A_n^{-1}. Primijetimo da je najveća potencija matrice $\widehat{B} = B_m A_n^{-1} x^{m-n} A$ jednaka m kao i najveća potencija matrice $B_m x^m$. Ujedno je i vodeća matrica tih polinomijalnih matrica jednaka B_m. Stoga imamo:

$$B(x) = B_m A_n^{-1} x^{m-n} A(x) + B^{(1)}(x), \tag{2.12}$$

gdje je $B^{(1)}$ polinomijalna matrica stupnja $m_1 \leq m-1$ oblika

$$B^{(1)}(x) = B^{(1)}_{m_1} x^{m_1} + B^{(1)}_{m_1-1} x^{m_1-1} + \ldots + B^{(1)}_1 x + B^{(1)}_0.$$

Ako je $m_1 \geq n$, onda ponovimo postupak tako da umjesto matrice B_m uzmemo matricu $B^{(1)}_{m_1}$ i tada dobijemo

$$B^{(1)}(x) = B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} x^{m_1-n} A(x) + B^{(2)}(x),$$

gdje je $B^{(2)}$ polinomijalna matrica stupnja $m_2 \leq m_1 - 1$ te

$$B^{(2)}(x) = B^{(2)}_{m_2} x^{m_2} + B^{(2)}_{m_2-1} x^{m_2-1} + \ldots + B^{(2)}_1 x + B^{(2)}_0. \tag{2.13}$$

Nastavljajući na isti način, dobijemo niz polinomijalnih matrica $B,\ B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ strogo padajućih stupnjeva $m, m_1, m_2, \ldots,$ respektivno. U r-tom koraku dobivamo matricu $B^{(r)}$ stupnja $m_r < n$ i

$$B(x) = (B_m A_n^{-1} x^{m-n} + B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} x^{m_1-n} + \ldots + B^{(r-1)}_{m_{r-1}} A_n^{-1} x^{m_{r-1}-n}) A(x) + B^{(r)}(x),$$

a to je upravo jednakost iskazana u teoremu, odnosno

$$\begin{aligned} Q_d(x) &= B_m A_n^{-1} x^{m-n} + B^{(1)}_{m_1} A_n^{-1} x^{m_1-n} + \ldots + B^{(r-1)}_{m_{r-1}} A_n^{-1} x^{m_{r-1}-n}, \\ R_d(x) &= B^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Još je potrebno dokazati jedinstvenost od $Q_d,\ R_d$. Pretpostavimo da postoje dva različita para $\left(Q_d^{(1)}, R_d^{(1)}\right)$ i $\left(Q_d^{(2)}, R_d^{(2)}\right)$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} B(x) &= Q_d^{(1)}(x) A(x) + R_d^{(1)}(x), \\ B(x) &= Q_d^{(2)}(x) A(x) + R_d^{(2)}(x) \end{aligned}$$

i još vrijedi $\deg A > \deg R_d^{(1)}$ i $\deg A > \deg R_d^{(2)}$. Oduzimanjem gornjih jednakosti imamo sljedeće:

$$[Q_d^{(1)}(x) - Q_d^{(2)}(x)] A(x) = R_d^{(2)}(x) - R_d^{(1)}(x). \tag{2.14}$$

Primijetimo da množenjem matrice A matricom $Q_d^{(1)} - Q_d^{(2)}$ ne možemo smanjiti stupanj polinomijalne matrice A, a to možemo zaključiti iz napomene 2.1.4 zbog toga što je A regularna. Ukoliko je $Q_d^{(1)} \neq Q_d^{(2)}$, matrica $[Q_d^{(1)} - Q_d^{(2)}]A$ polinomijalna je matrica stupnja većeg ili jednakog od n, a $R_d^{(2)} - R_d^{(1)}$ polinomijalna je matrica stupnja manjeg od n. Tu dolazimo do kontradikcije s (2.14) pa zaključujemo da je $Q_d^{(1)} = Q_d^{(2)}$ i $R_d^{(1)} = R_d^{(2)}$.

Dokažimo sada postojanje i jedinstvenost matrica $\left(Q_l, R_l\right)$. Slično kao u prvom dijelu dokaza primijetimo da je najveća potencija matrice $\widehat{A} = A A_n^{-1} B_m x^{m-n}$ jednaka m kao i najveća potencija matrice $B_m x^m$. Ujedno je i vodeća matrica tih polinomijalnih matrica jednaka B_m. Stoga imamo:

$$B(x) = A(x) A_n^{-1} B_m x^{m-n} + C^{(1)}(x),$$

gdje je $C^{(1)}$ polinomijalna matrica stupnja $n_1 \leq m - 1$ oblika

$$C^{(1)}(x) = C^{(1)}_{n_1} x^{n_1} + C^{(1)}_{n_1-1} x^{n_1-1} + \ldots + C^{(1)}_1 x + C^{(1)}_0.$$

Ako je $n_1 \geq n$, onda ponovimo postupak tako da umjesto matrice B_m uzmemo matricu $C^{(1)}_{n_1}$ i tada dobijemo

$$C^{(1)}(x) = A(x) A_n^{-1} C^{(1)}_{n_1} x^{n_1 - n} + C^{(2)}(x),$$

gdje je $C^{(2)}$ polinomijalna matrica stupnja $n_2 \leq n_1 - 1$ te

$$C^{(2)}(x) = C^{(2)}_{n_2} x^{n_2} + C^{(2)}_{n_2-1} x^{n_2-1} + \ldots + C^{(2)}_1 x + C^{(2)}_0.$$

Nastavljajući na isti način, dobijemo niz polinomijalnih matrica $C,\ C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots$ strogo padajućih stupnjeva $m, n_1, n_2, \ldots$, respektivno. U l-tom koraku dobivamo matricu $C^{(l)}$ stupnja $n_l < n$ i

$$B(x) = A(x)(A_n^{-1} B_m x^{m-n} + A_n^{-1} C^{(1)}_{n_1} x^{n_1 - n} + \ldots + A_n^{-1} C^{(l-1)}_{n_{l-1}} x^{n_{l-1} - n}) + C^{(l)}(x),$$

a to je upravo jednakost iskazana u teoremu, odnosno

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= A_n^{-1} B_m x^{m-n} + A_n^{-1} C^{(1)}_{n_1} x^{n_1 - n} + \ldots + A_n^{-1} C^{(l-1)}_{n_{l-1}} x^{n_{l-1} - n}, \\ R_l(x) &= C^{(l)}(x). \end{aligned}$$

Jedinstvenost se dokaže isto kao i za matrice Q_d i R_d. Pretpostavimo da postoje dva različita para $\left(Q_l^{(1)}, R_l^{(1)}\right)$ i $\left(Q_l^{(2)}, R_l^{(2)}\right)$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} B(x) &= A(x) Q_l^{(1)}(x) + R_l^{(1)}(x), \\ B(x) &= A(x) Q_l^{(2)}(x) + R_l^{(2)}(x) \end{aligned}$$

i još vrijedi $\deg A > \deg R_l^{(1)}$ i $\deg A > \deg R_l^{(2)}$. Oduzimajući gornje dvije jednakosti imamo sljedeće:

$$A(x)[Q_l^{(1)}(x) - Q_l^{(2)}(x)] = R_l^{(2)}(x) - R_l^{(1)}(x). \tag{2.15}$$

Uzimajući u obzir napomenu 2.1.4 vidimo da je matrica $A[Q_l^{(1)} - Q_l^{(2)}]$ polinomijalna matrica stupnja većeg ili jednakog n ukoliko je $Q_l^{(1)} \neq Q_l^{(2)}$, dok je $R_l^{(2)} - R_l^{(1)}$ polinomijalna matrica stupnja manjeg od n. Tu dolazimo do kontradikcije s (2.15) pa zaključujemo da je $Q_l^{(1)} = Q_l^{(2)}$ i $R_l^{(1)} = R_l^{(2)}$. □

Matrice Q_d i R_d, odnosno Q_l i R_l nazivamo (respektivno) desnim (lijevim) kvocijentom i ostatkom dijeljenja polinomijalne matrice B polinomijalnom matricom A. Reći ćemo da je matrica B djeljiva zdesna matricom A ako vrijedi $R_d = 0$. Matrica B djeljiva je slijeva matricom A ako vrijedi $R_l = 0$.

Napomena 2.1.12. *Teorem 2.1.11 se ne može primijeniti na primjer 2.1.9. Naime, primijetimo da je* $detA_1 = 0$*, tj. polinomijalna matrica A nije regularna. Budući da teorem 2.1.11 zahtijeva regularnost te matrice, ne možemo ga primijeniti na tom primjeru.*

Iz dokaza teorema 2.1.11, dobivamo algoritme za pronalaženje matrica Q_d i R_d te Q_l i R_l.

Algoritam 1

Korak 1. Zadanoj matrici A_n izračunaj inverz A_n^{-1}.

Korak 2. Izračunaj: $B^{(1)}(x) = B(x) - B_m A_n^{-1} x^{m-n} A(x) = B_{m_1}^{(1)} x^{m_1} + \ldots + B_1^{(1)} x + B_0^{(1)}$.

Korak 3. Ako je stupanj matrice $B^{(1)}$ veći ili jednak od stupnja matrice A ($m_1 \geq n$), onda izračunaj

$$B^{(2)}(x) = B^{(1)}(x) - B_{m_1}^{(1)} A_n^{-1} x^{m_1-n} A(x) = B_{m_2}^{(2)} x^{m_2} + \ldots + B_1^{(2)} x + B_0^{(2)}.$$

Korak 4. Ako je $m_2 \geq n$ (stupanj matrice $B^{(2)}$ veći ili jednak od stupnja matrice A), onda u gornjoj jednakosti zamijenimo m_1 i $B^{(1)}$ s m_2 i $B^{(2)}$ (respektivno) te izračunamo $B^{(3)}$. Ponovimo postupak r puta dok ne dobijemo $m_r < n$.

Korak 5. Izračunamo matrice Q_d i R_d :

$$\begin{aligned} Q_d(x) &= B_m A_n^{-1} x^{m-n} + B_{m_1}^{(1)} A_n^{-1} x^{m_1-n} + \ldots + B_{m_{r-1}}^{(r-1)} A_n^{-1} x^{m_{r-1}-n}, \\ R_d(x) &= B^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Sada ćemo prikazati isti algoritam, ali za računanje matrica Q_l i R_l.

Algoritam 2

Korak 1. Zadanoj matrici A_n izračunaj inverz A_n^{-1}.

Korak 2. Izračunaj: $C^{(1)}(x) = B(x) - AA_n^{-1} B_m x^{m-n} = C_{n_1}^{(1)} x^{n_1} + \ldots + C_1^{(1)} x + C_0^{(1)}$.

Korak 3. Ako je stupanj matrice $C^{(1)}$ veći ili jednak od stupnja matrice A ($n_1 \geq n$), onda izračunaj

$$C^{(2)}(x) = C^{(1)}(x) - A(x) A_n^{-1} C_{n_1}^{(1)} x^{n_1-n} = C_{n_2}^{(2)} x^{n_2} + \ldots + C_1^{(2)} x + C_0^{(2)}.$$

Korak 4. Ako je $n_2 \geq n$ (stupanj matrice $C^{(2)}$ veći ili jednak od stupnja matrice A), onda u gornjoj jednakosti zamijenimo n_1 i $C^{(1)}$ s n_2 i $C^{(2)}$ (respektivno) te izračunamo $C^{(3)}$. Ponovimo postupak l puta dok ne dobijemo $n_l < n$.

Korak 5. Izračunamo matrice Q_l i R_l:

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= A_n^{-1} B_m x^{m-n} + A_n^{-1} C_{n_1}^{(1)} x^{n_1-n} + \ldots + A_n^{-1} C_{n_{l-1}}^{(l-1)} x^{n_{l-1}-n}, \\ R_l(x) &= C^{(l)}(x). \end{aligned}$$

Primjer 2.1.13. *Koristeći prethodna dva algoritma, odredimo lijeve i desne vrijednosti kvocijenta i ostatka za matrice A i B pri čemu su A i B zadane s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} x^4+x^3 & x^3-2x+1 \\ x^2+1 & x^3+x+1 \end{bmatrix}.$$

Korak 1.

Matrica $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je regularna zato što je* $\det A_2 = 1$. *Stoga postoji inverz, matrica* $A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Korak 2.

Računamo

$$B_4 A_2^{-1} x^2 A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x^2 \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4 & x^3+x^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$B^{(1)}(x) = B(x) - B_4 A_2^{-1} x^2 A(x) =$$
$$\begin{bmatrix} x^4+x^3 & x^3-2x+1 \\ x^2+1 & x^3+x+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^4 & x^3+x^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 & -x^2-2x+1 \\ x^2+1 & x^3+x+1 \end{bmatrix}.$$

Korak 3.

Zaključujemo da je $m_1 = 3$ *te da je* $B_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *pa nastavljamo dalje. Računamo*

$$B_3^{(1)} A_2^{-1} x A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 & x^2+x \\ -x^2 & x^3-x \end{bmatrix}$$

i računamo

$$B^{(2)}(x) = B^{(1)}(x) - B_3^{(1)}A_2^{-1}xA(x) =$$
$$\begin{bmatrix} x^3 & -x^2-2x+1 \\ x^2+1 & x^3+x+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^3 & x^2+x \\ -x^2 & x^3-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2x^2-3x+1 \\ 2x^2+1 & 2x+1 \end{bmatrix}.$$

Korak 4.
Primijetimo da je $m_2 = 2$ *i* $B_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ *pa nastavljamo dalje. Računamo*

$$B_2^{(2)}A_2^{-1}A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2x^2+2 \\ 2x^2 & 2x+2 \end{bmatrix}$$

i

$$B^{(3)}(x) = B^{(2)}(x) - B_2^{(2)}A_2^{-1}A(x) =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -2x^2-3x+1 \\ 2x^2+1 & 2x+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x & -2x^2+2 \\ 2x^2 & 2x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & -3x-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Korak 5. *Stupanj matrice* $B^{(3)}$ *manji je od stupnja matrice A. Stoga dobivamo*

$$Q_d(x) = B_4A_2^{-1}x^2 + B_3^{(1)}A_2^{-1}x + B_2^{(2)}A_2^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+x & -2 \\ 2 & x \end{bmatrix}$$

i

$$R_d(x) = B^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} -2x & -3x-1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Na isti način računamo i lijeve vrijednosti kvocijenta i ostatka.

