SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Igor Dumbović

KVALITATIVNA ANALIZA LINEARNIH SUSTAVA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI I PRIMJENA NA NELINEARNE SUSTAVE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Maja Resman

Zagreb, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Želim se najprije zahvaliti mentorici dr. sc. Maji Resman za pomoć u pisanju diplomskog rada te na uloženom trudu i strpljenju. Ovaj rad posvećujem roditeljima, bratu Ivanu, sestri Ivi i baki koji su me uvijek podržavali tijekom mog obrazovanja. Zahvaljujem se i svojim bliskim prijateljima, rođacima i svim ljudima koji su bili uz mene tijekom mog studiranja. Hvala Vam.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu proučavamo linearne sustave običnih diferencijalnih jednadžbi. Znamo da su obične diferencijalne jednadžbe jednadžbe u kojima se, osim nepoznate funkcije (jedne varijable), javljaju i njezine derivacije. Obične diferencijalne jednadžbe imaju široku primjenu u prirodnim znanostima, ali i u ostalim područjima (npr. u ekonomiji). Na primjer, običnu diferencijalnu jednadžbu

$$x' = ax, \ a > 0,$$

možemo promatrati kao vrlo pojednostavljen model rasta populacije koji je proporcionalan stanju trenutne populacije.

Kroz cijeli rad bavimo se 2×2 linearnim sustavima diferencijalnih jednadžbi prvoga reda. Linearni sustavi su bitni jer se, pod nekim uvjetima, nelinearni sustavi mogu dobro aproksimirati svojim linearnim dijelom. Zato eksplicitno ili kvalitativno rješavanje linearnog sustava doprinosi razumijevanju rješenja nelinearnih sustava, kojeg je teško ili nemoguće eksplicitno riješiti. Sustav zapišemo u matričnom obliku. Ponašanje sustava će ovisit o svojstvenim vrijednostima matrice sustava. Na primjer, jednadžba matematičkog *njihala* je oblika

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0, \tag{1}$$

gdje je $x = x(t)$, $x \ : < 0, \infty > \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija kuta kojeg njihalo zatvara s vertikalnom osi u ovisnosti o vremenu, g ubrzanje sile teže, a L duljina njihala. Nakon zamjene varijabli $x_1 = x$ i $x_2 = \dot{x}$, jednadžba je ekvivalentna nelinearnom sustavu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin x_1. \end{cases} \tag{2}$$

Vidimo da je sustav teško riješiti eksplicitno. No, promotrimo li jednadžbu (1), vidimo da je za vrlo male kuteve $x \sim 0$, otprilike $\sin x \sim x$. Tada sustav (2) možemo 'aproksimirati' linearnim sustavom kojeg znamo riješiti eksplicitno. Zato se kroz rad upoznajemo s rješavanjem 2×2 linearnim sustavima, a u zadnjem poglavlju teoriju kratko primjenjujemo na nelinearne sustave linearizacijom. Iskazujemo teorem koji nam govori da je ponašanje nelinearnog sustava u okolini *ravnotežne hiperboličke* točke određeno ponašanjem linearnog sustava, tj. trajektorije imaju sličan izgled.

Rad započinjemo ponavljanjem osnovnih činjenica o matričnom zapisu linearnog operatora i Jordanovoj bazi, u kojoj će matrica sustava (pridružena nekom operatoru) imati najjednostavniji izgled.

U drugom poglavlju stavljamo naglasak na geometrijsku interpretaciju Cauchyjevog problema (linearnog sustava diferencijalnih jednadžbi sa zadanim početnim uvjetom) preko vektorskog polja smjerova. Uvodimo pojmove poput integralna krivulja ili krivulja rješenja, fazni portret i polje smjerova.

