SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Magdalena Bašić

CANTOROV SKUP

Diplomski rad

Voditelj rada:
Izv. prof. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat ćemo Cantorov skup i neka njegova svojstva, ali i općenitije, proučavat ćemo totalno nepovezane kompaktne metričke prostore i njihova svojstva.

U prvom poglavlju definirat ćemo neke bitne pojmove u metričkim i topološkim prostorima, između ostalog povezanost, kompaktnost, Hausdorffove i normalne prostore te dokazati neke tvrdnje s tim u vezi.

U drugom poglavlju proučavat ćemo pojam separiranih skupova u topološkom prostoru te ćemo se posebno koncentrirati na kompaktne Hausdorffove prostore i dokazati neke rezultate vezane uz separiranost skupova u takvim prostorima. Na kraju ovog poglavlja dolazimo do jedne bitne karakterizacije totalno nepovezanih kompaktnih metričkih prostora.

U trećem poglavlju uvest ćemo pojam Cantorovog skupa. Nadalje, proučavat ćemo svojstva tog skupa, kao i svojstva Cantorovog prostora kao primjera netrivijalnog totalno nepovezanog kompaktnog metričkog prostora.

Poglavlje 1

Metrički i topološki prostori

1.1 Metrički prostori

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup, $X \neq \emptyset$ te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x, y, z \in X$ vrijedi:*

1) $d(x, y) \geq 0$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x)$

4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(nejednakost trokuta)*

Tada za d kažemo da je ***metrika*** *na X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je* ***metrički prostor****.*

Primjer 1.1.2.

1. *Funkcija $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$d(x, y) = |y - x|, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

je metrika na $\mathbb{R}$. Svojstva 1) - 3) iz definicije metrike očito vrijede, a nejednakost trokuta vrijedi jer za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ imamo

$$d(x, z) = |z - x| = |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x| = d(y, z) + d(x, y).$$

Za d kažemo da je ***euklidska metrika na*** *$\mathbb{R}$.*

2. *Općenitije, neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}.$$

Za d kažemo da je ***euklidska metrika na*** *$\mathbb{R}^n$. Može se pokazati da je d zaista metrika na $\mathbb{R}^n$. Uočimo da se za $n = 1$ ova metrika podudara s metrikom iz prvog dijela ovog primjera.*

Primjer 1.1.3. *Neka je X skup, $X \neq \emptyset$ te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x = y, \\ 1, & \text{ako je } x \neq y. \end{cases}$$

Lako se provjeri da je d metrika na skupu X. Za d kažemo da je ***diskretna metrika*** *na X.*

Definicija 1.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X$, $r > 0$. Definiramo*

$$K_d(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Kažemo da je $K_d(x_0, r)$ ***otvorena kugla*** *oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d). Ako je jasno o kojoj se metrici radi, onda umjesto $K_d(x_0, r)$ pišemo $K(x_0, r)$.*

Definicija 1.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U* ***otvoren skup u metričkom prostoru*** *(X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K_d(x, r) \subseteq U$.*

Definicija 1.1.6. *Neka su A i X skupovi te neka je $U : A \to \mathcal{P}(X)$ funkcija. Tada za U kažemo da je* ***indeksirana familija*** *podskupova od X. Za $\alpha \in A$, umjesto $U(\alpha)$, pišemo U_α. Dakle, $U_\alpha \subseteq X$, za svaki $\alpha \in A$. Indeksiranu familiju U označavamo i s $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Nadalje, definiramo*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \{x \in X \mid \exists\, \alpha \in A, x \in U_\alpha\}.$$

Sljedeća propozicija lako se dokazuje:

Propozicija 1.1.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1) *$\emptyset, X$ su otvoreni skupovi u (X, d)*

2) *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je U_α otvoren skup u (X, d) za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).*

3) *Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Propozicija 1.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x_0 \in X, r > 0$. Tada je $K(x_0, r)$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Ako je $x \in K(x_0, r)$, definiramo $s = r - d(x, x_0)$. Imamo $s > 0$ te vrijedi $K(x, s) \subseteq K(x_0, r)$. Naime, ako je $y \in K(x, s)$, onda je

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < s + d(x, x_0) = r$$

pa je $y \in K(x_0, r)$. Time je tvrdnja dokazana. □

Primjer 1.1.9. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Tada za sve $x_0 \in \mathbb{R}$ i $r > 0$ vrijedi $K(x_0, r) = \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\begin{aligned} x \in K(x_0, r) &\Leftrightarrow d(x, x_0) < r \\ &\Leftrightarrow |x - x_0| < r \\ &\Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \\ &\Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \\ &\Leftrightarrow x \in \langle x_0 - r, x_0 + r\rangle. \end{aligned}$$

Dakle, svaka otvorena kugla u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, d)$ je oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Obratno, svaki skup oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ je otvorena kugla u $(\mathbb{R}, d)$ jer iz dokazanog slijedi da je

$$K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right) = \langle a, b\rangle.$$

Posebno, skupovi oblika $\langle a, b\rangle$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ su otvoreni u $(\mathbb{R}, d)$. Nadalje, ako je $a \in \mathbb{R}$, onda je $\langle -\infty, a\rangle$ otvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$ jer je

$$\langle -\infty, a\rangle = \bigcup_{x<a} \langle x, a\rangle.$$

Analogno zaključujemo da je skup $\langle a, \infty\rangle$ otvoren u $(\mathbb{R}, d)$, za svaki $a \in \mathbb{R}$.

1.2 Topološki prostori

Definicija 1.2.1. *Neka je X skup, $X \neq \emptyset$ te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijedi:*

1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2) Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X takva da je $U_\alpha \in \mathcal{T}$, za svaki $\alpha \in A$, onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

3) Ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Tada familiju $\mathcal{T}$ nazivamo ***topologija*** *na X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***topološki prostor****. Za elemente od $\mathcal{T}$ kažemo da su* ***otvoreni skupovi u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$.*

Ako je (X, d) metrički prostor, onda familiju svih otvorenih skupova u (X, d) označavamo s $\mathcal{T}_d$. Uočimo da je, prema Propoziciji 1.1.7, $\mathcal{T}_d$ topologija na X. Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je **topologija inducirana metrikom** d. Uočimo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Primjer 1.2.2. *Neka je X skup, $X \neq \emptyset$. Tada je $\{\emptyset, X\}$ topologija na skupu X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je indiskretna topologija na X. Pretpostavimo da skup X ima bar dva elementa, neka su to a i b. Tvrdimo da ne postoji metrika d na X takva da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$. Pretpostavimo suprotno, tj. da takva metrika d postoji. Promotrimo skup $U = K(a, d(a, b))$. Prema Propoziciji 1.1.8 U je otvoren u (X, d). Nadalje, U sadrži a, pa je $U \neq \emptyset$. Vidimo i da $b \notin U$, pa je $U \neq X$. Dakle, $U \notin \{\emptyset, X\}$, ali $U \in \mathcal{T}_d$ jer je otvoren u (X, d), a ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$.*

Definicija 1.2.3. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **metrizabilan** ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Nije svaki metrički prostor metrizabilan. Npr. ako je X skup koji ima bar dva elementa, onda topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan (primjer 1.2.2).

Definicija 1.2.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Neka je*

$$\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

*Za $\mathcal{S}$ kažemo da je **relativna topologija** na Y određena topologijom $\mathcal{T}$. Za uređeni par $(Y, \mathcal{S})$ kažemo da je **potprostor topološkog prostora** $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 1.2.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $Y \subseteq X$. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ relativna topologija na Y. Tada je $\mathcal{S}$ topologija na Y. Drugim riječima, svaki potprostor topološkog prostora je i sam topološki prostor.*

Dokaz. Imamo

$$\mathcal{S} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

Vrijedi $\emptyset = \emptyset \cap Y$ i $\emptyset \in \mathcal{T}$ pa je $\emptyset \in \mathcal{S}$. Također, $Y = X \cap Y$ i $X \in \mathcal{T}$, pa je $Y \in \mathcal{S}$.

Pretpostavimo da je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od Y takva da je $V_\alpha \in \mathcal{S}$, za svaki $\alpha \in A$. Tada za svaki $\alpha \in A$ postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je $V_\alpha = U_\alpha \cap Y$. Vrijedi

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap Y$$

te

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$$

pa je

$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \mathcal{S}.$$

Neka su $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$. Vrijedi

$$V_1 = U_1 \cap Y, \ V_2 = U_2 \cap Y,$$

gdje su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Imamo

$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y$$

i $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ pa je $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{S}$. $\square$

1.3 Povezanost

Definicija 1.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za uređeni par (U, V) kažemo da je* ***separacija topološkog prostora*** *$(X, \mathcal{T})$ ako vrijedi sljedeće:*

$$U, V \in \mathcal{T},\ U \neq \emptyset,\ V \neq \emptyset,\ U \cap V = \emptyset,\ U \cup V = X.$$

Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je ***povezan*** *ako ne postoji separacija tog topološkog prostora.*

Definicija 1.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Neka su $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je*

$$U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ U \cap V \cap A = \emptyset,\ A \subseteq U \cup V.$$

Tada za uređeni par (U, V) kažemo da je ***separacija skupa*** *A u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 1.3.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Kažemo da je A* ***povezan skup u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$ ako ne postoji separacija od A u $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 1.3.4. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na A. Tada je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $(A, \mathcal{S})$ povezan topološki prostor.*

Dokaz. Prvo dokazujemo tvrdnju da iz činjenice da je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ slijedi da je $(A, \mathcal{S})$ povezan topološki prostor. Pretpostavimo da $(A, \mathcal{S})$ nije povezan topološki prostor. Tada postoji separacija topološkog prostora $(A, \mathcal{S})$, tj. postoje V_1, $V_2 \in \mathcal{S}$ za koje vrijedi

$$V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ A = V_1 \cup V_2.$$

Iz činjenice V_1, $V_2 \in \mathcal{S}$ slijedi da postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $V_1 = U_1 \cap A$, $V_2 = U_2 \cap A$, pa vrijedi

$$U_1 \cap A \neq \emptyset,\ U_2 \cap A \neq \emptyset,\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset,\ A \subseteq U_1 \cup U_2,$$

tj. (U_1, U_2) je separacija od A u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. To znači da A nije povezan u $(X, \mathcal{T})$, čime smo dokazali tvrdnju.