Korak 1.
Matrica $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *je regularna zato što je* $detA_2 = 1$. *Stoga postoji inverz, matrica* $A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Korak 2.
Računamo

$$A(x)A_2^{-1}B_4x^2 = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^2 = \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ -x & x^2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4 & 0 \\ -x^3 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$C^{(1)}(x) = B(x) - A(x)A_2^{-1}B_4x^2 =$$
$$\begin{bmatrix} x^4 + x^3 & x^3 - 2x + 1 \\ x^2 + 1 & x^3 + x + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^4 & 0 \\ -x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 & x^3 - 2x + 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + x + 1 \end{bmatrix}.$$

Korak 3. *Uočimo da je* $n_1 = 3$ *te da je* $C_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *pa nastavljamo dalje. Računamo*

$$A(x)A_2^{-1}C_3^{(1)}x = \begin{bmatrix} x^2 & x + 1 \\ -x & x^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + x^2 + x & x^3 + x^2 + x \\ x^3 - x^2 - x & x^3 - x^2 - x \end{bmatrix}$$

i

$$C^{(2)}(x) = C^{(1)}(x) - A(x)A_2^{-1}C_3^{(1)}x =$$
$$\begin{bmatrix} x^3 & x^3 - 2x + 1 \\ x^3 + x^2 + 1 & x^3 + x + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^3 + x^2 + x & x^3 + x^2 + x \\ x^3 - x^2 - x & x^3 - x^2 - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - x & -x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 + x + 1 & x^2 + 2x + 1 \end{bmatrix}.$$

Korak 4.

Primijetimo da je $n_2 = 2$ *i* $C_2^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ *pa nastavljamo dalje. Računamo*

$$A(x)A_2^{-1}C_2^{(2)} = \begin{bmatrix} x^2 & x + 1 \\ -x & x^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 + 2x + 2 & -x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + x - 2 & x^2 + x - 1 \end{bmatrix}$$

i

$$C^{(3)}(x) = C^{(2)}(x) - A(x)A_2^{-1}C_2^{(2)} =$$
$$\begin{bmatrix} -x^2 - x & -x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 + x + 1 & x^2 + 2x + 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x^2 + 2x + 2 & -x^2 + x + 1 \\ 2x^2 + x - 2 & x^2 + x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x - 2 & -4x \\ 3 & x + 2 \end{bmatrix}.$$

Korak 5.

Stupanj matrice $C^{(3)}$ *manji je od stupnja matrice A. Stoga konačno imamo*

$$Q_l(x) = A_2^{-1}B_4x^2 + A_2^{-1}C_3^{(1)}x + A_2^{-1}C_2^{(2)} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + x - 1 & x - 1 \\ x + 2 & x + 1 \end{bmatrix} \text{ te}$$
$$R_l(x) = C^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} -3x - 2 & -4x \\ 3 & x + 2 \end{bmatrix}.$$

2.2 Generalizirani Bézoutov teorem i Hamilton-Cayleyjev teorem

U ovom ćemo poglavlju vidjeti neke teoreme koji nam daju jako važne rezultate koje ćemo koristiti i u narednim poglavljima. Najprije ćemo vidjeti generalizirani Bézoutov teorem iz kojeg direktno slijedi jedan važan korolar i Hamilton-Caylejev teorem koji daje jedno važno svojstvo karakterističnog polinoma matrice.
Pogledajmo najprije kako izgleda mali Bézoutov teorem kako bismo ga mogli usporediti sa generaliziranim Bézoutovim teoremom.

Teorem 2.2.1 (mali Bézoutov teorem)**.** *Neka je $p \in \mathbb{F}[x]$ polinom stupnja n i neka je $a \in \mathbb{F}$ konstanta. Tada je ostatak pri dijeljenju polinoma p polinomom q definiranim s $q(x) = (x - a)$ jednak $p(a)$.*

Definirajmo sada polinomijalnu matricu $\widehat{A}$ s $\widehat{A}(x) = I_m x - A$ gdje je matrica I_m jedinična matrica dimenzija $m \times m$ i $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$. Stupanj matrice $\widehat{A}$ je jedan.

Teorem 2.2.2 (generalizirani Bézoutov teorem)**.** *Neka je zadana kvadratna polinomijalna matrica $F \in \mathbb{C}^{m \times m}[x]$ s*

$$F(x) = F_n x^n + F_{n-1} x^{n-1} \ldots + F_1 x + F_0.$$

Desni (odnosno lijevi) ostatak pri dijeljenju F polinomijalnom matricom $\widehat{A} \in \mathbb{C}^{m \times m}[x]$ je R_d, odnosno R_l i vrijedi

$$R_d = F_d(A) = F_n A^n + F_{n-1} A^{n-1} + \ldots + F_1 A + F_0 \in \mathbb{C}^{m \times m},$$
$$R_l = F_l(A) = A^n F_n + A^{n-1} F_{n-1} + \ldots + A F_1 + F_0 \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Dokaz. Primijetimo da je vodeća matrica matrice $\widehat{A}$ jedinična matrica, odnosno regularna matrica pa stoga možemo primijeniti teorem 2.1.11.
Dijeljenjem matrice F matricom $\widehat{A}$ po teoremu 2.1.11 postoje polinomijalne matrice Q_d i R_d tako da vrijedi

$$F(x) = Q_d(x)\widehat{A}(x) + R_d(x)$$

te postoje matrice Q_l i R_l tako da vrijedi

$$F(x) = \widehat{A}(x) Q_l(x) + R_l(x).$$

Stupanj matrice Q_d je očito $m - 1$ kao i stupanj matrice Q_l pa dalje imamo

$$\begin{aligned} F(x) &= (Q_d^{(m-1)} x^{m-1} + Q_d^{(m-2)} x^{m-2} + \ldots + Q_d^{(1)} x + Q_d^{(0)})(I_m x - A) + R_d(x) = \\ & Q_d{}^{(m-1)} x^m + Q_d^{(m-2)} x^{m-1} + \ldots + Q_d^{(1)} x^2 + Q_d^{(0)} x \\ & -(Q_d{}^{(m-1)} A x^{m-1} + Q_d^{(m-2)} A x^{m-2} + \ldots + Q_d^{(1)} A x + Q_d^{(0)} A) + R_d(x) \end{aligned} \tag{2.16}$$

i

$$\begin{aligned}F(x) = (I_m x - A)(x^{m-1}Q_l^{(m-1)} + x^{m-2}Q_l^{(m-2)} + \ldots + xQ_l^{(1)} + Q_l^{(0)}) + R_l(x) = \\ x^m Q_l^{(m-1)} + x^{m-1}Q_l^{(m-2)} + \ldots + x^2 Q_l^{(1)} + xQ_l^{(0)} \\ -(x^{m-1}AQ_l^{(m-1)} + x^{m-2}AQ_l^{(m-2)} + \ldots + xAQ_l^{(1)} + AQ_l^{(0)}) + R_l(x).\end{aligned} \tag{2.17}$$

Uvrštavanjem matrice A u (2.16) dobijemo

$$F_d(A) = Q_d^{(m-1)}A^m + Q_d^{(m-2)}A^{m-1} + \ldots + Q_d^{(1)}A^2 + Q_d^{(0)}A$$

$$-(Q_d^{(m-1)}A^m + Q_d^{(m-2)}A^{m-1} + \ldots + Q_d^{(1)}A^2 + Q_d^{(0)}A) + R_d(A) = R_d(A),$$

a uvrštavanjem matrice A u (2.17) dobijemo

$$F_l(A) = A^m Q_l^{(m-1)} + A^{m-1}Q_l^{(m-2)} + \ldots + A^2 Q_l^{(1)} + AQ_l^{(0)}$$

$$-(A^m Q_l^{(m-1)} + A^{m-1}Q_l^{(m-2)} + \ldots + A^2 Q_l^{(1)} + AQ_l^{(0)}) + R_l(A) = R_l(A).$$

□

Korolar 2.2.3. *Polinomijalna matrica $F \in \mathbb{C}^{m\times m}[x]$ djeljiva je zdesna polinomijalnom matricom $\widehat{A}$ ako i samo ako je $F_d(A) = 0$, odnosno F je djeljiva slijeva s $\widehat{A}$ ako i samo ako je $F_l(A) = 0$.*

Teorem 2.2.4. *(Hamilton-Cayleyjev teorem)*
Svaka kvadratna matrica A dimenzija $n \times n$ zadovoljava vlastitu karakterističnu jednadžbu

$$\phi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I_n = 0$$

gdje je $\phi(x) = det\widehat{A}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Dokaz. Možemo iskoristiti svojstvo adjunkte matrice i inverza matrice pa imamo sljedeće:

$$\widehat{A}(x) \cdot \mathrm{Adj}\widehat{A}(x) = \phi(x)I_n$$

i

$$\mathrm{Adj}\widehat{A}(x) \cdot \widehat{A}(x) = \phi(x)I_n.$$

Iz prethodnog nam slijedi da je polinomijalna matrica ϕI_n zdesna, odnosno slijeva djeljiva matricom $\widehat{A}$. Direktno iz Bézoutova teorema slijedi da mora biti $F_d(A) = F_l(A) = 0$ gdje je $F(x) = \phi(x)I_n$. Kako je I_n neutralna matrica, zaključujemo da vrijedi jednadžba iz iskaza teorema. □

Primjer 2.2.5. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$. *Karakteristični polinom zadane matrice je*

$$\phi(x) = det[I_2 x - A] = \begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ -5 & x-7 \end{vmatrix} = (x-1)(x-7) - 15 = x^2 - 8x - 8.$$

Uvrstimo li matricu A *umjesto* x *u karakteristični polinom* $\phi(x)$, *dobijemo*

$$\phi(A) = A^2 - 8A - 8I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}^2 - 8\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 & 24 \\ 40 & 64 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 40 & 56 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada ćemo vidjeti dva slična teorema i primjere za svaki teorem. Najprije slijedi teorem koji se odnosi na polinome, a zatim njegov analogon koji se odnosi na kvadratne polinomijalne matrice.

Teorem 2.2.6. *Neka je* $p \in \mathbb{C}[x]$ *polinom stupnja* N *i* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *gdje je* $N \geq n$. *Tada postoji polinom* r *stupnja manjeg od* n *tako da vrijedi*

$$p(A) = r(A).$$

Dokaz. Dijeljenjem polinoma p karakterističnim polinomom ϕ matrice A, dobivamo

$$p(x) = q(x)\phi(x) + r(x),$$

gdje su q i r kvocijent i ostatak pri dijeljenju polinoma p polinomom ϕ i $\deg \phi = n > \deg r$. Kada zamijenimo skalar x matricom A i iskoristimo teorem 2.2.4, dobijemo

$$p(A) = q(A)\phi(A) + r(A) = r(A).$$

□

Primjer 2.2.7. *Uzmimo matricu* $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ *i polinom* $p(x) = x^3 - 7x^2 + x + 10$. *Karakteristični polinom matrice* A *je* $\phi(x) = x^2 - 8x + 8$. *Stoga imamo*

$$p(x) = (x+1)(x^2 - 8x + 8) + x + 2,$$

dakle $r(x) = x + 2$. *Nadalje,*

$$p(A) = r(A) = A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Teorem 2.2.8. *Neka je $W \in \mathbb{C}^{n\times n}[x]$ kvadratna polinomijalna matrica stupnja N i neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gdje je $N \geq n$. Tada postoji polinomijalna matrica R stupnja manjeg od n tako da vrijedi*

$$W_d(A) = R_d(A) \text{ i } W_l(A) = R_l(A).$$

Dokaz. Dijeljenjem svakog elementa matrice W karakterističnim polinomom ϕ matrice A, dobivamo

$$W(x) = Q(x)\phi(x) + R(x)$$

gdje su Q i R kvocijent, odnosno ostatak pri dijeljenju W s ϕ i $\deg\phi = n > \deg R$. Dalje imamo:

$$W(x) = \Big(Q^{(N-n)}x^{N-n} + Q^{(N-n-1)}x^{N-n-1} + \ldots + Q^{(1)}x + Q^{(0)}\Big)\phi(x) + R(x)$$

ili

$$W(x) = \phi(x)\Big(x^{N-n}Q^{(N-n)} + x^{N-n-1}Q^{(N-n-1)} + \ldots + xQ^{(1)} + Q^{(0)}\Big) + R(x).$$

Ako umjesto skalara x uvrstimo A, dobivamo

$$W_d(A) = \Big(Q^{(N-n)}A^{N-n} + Q^{(N-n-1)}A^{N-n-1} + \ldots + Q^{(1)}A + Q^{(0)}\Big)\phi(A) + R_d(A) = R_d(A)$$

i

$$W_l(A) = \phi(A)\Big(A^{N-n}Q^{(N-n)} + A^{N-n-1}Q^{(N-n-1)} + \ldots + AQ^{(1)} + Q^{(0)}\Big) + R_l(A) = R_l(A).$$

□

Primjer 2.2.9. *Uzmimo polinomijalnu matricu W definiranu s*

$$W(x) = \begin{bmatrix} x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 8x + 9 & x^5 - 8x^4 + 8x^3 - 3x \\ x^4 - 8x^3 + 8x^2 + x + 1 & -x^5 + 8x^4 - 8x^3 + x^2 - 6x + 8 \end{bmatrix}$$

i matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dijelimo svaki element matrice W karakterističnim polinomom ϕ od A i dobijemo sljedeći rastav

$$W(x) = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & x^3 \\ x^2 & -x^3 + 1 \end{bmatrix}(x^2 - 8x + 8) + \begin{bmatrix} 1 & -3x \\ x + 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Dakle, zaključujemo da je

$$R(x) = \begin{bmatrix} 1 & -3x \\ x+1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Stoga imamo

$$W_d(A) = R_d(A) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -21 \\ 11 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -21 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}.$$

Jednako dobijemo

$$W_l(A) = R_l(A) = A \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 3

Elementarne transformacije i rang polinomijalnih matrica

3.1 Elementarne transformacije nad polinomijalnim matricama

U ovom ćemo poglavlju opisati elementarne transformacije nad polinomijalnim matricama. Kao i kod običnih matrica, postoje tri osnovne elementarne transformacije koje ćemo sada navesti.