U trećem poglavlju cilj je naći eksplicitno rješenje 2×2 linearnog sustava. U tu svrhu uvodimo pojam operatorske norme matrice motiviranu pojmom operatorske norme linearnog operatora i iskazujemo neka njena svojstva. Uvođenjem norme na prostor matrica možemo promatrati konvergenciju niza, odnosno reda matrica. Definiramo pojam eksponencijalne funkcije matrice preko konvergentnog reda matrice. Potom iskazujemo fundamentalni teorem za postojanje i jedinstvenosti rješenja linearnog sustava. Ono je dano eksponencijalnom funkcijom matrice. Za efektivno dobivanje eksplicitnog rješenja sustava u primjerima, korištenjem fundamentalnog teorema računamo eksponencijalnu funkciju matrica u Jordanovoj formi, što odgovara rješavanju originalnog sustava nakon linearne zamjene koordinata. Vidimo da tipove i grubo ponašanje rješenja možemo klasificirati u ovisnosti o svojstvenim vrijednostima. Zatim, u drugom dijelu poglavlja, dobivenu klasifikaciju potkrepljujemo kvalitativnom analizom: za razne tipove svojstvenih vrijednosti crtamo fazne portrete korištenjem polja smjerova sustava. Ideja kvalitativne teorije u rješavanju diferencijalnih jednadžbi jest iz oblika jednadžbe procijeniti izgled trajektorija bez eksplicitnog rješavanja sustava koristeći npr. polje smjerova. Poseban značaj takvog načina rješavanja je kod nelinearnih sustava čije rješenje ne znamo uvijek eksplicitno odrediti.

U zadnjem dijelu rada pokušavamo lokalno aproksimirati nelinearni sustav linearnim. U tu svrhu razvijamo teoriju o linearizaciji nelinearnog sustava te iskazujemo Hartman-Grobmanov teorem. Na taj način teoriju razvijenu za linearne sustave možemo iskoristiti u rješavanju nelinearnih.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Obična diferencijalna jednadžba prvog reda je jednadžba oblika

$$F(t, x, x') = 0, \tag{1.1}$$

gdje je t nezavisna realna varijabla, $x = x(t) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I interval, nepoznata realna funkcija realne varijable t, klase $C^1(I)$, i $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ poznata funkcija više varijabli. Pretpostavimo da jednadžbu (1.1) možemo zapisati u obliku

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Definicija 1.0.1. *Sustav n* ***diferencijalnih jednadžbi prvog reda*** *je sustav oblika*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{1.2}$$

gdje je $\mathbf{x} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tražena funkcija i $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ zadana funkcija.

Sustav (1.2) možemo zapisati i po komponentama, tj. kao

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x(t)) \\ f_2(t, x(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x(t)) \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

gdje je $f_i : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$, i-ta komponenta funkcije $\mathbf{f}$ u sustavu (1.2).
Sustav (1.2) oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{1.4}$$

zovemo **autonomnim**.

Definicija 1.0.2 ([9]). *Neka je* $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ *funkcija. Tada je funkcija* $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ***rješenje diferencijalne jednadžbe*** (1.2) *na intervalu* $I = (a, b)$ *ako je* $\mathbf{x}$ *diferencijabilna na* I *i ako za svaki* $t \in I$ *je* $(t, \mathbf{x}(t)) \in \Omega$ *i ako vrijedi*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}(t))\,. \tag{1.5}$$

Neka je $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. *Funkcija* $\mathbf{x}(t)$ *je* ***rješenje Cauchyjevog problema***

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} & = \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}\,(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) & = \mathbf{x_0} \end{cases} \tag{1.6}$$

na intervalu I *ako je* $t_0 \in I, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}$ *i* $\mathbf{x}(t)$ *je rješenje diferencijalne jednadžbe* (1.5) *na intervalu* I.

Definicija 1.0.3. ***Linearni sustav*** n ***diferencijalnih jednadžbi prvog reda*** *je sustav oblika*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{aligned} \tag{1.7}$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, ..., n$, *konstante,* $x_i(t), i = 1, ..., n$, *nepoznate realne funkcije realne varijable* t.

Sustav (1.7) kraće pišemo u matričnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{1.8}$$

gdje je $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{R})$ konstantna matrica, a $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$ vektorska funkcija.

U Poglavlju 1.1 će se pokazati da matricu A možemo promatrati kao preslikavanje, odnosno matrični prikaz u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^n$ linearnog operatora $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Sustav (1.8) možemo pisati kao

$$\dot{\mathbf{x}} = L(\mathbf{x}). \tag{1.9}$$

Tip rješenja i ponašanje sustava (1.8) će ovisiti o svojstvenim vrijednostima operatora sustava, odnosno o svojstvenim vrijednostima matrice pridružene tom operatoru.
U radu, mi ćemo raditi uglavnom sa 2×2 sustavima linearnih jednadžbi.