Dokažimo i obrat na sličan način. Pretpostavimo da A nije povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoji separacija od A u $(X, \mathcal{T})$, tj. postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ za koje vrijedi

$$U_1 \cap A \neq \emptyset,\ U_2 \cap A \neq \emptyset,\ U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset,\ A \subseteq U_1 \cup U_2.$$

Stavimo $V_1 = U_1 \cap A, V_2 = U_2 \cap A$, pa vrijedi $V_1, V_2 \in \mathcal{S}$ te

$$V_1 \neq \emptyset,\ V_2 \neq \emptyset,\ V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ A = V_1 \cup V_2.$$

Iz ovoga slijedi da je (V_1, V_2) separacija topološkog prostora $(A, \mathcal{S})$, što znači da $(A, \mathcal{S})$ nije povezan. □

Propozicija 1.3.5. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija povezanih skupova u $(X, \mathcal{T})$ takva da je $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ za sve $\alpha, \beta \in A$. Tada je $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji separacija (U, V) od $\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$. Neka je $\alpha_0 \in A$. Tvrdimo da skup S_{α_0} ne siječe istovremeno U i V. Pretpostavimo suprotno. Tada je $S_{\alpha_0} \cap U \neq \emptyset$ i $S_{\alpha_0} \cap V \neq \emptyset$. Imamo

$$S_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha \subseteq U \cup V \text{ te}$$

$$U \cap V \cap S_{\alpha_0} \subseteq U \cap V \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha\Big) = \emptyset.$$

Iz ovoga slijedi da je (U, V) separacija od S_{α_0}, što je kontradikcija s činjenicom da je S_{α_0} povezan.
Dakle, S_{α_0} ne siječe istovremeno U i V pa iz $S_{\alpha_0} \subseteq U \cup V$ slijedi $S_{\alpha_0} \subseteq U$ ili $S_{\alpha_0} \subseteq V$.
Dakle, za svaki $\alpha_0 \in A$ vrijedi $S_{\alpha_0} \subseteq U$ ili $S_{\alpha_0} \subseteq V$. Fiksirajmo neki $\alpha_0 \in A$. Imamo dva slučaja:

1. slučaj:

$$S_{\alpha_0} \subseteq U.$$

Neka je $\alpha \in A$. Tada je $S_\alpha \subseteq U$ ili $S_\alpha \subseteq V$. Kada bi vrijedilo $S_\alpha \subseteq V$, onda bismo imali $S_{\alpha_0} \cap S_\alpha \subseteq U \cap V$, što bi zajedno s $S_{\alpha_0} \cap S_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in A} S_\beta$ dalo

$$S_{\alpha_0} \cap S_\alpha \subseteq U \cap V \cap \bigcup_{\beta \in A} S_\beta = \emptyset,$$

tj. imali bismo $S_{\alpha_0} \cap S_\alpha = \emptyset$, a to je nemoguće prema pretpostavci propozicije. Dakle $S_\alpha \subseteq U, \forall \alpha \in A$. Slijedi $\bigcup\limits_{\alpha \in A} S_\alpha \subseteq U$. Stoga je

$$\begin{aligned} V \cap (\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha) &= V \cap ((\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha) \cap U) = \\ &= U \cap V \cap (\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je (U, V) separacija od $\bigcup\limits_{\alpha \in A} S_\alpha$.

2. slučaj:

$$S_{\alpha_0} \subseteq V.$$

Posve analogno kao u 1. slučaju dolazimo do istog zaključka.
Zaključak: $\bigcup\limits_{\alpha \in A} S_\alpha$ je povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Korolar 1.3.6. *Ako su A i B povezani skupovi u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $A \cap B \neq \emptyset$, onda je $A \cup B$ povezan skup.*

Definicija 1.3.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $x \in X$. Definiramo*

$$C_x = \bigcup_{\substack{P \text{povezan} \\ x \in P}} P$$

Za C_x kažemo da je ***komponenta povezanosti točke x u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$.*

Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $x \in X$, onda je $\{x\}$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Naime, kada bi (U, V) bila separacija skupa $\{x\}$, onda bi vrijedilo

$$U \cap \{x\} \neq \emptyset, \ V \cap \{x\} \neq \emptyset \ \text{ (tj. } x \in U \text{ i } x \in V)$$

i

$$U \cap V \cap \{x\} = \emptyset,$$

što je očito nemoguće.

Stoga je $\{x\} \subseteq C_x$, tj. $x \in C_x$. Iz definicije od C_x i propozicije 1.3.5 slijedi da je C_x povezan skup.

Propozicija 1.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su $x, y \in X$. Tada je $C_x = C_y$ ili $C_x \cap C_y = \emptyset$*

Dokaz. Pretpostavimo da je
$$C_x \cap C_y \neq \emptyset.$$
Tada je prema korolaru 1.3.6 $C_x \cup C_y$ povezan skup. Stoga iz $x \in C_x \cup C_y$ slijedi
$$C_x \cup C_y \subseteq C_x$$
(prema definiciji od C_x) te isto tako iz $y \in C_x \cup C_y$ slijedi
$$C_x \cup C_y \subseteq C_y.$$
Imamo dakle $C_y \subseteq C_x$ i $C_x \subseteq C_y$ pa je
$$C_x = C_y.$$
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Definicija 1.3.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $F \subseteq X$. Za skup F kažemo da je* ***zatvoren u topološkom prostoru*** *$(X, \mathcal{T})$ ako je $X \backslash F$ otvoren u $(X, \mathcal{T})$.*

Propozicija 1.3.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Vrijedi:*

1) $\emptyset$ i X su zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$.

2) Neka je $(F_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija zatvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

3) Neka su F i G zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $F \cup G$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. 1) Očito.

2) Vrijedi $(\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha)^C = \bigcup\limits_{\alpha \in A} {F_\alpha}^C$. Za svaki $\alpha \in A$ vrijedi ${F_\alpha}^C \in \mathcal{T}$. Prema definiciji topologije vrijedi $\bigcup\limits_{\alpha \in A} {F_\alpha}^C \in \mathcal{T}$. Prema tome, $\bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha$ je zatvoren skup.

3) Vrijedi $(F \cup G)^C = F^C \cap G^C$ pa analogno kao u 2) zaključujemo da je $F \cup G$ zatvoren skup.

□

Definicija 1.3.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $A \subseteq X$. Definiramo*
$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F zatvoren \\ A \subseteq F}} F.$$
Za $\bar{A}$ kažemo da je ***zatvarač skupa*** *A u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Očito je $A \subseteq \bar{A}$. Nadalje, prema propoziciji 1.3.10 $\bar{A}$ je zatvoren skup. Iz definicije od $\bar{A}$ slijedi: ako je F zatvoren skup takav da je $A \subseteq F$, onda je $\bar{A} \subseteq F$. Ako je A zatvoren skup, onda iz $A \subseteq A$ slijedi $\bar{A} \subseteq A$, što zajedno s $A \subseteq \bar{A}$ daje $A = \bar{A}$. Prema tome, vrijedi sljedeća ekvivalencija: A je zatvoren ako i samo ako je $A = \bar{A}$.

Propozicija 1.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ te $x \in X$. Tada je $x \in \bar{A}$ ako i samo ako za svaki otvoreni skup U takav da je $x \in U$ vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in \bar{A}$. Neka je $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$. Tvrdimo da je $U \cap A \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $U \cap A = \emptyset$. Tada je $A \subseteq U^C$. Iz ovoga i činjenice da je U^C zatvoren skup slijedi da je $\bar{A} \subseteq U^C$. Iz pretpostavke da je $x \in \bar{A}$ slijedi da je $x \in U^C$, što je u kontradikciji s činjenicom da je $x \in U$. Stoga je $U \cap A \neq \emptyset$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki $U \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U$ vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$. Dokažimo da je $x \in \bar{A}$. Pretpostavimo suprotno, tj. $x \notin \bar{A}$. Tada je $x \in X \backslash \bar{A}$. Skup $X \backslash \bar{A}$ je otvoren pa iz pretpostavke slijedi da je

$$(X \setminus \bar{A}) \cap A \neq \emptyset,$$

no to je nemoguće jer je

$$(X \setminus \bar{A}) \cap A \subseteq (X \setminus \bar{A}) \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Prema tome, $x \in \bar{A}$. □

Korolar 1.3.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ te $U \in \mathcal{T}$. Tada vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$ ako i samo ako $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$.*

Dokaz. Ako je $U \cap A \neq \emptyset$, onda je očito $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$.

Obratno, pretpostavimo da je $U \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Odaberimo $x \in U \cap \bar{A}$. Tada je $x \in \bar{A}$ i $x \in U$ pa iz propozicije 1.3.12 slijedi $U \cap A \neq \emptyset$. □

Propozicija 1.3.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ te $B \subseteq X$ takav da je $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$. Tada je B povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da B nije povezan. Tada postoji separacija (U, V) od B u $(X, \mathcal{T})$. Slijedi

$$U, V \in \mathcal{T},\ U \cap V \cap B = \emptyset,\ U \cap B \neq \emptyset,\ V \cap B \neq \emptyset,\ B \subseteq U \cup V.$$

Iz $A \subseteq B$ slijedi

$$A \subseteq U \cup V$$

i

$$U \cap V \cap A = \emptyset.$$

Iz $U \cap B \neq \emptyset$ i $B \subseteq \bar{A}$ slijedi

$$U \cap \bar{A} \neq \emptyset,$$

pa iz korolara 1.3.13 slijedi

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

Posve analogno zaključujemo da je

$$V \cap A \neq \emptyset.$$

Na temelju svega dobivenog zaključujemo da je (U, V) separacija od A. No to je nemoguće jer je A po pretpostavci propozicije povezan skup. Dakle, B je povezan skup. □

Iz prethodne propozicije odmah dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 1.3.15. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je A povezan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $\bar{A}$ povezan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Korolar 1.3.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $x \in X$. Tada je komponenta povezanosti C_x točke x zatvoren skup.*

Dokaz. Iz činjenice da je $x \in C_x$ slijedi $x \in \bar{C}_x$, a prema korolaru 1.3.15 vidimo da je $\bar{C}_x$ povezan skup pa iz definicije od C_x dobivamo $\bar{C}_x \subseteq C_x$. Stoga je $\bar{C}_x = C_x$. Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Definicija 1.3.17. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ koji je nepovezan kažemo da je **totalno nepovezan** ako ne postoji povezan skup u tom topološkom prostoru koji ima bar dvije točke.*

Uočimo da je nepovezani topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ totalno nepovezan ako i samo ako za svaki $x \in X$ vrijedi da je C_x jednočlan skup.

1.4 Kompaktnost

Definicija 1.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za familiju $\mathcal{U}$ otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **otvoreni pokrivač topološkog prostora** $(X, \mathcal{T})$ ako je $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$.*

Definicija 1.4.2. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **kompaktan** ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.*

Definicija 1.4.3. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **Hausdorffov** ako za sve $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $a \in U$, $b \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Propozicija 1.4.4. *Svaki metrizabilan topološki prostor je Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Neka su $a, b \in X$ takvi da je $a \neq b$. Neka je $r = d(a, b)$. Očito je $r > 0$. Neka je

$$U = K(a, \frac{r}{2}),\ V = K(b, \frac{r}{2}).$$

Prema propoziciji 1.1.8 skupovi U i V su otvoreni u metričkom prostoru (X, d). Dakle, $U, V \in \mathcal{T}_d$ pa vrijedi $U, V \in \mathcal{T}$. Očito vrijedi $a \in U$ i $b \in V$. Dokažimo još da je $U \cap V = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $x \in X$ takav da je $x \in U \cap V$. Dakle, $x \in U$ i $x \in V$ pa je

$$d(x, a) < \frac{r}{2}$$

i

$$d(x, b) < \frac{r}{2}.$$

Imamo

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

tj. $d(a, b) < r$, što je nemoguće jer je $d(a, b) = r$. Prema tome, $U \cap V = \emptyset$.
Zaključak: $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov prostor. □

Nije svaki topološki prostor Hausdorffov. Npr. ako je X skup koji ima bar dva elementa, onda topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.