Definicija 3.1.1. *Sljedeće operacije zovemo elementarnim transformacijama na polinomijalnoj matrici $A \in \mathbb{C}^{m \times n}[x]$:*

1. *Množenje i-tog retka (stupca) brojem $c \neq 0$.*
2. *Dodavanje i-tom retku (stupcu) j-ti redak (stupac) pomnožen bilo kojim polinomom p.*
3. *Zamjena bilo koja dva retka (stupca), tj. zamjena i-tog i j-tog retka (stupca).*

Od sada ćemo koristiti sljedeću notaciju:

$L[i \times c]$	množenje i-tog retka brojem $c \neq 0$
$L[i + j \times p]$	dodavanje i-tom retku j-ti redak pomnožen polinomom p
$L[i, j]$	zamjena i-tog i j-tog retka
$P[i \times c]$	množenje i-tog stupca brojem $c \neq 0$
$P[i + j \times p]$	dodavanje i-tom stupcu j-ti stupac pomnožen polinomom p
$P[i, j]$	zamjena i-tog i j-tog stupca

.

Lako možemo utvrditi da su gornje elementarne transformacije izvedene na retcima i stupcima ekvivalentne množenju matrice A sljedećim matricama.
Množenje matrice A slijeva matricom

$$L_m(i,c) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & \end{array}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

odgovara transformaciji $L[i \times c]$.

Množenje matrice A slijeva polinomijalnom matricom $L_d(i, j, p)$ definiranom s

$$L_d(i,j,p)(x) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & j\text{–ti stupac} & & \end{array}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & p(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

odgovara transformaciji $L[i + j \times p]$.

Množenje matrice A slijeva matricom

$$L_z(i,j) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ j\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \overset{\begin{array}{cccccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & j\text{–ti stupac} & & \end{array}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}} \in \mathbb{C}^{m\times m}$$

odgovara transformaciji $L[i, j]$.

Analogne transformacije provedene na stupcima matrice ekvivalentne su množenju zdesna matrice A sljedećim matricama.

Množenje matrice A zdesna matricom

$$P_m(i,c) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

odgovara transformaciji $P[i \times c]$.

Množenje matrice A zdesna polinomijalnom matricom $P_d(i, j, p)$ definiranom s

$$P_d(i,j,p)(x) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ j\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & j\text{–ti stupac} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(x) & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

odgovara transformaciji $P[i + j \times p]$.

Množenje matrice A zdesna matricom

$$P_z(i,j) = \begin{array}{r l}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & i\text{–ti stupac} & & j\text{–ti stupac} & & \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{–ti redak} \\ \\ j\text{–ti redak} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix}
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

odgovara transformaciji $P[i, j]$.

Sada ćemo odrediti determinante gore navedenih matrica: $\det\big(L_m(i,c)\big) = c$, $\det\big(L_d(i,j,p)\big) = 1$, $\det\big(L_z(i,j)\big) = -1$, $\det\big(P_m(i,c)\big) = c$, $\det\big(P_d(i,j,p)\big) = 1$, $\det\big(P_z(i,j)\big) = -1$. Primijetimo da su sve te determinante različite od nule i ne ovise o varijabli x. Takve matrice nazivamo unimodularnim matricama.

3.2 Rang polinomijalnih matrica

Neka je $a_i = a_i(x),\ i = 1,\dots,n$ i-ti stupac polinomijalne matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$. Dakle, ti stupci su m-dimenzionalni polinomijalni vektori, $a_i \in \mathbb{R}^m[x],\ i = 1,\dots,n$.

Definicija 3.2.1. *Vektori $a_i \in \mathbb{R}^m[x],\ i = 1,\dots,n$ su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija $\mathbb{R}(x)$ ako i samo ako ne postoje racionalne funkcije $w_i = w_i(x) \in \mathbb{R}(x)$ koje nisu sve trivijalne, odnosno nul-funkcije i da vrijedi*

$$w_1a_1 + w_2a_2 + \ldots + w_na_n = 0.$$

Drugim riječima, za vektore kažemo da su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija ako jednakost iz gornje definicije implicira $w_i = 0$ za sve $i = 1,\dots,n$.

Primjer 3.2.2. *Neka su zadani polinomijalni vektori a_1 i a_2 definirani s*

$$a_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \end{bmatrix},\ a_2(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 + x^3 \end{bmatrix}$$

i neka su $w_1, w_2 \in \mathbb{R}(x)$*. Tada iz* $w_1 a_1 + w_2 a_2 = 0$ *dobivamo*

$$w_1(x)a_1(x) + w_2(x)a_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \end{bmatrix} w_1(x) + \begin{bmatrix} x \\ 1+x^3 \end{bmatrix} w_2(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix}$ *ima inverz jer je njena determinanta jednaka* 1*, stoga možemo zapisati sljedeću jednakost:*

$$\begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da postavljena jednadžba ima samo trivijalno rješenje, odnosno $w_1 = w_2 = 0$ *pa zaključujemo da su polinomijalni vektori* a_1 *i* a_2 *linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija.*

Pokazat ćemo da racionalne funkcije $w_i,\ i = 1, \ldots, n$ iz definicije 3.2.1 možemo zamijeniti polinomima $p_i,\ i = 1, \ldots, n$. Neka je $w_1 a_1 + \cdots + w_n a_n = 0$. Množimo jednakost najmanjim zajedničkim nazivnikom racionalnih funkcija $w_1, ..., w_n$. Dobivamo $p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n = 0$ gdje su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ polinomi. Ako su $a_1, ..., a_n$ linearno nezavisni nad poljem polinoma, slijedi $w_1 = w_2 = ... = w_n = 0$. Dakle, $a_1, ..., a_n$ su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija.

U sljedećem ćemo primjeru vidjeti polinomijalne vektore koji su zavisni.

Primjer 3.2.3. *Neka su zadani polinomijalni vektori* a_1 *i* a_2 *s*

$$a_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \end{bmatrix},\ a_2(x) = \begin{bmatrix} x-1 \\ x^3 - x^2 \end{bmatrix}.$$

S obzirom na to da postoje netrivijalne racionalne funkcije $w_1(x) = x - 1$ *i* $w_2(x) = -1$ *tako da vrijedi*

$$w_1(x)a_1(x) + w_2(x)a_2(x) = (x-1)\begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x-1 \\ x^3 - x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da su a_1 *i* a_2 *linearno zavisni.*

Ukoliko je broj polinomijalnih vektora prostora $\mathbb{R}^n[x]$ veći od n, tada su ti vektori linearno zavisni. Npr., dodamo li proizvoljni vektor $a = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2[x]$ dvama nezavisnim vektorima

a_1 i a_2 definiranima s $a_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2 \end{bmatrix}$ i $a_2(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1+x^3 \end{bmatrix}$, dobivamo linearno zavisne vektore. Potražimo zapis oblika

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a = 0,$$

gdje su $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}[x]$ i nisu svi jednaki nuli.
Pretpostavimo da je $p_3 = -1$. Iz gornje jednakosti dobijemo

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) \\ a_{21}(x) \end{bmatrix}$$

i

$$\begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11}(x) \\ a_{21}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x)(x^3+1) - a_{21}(x)x \\ -a_{11}(x)x^2 + a_{21}(x) \end{bmatrix}.$$

Iz ovoga slijedi da su vektori a_1, a_2 i a linearno zavisni za bilo koji vektor a.

Definicija 3.2.4. *Polinomijalne vektore $b_i \in \mathbb{R}^n[x], i = 1, \ldots, n$ nazivamo bazom prostora $\mathbb{R}^n[x]$ ukoliko su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija i ukoliko proizvoljni vektor $a \in \mathbb{R}^n[x]$ možemo prikazati kao linearnu kombinaciju tih vektora, odnosno u obliku*

$$a = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_n b_n,$$

gdje su $p_i \in \mathbb{R}[x],\ i = 1, \ldots, n$.

Postoji mnogo različitih baza za isti prostor. Na primjer, za prostor $\mathbb{R}^2[x]$ možemo uzeti vektore iz primjera 3.2.2 za bazu. Rješavajući pripadni sustav jednadžbi za proizvoljni vektor $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2[x]$, odnosno sustav

$$\begin{bmatrix} a_1(x) & a_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) \\ a_{21}(x) \end{bmatrix},$$

dobivamo

$$\begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & 1+x^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11}(x) \\ a_{21}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x)(x^3+1) - a_{21}(x)x \\ -a_{11}(x)x^2 + a_{21}(x) \end{bmatrix}.$$

Kao bazu za ovaj prostor također možemo uzeti i vektore e_1, e_2, gdje je

$$e_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

U tom slučaju, $p_1 = a_{11}$ i $p_2 = a_{21}$.

Definicija 3.2.5. *Broj linearno nezavisnih stupaca polinomijalne matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$ nazivamo njenim rangom.*

Napomena 3.2.6. *Broj linearno nezavisnih redaka polinomijalne matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$ također nazivamo njenim rangom jer se može dokazati kako je taj broj jednak broju linearno nezavisnih stupaca polinomijalne matrice.*

Napomena 3.2.7. *Može se dokazati da rang polinomijalne matrice A možemo definirati kao najveći mogući red minore od A koja je ne-nul polinom matrice. Rang matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$ ne može biti veći od broja njenih redaka (m) ili stupaca (n), odnosno vrijedi $rangA \leq min\{m, n\}$. Ukoliko je matrica $A \in \mathbb{R}^{m\times m}[x]$ punog ranga, tj. $rangA = m$, tada je determinanta od A ne-nul polinom w različit od nule, odnosno $\det A = w \neq 0$. Takvu matricu nazivamo nesingularnom ili invertibilnom. Singularna je kada $detA = 0$ (nul-polinom).*

Npr., kvadratna matrica iz primjera 3.2.2 ima linearno nezavisne stupce te vidimo da joj je determinanta ne-nul polinom:

$$\det\begin{bmatrix}1 & x\\ x^2 & x^3+1\end{bmatrix} = 1.$$

No matrica iz primjera 3.2.3 ima linearno zavisne stupce, a determinanta joj je nul-polinom:

$$\det\begin{bmatrix}1 & x-1\\ x^2 & x^3-x^2\end{bmatrix} = 0.$$

Primjer 3.2.8. *Pogledajmo primjer matrice kojoj determinanta nije nulpolinom, ali nije različita od nule za sve x.*
Neka je dana polinomijalna matrica A definirana s

$$A(x) = \begin{bmatrix}1 & x\\ x & 1\end{bmatrix}.$$

Označimo prvi stupac matrice A s a_1, a drugi stupac matrice A s a_2. Neka su p_1 i p_2 polinomi. Tada iz $p_1a_1 + p_2a_2 = 0$ dobivamo

$$p_1(x)a_1(x) + p_2(x)a_2(x) = \begin{bmatrix}1\\ x\end{bmatrix}p_1(x) + \begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}p_2(x) = \begin{bmatrix}1 & x\\ x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1(x)\\ p_2(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Vidimo da inverz matrice $A(x)$ postoji samo za $x \neq \pm 1$. Za takve x možemo napisati sljedeću jednakost:

$$\begin{bmatrix}p_1(x)\\ p_2(x)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & x\\ x & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Primijetimo da u tom slučaju imamo $p_1(x) = p_2(x) = 0$ *za* $x \neq \pm 1$*, a zbog neprekidnosti polinoma vrijednost im je jednaka nuli i u* 1 *i* -1*. Dakle, matrica* A *ima rang* 2 *pa je prema definiciji iz napomene 3.2.7 invertibilna.*
No međutim, promatramo li matrice $A(x)$*, one su invertibilne za sve* x *osim za* 1 *i* -1*. Kad je polinomijalna matrica singularna, determinanta joj je jednaka nuli za svaki* x *te stoga zaključujemo da nijedna od matrica* $A(x)$ *nije invertibilna.*

Teorem 3.2.9. *Elementarne transformacije nad polinomijalnom matricom ne mijenjaju njezin rang.*

Dokaz. Neka je $\bar{A}(x) = L(x)A(x)P(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$, gdje su $L \in \mathbb{R}^{m\times m}[x]$ i $P \in \mathbb{R}^{n\times n}[x]$ unimodularne matrice elementarnih transformacija nad retcima, odnosno stupcima, respektivno. Neka su stupci polinomijalne matrice A jednaki $a_1, \ldots, a_n$. Ako djelujemo najprije samo s matricom L slijeva, dobijemo matricu LA čiji su stupci jednaki $La_1, ..., La_n$. Neka su $w_1, \ldots, w_n$, $w_i \in \mathbb{R}(x)$ za $i = 1, \ldots, n$ racionalne funkcije i neka vrijedi

$$w_1 La_1 + \ldots + w_n La_n = 0.$$

Pomnožimo li obje strane jednakosti s L^{-1} slijeva (L^{-1} postoji jer je L unimodularna matrica), dobijemo sljedeće:

$$w_1 a_1 + \ldots + w_n a_n = 0.$$

Stoga vidimo da možemo donositi iste zaključke o linearnoj nezavisnosti stupaca matrica L i LA.
Neka su $b_1, \ldots, b_m$ retci matrice A. Ako djelujemo matricom P zdesna na A, dobijemo matricu AP čiji su retci jednaki $b_1 P, ..., b_m P$. Ponovno uzmemo racionalne funkcije $w_1, \ldots, w_m$, $w_i \in \mathbb{R}(x)$ za $i = 1, \ldots, m$ takve da vrijedi

$$w_1 b_1 P + \ldots + w_m b_m P = 0.$$

Pomnožimo li taj izraz s P^{-1} zdesna (P^{-1} postoji jer je P unimodularna), dobijemo sljedeće:

$$w_1 b_1 + \ldots + w_m b_m = 0.$$

Slično kao prije, zaključujemo da možemo donositi iste zaključke o linearnoj nezavisnosti redaka matrica A i AP, a kako je rang matrice jednak po retcima i stupcima, možemo zaključiti da vrijedi

$$\text{rang}\bar{A} = \text{rang}[LAP] = \text{rang}A.$$

□

U sljedećem ćemo primjeru testirati teorem.

Primjer 3.2.10. *Neka je matrica A polinomijalna matrica zadana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3+1 \end{bmatrix}.$$

Po primjeru 3.2.2 znamo da je matrica A punog ranga jer ima dva nezavisna stupca. Primijenimo sada npr. transformaciju $L[2+1\times p]$*, gdje je* $p(x)=x$*, nad retcima matrice A:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2+x & x^3+x^2+1 \end{bmatrix}.$$

Želimo vidjeti koliki je rang matrice $L_d(2,1,p)A$*. Označimo s* a_1 *i* a_2 *stupce matrice* $L_d(2,1,p)A$*, odnosno* $a_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x^2+x \end{bmatrix}$, $a_2(x) = \begin{bmatrix} x \\ x^3+x^2+1 \end{bmatrix}$*. Tada iz* $w_1a_1+w_2a_2=0$ *dobivamo:*

$$\begin{aligned} w_1(x)a_1(x)+w_2(x)a_2(x) &= \begin{bmatrix} 1 \\ x^2+x \end{bmatrix} w_1(x) + \begin{bmatrix} x \\ x^3+x^2+1 \end{bmatrix} w_2(x) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2+x & x^3+x^2+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2+x & x^3+x^2+1 \end{bmatrix}$ *ima inverz jer joj je determinanta jednaka* 1*, stoga možemo zapisati sljedeću jednakost:*

$$\begin{bmatrix} w_1(x) \\ w_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^2+x & x^3+x^2+1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz toga vidimo da su w_1 *i* w_2 *jednaki nuli, odnosno da su stupci matrice* $L_d(2,1,p)A$ *linearno nezavisni. Stoga možemo zaključiti da su obje matrice; A i* $L_d(2,1,p)A$ *punog ranga, tj. primjenom elementarne transformacije* $L[2+1\times p]$ *na polinomijalnu matricu A, nismo promijenili njezin rang.*

Poglavlje 4

Ekvivalenti polinomijalnih matrica i matrice reduciranih redaka i stupaca

4.1 Ekvivalenti polinomijalnih matrica

Definicija 4.1.1. *Dvije polinomijalne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ nazivamo lijevo (odnosno desno) ekvivalentnima ili ekvivalentnima u smislu redaka (odnosno stupaca) ako i samo ako jednu od njih možemo dobiti iz druge kao rezultat konačnog broja elementarnih transformacija nad retcima (odnosno stupcima), tj.*

$$B = LA \ (ili\ B = AP),$$

gdje je L (P) produkt unimodularnih matrica elementarnih transformacija nad retcima (stupcima).

Definicija 4.1.2. *Dvije polinomijalne matrice $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ nazivamo ekvivalentnima ako i samo ako se jedna od njih može dobiti iz druge kao rezultat konačnog broja elementarnih transformacija nad retcima, odnosno stupcima te matrice, tj.*

$$B = LAP,$$

gdje su L i P produkti unimodularnih matrica elementarnih transformacija nad retcima i stupcima, respektivno.

Teorem 4.1.3. *Za polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ postoji lijevi ekvivalent $\overline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$,* *gdje je $\overline{A}$ oblika:*

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & \bar{a}_{12}(x) & \dots & \bar{a}_{1n}(x) \\ 0 & \bar{a}_{22}(x) & \dots & \bar{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{nn}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{za } m > n,$$

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & \bar{a}_{12}(x) & \dots & \bar{a}_{1m}(x) \\ 0 & \bar{a}_{22}(x) & \dots & \bar{a}_{2m}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mm}(x) \end{bmatrix} \qquad \text{za } m = n,$$

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & \bar{a}_{12}(x) & \dots & \bar{a}_{1m}(x) & \dots & \bar{a}_{1n}(x) \\ 0 & \bar{a}_{22}(x) & \dots & \bar{a}_{2m}(x) & \dots & \bar{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{a}_{mm}(x) & \dots & \bar{a}_{mn}(x) \end{bmatrix} \qquad \text{za } m < n,$$

gdje su elementi $\bar{a}_{1i}, \bar{a}_{2i}, \dots, \bar{a}_{i-1,i}$ polinomi čiji je stupanj manji od stupnja polinoma $\bar{a}_{ii}$ za $i = 1, 2, \dots, m$.

Dokaz. Među ne-nul elementima prvog stupca matrice A odaberemo onaj polinom čiji je stupanj najmanji. Ako se taj polinom nalazi na poziciji $(p, 1)$, provedemo transformaciju $L[1, p]$ i taj element dovedemo na mjesto $(1, 1)$. Preimenujemo taj element oznakom $\tilde{a}_{11}$. Analogno preimenujemo sve ostale elemente prvog stupca te ih podijelimo s $\tilde{a}_{11}$. Tada imamo:

$$\tilde{a}_{i1}(x) = \tilde{a}_{11}(x) q_{i1}(x) + r_{i1}(x) \text{ za } i = 2, 3, \dots, m,$$

gdje je q_{i1} kvocijent i r_{i1} ostatak dijeljenja polinoma $\tilde{a}_{i1}$ polinomom $\tilde{a}_{11}$. Provodeći $L[i + 1 \times (-q_{i1})]$, zamijenimo element na mjestu $(i, 1)$ ostatkom r_{i1} za $i = 2, 3, \dots, m$. Ukoliko nisu svi ostaci jednaki nuli, tada odaberemo onaj s najmanjim stupnjem. Ako se taj element nalazi na poziciji $(q, 1)$, provedemo transformaciju $L[1, q]$ te ga premjestimo na poziciju $(1, 1)$. Nakon toga ponavljamo opisani postupak. U svakom koraku dobit ćemo na poziciji $(1, 1)$ polinom nižeg stupnja nego u prethodnom koraku. Nakon konačnog broja koraka dobivamo matricu $\tilde{A}$ oblika

$$\tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & \tilde{a}_{12}(x) & \dots & \tilde{a}_{1n}(x) \\ 0 & \tilde{a}_{22}(x) & \dots & \tilde{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2}(x) & \dots & \tilde{a}_{mn}(x) \end{bmatrix}.$$

Ponovimo gornji postupak za prvi stupac submatrice dobivene iz matrice $\tilde{A}$ brisanjem prvog retka. Tada dobijemo matricu oblika

$$\hat{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & \tilde{a}_{12}(x) & \tilde{a}_{13}(x) & \dots & \tilde{a}_{1n}(x) \\ 0 & \bar{a}_{22}(x) & \hat{a}_{23}(x) & \dots & \hat{a}_{2n}(x) \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33}(x) & \dots & \hat{a}_{3n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_{m3}(x) & \dots & \hat{a}_{mn}(x) \end{bmatrix}.$$

Ako $\tilde{a}_{12}$ nije polinom stupnja manjeg nego $\bar{a}_{22}$, onda podijelimo $\tilde{a}_{12}$ s $\bar{a}_{22}$ i provođenjem $L[1 + 2 \times (-q_{12})]$, zamijenimo element $\tilde{a}_{12}$ elementom $\bar{a}_{12} = r_{12}$, gdje su q_{12} i r_{12} kvocijent i ostatak dijeljenja $\tilde{a}_{12}$ s $\bar{a}_{22}$, respektivno.
Dalje radimo sa submatricom dobivenom iz matrice $\hat{A}$ micanjem prvih dvaju redaka i prvih dvaju stupaca. Nastavljajući taj postupak dobijemo matricu iz iskaza teorema. □

Primjer 4.1.4. *Dana je polinomijalna matrica A zadana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ x & x^2+2 & x-1 \\ x^2+1 & -x^3 & -2x^2 \end{bmatrix}.$$

Matricu A ćemo transformirati u gornjetrokutastu matricu koristeći algoritam iz teorema 4.1.3 i pritom je matrica A lijevi ekvivalent gornjetrokutaste matrice koju ćemo dobiti. Element na mjestu $(1,1)$ *ujedno je i element s najmanjom potencijom u prvom stupcu. Kako bismo u prvom retku ispod tog elementa dobili nule, provodimo transformacije* $L[2+1\times p_1]$ *i* $L[3 + 1 \times p_2]$, *gdje su* p_1 *i* p_2 *polinomi definirani s* $p_1(x) = -x$ *i* $p_2(x) = -(x^2 + 1)$, *te dobijemo sljedeću matricu:*

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 0 & 2 & -2x-1 \\ 0 & -2x^3-x & -5x^2-3 \end{bmatrix}.$$

Nakon toga provodimo elementarnu transformaciju $L[3 + 2 \times p_3]$, *gdje je* p_3 *polinom definiran s* $p_3(x) = -\frac{1}{2}(-2x^3 - x)$, *kako bismo poništili element na poziciji* $(3,2)$ *te dobijemo sljedeću matricu:*

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 0 & 2 & -2x-1 \\ 0 & 0 & -2x^4-x^3-6x^2-\frac{x}{2}-3 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je stupanj polinoma na mjestu $(1,2)$ *veći od stupnja polinoma na mjestu* $(2,2)$ *pa provedemo transformaciju* $L[1+2\times p_4]$, *gdje je* p_4 *polinom definiran s* $p_4(x) = -\frac{x}{2}$, *te dobijemo matricu:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x^2 + \frac{x}{2} + 3 \\ 0 & 2 & -2x - 1 \\ 0 & 0 & -2x^4 - x^3 - 6x^2 - \frac{x}{2} - 3 \end{bmatrix}.$$

Ova matrica je gornjetrokutasta i zadovoljava traženi oblik iz iskaza teorema 4.1.3.

Sljedeći teorem daje ekvivalentan rezultat kao teorem 4.1.3, ali za donjetrokutaste matrice.

Teorem 4.1.5. *Za polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ postoji desni ekvivalent $\overline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$, gdje je $\overline{A}$ oblika:*

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{21}(x) & \bar{a}_{22}(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1}(x) & \bar{a}_{m2}(x) & \bar{a}_{m3}(x) & \dots & \bar{a}_{mm}(x) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \text{ za } n > m,$$

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{21}(x) & \bar{a}_{22}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1}(x) & \bar{a}_{m2}(x) & \dots & \bar{a}_{mm}(x) \end{bmatrix} \text{ za } n = m,$$

$$\overline{A}(x) = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a}_{21}(x) & \bar{a}_{22}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1}(x) & \bar{a}_{n2}(x) & \dots & \bar{a}_{nn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{m1}(x) & \bar{a}_{m2}(x) & \dots & \bar{a}_{mn}(x) \end{bmatrix} \text{ za } n < m,$$

gdje su elementi $\bar{a}_{i1}, \bar{a}_{i2}, \dots, \bar{a}_{i,i-1}$ polinomi stupnja manjeg nego stupanj polinoma $\bar{a}_{ii}$ za $i = 1, 2, \dots, n$.

Dokaz. Ovaj teorem nećemo detaljno dokazivati zato što je dokaz vrlo sličan dokazu teorema 4.1.3. Samo ćemo ukratko opisati po čemu se razlikuje od dokaza teorema 4.1.3. Na početku promatramo prvi redak umjesto prvog stupca i tražimo polinom najmanjeg stupnja. Ako je on na poziciji $(1, p)$, elementarnom transformacijom $P[p, 1]$ dovedemo taj polinom na poziciju $(1, 1)$. Nakon toga postupamo na isti način kao u teoremu 4.1.3, samo što imamo

$$\tilde{a}_{1i}(x) = \tilde{a}_{11}(x)q_{1i}(x) + r_{1i}(x) \text{ za } i = 2, 3, \dots, n.$$

Nakon toga provodimo transformaciju $P[i + 1 \times (-q_{1i})]$ te sve isto kao u teoremu 4.1.3, samo što koristimo elementarne transformacije stupaca umjesto redaka. Kada dobijemo matricu $\tilde{A}$ oblika

$$\tilde{A}(x) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21}(x) & \tilde{a}_{22}(x) & \dots & \tilde{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{m1}(x) & \tilde{a}_{m2}(x) & \dots & \tilde{a}_{mn}(x) \end{bmatrix},$$

ponavljamo postupak na podmatrici koju dobijemo tako da prethodnoj matrici oduzmemo prvi redak i prvi stupac. □

Primjer 4.1.6. *Neka je dana polinomijalna matrica A definirana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x-1 & 0 \\ -x & x+1 & 1 \\ x^2+1 & x^3 & 3x \end{bmatrix}.$$

Budući da na mjestu $(1,1)$ imamo polinom najmanjeg stupnja koji ujedno dijeli sve elemente prvog retka, gledamo kako dobiti nule u prvom retku. Provodimo transformaciju $P[2 + 1 \times p_1]$, gdje je p_1 polinom definiran s $p_1(x) = -(x-1)$. Dobijemo matricu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & x^2-x & 1 \\ x^2+1 & x^2-x+1 & 3x \end{bmatrix}.$$

Sada provodimo transformaciju $P[2,3]$ kako bismo na mjestu $(2,2)$ dobili polinom najmanjeg stupnja. Dobijemo sljedeću matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & x^2-x \\ x^2+1 & 3x & x^2-x+1 \end{bmatrix}.$$

Provodimo transformaciju $P[3 + 2 \times p_2]$, gdje je p_2 polinom definiran s $p_2(x) = -(x^2-x)$ i dobijemo sljedeću matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ x^2+1 & 3x & -3x^3+4x^2-x+1 \end{bmatrix}.$$

Budući da je element na mjestu $(2,1)$ stupnja većeg nego stupanj elementa na mjestu $(2,2)$, provedemo transformaciju $P[1+2\times p_3]$, gdje je p_3 polinom definiran s $p_3(x) = x$ i dobijemo sljedeću matricu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4x^2+1 & 3x & -3x^3+4x^2-x+1 \end{bmatrix},$$

a to je ujedno matrica koja zadovoljava uvjete teorema 4.1.5.