Definicija 1.4.5. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***normalan*** *ako je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov te ako za sve zatvorene disjunktne skupove F i G u $(X, \mathcal{T})$ postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Očito je svaki normalan prostor Hausdorffov.

Propozicija 1.4.6. *Svaki metrizabilan topološki prostor je normalan.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Prema propoziciji 1.4.4 $(X, \mathcal{T})$ je Hausdorffov prostor. Neka su F i G disjunktni zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Znamo da postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Imamo $G^C \in \mathcal{T}$, pa je $G^C \in \mathcal{T}_d$, tj. G^C je otvoren skup u metričkom prostoru (X, d). Za svaki $x \in F$ vrijedi $x \notin G$, tj. $x \in G^C$, pa postoji $r_x > 0$ takav da je

$$K(x, r_x) \subseteq G^C.$$

Isto tako, imamo da je skup F^C otvoren u metričkom prostoru (X, d) pa zaključujemo da za svaki $y \in G$ postoji $s_y > 0$ takav da je

$$K(y, s_y) \subseteq F^C.$$

Definirajmo
$$U = \bigcup_{x \in F} K(x, \frac{r_x}{2})$$
i
$$V = \bigcup_{y \in G} K(y, \frac{s_y}{2}).$$
Skupovi U i V su otvoreni u metričkom prostoru (X, d). Prema tome, $U, V \in \mathcal{T}$. Očito je
$$F \subseteq U$$
i
$$G \subseteq V.$$
Tvrdimo da je
$$U \cap V = \emptyset.$$
Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $z \in X$ takav da je $z \in U \cap V$. Slijedi da postoje $x \in F$ i $y \in G$ takvi da je
$$z \in K(x, \frac{r_x}{2})$$
i
$$z \in K(y, \frac{s_y}{2}).$$
Imamo
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r_x}{2} + \frac{s_y}{2}.$$
Dakle,
$$d(x, y) < \frac{r_x}{2} + \frac{s_y}{2}.$$
Ako je $s_y \leq r_x$, onda je
$$\frac{r_x}{2} + \frac{s_y}{2} \leq r_x$$
pa je
$$d(x, y) < r_x,$$
što povlači da je $y \in K(x, r_x)$, no to je nemoguće jer je $y \in G$, a
$$K(x, r_x) \subseteq G^C.$$
Ako je $r_x \leq s_y$, onda na isti način dolazimo do kontradikcije. Dakle,
$$U \cap V = \emptyset.$$
Zaključak: Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je normalan. $\square$

Definicija 1.4.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Neka je $\mathcal{U}$ neprazna familija otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ takva da je*

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

*Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač skupa** K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 1.4.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $K \subseteq X$. Za K kažemo da je **kompaktan skup u topološkom prostoru** $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je*

$$K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n.$$

Lema 1.4.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, $x \in X$ te K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ takav da $x \notin K$. Tada postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U$, $K \subseteq V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$, tvrdnja je jasna (uzmemo $U = X$, $V = \emptyset$). Uzmimo stoga da je $K \neq \emptyset$. Neka je $y \in K$. Tada je $x \neq y$ pa postoje $U_y, V_y \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$x \in U_y, \ y \in V_y$$

i

$$U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Familija $\{V_y \mid y \in K\}$ je otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan postoje $y_1, \dots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

S druge strane, očito vrijedi

$$x \in U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}.$$

Iz definicije topologije indukcijom slijedi da presjek konačno mnogo otvorenih skupova mora biti otvoren skup. Stoga je $U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ otvoren skup, a očito je i $V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ otvoren skup. Ako je $z \in U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$, onda je $z \in U_{y_1}, \dots, z \in U_{y_n}$ pa slijedi $z \notin V_{y_1}, \dots, z \notin V_{y_n}$. Dakle,

$$z \notin V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Ovo znači da su skupovi

$$U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

i

$$V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

disjunktni. Time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 1.4.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je K zatvoren u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Za svaki $x \in K^C$ prema lemi 1.4.9 postoji $U_x \in \mathcal{T}$ takav da je $x \in U_x$ i $U_x \cap K = \emptyset$. Dakle,

$$x \in U_x \subseteq K^C, \forall x \in K^C.$$

Stoga je

$$K^C = \bigcup_{x \in K^C} U_x$$

pa zaključujemo da je $K^C \in \mathcal{T}$. Prema tome, K je zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Propozicija 1.4.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka su K i L disjunktni kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $K \subseteq U$ i $L \subseteq V$.*

Dokaz. Ako je $K = \emptyset$ tvrdnja je jasna. Pretpostavimo $K \neq \emptyset$. Za svaki $x \in K$ vrijedi $x \notin L$ pa prema lemi 1.4.9 postoje $U_x, V_x \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$x \in U_x, \ L \subseteq V_x$$

i

$$U_x \cap V_x = \emptyset.$$

Familija $\{U_x \mid x \in K\}$ je otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan, postoje $x_1, \dots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}.$$

Očito je

$$L \subseteq V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}.$$

Skupovi

$$U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

i

$$V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_n}$$

su otvoreni, a kao u dokazu leme 1.4.9 vidimo da su disjunktni. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.4.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je $F \subseteq K$. Tada je F kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od F te neka je

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}.$$

Tada je $\mathcal{U}'$ otvoreni pokrivač od K. Pošto je K kompaktan, postoje $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup (X \setminus F).$$

Slijedi

$$F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n \cup (X \setminus F),$$

pa iz činjenice da su F i $X \setminus F$ disjunktni zaključujemo da je

$$F \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Prema tome, F je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. □

Korolar 1.4.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor te neka je F zatvoreni skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je F kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz propozicije 1.4.12 (za $K = X$). □

Propozicija 1.4.14. *Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan Hausdorffov prostor. Neka su F i G disjunktni zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 1.4.12 F i G su kompaktni pa iz propozicije 1.4.11 slijedi da postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$F \subseteq U, \ G \subseteq V, \ U \cap V = \emptyset.$$

Time smo dokazali tvrdnju propozicije. □

Poglavlje 2

Totalna nepovezanost

2.1 Separirani skupovi

Definicija 2.1.1. *Ako je S skup te $\rho \subseteq S \times S$, onda za ρ kažemo da je **binarna relacija** na skupu S. U tom slučaju za $x, y \in S$, umjesto $(x, y) \in \rho$, pišemo i $x\rho y$.*

Definicija 2.1.2. *Neka je ρ binarna relacija na skupu S. Za ρ kažemo da je **refleksivna** (na S) ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x\rho x$. Za ρ kažemo da je **antisimetrična** ako za sve $x, y \in S$ iz $x\rho y$ i $y\rho x$ slijedi $x = y$. Za ρ kažemo da je **tranzitivna** ako za sve $x, y, z \in S$ iz $x\rho y$ i $y\rho z$ slijedi $x\rho z$.*

Definicija 2.1.3. *Ako je $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na skupu S, onda za $\leq$ kažemo da je **parcijalni uređaj** na S, a za uređeni par $(S, \leq)$ kažemo da je **parcijalno uređen skup**. Za $x, y \in S$ pišemo $x < y$ ako je $x \leq y$ i $x \neq y$.*

Definicija 2.1.4. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup, neka je $A \subseteq S$ te neka je $x \in S$. Za x kažemo da je **gornja međa** od A ako za svaki $y \in A$ vrijedi $y \leq x$.*

Definicija 2.1.5. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je $A \subseteq S$. Za A kažemo da je **odozgo omeđen** skup u $(S, \leq)$ ako A ima bar jednu gornju među u $(S, \leq)$.*

Definicija 2.1.6. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je $x \in S$. Kažemo da je x **maksimalan element** u $(S, \leq)$ ako ne postoji $y \in S$ takav da je $x < y$.*

Definicija 2.1.7. *Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je $A \subseteq S$. Kažemo da je A **lanac** u $(S, \leq)$ ako za sve $x, y \in A$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$.*

Sljedeća tvrdnja je dobro poznata u teoriji skupova. Navodimo je bez dokaza.

Teorem 2.1.8. *(**Zornova lema**) Neka je $(S, \leq)$ parcijalno uređen skup takav da je svaki lanac u $(S, \leq)$ odozgo omeđen. Tada $(S, \leq)$ ima maksimalan element.*

Definicija 2.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su A i B disjunktni podskupovi od X. Za A i B kažemo da su* **separirani skupovi** *u $(X, \mathcal{T})$ ako postoji separacija (U, V) od $(X, \mathcal{T})$ takva da je $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$.*

Definicija 2.1.10. *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je M lanac u $(X, \leq)$. Kažemo da je M* **maksimalan lanac** *u $(X, \leq)$ ako ne postoji lanac N u $(X, \leq)$ takav da je $M \subseteq N, M \neq N$.*

Propozicija 2.1.11. *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uređen skup te neka je A lanac u $(X, \leq)$. Tada postoji maksimalan lanac M u $(X, \leq)$ takav da je $A \subseteq M$.*

Dokaz. Neka je
$$\mathcal{L} = \{L \mid L \text{ lanac u } (X, \leq) \text{ i } A \subseteq L\}.$$
Uočimo da je $A \in \mathcal{L}$. Neka je $\preceq$ relacija na $\mathcal{L}$ definirana s
$$L_1 \preceq L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2.$$
Relacija $\preceq$ je očito refleksivna, antisimetrična i tranzitivna pa je $\preceq$ parcijalni uređaj na $\mathcal{L}$. Dokažimo da $(\mathcal{L}, \preceq)$ ima maksimalan element koristeći Zornovu lemu. Neka je $\mathcal{H}$ lanac u $(\mathcal{L}, \preceq)$. Želimo dokazati da je $\mathcal{H}$ odozgo omeđen u $(\mathcal{L}, \preceq)$. Ako je $\mathcal{H} = \emptyset$, onda je A gornja međa od $\mathcal{H}$ u $(\mathcal{L}, \preceq)$. Dakle, $\mathcal{H}$ je odozgo omeđen. Prepostavimo da je $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Definirajmo
$$L_0 = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$
Tvrdimo da je $L_0 \in \mathcal{L}$. Odaberimo neki $H' \in \mathcal{H}$ (takav postoji jer je $\mathcal{H} \neq \emptyset$). Imamo $H' \in \mathcal{L}$ pa je $A \subseteq H'$, stoga je
$$A \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H,$$
tj. $A \subseteq L_0$. Dokažimo da je L_0 lanac u $(X, \leq)$. Neka su $x_1, x_2 \in L_0$. Tada postoje $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ takvi da je
$$x_1 \in H_1 \text{ i } x_2 \in H_2.$$
Budući da je $\mathcal{H}$ lanac u $(\mathcal{L}, \preceq)$, imamo
$$H_1 \preceq H_2 \text{ ili } H_2 \preceq H_1,$$
tj.
$$H_1 \subseteq H_2 \text{ ili } H_2 \subseteq H_1.$$
Ako je $H_1 \subseteq H_2$, onda su $x_1, x_2 \in H_2$ pa iz činjenice da je H_2 lanac u $(X, \leq)$ (jer je $H_2 \in \mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$) slijedi da je
$$x_1 \leq x_2 \text{ ili } x_2 \leq x_1.$$

Do istog zaključka dolazimo ako je $H_2 \subseteq H_1$. Zaključak: L_0 je lanac u $(X, \leq)$. Prema tome, $L_0 \in \mathcal{L}$. Po definiciji od L_0 vrijedi

$$H \subseteq L_0, \forall H \in \mathcal{H},$$

tj.

$$H \leq L_0, \forall H \in \mathcal{H}.$$

Stoga je L_0 gornja međa od $\mathcal{H}$ u $(\mathcal{L}, \leq)$. Dakle, $\mathcal{H}$ je odozgo omeđen u $(\mathcal{L}, \leq)$. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalan element M u $(\mathcal{L}, \leq)$. Slijedi da je $A \subseteq M$ te da je M maksimalan lanac u $(X, \leq)$. $\square$

Propozicija 2.1.12. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

1) Pretpostavimo da je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Tada postoji zatvoreni skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = Y \cap G$.