4.2 Matrice reduciranih redaka i stupaca

Stupanj $i-$tog stupca (retka) polinomijalne matrice najveći je mogući stupanj polinoma koji je element tog stupca (retka).
Sa $s_i(A)$ ćemo označiti i-ti stupac od A, a sa $r_i(A)$ i-ti redak od A. Stupanj $i-$tog stupca (retka) matrice A označit ćemo s $\deg s_i(A)$ $(\deg r_i(A))$ ili kraće $\deg s_i$ $(\deg r_i)$.
Neka je $L_s(A)$ $(L_r(A))$ matrica čije stupce formiramo na sljedeći način. Svaki stupac matrice $L_s(A)$ formiramo tako da prvo pronađemo najveću potenciju u svakom stupcu matrice A te zatim u pripadni stupac matrice $L_s(A)$ stavimo koeficijent polinoma matrice A, na istoj poziciji, uz tu potenciju.

Primjer 4.2.1. *Neka je dana polinomijalna matrica A definirana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^3+1 & -x-1 & x^2 \\ -2x^2+3 & 5 & x+1 \\ x^2+3x & x-1 & -x^2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $\deg A = 3$, $\deg s_1 = 3$, $\deg s_2 = 1$, $\deg s_3 = 2$, $\deg r_1 = 3$, $\deg r_2 = 2$, $\deg r_3 = 2$ *i*

$$L_s(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; L_r(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matricu A možemo napisati na sljedeće načine:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2x^2+3 & 5 & x+1 \\ x^2+3x & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^3 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -x-1 & x^2 \\ 3 & 5 & x+1 \\ 3x & x-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U općenitom slučaju, gdje imamo matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$, vrijedi

$$A(x) = L_s(A)\mathrm{diag}[x^{\deg s_1}, x^{\deg s_2}, \ldots, x^{\deg s_n}] + \bar{A}(x)$$

i

$$A(x) = \mathrm{diag}[x^{\deg r_1}, x^{\deg r_2}, \ldots, x^{\deg r_m}]L_r(A) + \tilde{A}(x)$$

gdje su $\bar{A}$, $\tilde{A}$ polinomijalne matrice koje zadovoljavaju uvjete:

$$\deg\bar{A} < \deg A, \; \deg\tilde{A} < \deg A.$$

Pritom je najveći stupanj polinoma matrice $\bar{A}$ u svakom stupcu manji od najvećeg stupnja polinoma matrice A u odgovarajućem stupcu. Također je najveći stupanj polinoma matrice $\tilde{A}$ u svakom retku manji od najvećeg stupnja polinoma matrice A u odgovarajućem retku. Ukoliko je $m = n$ i $\det L_s(A) \neq 0$, tada je determinanta matrice A polinom stupnja $\sum_{i=1}^{n} \deg s_i$. Naime, vrijedi

$$A(x) = L_s(A)\Big(\mathrm{diag}[x^{\deg s_1}, x^{\deg s_2}, \dots, x^{\deg s_n}] + L_s(A)^{-1}\bar{A}(x)\Big).$$

Zanima nas determinanta gornje matrice i vidimo da možemo primijeniti Binet-Cauchyjev teorem. Za matricu u zagradi polinom najvećeg stupnja u razvoju determinante (po osnovnoj definiciji) dolazi od umnožaka na dijagonali pa imamo sljedeće:

$$\det A(x) = x^{\sum_{i=1}^{n} \deg s_i} \det L_s(A) + p(x),$$

gdje je p polinom stupnja manjeg od $\sum_{i=1}^{n} \deg s_i$. Slično vrijedi ako $\det L_r(A) \neq 0$. Tada je determinanta početne matrice polinom stupnja $\sum_{j=1}^{m} \deg r_j$.

Definicija 4.2.2. *Kažemo da je polinomijalna matrica A reduciranog stupca (retka) ako i samo ako je $L_s(A)$ ($L_r(A)$) matrica punog ranga.*

Prema tome, kvadratna matrica A matrica je reduciranog retka (stupca) ako i samo ako je $\det L_s(A) \neq 0$ ($\det L_r(A) \neq 0$).

Primjer 4.2.3. *Uzmimo matricu* $A(x) = \begin{bmatrix} x^3+1 & -x-1 & x^2 \\ -2x^2+3 & 5 & x+1 \\ x^2+3x & x-1 & -x^2 \end{bmatrix}$. *Kako je*

$$det L_s(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;\; i \;\; det L_r(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

vidimo da matrica A nije reduciranog retka , a ni reduciranog stupca.

Iz gornjih rezultata i teorema 4.1.3 i 4.1.5, direktno slijedi sljedeći korolar.

Korolar 4.2.4. *Provodeći samo elementarne transformacije nad retcima ili stupcima, moguće je transformirati nesingularnu polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}[x]$ u matricu reduciranog retka ili matricu reduciranog stupca, respektivno.*

Dokaz. Svi nedijagonalni elementi lijevog ekvivalenta matrice A iz teorema 4.1.3 su polinomi stupnja manjeg od stupnja polinoma koji se nalazi u istom stupcu na dijagonali. Stoga je matrica $L_s(A)$ dijagonalna. Kako je A nesingularna, svi dijagonalni elementi lijevog ekvivalenta su netrivijalni polinomi pa je $L_s(A)$ regularna.
Analogno se dokazuje tvrdnja za desni ekvivalent. □

Poglavlje 5

Smithova kanonska forma, elementarni djelitelji i nultočke polinomijalnih matrica

5.1 Redukcija polinomijalne matrice na Smithovu kanonsku formu

Sada ćemo uvesti jako važan pojam Smithove kanonske forme polinomijalne matrice koji ćemo koristiti i u narednim poglavljima i rezultatima.

Definicija 5.1.1. *Polinomijalnu matricu $A_S \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ oblika*

$$A_S(x) = \begin{bmatrix} i_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gdje je $r \leq min\{n, m\}$ i $i_1, i_2, \dots, i_r$ ne-nul polinomi, zovemo Smithovom kanonskom formom polinomijalne matrice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ ranga r ako su vodeći koeficijenti polinoma $i_1, i_2, \dots, i_r$ jednaki jedan, a polinom i_{k+1} je djeljiv polinomom i_k, $k = 1, \dots, r-1$. Pritom polinome $i_1, i_2, \dots, i_r$ nazivamo invarijantnim polinomima.

Teorem 5.1.2. *Za proizvoljnu polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ postoji njoj ekvivalentna Smithova kanonska forma.*

Dokaz. Među elementima matrice A pronađemo ne-nul element koji je polinom najmanjeg stupnja i premještanjem redaka i stupaca stavimo ga na poziciju $(1,1)$. Označimo taj element s $\bar{a}_{11}$. Sada pretpostavimo da su svi elementi matrice A djeljivi bez ostatka elementom $\bar{a}_{11}$. Dijeljenjem svih elemenata prvog stupca $(\bar{a}_{i1})$ i svih elemenata prvog retka $(\bar{a}_{1j})$ s $\bar{a}_{11}$, dobivamo

$$\bar{a}_{i1}(x) = \bar{a}_{11}(x)q_{i1}(x), \quad i = 2,3,\ldots,m,$$

$$\bar{a}_{1j}(x) = \bar{a}_{11}(x)q_{1j}(x), \quad j = 2,3,\ldots,n,$$

gdje su q_{i1} i q_{1j} kvocijenti dijeljenja $\bar{a}_{i1}$ i $\bar{a}_{1j}$ sa $\bar{a}_{11}$, respektivno za $i = 2,3,\ldots,m$ i $j = 2,3,\ldots,n$.
Oduzimanjem od i-tog retka $(i = 2,3,\ldots,m)$ prvi redak pomnožen s q_{i1} te oduzimanjem od j-tog stupca $(j = 2,3,\ldots,n)$ prvi stupac pomnožen s q_{1j}, dobijemo matricu oblika

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_{11}(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22}(x) & \ldots & \bar{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_{m2}(x) & \ldots & \bar{a}_{mn}(x) \end{bmatrix}$$

i pritom su svi elementi matrice djeljivi s $\bar{a}_{11}$. Ako koeficijent najveće potencije polinoma $\bar{a}_{11}$ nije jednak jedan, onda množimo prvi redak (ili stupac) recipročnom vrijednošću vodećeg koeficijenta kako bismo to postigli.
Sada pretpostavimo da nisu svi elementi matrice A djeljivi bez ostatka s $\bar{a}_{11}$ i da ima takvih elemenata u prvom retku i/ili prvom stupcu. Dijeljenjem tih elemenata s $\bar{a}_{11}$ dobijemo

$$\bar{a}_{1j}(x) = \bar{a}_{11}(x)q_{1j}(x) + r_{1j}(x), \quad j = 2,3,\ldots,n,$$

$$\bar{a}_{i1}(x) = \bar{a}_{11}(x)q_{i1}(x) + r_{i1}(x), \quad i = 2,3,\ldots,m,$$

gdje su q_{1j}, q_{i1} kvocijenti, a r_{1j}, r_{i1} ostaci pri dijeljenju $\bar{a}_{1j}$ i $\bar{a}_{i1}$ s $\bar{a}_{11}$, respektivno. Oduzimajući od i-tog retka (j-tog stupca) prvi redak (stupac) pomnožen s q_{i1} (s q_{1j}), element $\bar{a}_{i1}$ $(\bar{a}_{1j})$ zamijenimo s ostatkom r_{i1} (r_{1j}). Među tim ostacima nađemo polinom najmanjeg stupnja i međusobno zamjenjujući retke ili stupce, pomaknemo ga na poziciju $(1,1)$. Označimo taj polinom s $\bar{r}_{11}$. Ako nisu svi elementi prvog retka i prvog stupca djeljivi bez ostatka s $\bar{r}_{11}$, onda ponovimo ovaj postupak uzimajući umjesto polinoma $\bar{a}_{11}$ polinom $\bar{r}_{11}$. Stupanj polinoma $\bar{r}_{11}$ manji je od stupnja polinoma $\bar{a}_{11}$. Nakon konačno mnogo koraka na poziciji $(1,1)$ dobivamo element $\hat{a}_{11}$ i svi ostali elementi u prvom retku i stupcu su djeljivi s njim.
Pretpostavimo da postoji neki element $\hat{a}_{ik}$ u dobivenoj matrici, na mjestu (i,k), $i,k \neq 1$, koji nije djeljiv s $\hat{a}_{11}$. Tada njega možemo zapisati kao $\hat{a}_{ik} = \hat{a}_{11}q_{ik} + r_{ik}$. Sada dodamo i-ti redak prvom i množenjem prvog stupca s odgovarajućim polinomom i dodavanjem k-tom stupcu na mjestu $(1,k)$ dobivamo polinom r_{ik} koji je manjeg stupnja od polinoma $\hat{a}_{11}$. Tada zamijenimo k-ti stupac s prvim i ponovimo opisani postupak nad prvim retkom i prvim stupcem

te eventualno zatim ponavljamo postupak s nekim elementom koji nije ni u prvom retku ni u prvom stupcu. Na taj će način postupak stati nakon konačno mnogo koraka kad svi elementi u matrici budu djeljivi polinomom na poziciji $(1, 1)$. S obzirom na to da stalno smanjujemo stupanj polinoma na mjestu $(1, 1)$, to će biti najkasnije kad vodeći element u matrici bude konstantan polinom. Tada možemo poništiti prvi redak i stupac izvan dijagonale, a u submatrici koja smo dobili uklanjanjem prvog retka i prvog stupca svi su elementi djeljivi s elementom na mjestu $(1, 1)$. Nakon toga ponavljamo postupak na matrici koja ima red za jedan manji od početne itd. te na kraju dobivamo matricu s traženim svojstvima. □

Ovaj dokaz nam daje algoritam za pronalaženje Smithove kanonske forme. Pogledajmo primjer.

Primjer 5.1.3. *Neka je dana polinomijalna matrica A zadana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} (x+1)^2 & (x+1)(x+2) & x+1 \\ (x+1)(x+2) & (x+1)^2 & x+2 \end{bmatrix}.$$

Kako bismo dobili Smithovu kanonsku formu matrice A, provodimo sljedeće transformacije.
Korak 1: *Provodimo transformaciju $P[1, 3]$ kako bismo element s mjesta $(1, 3)$ stavili na poziciju $(1, 1)$. Dobijemo matricu*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x+1 & (x+1)(x+2) & (x+1)^2 \\ x+2 & (x+1)^2 & (x+1)(x+2) \end{bmatrix}.$$

Svi elementi osim elementa na mjestu $(2, 1)$ djeljivi su s elementom na mjestu $(1, 1)$.

Korak 2: *Budući da je*

$$x + 2 = (x + 1) \cdot 1 + 1,$$

provodimo transformaciju $L[2 + 1 \times q]$, gdje je $q(x) = -1$, pa imamo

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} x+1 & (x+1)(x+2) & (x+1)^2 \\ 1 & -(x+1) & x+1 \end{bmatrix}.$$

Korak 3: *Provodimo transformaciju $L[1, 2]$ da bismo doveli element s pozicije $(2, 1)$ na poziciju $(1, 1)$ te dobijemo*

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & -(x+1) & x+1 \\ x+1 & (x+1)(x+2) & (x+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 4: *Sada provodimo transformacije* $P[2 + 1 \times p_1]$ *i* $P[3 + 1 \times p_2]$*, gdje su* p_1 *i* p_2 *polinomi definirani s* $p_1(x) = x + 1$ *i* $p_2(x) = -(x + 1)$ *pa imamo*

$$A_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x + 1 & (x + 1)(2x + 3) & 0 \end{bmatrix}.$$

Korak 5: *Konačno, provodimo transformacije* $L[2+1\times p_2]$ *i* $P[2\times \frac{1}{2}]$ *pa dobivamo matricu*

$$A_5(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x + 1)(x + \frac{3}{2}) & 0 \end{bmatrix},$$

a to je Smithova kanonska forma matrice A.

Pogledajmo još jedan primjer Smithove kanonske forme za malo kompliciraniju polinomijalnu matricu stupnja 4.

Primjer 5.1.4. *Neka je dana matrica A definirana s*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & x^4 + 3x^2 - x - 1 \\ x^3 - 1 & -x^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 1.
Primijetimo da na poziciji $(1, 1)$ *imamo element najmanjeg stupnja i primijetimo da nisu svi elementi matrice A djeljivi s elementom na mjestu* $(1, 1)$*. Uočimo sljedeće:*

$$x^4 + 3x^2 - x - 1 = x^2 \cdot (x^2 + 3) - x - 1, \; x^3 - 1 = x^2 \cdot x - 1.$$

Sada provodimo transformaciju $P[2 + 1 \times p_1]$*, gdje je* $p_1(x) = -(x^2 + 3)$*, i imamo sljedeće:*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x^2 & -x - 1 \\ x^3 - 1 & -x^5 - 3x^3 + 3 \end{bmatrix}.$$

Korak 2.
Provodimo transformaciju $P[1, 2]$ *kako bismo na mjestu* $(1, 1)$ *dobili element najmanjeg stupnja. Dobijemo sljedeću matricu:*

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} -(x + 1) & x^2 \\ -x^5 - 3x^3 + 3 & x^3 - 1 \end{bmatrix}.$$

Korak 3.
Primijetimo da na mjestu $(1, 1)$ *nemamo element koji dijeli sve ostale elemente u matrici*

jer npr. vrijedi $x^2 = -(x+1)\cdot(-x+1)+1$*. Provedemo transformaciju* $P[2+1\times p_2]$*, gdje je* $p_2(x) = -(-x+1)$*, i dobijemo sljedeću matricu:*

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} -(x+1) & 1 \\ -x^5-3x^3+3 & -x^6+x^5-3x^4+4x^3+3x-4 \end{bmatrix}.$$

Korak 4.
Sada provedemo transformaciju $P[1,2]$ *i imamo sljedeće:*

$$A_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & -(x+1) \\ -x^6+x^5-3x^4+4x^3+3x-4 & -x^5-3x^3+3 \end{bmatrix}.$$

Korak 5.
Konačno na mjestu $(1,1)$ *imamo element koji dijeli sve ostale elemente u matrici pa provedemo transformaciju* $P[2+1\times p_3]$*, gdje je* $p_3(x) = x+1$*. Dobijemo sljedeće:*

$$A_5(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x^6+x^5-3x^4+4x^3+3x-4 & -x^7-2x^5+x^4+4x^3+3x^2-x-4 \end{bmatrix}.$$

Korak 6.
Još je potrebno provesti transformaciju $L[2+1\times p_4]$*, gdje je* $p_4(x) = -(-x^6+x^5-3x^4+4x^3+3x-4)$*, te dobijemo matricu*

$$A_6(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -x^7-2x^5+x^4+4x^3+3x^2-x-4 \end{bmatrix},$$

a to je upravo Smithova kanonska forma matrice A s početka primjera.

Iz djeljivosti invarijantnih polinoma $i_k | i_{k+1}, k = 1,\dots,r-1$ slijedi da postoje polinomi $d_1, d_2, \dots, d_r$ tako da je

$$i_1 = d_1, i_2 = d_1 d_2, \dots, i_r = d_1 d_2 \cdot \ldots \cdot d_r.$$

Stoga matricu iz definicije 5.1.1 možemo zapisati na sljedeći način

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} d_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_1(x)d_2(x) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_1(x)d_2(x)\cdot\ldots\cdot d_r(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorem 5.1.5. *Invarijantni polinomi $i_1, i_2, \ldots, i_r$ matrice iz definicije 5.1.1 jedinstveno su određeni relacijom*

$$i_k(x) = \frac{D_k(x)}{D_{k-1}(x)} \text{ za } k = 1, 2, \ldots, r,$$

gdje je D_k najveći zajednički djelitelj, kojem je vodeći koeficijent jednak jedan, svih minora stupnja k matrice A ($D_0(x) = 1$).

Dokaz. Pokazat ćemo da elementarne transformacije ne mijenjaju najveći zajednički djelitelj minora stupnja k.
1. Elementarne transformacije koje se sastoje od množenja i-tog retka (stupca) brojem $c \neq 0$ uzrokuju množenje minora koje sadrže taj redak (stupac) s brojem c. Stoga te transformacije ne mijenjaju D_k.
2. Elementarne transformacije koje se sastoje od dodavanja i-tom retku (stupcu) j-ti redak (stupac) pomnožen polinomom w ne mijenjaju minoru stupnja k ako minora stupnja k sadrži ili i-ti redak i j-ti redak ili pak ne sadrži nijedan. Ako minora stupnja k sadrži i-ti redak i ne sadrži j-ti redak, onda je možemo prikazati kao linearnu kombinaciju dviju minora stupnja k matrice A. Stoga se najveći zajednički djelitelj minora stupnja k ne mijenja. Analogno vrijedi za stupce.
3. Elementarne transformacije koje se sastoje od zamjena redaka ili stupaca također ne mijenjaju D_k. Naime, kao rezultat zamjene i-tog i j-tog retka (stupca), minora stupnja k se ne mijenja (nijedan od redaka/stupaca i, j ne pripada minori) ili promijeni samo predznak (oba retka/stupca pripadaju istoj minori) ili će pak biti zamijenjena drugom minorom matrice A stupnja k (samo jedan od redaka/stupaca i i j pripada minori). U ovom zadnjem slučaju nakon zamjene zapravo dobivamo ili neku drugu minoru stupnja k ili minoru koja je jednaka nekoj drugoj minori stupnja k pomnoženoj s -1.
Stoga ekvivalentne matrice A i A_s imaju jednake djelitelje $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Iz Smithove kanonske forme slijedi

$$D_1(x) = i_1(x),\ D_2(x) = i_1(x)i_2(x), \ldots, D_r(x) = i_1(x)i_2(x)\cdots i_r(x), \tag{5.1}$$

a iz toga slijede tražene formule. □

Iz definije 5.1.1 i teorema 5.1.2 i 5.1.5 slijedi važan korolar.

Korolar 5.1.6. *Dvije su matrice $A,\ B \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ ekvivalentne ako i samo ako imaju iste invarijantne polinome.*

5.2 Elementarni djelitelji polinomijalnih matrica

Neka je dana polinomijalna matrica $A \in \mathbb{C}^{m\times n}[x]$ ranga r sa Smithovom kanonskom formom A_s iz definicije 5.1.1. Neka je k-ti invarijantni polinom te matrice oblika

$$i_k(x) = (x - x_1)^{m(k,1)}(x - x_2)^{m(k,2)} \cdots (x - x_q)^{m(k,q)}.$$

Vrijedi $m(k, 1) \geq 0, m(k, 2) \geq 0, \ldots, m(k, q) \geq 0$ i $x_1, x_2, \ldots x_q$ su sve moguće nultočke invarijantnih polinoma $i_1, \ldots, i_r$. Iz djeljivosti polinoma i_{k+1} polinomom i_k slijedi

$$m(r, j) \geq m(r - 1, j) \geq \ldots \geq m(1, j) \text{ za } j = 1, \ldots, q.$$

Definicija 5.2.1. *Svaki od sljedećih polinoma (različiti od konstantnog)*

$$p_{11}(x) = (x - x_1)^{m(1,1)}, p_{12}(x) = (x - x_2)^{m(1,2)}, \ldots, p_{rq}(x) = (x - x_q)^{m(r,q)},$$

koji se pojavljuje u invarijantnim polinomima, nazivamo elementarnim djeliteljem matrice A.

Na primjer, elementarni djelitelji polinomijalne matrice iz primjera 5.1.3 su p i q definirani s $p(x) = x + 1$ i $q(x) = x + \frac{3}{2}$.

Elementarni djelitelji polinomijalnih matrica jedinstveno su određeni. To slijedi direktno iz jedinstvenosti invarijantnih polinoma polinomijalnih matrica. Prema korolaru 5.1.6 ekvivalentne polinomijalne matrice imaju iste elementarne djelitelje. Znajući dimenzije matrice, njen rang i elementarne djelitelje, možemo odrediti jedinstvenu Smithovu kanonsku formu matrice. Jedinstvenost Smithove kanonske forme slijedi iz teorema 5.1.5.
Uzmimo kao primjer matricu čiji su elementarni djelitelji $p_1, \ p_2, \ p_3, \ p_4, \ p_5, \ p_6$ definirani s $p_1(x) = x, \ p_2(x) = x, \ p_3(x) = x - 1, \ p_4(x) = x, \ p_5(x) = (x - 1)^2, \ p_6(x) = (x - 2)$, rang $r = 4$ i dimenzije 4×4. Forma se popunjava tako da se krene od r-tog elementa na dijagonali, tj. ispisujemo invarijantne polinome od r-tog naniže sve dok ima elementarnih djelitelja, a pritom moramo paziti na djeljivost k-tog invarijantnog polinoma $(k - 1)$-im invarijantnim polinomom. Polinomi koji preostaju imaju vrijednost 1.
Konkretno, za elementarne djelitelje koje smo uzeli za primjer, Smithova kanonska forma izgleda ovako:

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(x-1)^2(x-2) \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da imamo polinomijalnu blok-dijagonalnu matricu forme

$$A(x) = \mathrm{diag}[A_1(x), A_2(x)] = \begin{bmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Neka je $(A_k)_S$ Smithova kanonska forma matrice $A_k,\ k = 1, 2$ i neka su

$$p_{(1,1;k)}(x) = (x - x_{1,k})^{m(1,1;k)}, \dots, p_{(r(k),q(k);k)}(x) = (x - x_{q(k),k})^{m(r(k),q(k);k)}$$

njeni elementarni djelitelji.
Ukoliko invarijantne polinome matrica A_1 i A_2 možemo poredati u niz tako je k-ti polinom djeljiv $(k-1)$-im polinomom, utvrđujemo da je skup elementarnih djelitelja blok-dijagonalne matrice (5.2) unija skupova elementarnih djelitelja od $A_k,\ k = 1, 2$.

Primjer 5.2.2. *Odredimo elementarne djelitelje polinomijalne blok-dijagonalne matrice $A = diag[A_1, A_2]$ za*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}, \ A_2(x) = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}.$$

Najprije odredimo Smithovu kanonsku formu matrice A_1.
Provedemo transformaciju $P[1, 2]$ kako bismo na mjestu $(1, 1)$ dobili element koji dijeli sve ostale elemente matrice. Dobijemo sljedeće:

$$A_{11}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Nakon toga provedemo transformaciju $L[2 + 1 \times p_1],\ p_1(x) = -x$ te dobijemo

$$A_{12}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & -x^2 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Sada provedemo transformaciju $P[2 + 1 \times p_1]$ te dobijemo

$$A_{13}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Nakon provođenja transformacije $P[2,3]$, *dobijemo sljedeću polinomijalnu matricu:*

$$A_{14}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x^2 \\ 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada provedemo transformaciju $P[3 + 2 \times p_2]$, $p_2(x) = x^2$ *te dobijemo*

$$A_{15}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & x^3 \end{bmatrix}.$$

Konačno, provođenjem transformacije $L[3 + 2 \times p_1]$ *dobijemo*

$$(A_1)_S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{bmatrix}.$$

Pronađimo sada Smithovu kanonsku formu matrice A_2.
Provedemo transformaciju $P[1,2]$ *kako bismo na mjestu* $(1,1)$ *dobili element koji dijeli sve ostale elemente matrice te dobijemo*

$$A_{21}(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}.$$

Sada provedemo transformaciju $P[2 + 1 \times p_1]$, $p_1(x) = -x$ *i dobijemo sljedeću polinomijalnu matricu*

$$A_{22}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & -x^2 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}.$$

Nakon toga provedemo elementarnu transformaciju $L[2 + 1 \times p_1]$ *i dobijemo*

$$A_{23}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}.$$

Nakon provođenja transformacije $P[2,3]$, *dobijemo sljedeću polinomijalnu matricu*

$$A_{24}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x^2 \\ 0 & x-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada provedemo elementarnu transformaciju $P[3 + 2 \times p_2]$, $p_2(x) = x^2$ *i imamo*

$$A_{25}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & x^3 - x^2 \end{bmatrix}.$$

Još preostaje provesti transformaciju $L[3+2\times p_3]$, $p_3(x) = -(x-1)$ *pa dobijemo Smithovu kanonsku formu matrice* A_2*:*

$$(A_2)_S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2(x-1) \end{bmatrix}.$$

Dakle, elementarni djelitelj matrice A_1 *je* q_1 *definiran s* $q_1(x) = x^3$*, a elementarni djelitelji matrice* A_2 *su* q_2 *i* q_3 *definirani s* $q_2(x) = x^2$ *i* $q_3(x) = x - 1$*. Primijetimo da je (nakon što se naprave zamjene redaka i stupaca) matrica A ekvivalentna s diag*$[1, 1, 1, 1, x^3, x^2(x-1)]$*, a to nije Smithova forma matrice A jer nije zadovoljena djeljivost invarijantnih polinoma. Stoga provodimo postupak na zadnjem bloku, odnosno radimo elementarne transformacije na matrici diag*$[x^3, x^2(x-1)]$ *reda* 2 *kako bismo dobili Smithovu kanonsku formu matrice A.*

Korak 1.