2) Pretpostavimo da je G zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je $Y \cap G$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. 1) Imamo $Y \setminus F \in \mathcal{S}$ pa postoji $U \in \mathcal{T}$ takav da je

$$Y \setminus F = Y \cap U. \tag{2.1}$$

Tada je

$$F = Y \cap (X \setminus U). \tag{2.2}$$

Naime, ako je $x \in F$, onda je očito $x \in Y$. Nadalje, vrijedi $x \in X$ i $x \notin U$ (kada bi vrijedilo $x \in U$, onda bi iz (2.1) slijedilo $x \in Y \setminus F$, što je nemoguće jer je $x \in F$). Dakle,

$$x \in Y \cap (X \setminus U).$$

Obratno, ako je $x \in Y \cap (X \setminus U)$, onda je $x \in F$ jer bi u suprotnom $x \notin F$ i $x \in Y$ povlačilo $x \in Y \setminus F$ pa bi iz (2.1) slijedilo $x \in Y \cap U$, što je u kontradikciji s tim da je $x \in X \setminus U$. Prema tome, vrijedi (2.2). Definirajmo

$$G = X \setminus U.$$

Tada je G zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ i, prema (2.2), vrijedi

$$F = Y \cap G.$$

2) Vrijedi
$$Y \setminus (Y \cap G) = Y \cap (X \setminus G).$$
Naime,
$$x \in Y \setminus (Y \cap G) \Leftrightarrow x \in Y \text{ i } x \notin G \Leftrightarrow x \in Y \cap (X \setminus G).$$
Iz činjenice da je G zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ slijedi da je $X \setminus G \in \mathcal{T}$ pa je
$$Y \cap (X \setminus G) \in \mathcal{S},$$
tj.
$$Y \setminus (Y \cap G) \in \mathcal{S},$$
a to znači da je $Y \cap G$ zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$.

□

Korolar 2.1.13. *Neka je $(Y, \mathcal{S})$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ takav da je Y zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Tada je svaki skup koji je zatvoren u $(Y, \mathcal{S})$ zatvoren i u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Neka je F zatvoren skup u $(Y, \mathcal{S})$. Prema propoziciji 2.1.12 postoji zatvoreni skup G u $(X, \mathcal{T})$ takav da je $F = Y \cap G$. Stoga je F zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ (kao presjek dva zatvorena skupa). □

Lema 2.1.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor, neka je $\mathcal{F}$ neprazna familija zatvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $U \in \mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U$. Tada postoje $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ takvi da je $F_1 \cap \dots \cap F_n \subseteq U$.*

Dokaz. Općenito, za $S, T \subseteq X$ vrijedi
$$S \subseteq T \Leftrightarrow T^C \subseteq S^C.$$
Iz $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U$ slijedi
$$U^C \subseteq (\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F)^C,$$
tj.
$$U^C \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F^C,$$
stoga je $\{F^C \mid F \in \mathcal{F}\}$ otvoreni pokrivač od U^C u $(X, \mathcal{T})$. Skup U^C je zatvoren u kompaktnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$, pa iz propozicije 1.4.10 vidimo da je i kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. Slijedi da postoje $F_1, \dots, F_n$ takvi da je
$$U^C \subseteq {F_1}^C \cup \dots \cup {F_n}^C$$

pa vrijedi

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \subseteq U.$$

□

Teorem 2.1.15. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan Hausdorffov prostor te neka su $x, y \in X$ takvi da je $x \neq y$. Pretpostavimo da ne postoji povezan skup A u $(X, \mathcal{T})$ takav da su $x, y \in A$. Tada su skupovi $\{x\}$ i $\{y\}$ separirani u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Pretpostavimo da se skupovi $\{x\}$ i $\{y\}$ ne mogu separirati u $(X, \mathcal{T})$. Za $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$, neka je $\mathcal{T}_Y$ relativna topologija na Y. Neka je

$$\mathcal{K} = \{F \mid F \textit{zatvoren u } (X, \mathcal{T}), x, y \in F \text{ i } \{x\} \text{ i } \{y\} \text{ se ne mogu separirati u } (F, \mathcal{T}_F)\}.$$

Uočimo da je $X \in \mathcal{K}$. Definirajmo relaciju $\leq$ na $\mathcal{K}$ na sljedeći način:

$$F \leq G \Leftrightarrow F \subseteq G, \ \forall F, G \in \mathcal{K}.$$

Relacija $\leq$ je očito refleksivna, antisimetrična i tranzitivna pa je $\leq$ parcijalni uređaj na $\mathcal{K}$. Prema propozicji 2.1.11 postoji maksimalan lanac $\mathcal{M}$ u $(\mathcal{K}, \leq)$ takav da je $\{X\} \subseteq \mathcal{M}$ (jer je $\{X\}$ očito lanac u $(\mathcal{K}, \leq)$). Slijedi da je $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Neka su $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$. Budući da je $\mathcal{M}$ lanac u $(\mathcal{K}, \leq)$, vrijedi

$$M_1 \subseteq M_2 \text{ ili } M_2 \subseteq M_1$$

pa je

$$M_1 \cap M_2 = M_1$$

ili

$$M_1 \cap M_2 = M_2.$$

U svakom slučaju vrijedi

$$M_1 \cap M_2 \in \mathcal{M}.$$

Sada lagano indukcijom zaključujemo da za sve $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}$ vrijedi

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n \in \mathcal{M}.$$

Definirajmo

$$K = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M.$$

Tvrdimo da je $K \in \mathcal{K}$. Za svaki $M \in \mathcal{M}$ imamo $M \in \mathcal{K}$ pa je M zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Dakle, $\mathcal{M}$ je familija zatvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$ pa iz propozicije 1.3.10 slijedi da je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$. Također, za svaki $M \in \mathcal{M}$ vrijedi $x, y \in M$ pa su $x, y \in K$.

Pretpostavimo da se $\{x\}$ i $\{y\}$ mogu separirati u $(K, \mathcal{T}_K)$. Tada postoji separacija (K_1, K_2) od K takva da je $x \in K_1$ i $y \in K_2$. Iz

$$K \setminus K_1 = K_2$$

i

$$K \setminus K_2 = K_1$$

slijedi da su skupovi K_1 i K_2 zatvoreni u $(K, \mathcal{T}_K)$. Prema korolaru 2.1.13 skupovi K_1 i K_2 su zatvoreni u $(X, \mathcal{T})$. Prema propoziciji 1.4.14 topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je normalan pa postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je

$$K_1 \subseteq U, \ K_2 \subseteq V$$

i

$$U \cap V = \emptyset.$$

Imamo

$$K = K_1 \cup K_2 \subseteq U \cup V,$$

tj.

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M \subseteq U \cup V.$$

Iz leme 2.1.14 slijedi da postoje $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$ takvi da je

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n \subseteq U \cup V.$$

No, $M_1 \cap \cdots \cap M_n \in \mathcal{M}$. Dakle, postoji $M \in \mathcal{M}$ takav da je $M \subseteq U \cup V$. Slijedi

$$M = (M \cap U) \cup (M \cap V).$$

Nadalje,

$$M \cap U, \ M \cap V \in \mathcal{T}_M$$

(jer su $U, V \in \mathcal{T}$) te

$$(M \cap U) \cap (M \cap V) = \emptyset$$

i

$$x \in M \cap U, \ y \in M \cap V$$

(vrijedi $x, y \in M$ jer je $M \in \mathcal{K}$). Stoga je $(M \cap U, M \cap V)$ separacija od $(M, \mathcal{T}_M)$ takva da je

$$x \in M \cap U, \ y \in M \cap V.$$

Dakle, $\{x\}$ i $\{y\}$ su separirani u $(M, \mathcal{T}_M)$. To je u kontradikciji s činjenicom da je $M \in \mathcal{K}$. Zaključak: $\{x\}$ i $\{y\}$ se ne mogu separirati u $(K, \mathcal{T}_K)$. Prema tome, $K \in \mathcal{K}$. Iz $x, y \in K$ i pretpostavke teorema slijedi da skup K nije povezan u $(X, \mathcal{T})$. Iz propozicije 1.3.4 slijedi da topološki prostor $(K, \mathcal{T}_K)$ nije povezan. Stoga postoji separacija (H_1, H_2) od $(K, \mathcal{T}_K)$. Budući da $\{x\}$ i $\{y\}$ nisu separirani u $(K, \mathcal{T}_K)$, vrijedi

$$x, y \in H_1 \text{ ili } x, y \in H_2.$$

Uočimo da su H_1 i H_2 zatvoreni skupovi u $(K, \mathcal{T}_K)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $x, y \in H_1$. Pretpostavimo da su $\{x\}$ i $\{y\}$ separirani u $(H_1, \mathcal{T}_{H_1})$. Tada postoji separacija (B, C) od $(H_1, \mathcal{T}_{H_1})$ takva da je $x \in B,\ y \in C$. Iz korolara 2.1.13 slijedi da je H_1 zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$ pa s obzirom na to da su B i C zatvoreni u $(H_1, \mathcal{T}_{H_1})$ iz korolara 2.1.13 slijedi i da su B i C zatvoreni u $(X, \mathcal{T})$. Također, vrijedi da je H_2 zatvoren u $(X, \mathcal{T})$ pa su skupovi B i $C \cup H_2$ zatvoreni u $(X, \mathcal{T})$. Iz propozicije 2.1.12 slijedi da su skupovi $B \cap K$ i

$$(C \cup H_2) \cap K$$

zatvoreni u $(K, \mathcal{T}_K)$. No očito je $B \subseteq K$ i

$$C \cup H_2 \subseteq K$$

pa je $B \cap K = B$ i

$$(C \cup H_2) \cap K = C \cup H_2.$$

Prema tome, B i $C \cup H_2$ su zatvoreni skupovi u $(K, \mathcal{T}_K)$. Nadalje,

$$B \cup (C \cup H_2) = (B \cup C) \cup H_2 = H_1 \cup H_2 = K,$$

$$B \cap (C \cup H_2) = \emptyset$$

(jer je $B \cap C = \emptyset$ i $B \subseteq H_1$, a $H_1 \cap H_2 = \emptyset$) te

$$x \in B,\ y \in C \cup H_2.$$

Zaključujemo da su skupovi B i $C \cup H_2$ jedan drugome komplementi u K, stoga su ti skupovi i otvoreni u $(K, \mathcal{T}_K)$. Prema tome, $(B, C \cup H_2)$ je separacija od $(K, \mathcal{T}_K)$ pa slijedi da su $\{x\}$ i $\{y\}$ separirani u $(K, \mathcal{T}_K)$, što je nemoguće. Zaključak: $\{x\}$ i $\{y\}$ nisu separirani u $(H_1, \mathcal{T}_{H_1})$. Stoga je $H_1 \in \mathcal{K}$. Vrijedi

$$H_1 \subseteq K \subseteq M,$$

tj.

$$H_1 \preceq K \preceq M,$$

za svaki $M \in \mathcal{M}$. Iz ovoga zaključujemo da je $\mathcal{M} \cup \{H_1\}$ lanac u $(\mathcal{K}, \preceq)$ pa iz činjenice da je $\mathcal{M}$ maksimalan lanac u $(\mathcal{K}, \preceq)$ i

$$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{H_1\}$$

slijedi
$$\mathcal{M} = \mathcal{M} \cup \{H_1\}.$$

Stoga je $H_1 \in \mathcal{M}$ pa je $K \subseteq H_1$. Ovo zajedno s $H_1 \subseteq K$ daje $K = H_1$, što je u kontradikciji s činjenicom da je (H_1, H_2) separacija od $(K, \mathcal{T}_K)$. Zaključak: $\{x\}$ i $\{y\}$ se mogu separirati u $(X, \mathcal{T})$. □

Napomena 2.1.16. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su $x, y \in X$. Tada vrijedi da ne postoji povezan skup A u $(X, \mathcal{T})$ takav da su $x, y \in A$ ako i samo ako je $C_x \cap C_y = \emptyset$. Naime, ako ne postoji takav skup A, onda mora vrijediti $C_x \cap C_y = \emptyset$ jer bismo u suprotnom imali $C_x = C_y$ pa bi C_x bio povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ koji sadrži i x i y.*
Obratno, pretpostavimo da je $C_x \cap C_y = \emptyset$. Kad bi postojao povezan skup A takav da su $x, y \in A$, onda bi vrijedilo $A \subseteq C_x$ i $A \subseteq C_y$, tj. $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, što je nemoguće.

Napomena 2.1.17. *Obrat teorema* 2.1.15 *očito vrijedi. Preciznije, ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te ako su $x, y \in X$ takvi da su skupovi $\{x\}$ i $\{y\}$ separirani u $(X, \mathcal{T})$, onda ne postoji povezan skup A takav da su $x, y \in A$. Naime, ako je (U, V) separacija od $(X, \mathcal{T})$ takva da je $x \in U$ i $y \in V$, onda je (U, V) separacija svakog podskupa od X koji sadrži i x i y pa takav skup ne može biti povezan.*

Teorem 2.1.18. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan Hausdorffov prostor te neka su A i B neprazni, disjunktni, zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da ne postoji povezan skup u $(X, \mathcal{T})$ koji siječe i A i B. Tada su A i B separirani u $(X, \mathcal{T})$.*

Dokaz. Tvrdimo da su za svako $x \in A$ skupovi $\{x\}$ i B separirani u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $x \in A$. Za svaki $y \in B$ vrijedi sljedeće: ne postoji povezan skup koji sadrži x i y. Stoga, prema teoremu 2.1.15, za svaki $y \in B$ vrijedi da su $\{x\}$ i $\{y\}$ separirani u $(X, \mathcal{T})$ pa postoji separacija (U_x, V_y) od $(X, \mathcal{T})$ takva da je
$$x \in U_y, \ y \in V_y.$$

Familija
$$\{V_y \mid y \in B\}$$
je otvoreni pokrivač od B, a prema korolaru 1.4.13 B je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, \ldots, y_n \in B$ takvi da je
$$B \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Očito je
$$x \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}.$$

Tvrdimo da je
$$(U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n})$$

separacija od $(X, \mathcal{T})$. Očito su

$$U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} \text{ i } V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

otvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Pretpostavimo da je

$$z \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}.$$

Tada je $z \in U_{y_1}, \ldots, z \in U_{y_n}$ pa $z \notin V_{y_1}, \ldots, z \notin V_{y_n}$, tj.

$$z \notin V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Prema tome, skupovi

$$U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n} \text{ i } V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

su disjunktni.
Neka je $z \in X$. Pretpostavimo

$$z \notin V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Tada $z \notin V_{y_1}, \ldots, z \notin V_{y_n}$ pa slijedi $z \in U_{y_1}, \ldots, z \in U_{y_n}$, tj. $z \in U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Prema tome,

$$(U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}) \cup (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}) = X.$$

Dakle, $(U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}, V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n})$ je separacija od $(X, \mathcal{T})$ pa slijedi da su $\{x\}$ i B separirani u $(X, \mathcal{T})$. Dakle, za svaki $x \in A$ postoji separacija (U_x, V_x) od $(X, \mathcal{T})$ takva da je

$$x \in U_x \text{ i } B \subseteq V_x.$$

Iz činjenice da je A kompaktan (što slijedi iz korolara 1.4.13) i činjenice da je $\{U_x \mid x \in A\}$ otvoreni pokrivač od A slijedi da postoje $x_1, \ldots, x_n \in A$ takvi da je

$$A \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Očito je $B \subseteq V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$. Kao i maloprije, vidimo da je

$$(U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}, V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n})$$

separacija od $(X, \mathcal{T})$. Prema tome, A i B su separirani u $(X, \mathcal{T})$. $\square$

2.2 Totalno nepovezani kompaktni metrički prostori

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\mathcal{U}$ familija otvorenih skupova u (X, d) takva da je $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač metričkog prostora** (X, d).*

Uočimo sljedeće:
Ako je (X, d) metrički prostor, onda vrijedi: $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d) ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.

Definicija 2.2.2. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***kompaktan*** *ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$.*

Uočimo da je metrički prostor (X, d) kompaktan ako i samo ako je pripadni topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ kompaktan.

Definicija 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Kažemo da je S* ***povezan skup u metričkom prostoru*** *(X, d) ako je S povezan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Definicija 2.2.4. *Neka je (X, d) metrički prostor, neka je $x \in X$ te neka je $C \subseteq X$. Kažemo da je C* ***komponenta povezanosti od*** *x* ***u metričkom prostoru*** *(X, d) ako je C komponenta povezanosti od x u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Definicija 2.2.5. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je* ***totalno nepovezan*** *ako je topološki prostor $(X, \mathcal{T}_d)$ totalno nepovezan.*

Definicija 2.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je A* ***omeđen skup*** *u (X, d) ako postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x, r)$.*

Pretpostavimo da je (X, d) metrički prostor te da je A omeđen skup u (X, d). Tada postoje $x \in X$ i $r > 0$ takvi da je $A \subseteq K(x, r)$. Slijedi da za sve $a_1, a_2 \in A$ vrijedi $a_1, a_2 \in K(x, r)$, tj. $d(a_1, x) < r$ i $d(a_2, x) < r$ pa je

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, x) + d(a_2, x) < 2r.$$

Prema tome, $2r$ je gornja međa skupa

$$\{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Definicija 2.2.7. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je A neprazan, omeđen skup u (X, d). Definiramo*

$$\operatorname{diam} A = \ sup\ \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}.$$

Za $\operatorname{diam} A$ *kažemo da je* ***dijametar skupa*** *A u metričkom prostoru (X, d).*

Propozicija 2.2.8. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor. Tada je svaki podskup od X omeđen u (X, d).*

Dokaz. Odaberimo $x_0 \in X$. Definirajmo

$$\mathcal{U} = \{K(x_0, r) \mid r > 0\}.$$

Uzmimo neki $x \in X$. Tada je

$$x \in K(x_0, d(x_0, x) + 1)$$

pa je

$$x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Prema tome, $\mathcal{U}$ je otvoreni pokrivač od (X, d). Budući da je (X, d) kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $r_1, \dots, r_n > 0$ takvi da je

$$X = K(x_0, r_1) \cup \cdots \cup K(x_0, r_n).$$

Neka je $s = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Tada je $X = K(x_0, s)$. Stoga za svaki $A \subseteq X$ vrijedi

$$A \subseteq K(x_0, s)$$

pa je A omeđen u (X, d). □

Propozicija 2.2.9. *Neka je (X, d) metrički prostor. Pretpostavimo da za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i neprazni, otvoreni skupovi $U_1, \dots, U_n$ u (X, d) takvi da vrijedi sljedeće:*

1) *diam $U_i < \epsilon$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$*

2) *$U_i \cap U_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$*

3) *$X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.*

Tada je (X, d) totalno nepovezan metrički prostor.

Dokaz. Neka je $x \in X$. Trebamo dokazati da vrijedi $C_x = \{x\}$, tj. da je komponenta povezanosti od x jednočlan skup. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $y \in X$, $y \neq x$ takav da je $y \in C_x$. Neka je $\epsilon > 0$ takav da vrijedi $\epsilon < d(x, y)$. Tada postoje $n \in \mathbb{N}$ i neprazni, otvoreni skupovi $U_1, \dots, U_n$ u (X, d) koji zadovoljavaju gornje uvjete. Iz

$$\operatorname{diam} U_i < \epsilon < d(x, y)$$

vidimo da ne može vrijediti $x, y \in U_i$ za neki $i \in \{1, \dots, n\}$. Neka je $x \in U_i$, a $y \in U_j$, $i \neq j$. Vidimo da je

$$\Big(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} U_k, U_j\Big)$$

separacija od (X, d) takva da je

$$\{x\} \subseteq \bigcup_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} U_k,$$

$$\{y\} \subseteq U_j.$$

Prema tome, $\{x\}$ i $\{y\}$ su separirani u (X, d) (tj. u $(X, \mathcal{T}_d)$). Iz napomene 2.1.17 slijedi da ne postoji povezani skup A takav da su $x, y \in A$ pa ne može vrijediti $y \in C_x$. □

Napomena 2.2.10. *Neka je (X, d) metrički prostor te $x \in X$. Tada je $\{x\}$ zatvoren skup u (X, d). Naime, za svaki $y \in X \setminus \{x\}$ vrijedi $x \notin K(y, d(x, y))$, tj. $K(y, d(x, y)) \subseteq X \setminus \{x\}$.*

Teorem 2.2.11. *Neka je (X, d) kompaktan totalno nepovezan metrički prostor. Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i neprazni, otvoreni skupovi $U_1, \ldots, U_n$ u (X, d) takvi da vrijedi sljedeće:*

1) diam $U_i < \epsilon$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$

2) $U_i \cap U_j = \emptyset$, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$

3) $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$.