Najprije dodajemo drugi redak prvome provođenjem transformacije $L[1 + 2 \times p_1]$*, gdje je* $p_1(x) = 1$ *te dobivamo matricu*

$$\tilde{A}_1(x) = \begin{bmatrix} x^3 & x^2(x-1) \\ 0 & x^2(x-1) \end{bmatrix}.$$

Korak 2.

Sada provodimo elementarnu transformaciju $P[2 + 1 \times p_2]$*, gdje je* $p_2(x) = -1$ *te dobijemo*

$$\tilde{A}_2(x) = \begin{bmatrix} x^3 & -x^2 \\ 0 & x^2(x-1) \end{bmatrix}.$$

Korak 3.

Nakon provođenja transformacije $P[1, 2]$ *imamo sljedeću matricu*

$$\tilde{A}_3(x) = \begin{bmatrix} -x^2 & x^3 \\ x^2(x-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Korak 4.

Sada provedemo elementarnu transformaciju $L[2+1\times p_3]$*, gdje je* $p_3(x) = x-1$ *te dobijemo*

$$\tilde{A}_4(x) = \begin{bmatrix} -x^2 & x^3 \\ 0 & x^3(x-1) \end{bmatrix}.$$

Korak 5.
Nakon provođenja transformacije $P[2 + 1 \times p_4]$, *gdje je* $p_4(x) = x$ *i transformacije* $L[1 \times (-1)]$ *dobijemo*

$$\tilde{A}_5(x) = \begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^3(x-1) \end{bmatrix}.$$

Uočimo sada da je Smithova kanonska forma blok-dijagonalne matrice A jednaka

$$A_S(x) = diag[1,\ 1,\ 1,\ 1,\ x^2,\ x^3(x-1)],$$

a elementarni djelitelji matrice A su $q_1,\ q_2,\ q_3$.

Neka je dana matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i njena odgovarajuća polinomijalna matrica $\widehat{A}$, a pritom je matrica $\widehat{A}$ definirana u poglavlju 2.2. Lako se dokaže da je polinomijalna matrica $\widehat{A}$ ranga n te zato ima n invarijantnih polinoma. Neka je

$$\widehat{A}_S(x) = \mathrm{diag}[i_1(x), i_2(x), \ldots, i_n(x)],$$

gdje su

$$i_k(x) = (x - x_1)^{m(k,1)}(x - x_2)^{m(k,2)} \cdot \ldots \cdot (x - x_q)^{m(k,q)} \text{ za } k = 1, \ldots, n, \tag{5.3}$$

s tim da su $x_1, x_2, \ldots, x_q$, $q \leq n$ svojstvene vrijednosti matrice A. Naime, iz formule (5.1) dobivamo da je $D_n = i_1 \cdot \ldots \cdot i_n$. D_n je najveći zajednički djelitelj minora reda n matrice $\widehat{A}$. S obzirom na to da imamo samo jednu takvu koja je jednaka $\det\widehat{A}$, ona je jednaka D_n do na multiplikativnu konstantu. Nultočke od D_n, odnosno polinoma $i_1, \ldots, i_n$ su dakle nultočke od $\det\widehat{A}$, a to su nultočke karakterističnog polinoma od A, odnosno svojstvene vrijednosti matrice A.

Definicija 5.2.3. *Svaki od polinoma (različit od konstantnog)*

$$p_{11}(x) = (x - x_1)^{m(1,1)},\ p_{12}(x) = (x - x_2)^{m(1,2)}, \ldots, p_{nq}(x) = (x - x_q)^{m(n,q)}$$

koji se javlja u (5.3) *nazivamo elementarnim djeliteljem matrice A.*

Ti elementarni djelitelji od A jedinstveno su određeni i određuju osnovna strukturna svojstva matrice.

5.3 Nultočke polinomijalnih matrica

U ovom poglavlju ćemo promatrati pojam nultočaka polinomijalnih matrica. Polinomijalne matrice, isto kao i polinomi imaju svoje nultočke, no kod matrica se one drugačije definiraju. Vidjet ćemo da su nultočke usko vezane uz rang matrica iz slike polinomijalne matrice.
Neka je polinomijalna matrica $A \in \mathbb{C}^{m \times n}[x]$ ranga r sa Smithovom kanonskom formom iz definicije 5.1.1. Prisjetimo se da je polinom D_r bio zadan s

$$D_r(x) = i_1(x)i_2(x) \cdot \ldots \cdot i_r(x). \tag{5.4}$$

Definicija 5.3.1. *Nultočke polinoma* (5.4) *nazivamo nultočkama polinomijalne matrice A.*

Nultočke polinomijalne matrice A možemo također definirati kao one vrijednosti varijable x za koje matrica $A(x)$ gubi puni rang. U primjeru 5.1.3, imamo

$$D_r(x) = (x+1)(x+\frac{3}{2}).$$

Stoga su nultočke matrice iz tog primjera $x_1{}^{(0)} = -1$, $x_2{}^{(0)} = -\frac{3}{2}$. Lako je utvrditi da matrica za ove vrijednosti varijable x ima rang 1, dok joj je inače rang 2.
Ako je polinomijalna matrica A kvadratna i punog ranga $r = n$, onda vrijedi

$$\det A(x) = cD_r(x) \text{ (} c \text{ je konstantni koeficijent neovisan o } x\text{)}$$

i nultočke matrice podudaraju se sa korijenima jednadžbe $\det A(x) = 0$.
Na primjer, kod matrice A_1 iz primjera 5.2.2 imamo

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^3.$$

Stoga matrica ima nultočku $x = 0$ mnogostrukosti 3. S druge strane, $D_r(x) = x^3$ za A_1.

Teorem 5.3.2. *Neka je dana polinomijalna matrica $A \in \mathbb{C}^{m \times n}[x]$ s rangom $r \leq min\{m, n\}$. Onda vrijedi*

$$rang A(x) = \begin{cases} r, & x \notin \sigma_A \\ r - d_i, & x = x_i \in \sigma_A \end{cases}$$

gdje je σ_A skup nultočaka matrice A i d_i je broj različitih elementarnih djelitelja koji sadrže faktor $x - x_i$.

Dokaz. Znamo da je polinomijalna matrica A_S dobivena iz A elementarnim transformacijama za polinomijalne matrice. Međutim, to znači da je $A_S(x)$ za bilo koji x dobivena klasičnim elementarnim transformacijama iz $A(x)$ pa su $A(x)$ i $A_S(x)$ ekvivalentne matrice i imaju isti rang. Dakle, rang od $A(x)$ vrlo jednostavno možemo očitati iz matrice $A_S(x)$. Prema definiciji nultočke slijedi da matrica A ne gubi puni rang ako na mjesto varijable x stavimo broj koji ne pripada skupu σ_A, dakle ostaje $\text{rang}A(x) = r$ za $x \notin \sigma_A$. Ako invarijantni polinom sadrži faktor $x - x_i$, onda je jednak nuli za $x = x_i$. Stoga je $\text{rang}A(x_i) = r - d_i, x_i \in \sigma_A$ zbog toga što je broj polinoma koji sadrže faktor $x - x_i$ jednak broju različitih elementarnih djelitelja koji sadrže x_i. □

Primjer 5.3.3. *Uzmimo za primjer polinomijalnu matricu*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x(x-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x(x-1)^2(x-2) \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je $A_S = A$. Vidimo da matrica A ima jedan elementarni djelitelj koji sadrži faktor $x - 2$, dva elementarna djelitelja koji sadrže faktor $x - 1$ i tri elementarna djelitelja koji sadrže faktor x. U skladu s time imamo

$$rangA(2) = 3, \; rangA(1) = 2, \; rangA(0) = 1.$$

Napomena 5.3.4. *Unimodularna matrica $U \in \mathbb{R}^{n\times n}[x]$ nema nultočke zato što je $detU = c$, gdje je c konstanta neovisna o varijabli x.*

Teorem 5.3.5. *Proizvoljnu nekvadratnu polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$ punog ranga koja nema nultočke možemo zapisati na sljedeći način:*

$$A(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} P(x), & m < n \\ L(x) \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, & m > n, \end{cases} \tag{5.5}$$

gdje su $P \in \mathbb{R}^{n\times n}[x]$ i $L \in \mathbb{R}^{m\times m}[x]$ unimodularne matrice.

Dokaz. Ako je $m < n$ i matrica nema nultočaka, onda primjenjujući elementarne transformacije na stupcima, možemo matricu svesti na formu $\begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}$. Naime, koristeći algoritam iz teorema 4.1.5 na dijagonali dobivamo konstantne polinome te pomoću njih možemo poništiti sve elemente izvan dijagonale. Slično, ako je $m > n$ i matrica nema nultočke, možemo je svesti na matricu $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ primjenjujući elementarne transformacije nad retcima. □

Teorem 5.3.6. *Proizvoljnu polinomijalnu matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}[x]$ ranga $r \leq min\{m, n\}$ koja ima nultočke možemo prikazati kao produkt matrica B i C, tj.*

$$A(x) = B(x)C(x),$$

gdje je B polinomijalna matrica koja ima isti skup nultočaka kao i A, dok polinomijalna matrica C nema nultočaka.
Konkretno vrijedi $B(x) = L^{-1}(x)diag[i_1(x), \ldots, i_r(x), 0, \ldots, 0] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i

$$C(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} P^{-1}(x), & n > m \\ P^{-1}(x), & n = m \\ \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1}(x), & n < m \end{cases}. \tag{5.6}$$

Pritom su $L \in \mathbb{R}^{m\times m}[x]$ i $P \in \mathbb{R}^{n\times n}[x]$ produkti matrica elementarnih transformacija nad retcima, odnosno stupcima, koje svode matricu A na njenu Smithovu kanonsku formu, tj.

$$A_S(x) = L(x)A(x)P(x), \tag{5.7}$$

a $i_1, \ldots, i_r$ su invarijantni polinomi matrice A.

Dokaz. Ako pomnožimo (5.7) slijeva s $L^{-1}(x)$ i zdesna s $P^{-1}(x)$, dobijemo

$$A(x) = L^{-1}(x)A_S(x)P^{-1}(x).$$

Budući da je

$$A_S(x) = \begin{cases} \mathrm{diag}[i_1(x), \ldots, i_r(x), 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix}, & n > m \\ \mathrm{diag}[i_1(x), \ldots, i_r(x), 0, \ldots, 0], & n = m \\ \mathrm{diag}[i_1(x), \ldots, i_r(x), 0, \ldots, 0] \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}, & n < m \end{cases},$$

onda vrijedi

$$A(x) = L^{-1}(x)A_S(x)P^{-1}(x) = B(x)C(x).$$

□

Poglavlje 6

Frobeniusova kanonska forma

6.1 Ekvivalencija polinomijalnih matrica prvog stupnja

U ovom poglavlju susrećemo se s pojmom sličnosti matrica, a dokazat ćemo neke zanimljive teoreme koji povezuju pojam sličnosti i ekvivalencije te ćemo vidjeti povezanost sličnosti matrica i karakterističnih polinoma matrice.

Definicija 6.1.1. *Za dvije kvadratne matrice $A,\ B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ kažemo da su slične ako i samo ako postoji nesingularna matrica $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ takva da vrijedi*

$$B = P^{-1}AP$$

i tu matricu P zovemo transformacijskom matricom sličnosti.

Teorem 6.1.2. *Slične matrice imaju isti karakteristični polinom, tj.*

$$det[xI - B] = det[xI - A].$$

Dokaz. Uzimajući u obzir definiciju sličnih matrica, imamo

$$\begin{aligned} \det[xI - B] &= \det[xP^{-1}P - P^{-1}AP] = \det[P^{-1}(xI - A)P] \\ &= \det P^{-1} \det[xI - A] \det P = \det[xI - A], \end{aligned}$$

gdje smo koristili $\det P^{-1} = (\det P)^{-1}$. □

Sada ćemo dokazati jedan važan teorem koji ćemo koristiti u sljedećem potpoglavlju.

Teorem 6.1.3. *Polinomijalne matrice $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ su ekvivalentne ako i samo ako su matrice A i B slične.*

Dokaz. Najprije ćemo pokazati kako sličnost matrica A i B implicira ekvivalentnost matrica $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$. Ako su matrice A i B slične, onda postoji nesingularna matrica P takva da vrijedi $B = P^{-1}AP$ pa možemo dobiti sljedeće:

$$\widehat{B}(x) = xI - B = xI - P^{-1}AP = P^{-1}[xI - A]P = P^{-1}\widehat{A}(x)P.$$

Relacija koju smo dobili je poseban slučaj definicije 4.1.2 pri čemu je $L = P^{-1}$, a P je konstantna matrica. Stoga su polinomijalne matrice $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ ekvivalentne.