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$. Ako je $\operatorname{diam} X < \epsilon$, onda očito postoje traženi skupovi ($n = 1, U_1 = X$). Pretpostavimo da je $\operatorname{diam} X \geq \epsilon$.

Tvrdnja: Za svaki $x \in X$ postoji separacija (U, V) od (X, d) takva da je $x \in U$, $\operatorname{diam} U < \epsilon$.

Dokažimo tvrdnju. Neka je $x \in X$. Skup $X \setminus K(x, \frac{\epsilon}{3})$ je neprazan. Naime, u suprotnom bi vrijedilo $X = K(x, \frac{\epsilon}{3})$ pa bi slijedilo

$$\operatorname{diam} X \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Nadalje, $X \setminus K(x, \frac{\epsilon}{3})$ je zatvoren skup u (X, d) (prema propoziciji 1.1.8). Skup $\{x\}$ je zatvoren u (X, d) prema napomeni 2.2.10. Očito su $\{x\}$ i $X \setminus K(x, \frac{\epsilon}{3})$ disjunktni skupovi pa iz činjenice da je $(X, \mathcal{T}_d)$ kompaktan Hausdorffov prostor (propozicija 1.4.4) i teorema 2.1.18 slijedi da su $\{x\}$ i $X \setminus K(x, \frac{\epsilon}{3})$ separirani u $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle, postoji separacija (U, V) od (X, d) takva da je $x \in U$ i

$$X \setminus K(x, \frac{\epsilon}{3}) \subseteq V.$$

Iz ovoga i činjenice da je $U \cap V = \emptyset$ slijedi da je

$$U \subseteq K(x, \frac{\epsilon}{3}).$$

Stoga je
$$\operatorname{diam} U \leq \operatorname{diam} K(x, \frac{\epsilon}{3}) \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$
Time je tvrdnja dokazana.

Dakle, za svaki $x \in X$ postoji separacija (U_x, V_x) od (X, d) takva da je $x \in U_x$, $\operatorname{diam} U_x < \epsilon$. Očito je
$$\{U_x \mid x \in X\}$$
otvoren pokrivač od (X, d) pa iz činjenice da je (X, d) kompaktan slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n$ takvi da je
$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$
Vidimo da skupovi $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ zadovoljavaju svojstva 1) i 3) iz iskaza teorema, ali ne moraju zadovoljavati svojstvo 2), tj. ne mora vrijediti da su disjunktni u parovima. Definirajmo familiju
$$\mathcal{F} = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n \mid A_i \in \{U_{x_i}, V_{x_i}\}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \setminus \emptyset.$$
Vidimo da su skupovi iz $\mathcal{F}$ u parovima disjunktni: za različite
$$A_1 \cap \cdots \cap A_n,\ B_1 \cap \cdots \cap B_n \in \mathcal{F}$$
vrijedi $A_i \neq B_i$, za barem jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$ pa je $A_i = U_{x_i}$ i $B_i = V_{x_i}$ ili $A_i = V_{x_i}$ i $B_i = U_{x_i}$, a $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$ pa su i
$$A_1 \cap \cdots \cap A_n$$
i
$$B_1 \cap \cdots \cap B_n$$
disjunktni.

Znamo da vrijedi
$$\operatorname{diam} V_{x_i} < \epsilon,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$
pa za $A_i \in \{U_{x_i}, V_{x_i}\},\ i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi
$$\operatorname{diam}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) < \epsilon$$
ako je barem jedan $A_i = U_{x_i}$. Ali,
$$V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n} = {U_{x_1}}^C \cap \cdots \cap {U_{x_n}}^C = (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n})^C = X^C = \emptyset,$$
a $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Stoga je
$$\operatorname{diam} W < \epsilon,\ \forall W \in \mathcal{F}.$$

Još samo treba dokazati da vrijedi

$$X = \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W.$$

Uzmimo $x \in X$. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Imamo $x \in U_{x_i}$ ili $x \in V_{x_i}$. Definirajmo

$$A_i = \begin{cases} U_{x_i}, \text{ ako je } x \in U_{x_i}, \\ V_{x_i}, \text{ ako je } x \in V_{x_i}. \end{cases}$$

Imamo

$$x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

i

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}.$$

Prema tome,

$$x \in \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W.$$

Dakle,

$$X = \bigcup_{W \in \mathcal{F}} W.$$

Sada vidimo da skupovi iz familije $\mathcal{F}$ (ima ih $2^n - 1$) zadovoljavaju sva tri svojstva iz iskaza teorema. $\square$

Poglavlje 3

Cantorov skup

3.1 Kompaktnost Cantorovog skupa

Neka je

$$\mathcal{S} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Definiramo funkciju $\tau : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$ na sljedeći način:
Neka je $I \in \mathcal{S}$. Tada postoje jedinstveni $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ takvi da je $I = [a, b]$. Definiramo

$$\tau(I) = \{[a, a + \frac{b-a}{3}], [a + 2\frac{b-a}{3}, b]\}.$$

Definirajmo sada funkciju $f : \mathcal{P}(\mathcal{S}) \to \mathcal{P}(\mathcal{S})$ na sljedeći način:

$$f(S) = \bigcup_{I \in S} \tau(I),\ S \in \mathcal{P}(\mathcal{S}).$$

Definirajmo sada induktivno niz skupova segmenata $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (tj. niz u $\mathcal{P}(\mathcal{S})$) na sljedeći način:

$$S_1 = \{[0, 1]\},$$

$$S_{n+1} = f(S_n), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dakle,

$$S_2 = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, 1]\},$$

$$S_3 = \{[0, \frac{1}{9}], [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], [\frac{8}{9}, 1]\},$$

$$\ldots$$

Za $n \in \mathbb{N}$ neka je

$$F_n = \bigcup_{I \in S_n} I.$$

Dakle,

$$F_1 = [0,1],\ F_2 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],\ \dots$$

Definicija 3.1.1. *Definirajmo*

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n.$$

Skup C zovemo ***Cantorov skup****.*

Lema 3.1.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $F_{n+1} \subseteq F_n$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$S_{n+1} = f(S_n) = \bigcup_{I \in S_n} \tau(I).$$

Neka je $J \in S_{n+1}$. Tada postoji $I \in S_n$ takav da je $J \in \tau(I)$. Iz definicije od $\tau(I)$ je očito da tada vrijedi $J \subseteq I$. Dakle, za svaki $J \in S_{n+1}$ postoji $I \in S_n$ takav da je $J \subseteq I$. Neka je $x \in F_{n+1}$. Tada postoji $J \in S_{n+1}$ takav da je $x \in J$. Nadalje, postoji $I \in S_n$ takav da je $J \subseteq I$ pa je $x \in I$. Dakle, $x \in F_n$. Zaključak: $F_{n+1} \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Definicija 3.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te $F \subseteq X$. Kažemo da je F* ***zatvoren skup u metričkom prostoru*** *(X, d) ako je F zatvoren u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Uočimo da je $F \subseteq X$ zatvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je $X \setminus F$ otvoren skup u (X, d). Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Neka su $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Imamo

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \langle -\infty, a \rangle \cup \langle b, \infty \rangle$$

pa iz primjera 1.1.9 slijedi da je $[a, b]$ zatvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$.

Uočimo sljedeće: Ako je S konačan poskup od $\mathcal{S}$, onda je $f(S)$ konačan skup. Naime, to je jasno ako je $S = \emptyset$. Inače, imamo

$$S = \{I_1, \dots, I_k\}$$

pa je

$$f(S) = \tau(I_1) \cup \dots \cup \tau(I_k),$$

stoga je $f(S)$ konačan skup kao konačna unija konačnih skupova. Skup $S_1 = \{[0,1]\}$ je očito konačan. Sada indukcijom iz definicije niza $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lako slijedi da je S_n konačan skup za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Iz propozicije 1.3.10 (dio 3)) slijedi da je unija konačno mnogo zatvorenih skupova u topološkom (pa i metričkom) prostoru zatvoren skup. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$F_n = \bigcup_{I \in \mathcal{S}_n} I.$$

Budući da za svaki $I \in \mathcal{S}$ vrijedi da je I zatvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$, iz propozicije 1.3.10 (dio 2)) i definicije skupa C slijedi da je C zatvoren skup u $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 3.1.4. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K* ***kompaktan skup u metričkom prostoru*** *(X, d) ako je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Propozicija 3.1.5. *Neka je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d). Tada je K zatvoren i omeđen u (X, d).*

Dokaz. Imamo da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T}_d)$, a $(X, \mathcal{T}_d)$ je Hausdorffov prostor (jer je metrizabilan). Iz propozicije 1.4.10 slijedi da je K zatvoren skup u $(X, \mathcal{T}_d)$. Dakle, K je zatvoren skup u (X, d).

Odaberimo $x_0 \in X$ te definirajmo

$$\mathcal{U} = \{K(x_0, r) \mid r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T}_d)$ (što vidimo na isti način kao u dokazu propozicije 2.2.8). Iz činjenice da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T}_d)$ slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $r_1, \dots, r_n > 0$ takvi da je

$$K \subseteq K(x_0, r_1) \cup \cdots \cup K(x_0, r_n).$$

Sada na isti način kao u dokazu propozicije 2.2.8 zaključujemo da je K omeđen skup u (X, d). □

Primjer 3.1.6. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Tada za svaki $x_0 \in X$ vrijedi*

$$K(x_0, 1) = \{x_0\}.$$

Stoga, ako je $U \subseteq X$, onda za svaki $x \in U$ vrijedi

$$K(x, 1) \subseteq U.$$

Prema tome, svaki podskup od X je otvoren u (X, d). Iz ovoga slijedi da je svaki podskup od X i zatvoren u (X, d).

Za svaki $x_0 \in X$ vrijedi

$$K(x_0, 2) = X.$$

Stoga je svaki podskup od X omeđen u (X, d).

Odaberimo sada skupove K i X takve da je $K \subseteq X$ te da je K beskonačan skup. Neka je d diskretna metrika na X. Skup K je zatvoren i omeđen u (X, d). No, K nije kompaktan u (X, d). Pretpostavimo suprotno. Neka je

$$\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač metričkog prostora (X, d) pa je i otvoreni pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$. Iz činjenice da je K kompaktan slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_1, \ldots, x_n \in X$ takvi da je

$$K \subseteq \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_n\}.$$

No, ovo je nemoguće jer je K beskonačan skup. Prema tome, K nije kompaktan u (X, d). Zaključak: zatvoren i omeđen skup u metričkom protoru ne mora biti kompaktan.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza. Dokaz se može pronaći u [1].