Sada ćemo pokazati drugi smjer tvrdnje, odnosno ako su $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ ekvivalentne, onda su A i B slične. Pod pretpostavkom da su $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ ekvivalentne, imamo

$$\widehat{B}(x) = xI - B = L(x)[xI - A]P(x) = L(x)\widehat{A}(x)P(x) \tag{6.1}$$

i pritom su L i P unimodularne matrice. Determinanta matrice L različita je od nule i ne ovisi o varijabli x. Uvedimo oznaku $Q = L^{-1}$. Tada je Q također polinomijalna matrica. Dijeljenjem slijeva matrice Q s $\widehat{A}$ i dijeljenjem zdesna matrice P s $\widehat{B}$, dobijemo

$$\begin{aligned} Q(x) &= [xI - A]Q_1(x) + Q_0 \\ P(x) &= P_1(x)[xI - B] + P_0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

gdje su Q_1 i P_1 polinomijalne matrice, a Q_0 i P_0 ne ovise o varijabli x. Pomnožimo li (6.1) slijeva s Q, dobijemo

$$Q(x)[xI - B] = [xI - A]P(x).$$

Sada množimo prvu jednakost u (6.2) zdesna s $[xI-B]$, a drugu slijeva s $[xI-A]$ i dobivamo

$$\begin{aligned} Q(x)[xI - B] &= [xI - A]Q_1(x)[xI - B] + Q_0[xI - B], \\ [xI - A]P(x) &= [xI - A]P_1(x)[xI - B] + [xI - A]P_0. \end{aligned}$$

S obzirom na to da je $Q(x)[xI - B] = [xI - A]P(x)$, izjednačimo gornje dvije jednakosti pa dobijemo

$$[xI - A]Q_1(x)[xI - B] + Q_0[xI - B] = [xI - A]P_1(x)[xI - B] + [xI - A]P_0,$$

odnosno

$$[xI - A][Q_1(x) - P_1(x)][xI - B] = [xI - A]P_0 - Q_0[xI - B]. \tag{6.3}$$

Primijetimo da mora vrijediti $Q_1 = P_1$, a to je zato što bi inače lijeva strana jednakosti (6.3) bila matrični polinom stupnja barem dva, a desna strana matrični polinom stupnja najviše jedan. Nakon što smo to uzeli u obzir, imamo

$$0 = [xI - A]P_0 - Q_0[xI - B],$$

odnosno
$$Q_0[xI - B] = [xI - A]P_0.$$
Dijeljenjem slijeva matrice L s $[xI - B]$ dobivamo
$$L(x) = [xI - B]L_1(x) + L_0,$$
gdje je L_1 polinomijalna matrica, a L_0 matrica neovisna o varijabli x. Pokazat ćemo da su matrice Q_0 i L_0 nesingularne matrice koje zadovoljavaju uvjet $Q_0L_0 = I$.
Kada u jednakost $Q(x)L(x) = I$ uvrstimo
$$Q(x) = [xI - A]Q_1(x) + Q_0$$
i
$$L(x) = [xI - B]L_1(x) + L_0,$$
dobijemo sljedeće
$$\begin{aligned} I - Q_0L_0 = Q(x)L(x) - Q_0L_0 &= [(xI - A)Q_1(x) + Q_0][(xI - B)L_1(x) + L_0] - Q_0L_0 \\ &= [xI - A]Q_1(x)[xI - B]L_1(x) + Q_0[xI - B]L_1(x) \\ &+ [xI - A]Q_1(x)L_0 \\ &= [xI - A]Q_1(x)[xI - B]L_1(x) + [xI - A]P_0L_1(x) \\ &+ [xI - A]Q_1(x)L_0 \\ &= [xI - A]V(x), \end{aligned} \tag{6.4}$$
gdje je $V(x) = \Big(Q_1(x)[xI - B]L_1(x) + P_0L_1(x) + Q_1(x)L_0\Big)$. Ako je V ne-nul polinomijalna matrica, onda ćemo na desnoj strani jednakosti imati polinomijalnu matricu stupnja barem jedan, a na lijevoj imamo konstantnu polinomijalnu matricu. Dakle, obje strane mogu biti samo nul matrice pa je $Q_0L_0 = I$.
Iz toga slijede nesingularnosti matrica Q_0 i L_0, kao i jednakost $L_0 = Q_0^{-1}$.
Kada pomnožimo $Q_0[xI - B] = [xI - A]P_0$ slijeva s Q_0^{-1}, dobijemo
$$[xI - B] = L_0[xI - A]P_0. \tag{6.5}$$
Ako u (6.5) uvrstimo $x = 0$, slijedi $B = L_0AP_0$. Ako dobivenu jednakost oduzmemo od (6.5), imamo $xI = xL_0P_0$. Zatim uvrstimo $x = 1$ i dobijemo $L_0P_0 = I$.
Iz tih relacija onda dobijemo da su A i B slične. □

Sljedeći teorem je također vrlo važan za dobivanje rezultata u sljedećem potpoglavlju.

Teorem 6.1.4. *Matrice A i B su slične ako i samo ako matrice $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ imaju iste invarijantne polinome.*

Dokaz. Prema korolaru 5.1.6 dvije su matrice ekvivalentne ako i samo ako imaju iste invarijantne polinome. Iz teorema 6.1.3 slijedi da su polinomijalne matrice $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ ekvivalentne ako i samo ako su matrice A i B slične. Stoga su matrice A i B slične ako i samo ako $\widehat{A}$ i $\widehat{B}$ imaju iste invarijantne polinome. □

6.2 Računanje Frobeniusove kanonske forme kvadratnih polinomijalnih matrica

Neka je dan polinom p definiran s $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$. Definirajmo matricu F dimenzija $n \times n$ pridruženu polinomu p s

$$F(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

Kažemo da matrica (6.6) ima Frobeniusovu kanonsku formu (ili normalnu kanonsku formu). Lako vidimo da vrijedi

$$\det[I_nx - F(p)] = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0. \tag{6.7}$$

Naime, $\det[I_nx - F(p)] = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{vmatrix}.$

Kako bismo izračunali danu determinantu, najprije ćemo zadnji stupac matrice $\widehat{F(p)}$ pomnožen sa x dodati predzadnjem, zatim predzadnji stupac pomnožen sa x dodati stupcu prije njega. Nastavimo analogno te dobijemo matricu koja na mjestu $(n, 1)$ ima polinom p, iznad glavne dijagonale -1, a na svim ostalim mjestima nule. Kako bismo izračunali determinantu, razvijemo matricu po elementu na mjestu $(n, 1)$ te dobijemo sljedeće:

$$\begin{aligned} \det[I_nx - F(p)] &= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0)(-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{vmatrix} \\ &= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0)(-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0. \end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je polinom iz (6.7) jedini nekonstantan invarijantni polinom matrice $\widehat{F(p)}$. Brisanjem prvog stupca i n-tog retka u matrici

$$[I_n x - F(p)] = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{bmatrix},$$

dobijemo minoru M_{n1} koja je jednaka $(-1)^{n-1}$. Uzimajući to u obzir, znamo da je najveći zajednički djelitelj svih minora matrice $\widehat{F(p)}$ stupnja $n-1$ jednak 1, tj. $D_{n-1}(x) = 1$. Iz teorema 5.1.5 slijedi da je polinom iz (6.7) jedini invarijantni polinom matrice $\widehat{F(p)}$ koji nije konstantan.
Neka je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $i_1, \dots, i_n$ invarijantni polinomi polinomijalne matrice $\widehat{A}$ pri čemu su $i_1, \dots, i_p$ konstantni polinomi, a $i_{p+1}, \dots, i_n$ polinomi stupnja barem jedan. Matrica $\widehat{A}$ reducirana na Smithovu kanonsku formu izgleda ovako:

$$\widehat{A}_S(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_{p+1}(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_n(x) \end{bmatrix}.$$

Neka su $F(i_{p+1}), \dots, F(i_n)$ matrice oblika (6.6) pridružene invarijantnim polinomima $i_{p+1}, \dots, i_n$. Definirajmo matricu F_A s

$$F_A = \begin{bmatrix} F(i_{p+1}) & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & F(i_{p+2}) & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F(i_n) \end{bmatrix}.$$

Matrica F_A elementarnim se transformacijama može svesti na matricu $\widehat{A}$. Matrice $\widehat{F_A}$ i $\widehat{A}$ imaju iste invarijantne polinome, a po korolaru 5.1.6 su onda F_A i A slične. Dakle, postoji nesingularna matrica P takva da vrijedi

$$A = PF_A P^{-1}.$$

Matricu F_A zovemo Frobeniusovom kanonskom formom ili normalnom kanonskom formom kvadratne matrice A. Stoga smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 6.2.1. *Za svaku matricu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ postoji nesingularna matrica $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tako da vrijedi*

$$A = PF_A P^{-1}.$$

U sljedećem ćemo primjeru vidjeti kako dobiti Frobeniusovu kanonsku formu matrice.

Primjer 6.2.2. *Dana je sljedeća matrica,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sada matrici

$$[xI_3 - A] = \begin{bmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 1 \\ -1 & 0 & x-3 \end{bmatrix}$$

pronađemo njenu Smithovu kanonsku formu. Proveli smo sljedeće elementarne transformacije nad retcima i stupcima: $L[1,2]$, $P[1,3]$, $L[3{+}1{\times}p_1]$, $P[2{+}1{\times}p_2]$, $L[2,3]$, $P[2,3]$, $L[3+2\times p_3]$, $P[3+2\times p_4]$, $P[2\times(-1)]$ $P[3\times(-1)]$ *, gdje su* p_i*,* $i = 1,\dots,4$ *polinomi definirani s* $p_1(x) = -(x-3)$, $p_2(x) = -(x-2)$, $p_3(x) = (x-1)$, $p_4(x) = (x-2)(3-x)$*. Dobili smo sljedeću matricu:*

$$[xI_3 - A]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)(x-2)(x-3) \end{bmatrix}.$$

Jedini nekonstantan invarijantni polinom matrice A je

$$i_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Stoga je Frobeniusova kanonska forma matrice A

$$F_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}.$$

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb (2008).

[2] T. Kaczorek, *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory*, Springer Science & Business Media, (2007).

[3] S. Krešić-Jurić, *Algebarske strukture*, Skripta, PMF-Odjel za matematiku, Sveučilište u Splitu (2013).

[4] I. Nakić, *Diskretna matematika*, Skripta, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu (2009), dostupno na: http://web.math.hr/nastava/komb/predavanja/predavanja.pdf.

[5] B. J. Pavković i B. Dakić, *Polinomi*, Školska knjiga, (1988).

Sažetak

U ovom smo radu opisali neke osnovne pojmove, teoreme i rezultate vezane uz polinomijalne matrice. Najprije smo definirali poznate pojmove poput polinoma, matrice i osnovnih operacija nad njima, a nakon toga smo uveli definiciju polinomijalne matrice i osnovnih operacija nad polinomijalnim matricama. Opisali smo operacije zbrajanja, množenja i množenja skalarom, a opisani su mnogi važni teoremi vezani uz dijeljenje, između ostalog i mali Bézoutov teorem koji smo poopćili. Također smo vidjeli mnoge primjere koji potkrepljuju dokazane teoreme te alogritme koji proizlaze iz tih teorema.
Objasnili smo linearnu nezavisnost polinomijalnih vektora te definirali baze za prostor takvih vektora i rang polinomijalnih matrica. Vidjeli smo da su sve te definicije analogne onima u klasičnom vektorskom prostoru gdje nemamo polinomijalne vektore. Naveli smo primjere linearno nezavisnih, kao i linearno zavisnih polinomijalnih vektora. Uveli smo važan pojam Smithove kanonske forme te invarijantnih polinoma koje smo koristili i u narednim cjelinama. Definirali smo ekvivalenciju polinomijalnih matrica te pokazali vezu između sličnosti klasičnih matrica i pripadnih polinomijalnih matrica prvog stupnja.
Od novih pojmova smo također vidjeli što su to elementarni djelitelji te nultočke polinomijalne matrice, a sve to zapravo proizlazi iz definicije Smithove kanonske forme i definicije invarijantnih polinoma. Na samom kraju objasnili smo Frobeniusovu kanonsku formu polinomijalne matrice te vidjeli kako ju dobiti, kao i neke poveznice između polinomijalne matrice i njezine Frobeniusove kanonske forme.

Summary

In this thesis we described some basic terms, theorems and results about polynomial matrices. First of all, we had to define some terms which we had already known like polynomials itself, matrices and some basic operations on polynomials and matrices and after that, we gave the definition of the polynomial matrix. We described the sum of two polynomial matrices, the product of two polynomial matrices and the product of a polynomial matrix and a scalar. After those basic definitions we proved some important theorems about quotients and remainders and also gave some examples to confirm them. There is also an important theorem called Bézout's theorem which we had generalized.

We described linear independence of polynomial vectors and basis for them and also defined the rank of a polynomial matrix. We have noticed that those definitions are quite similar to those of 'classic' matrices. We showed an example where were given the polynomial vectors which were linearly independent and in the other example they were linearly dependent. We also gave the definition of Smith canonical form of polynomial matrices and the definition of invariant polynomials which we had also used in other chapters. We gave definitions of equivalent matrices and explained the connection between similarity of classical matrices and their polynomial matrices of the first degree.

Approaching to the end of the thesis, we defined zeros and elementary divisors of polynomial matrices and we saw that all these definitions are connected with the invariant polynomials. In the end, we defined Frobenius canonical form of a polynomial matrix and also saw some links between a polynomial matrix and its Frobenius canonical form.

Životopis

Rođena sam 4.3.1992. u Travniku u Bosni i Hercegovini. Za vrijeme Domovinskog rata živjela sam s majkom u izbjeglištvu u Trogiru, a 1998. smo s ocem doselili u Koprivnicu gdje smo ostali do sada. U razoblju 1999.-2007. pohađala sam više osnovnih škola u Koprivnici zbog čestog mijenjanja adrese, a 2004. godine upisala sam osnovnu glazbenu školu "Fortunat Pintarić" u Koprivnici s glavnim predmetom klavir.
2007. godine upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju "Fran Galović" u Koprivnici. Za vrijeme gimnazijskog školovanja išla sam na mnoga školska i županijska natjecanja iz matematike, fizike, kemije i hrvatskog jezika, a 2011. godine osvojila sam 5. mjesto na državnom natjecanju iz hrvatskog jezika u Opatiji.
2011. godine sam maturirala, a nakon zavšene gimnazije upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Iste godine upisujem i srednju glazbenu školu "Vatroslav Lisinski" u Zagrebu s glavnim predmetom orgulje. 2014. godine završila sam preddiplomski studij Matematika i upisala diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. 2015. godine održala sam maturalni koncert i završila srednju glazbenu naobrazbu u klasi profesorice Jasne Šumak-Picek. Sudjelovala sam na mnogim seminarima o orguljaškoj glazbi, a osim koncertiranja, bavim se i skladanjem te improvizacijom na orguljama.