Teorem 3.1.7. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Tada je svaki zatvoren i omeđen skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ kompaktan.*

Dokazali smo da je Cantorov skup C zatvoren u $(\mathbb{R}, d)$, pri čemu je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Iz definicije skupa C očito je da je $C \subseteq F_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Posebno, $C \subseteq F_1$, tj. $C \subseteq [0, 1]$. Vrijedi $K(0, 2) = \langle -2, 2\rangle$ pa je $C \subseteq K(0, 2)$. Prema tome, C je omeđen skup u $(\mathbb{R}, d)$. Iz teorema 3.1.7 slijedi da je C kompaktan skup u $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 3.1.8. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Tada je*

$$d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

metrika na Y. Za $(Y, d|_{Y\times Y})$ kažemo da je ***potprostor metričkog prostora*** *(X, d).*

Propozicija 3.1.9. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Neka je $V \subseteq Y$. Tada je V otvoren skup u (Y, p) ako i samo ako postoji otvoreni skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$.*

Dokaz. Iz $p = d|_{Y\times Y}$ lako slijedi da je za sve $y_0 \in Y$ i $r > 0$

$$K_p(y_0, r) = K_d(y_0, r) \cap Y \tag{3.1}$$

Pretpostavimo da postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $V = Y \cap U$. Neka je $y \in V$. Tada je $y \in U$ pa postoji $r > 0$ takav da je $K_d(y, r) \subseteq U$. Stoga je

$$Y \cap K_d(y, r) \subseteq Y \cap U$$

pa je prema (3.1)

$$K_p(y, r) \subseteq V.$$

Prema tome, V je otvoren skup u (Y, p).

Obratno, pretpostavimo da je V otvoren skup u (Y, p). Tada za svaki $y \in V$ postoji $r_y > 0$ takav da je $K_p(y, r_y) \subseteq V$. Slijedi da je

$$V = \bigcup_{y \in V} K_p(y, r_y).$$

Definirajmo

$$U = \bigcup_{y \in V} K_d(y, r_y).$$

Skup U je otvoren u (X, d) (kao unija otvorenih skupova). Vrijedi

$$Y \cap U = Y \cap \bigcup_{y \in V} K_d(y, r_y) = \bigcup_{y \in V} (Y \cap K_d(y, r_y)) = \bigcup_{y \in V} K_p(y, r_y) = V.$$

Dakle, $Y \cap U = V$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Korolar 3.1.10. *Neka je (Y, p) potprostor metričkog prostora (X, d). Tada je $(Y, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$.*

Dokaz. Treba dokazati da je

$$\mathcal{T}_p = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}.$$

Koristeći propoziciju 3.1.9 dobivamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} V \in \mathcal{T}_p &\Leftrightarrow V \text{ otvoren u } (Y, p) \\ &\Leftrightarrow \text{postoji otvoren skup } U \text{ u } (X, d) \text{ takav da je } V = U \cap Y \\ &\Leftrightarrow \text{ postoji } U \in \mathcal{T}_d \text{ takav da je } V = U \cap Y \\ &\Leftrightarrow V \in \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_d\}. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Propozicija 3.1.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je K neprazan podskup od X. Neka je $\mathcal{S}$ relativna topologija na K. Tada je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je topološki prostor $(K, \mathcal{S})$ kompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. Neka je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ očito vrijedi $V \in \mathcal{S}$ pa postoji $U_V \in \mathcal{T}$ takav da je $V = K \cap U_V$. Promotrimo familiju

$$\mathcal{U} = \{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K \subseteq U_{V_1} \cup \cdots \cup U_{V_n}.$$

Neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in U_{V_i}$. Dakle, $x \in K \cap U_{V_i}$ pa je $x \in V_i$. Time smo dokazali da je

$$K \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Očito je $V_i \subseteq K$, za svaki $i \in \{1, \ldots, \}$ pa je

$$K = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Time smo dokazali da je topološki prostor $(K, \mathcal{S})$ kompaktan.

Obratno, pretpostavimo da je topološki prostor $(K, \mathcal{S})$ kompaktan. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Definirajmo

$$\mathcal{V} = \{K \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Za svaki $U \in \mathcal{U}$ vrijedi $U \in \mathcal{T}$ pa je stoga $K \cap U \in \mathcal{S}$. Prema tome, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$. Nadalje, neka je $x \in K$. Tada postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$. Imamo $x \in K \cap U$. Dakle,

$$x \in \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Prema tome,

$$K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$$

pa je

$$K = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Prema tome, $\mathcal{V}$ je otvoreni pokrivač topološkog prostora $(K, \mathcal{S})$. Iz pretpostavke da je topološki prostor $(K, \mathcal{S})$ kompaktan slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je

$$K = V_1 \cup \cdots \cup V_n.$$

Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je $V_i = K \cap U_i$. Neka je $x \in K$. Tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $x \in V_i$. Iz $V_i \subseteq U_i$ slijedi $x \in U_i$. Time smo dokazali da je

$$K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n.$$

Prema tome, K je kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$. $\square$

Korolar 3.1.12. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je K neprazan podskup od X. Neka je $p = d|_{K\times K}$. Tada je K kompaktan skup u (X, d) ako i samo ako je (K, p) kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Imamo da je (K, p) potprostor metričkog prostora (X, d) pa je prema korolaru 3.1.10 $(K, \mathcal{T}_p)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T}_d)$. Prema tome, $\mathcal{T}_p$ je relativna topologija na K (s obzirom na topologiju $\mathcal{T}_d$). Koristeći propoziciju 3.1.11 dobivamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} K \text{ kompaktan u } (X, d) &\Leftrightarrow K \text{ kompaktan u } (X, \mathcal{T}_d) \\ &\Leftrightarrow (K, \mathcal{T}_p) \text{ kompaktan topološki prostor} \\ &\Leftrightarrow (K, p) \text{ kompaktan metrički prostor} . \end{aligned}$$

Time je tvrdnja korolara dokazana. □

Propozicija 3.1.13. *Vrijedi:* $0 \in C$.

Dokaz. Bit će dovoljno dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $x > 0$ takav da je $[0, x] \in S_n$. Naime, tada ćemo očito imati $0 \in F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $0 \in C$. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvdnja je jasna jer je $S_1 = \{[0, 1]\}$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $[0, x] \in S_n$ za neki $x > 0$.
Znamo da je

$$S_{n+1} = f(S_n) = \bigcup_{I \in S_n} \tau(I).$$

Označimo $I_0 = [0, x]$. Tada je $I_0 \in S_n$ pa je

$$\tau(I_0) \subseteq \bigcup_{I \in S_n} \tau(I),$$

tj.

$$\tau(I_0) \subseteq S_{n+1}.$$

No,

$$\tau(I_0) = \{[0, \frac{x}{3}], [\frac{2x}{3}, x]\}$$

pa je

$$[0, \frac{x}{3}] \in S_{n+1}.$$

Time je tvrdnja dokazana. □

Definicija 3.1.14. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$. Tada za $d|_{X\times X}$ kažemo da je **euklidska metrika na** X.*

Očito je $(X, d|_{X\times X})$ potprostor od $(\mathbb{R}^n, d)$.

Definicija 3.1.15. *Neka je d euklidska metrika na C. Tada za metrički prostor (C, d) kažemo da je* ***Cantorov prostor****.*

Propozicija 3.1.16. *Cantorov prostor je kompaktan.*

Dokaz. Neka je e euklidska metrika na $\mathbb{R}$. Znamo da je C kompaktan skup u $(\mathbb{R}, e)$ pa iz korolara 3.1.12 slijedi da je (C, d) kompaktan metrički prostor. □

3.2 Neprebrojivost Cantorovog skupa

Lema 3.2.1. *Neka je $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz segmenata u $\mathbb{R}$ takav da je $I_{n+1} \subseteq I_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Dokaz. Imamo

$$I_n = [a_n, b_n]$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$, gdje su $a_n, b_n \in \mathbb{R},\ a_n < b_n$. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo $I_{n+1} \subseteq I_n$, tj.

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n],$$

iz čega slijedi $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$. Iz ovoga zaključujemo da za sve $n, k \in \mathbb{N}$ takve da je $n \leq k$ vrijedi $a_n \leq a_k$ i $b_k \leq b_n$.

Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Dokažimo da je

$$a_n \leq b_m \tag{3.2}$$

Ako je $n \leq m$, onda je $a_n \leq a_m \leq b_m$ pa vrijedi (3.2), a ako je $n > m$, onda je $a_n \leq b_n \leq b_m$ pa vrijedi (3.2). Skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ je prema (3.2) odozgo omeđen. Neka je

$$c = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tada je očito $a_n \leq c$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. S druge strane, za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je b_m gornja međa skupa $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (prema (3.2)) pa je stoga $c \leq b_m$. Zaključak: $a_n \leq c \leq b_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tj. $c \in I_n$. Dakle,

$$c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Time je tvrdnja leme dokazana. □

Ako su S i T skupovi, onda sa S^T označavamo skup svih funkcija sa T u S.

Teorem 3.2.2. *Skup C je neprebrojiv.*

Dokaz. Definirajmo funkciju $\Gamma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ na sljedeći način.
Neka je $(x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Definirajmo induktivno niz segmenata $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Neka je

$$A_1 = \begin{cases} [0, \frac{1}{3}], \text{ ako je } x_1 = 0, \\ [\frac{2}{3}, 1], \text{ ako je } x_1 = 1, \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ te da smo definirali segment A_n. Tada postoje jedinstveni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $A_n = [a, b]$. Definiramo

$$A_{n+1} = \begin{cases} [a, a + \frac{b-a}{3}], \text{ ako je } x_{n+1} = 0, \\ [a + 2\frac{b-a}{3}, b], \text{ ako je } x_{n+1} = 1, \end{cases}$$

Uočimo da je $A_{n+1} \in \tau(A_n)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo indukcijom da je

$$A_n \in S_{n+1} \tag{3.3}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.
Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$A_n \in S_{n+1}.$$

Vrijedi

$$S_{n+2} = f(S_{n+1}) = \bigcup_{I \in S_{n+1}} \tau(I)$$

pa je $\tau(I) \subseteq S_{n+2}$ za svaki $I \in S_{n+1}$. Posebno, iz $A_n \in S_{n+1}$ slijedi $\tau(A_n) \subseteq S_{n+2}$ pa zbog $A_{n+1} \in \tau(A_n)$ imamo

$$A_{n+1} \in S_{n+2}.$$

Prema tome, vrijedi (3.3) za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Iz (3.3) je sada očito da je $A_n \subseteq F_{n+1}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa iz leme 3.1.2 slijedi da je $A_n \subseteq F_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$

tj.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subseteq C.$$

Prema lemi 3.2.1 skup $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ je neprazan. Odaberimo neku točku tog skupa i definirajmo da je $\Gamma((x_i))$ upravo ta točka. Dakle,

$$\Gamma((x_i)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

tj.

$$\Gamma((x_i)) \in C.$$

Time smo definirali funkciju

$$\Gamma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C.$$

Dokažimo da je Γ injekcija. Neka su

$$(x_i), (y_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ (x_i) \neq (y_i).$$

Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz segmenata iz definicije od $\Gamma((x_i))$, te neka je $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pripadni niz segmenata iz definicije od $\Gamma((y_i))$. Budući da je $(x_i) \neq (y_i)$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x_i \neq y_i$. Definirajmo

$$i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i\}.$$

1. slučaj: $i_0 = 1$
Tada je $x_1 \neq y_1$ pa je iz definicije skupova A_1 i A'_1 jasno da je $A_1 \cap A'_1 = \emptyset$. Stoga je

$$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = \emptyset$$

pa iz činjenice da je

$$\Gamma((x_i)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

te

$$\Gamma((y_i)) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n$$

slijedi da je

$$\Gamma((x_i)) \neq \Gamma((y_i)).$$

2. slučaj: $i_0 > 1$
Tada je $x_1 = y_1, \ldots, x_{i_0-1} = y_{i_0-1}$ pa je $A_1 = A'_1, \ldots, A_{i_0-1} = A'_{i_0-1}$. Imamo $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ i $A_{i_0-1} = A'_{i_0-1}$ pa iz definicije skupova A_{i_0} i A'_{i_0} slijedi da je $A_{i_0} \cap A'_{i_0} = \emptyset$. Stoga je

$$(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = \emptyset$$

pa kao u prvom slučaju zaključujemo da je

$$\Gamma((x_i)) \neq \Gamma((y_i)).$$

U oba slučaja vrijedi

$$\Gamma((x_i)) \neq \Gamma((y_i))$$

pa zaključujemo da je Γ injekcija. Poznato je da je skup $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ neprebrojiv pa iz činjenice da je $\Gamma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ injekcija slijedi da je C neprebrojiv skup. □

3.3 Totalna nepovezanost Cantorovog prostora

Lema 3.3.1. *Neka je e euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Tada je diam$([a,b]) = b - a$ u metričkom prostoru $(\mathbb{R}, e)$.*

Dokaz. Po definiciji je

$$\operatorname{diam}([a,b]) = \sup\{d(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in [a,b]\}.$$

Trebamo dokazati da je taj supremum jednak $b - a$. Vrijedi $b - a = d(a,b)$ pa je

$$b - a \ \in \ \{d(a_1,a_2) \mid a_1,a_2 \in [a,b]\}.$$

Još treba dokazati da ovaj skup ne sadrži element veći od $b - a$, tj. da je $b - a$ gornja međa tog skupa. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $a_1, b_1 \in [a,b]$, $a_1 < b_1$ takvi da je

$$d(a_1,b_1) > b - a,$$

tj.

$$b_1 - a_1 > b - a.$$

Ali iz $a_1, b_1 \in [a,b]$ i $a_1 < b_1$ imamo

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b$$

pa je

$$b_1 - a_1 \leq b_1 - a \leq b - a$$

pa ne može vrijediti $b_1 - a_1 > b - a$. Zaključak:

$$\operatorname{diam}([a,b]) = b - a.$$

□

Lema 3.3.2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $I \in S_n$ vrijedi*

$$\operatorname{diam} I = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Nadalje, za sve $I, J \in S_n$ takve da je $I \neq J$ vrijedi $I \cap J = \emptyset$.

Dokaz. Dokažimo ovu tvrdnju indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Vrijedi

$$S_{n+1} = \bigcup_{I \in S_n} \tau(I).$$

Neka je $I \in S_{n+1}$. Tada postoji $I' \in S_n$ takav da je $I \in \tau(I')$. Imamo $I' = [a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Stoga je

$$I = [a, a + \frac{b-a}{3}]$$

ili

$$I = [a + 2\frac{b-a}{3}, b].$$

U svakom slučaju vrijedi

$$\operatorname{diam} I = \frac{b-a}{3}.$$

No,

$$b - a = \operatorname{diam} I' = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Stoga je

$$\operatorname{diam} I = \frac{\frac{1}{3^{n-1}}}{3} = \frac{1}{3^{(n+1)-1}}.$$

Dakle,

$$\operatorname{diam} I = \frac{1}{3^{(n+1)-1}}$$

za svaki $I \in S_{n+1}$.

Neka su $I, J \in S_{n+1},\ I \neq J$. Tada postoje $I', J' \in S_n$ takvi da je $I \in \tau(I')$, a $J \in \tau(J')$. Pretpostavimo da je $I' \neq J'$. Iz induktivne pretpostavke slijedi da je

$$I' \cap J' = \emptyset$$

pa zbog $I \subseteq I'$ i $J \subseteq J'$ vrijedi

$$I \cap J = \emptyset.$$

Pretpostavimo da je $I' = J'$. Tada vrijedi $I, J \in \tau(I')$ pa iz definicije od $\tau(I')$ i $I \neq J$ slijedi $I \cap J = \emptyset$. Prema tome, $I \cap J = \emptyset$ za sve $I, J \in S_{n+1}$ takve da je $I \neq J$. Time je tvrdnja leme dokazana. $\square$

Lema 3.3.3. *Neka su $a, b, u, v \in \mathbb{R}$, $a < b$, $u < v$. Pretpostavimo da je*

$$[a, b] \cap [u, v] = \emptyset \tag{3.4}$$

te da je $x < y$ za neke $x \in [a, b]$ i $y \in [u, v]$. Tada je $b < u$.

Dokaz. Imamo

$$a \leq x < y \leq v$$

pa je $a < v$. Kada bi vrijedilo $u \leq a$, onda bismo imali $u \leq a < v$, tj. $a \in [u, v]$, što je u kontradikciji s (3.4). Prema tome, $a < u$. Kada bi vrijedilo $u \leq b$, onda bismo zajedno s prethodnom nejednakosti dobili $u \in [a, b]$, što je u kontradikciji s (3.4). Prema tome, $b < u$. □

Teorem 3.3.4. *Neka su $x, y \in C$ takvi da je $x < y$. Tada postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $z \notin C$ te takav da je $x < z < y$.*

Dokaz. Imamo $y - x > 0$ pa postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\frac{1}{3^n} < y - x.$$

Imamo $x, y \in F_{n+1}$ (što slijedi iz definicije skupa C) pa postoje $I, J \in S_{n+1}$ takvi da je $x \in I$, $y \in J$.
Pretpostavimo da je $I = J$. Iz $x, y \in I$ slijedi

$$|x - y| \leq \operatorname{diam} I$$

pa prema lemi 3.3.2 vrijedi

$$|x - y| \leq \frac{1}{3^n},$$

tj.

$$y - x \leq \frac{1}{3^n}.$$

Ovo je u kontradikciji s odabirom broja n. Prema tome, $I \neq J$. Iz leme 3.3.2 sada slijedi $I \cap J = \emptyset$.
Imamo $I = [a, b]$ i $J = [u, v]$, gdje su $a, b, u, v \in \mathbb{R}$, $a < b$, $u < v$. Neka je

$$A = \{K \in S_{n+1} \mid K \text{ sadrži neki } w \in \mathbb{R} \text{ takav da je } w > b\}.$$

Znamo od prije da je S_{n+1} konačan skup, stoga je A konačan skup. Nadalje, A je neprazan skup jer je $J \in A$. Prema tome,

$$A = \{K_1, \ldots, K_m\}.$$

Za svaki $i \in \{1, \dots, m\}$ imamo
$$K_i = [\alpha_i, \alpha'_i],$$
gdje su $\alpha_i, \alpha'_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i < \alpha'_i$. Neka je $i \in \{1, \dots, m\}$. Tada je $K_i \in S_{n+1}$ te K_i sadrži neki $w \in \mathbb{R}$ takav da je $w > b$. Iz ovoga zaključujemo da je
$$K_i \neq [a, b]$$
pa iz leme 3.3.2 slijedi da je
$$[a, b] \cap K_i = \emptyset.$$
Iz leme 3.3.3 slijedi da je $b < \alpha_i$. Definirajmo
$$\gamma = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}.$$
Vrijedi $b < \gamma$. Odaberimo $z \in \mathbb{R}$ takav da je $b < z < \gamma$. Uočimo da je $u = \alpha_{i_0}$ za neki $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. Koristeći $x \in I = [a, b]$ i $y \in J = [u, v]$ dobivamo
$$x \leq b < z < \gamma \leq \alpha_{i_0} = u \leq y.$$
Dakle, $x < z < y$. Tvrdimo $z \notin C$. Pretpostavimo suprotno. Tada je $z \in C$ pa je $z \in F_{n+1}$ te stoga postoji $K \in S_{n+1}$ takav da je $z \in K$. Iz ovoga zaključujemo da je $K \in A$ pa je
$$K = [\alpha_i, \alpha'_i]$$
za neki $i \in \{1, \dots, m\}$. Stoga je $\alpha_i \leq z$. No, iz $z < \gamma$ i $\gamma \leq \alpha_i$ slijedi $z < \alpha_i$. Kontradikcija. Prema tome, $z \notin C$. Time je tvrdnja teorema dokazana. □

Korolar 3.3.5. *Cantorov prostor je totalno nepovezan.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $A \subseteq C$ takav da je A povezan skup u Cantorovom prostoru (C, d) te takav da A ima bar dva elementa. Odaberimo $x, y \in A$ takve da je $x < y$. Prema teoremu 3.3.4 postoji $z \in \mathbb{R}$ takav da $z \notin C$ i $x < z < y$. Neka je
$$U = \langle -\infty, z\rangle \cap C$$
i
$$V = \langle z, \infty\rangle \cap C.$$
Iz propozicije 3.1.9 slijedi da su skupovi U i V otvoreni u metričkom prostoru (C, d). Nadalje, vrijedi
$$U \cap V = \emptyset,\ U \cup V = C$$
te $U \cap A \neq \emptyset$ (jer je $x \in U \cap A$) i $V \cap A \neq \emptyset$ (jer je $y \in V \cap A$). Zaključujemo da je (U, V) separacija skupa A u metričkom prostoru (C, d). Ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da je A povezan skup. Prema tome, ne postoji skup A s navedenim svojstvima, što znači da je metrički prostor (C, d) totalno nepovezan. □

Bibliografija

[1] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975

[2] C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo Cantorov skup i Cantorov prostor i neka njihova zanimljiva svojstva. Definirali smo neke pojmove u metričkim i topološkim prostorima, kao što su povezanost, kompaktnost, separirani skupovi, totalna nepovezanost, Hausdorffovi i normalni prostori, te dokazali neke tvrdnje s njima u vezi. Posebno smo se koncentrirali na totalno nepovezane kompaktne prostore, kakav je i Cantorov prostor.

Summary

In this thesis we have studied the Cantor set and the Cantor space and some of their interesting properties. We have definied some notions in metric and topological spaces, such as connectedness, compactness, separated sets, total disconnectedness, Hausdorff and normal spaces, and proved some facts related to them. In particular, we have concentrated on totally disconnected compact spaces, an example of which is the Cantor space.

Životopis

Zovem se Magdalena Bašić. Rođena sam 07.09.1992. godine u Šibeniku. Osnovnu školu završila sam u Murteru 2007. godine. Nakon toga upisala sam Gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru gdje sam završila prva dva razreda, a kasnije sam se prebacila u šibensku Gimnaziju Antuna Vrančića koju sam završila 2011. Iste godine upisala sam Preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu kojeg sam završila 2015. Nakon toga upisujem Diplomski studij Matematičke statistike.