1.1 Matrični prikaz operatora (Ponavljanje)

Prisjetimo se nekih osnovnih činjenica iz linearne algebre (iz [2]) koje ćemo koristiti u radu.
Neka je x bilo koji vektor vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{R}$ te neka je $a = \{a_1, ..., a_n\}$ neka baza za V. Vektor x možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze a, tj.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \ x_i \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Matrični prikaz vektora x u bazi a je jednostupčana matrica

$$[x]_{(a)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$

Neka je $L \in L(V)$ te neka su $a = \{a_1, ..., a_n\}$ i $b = \{b_1, ..., b_n\}$ po dvije baze za vektorski prostor V. Vektore $L(a_j) \in V$, $j = 1, ...n$, možemo pisati kao linearnu kombinaciju vektora baze b, tj.

$$L(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, \ j = 1, ..., n, \ \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Matricu

$$\left[L\right]_{(b,a)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1.12}$$

zovemo matrični prikaz operatora L u paru baza (a, b). Uočimo kako je j-ti stupac matrice $[L]_{(b,a)}$ matrični zapis vektora $L(a_j)$ u bazi b.

Teorem 1.1.1 ([2]). *Neka su $a = \{a_1, ..., a_n\}$ i $b = \{b_1, ..., b_n\}$ po dvije baze za vektorski prostor V. Neka je $L \in L(V)$ linearni operator i $[L]_{(b,a)}$ njegov matrični prikaz u paru baza (a, b) te neka je $x \in V$ bilo koji vektor. Tada je*

$$[L(x)]_{(b)} = [L]_{(b,a)} \, [x]_{(a)} \tag{1.13}$$

Dokaz. Neka je $[L]_{(b,a)} = \left[\alpha_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{R})$ i $[x]_{(a)} = [x_i] \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Kako vektor x možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze a, i zbog linearnosti, prema [2] imamo:

$$\begin{aligned} L(x) &= L(\sum_{j=1}^{n} x_j a_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j L(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) b_i \end{aligned}$$

Vidimo da je unutarnja suma i-ta je komponenta vektora $L(x)$ u bazi b. Nadalje, unutarnja suma je množenje i-tog retka matrice $[L]_{(b,a)}$ s matricom $[x]_{(a)}$. Zato vrijedi (1.13). □

Vratimo se sad na sustav (1.8). Ako definiramo operator s $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $[L(\mathbf{x})]_{(b)} = A\,[\mathbf{x}]_{(a)}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vidimo da je matrica A matrični prikaz operatora L u paru baza (a, b), tj. $A = [L]_{(b,a)}$. Naime, neka je matrica $A = \left[a_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{R})$, $i, j = 1, ...n$, zadana. Za svaki vektor a_j, $j = 1, ..., n$, baze a vrijedi

$$\left[L(a_j)\right]_{(b)} = A \cdot \left[a_j\right]_{(a)}. \tag{1.14}$$

Koordinatna matrica vektora a_j u bazi a je oblika

$$\left[a_j\right]_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu se jedinica nalazi u j-tom retku. Pomnožimo li matricu A s matricom $\left[a_j\right]_{(a)}$, dobit ćemo upravo j-ti stupac matrice A. Iz (1.14), slijedi da je $A = [L]_{(b,a)}$.

Prethodno smo konstatirali pridruživanje matričnog zapisa linearnom operatoru u nekom paru baza. Možemo se pitati u kojoj vezi su matrični zapisi operatora istog linearnog operatora u različitim parovima baza. Odgovor na to pitanje daje nam sljedeći teorem:

Teorem 1.1.2 ([2]). *Neka je $L \in L(V)$ linearni operator. Neka su $a = \{a_1, ..., a_n\}$ i $a' = \{a'_1, ..., a'_n\}$, $b = \{b_1, ..., b_n\}$, $b' = \{b'_1, ..., b'_n\}$ po četiri baze prostora V. Nadalje, neka je $T_{aa'}$ matrica prijelaza iz baze a u bazu a', a $T_{b'b}$ matrica prijelaza iz baze b' u bazu b. Tada vrijedi*

$$[L]_{(b',a')} = T_{b'b}\,[L]_{(b,a)}\,T_{aa'}. \tag{1.15}$$

Dokaz ovog teorema se može naći u knjizi [2].

Matrica prijelaza iz baze u bazu je uvijek regularna jer su joj stupci nezavisni pa je punog ranga. Naime, stupci matrice su vektori baze a' (njihov matrični prikaz u bazi a). Kako je a' baza, slijedi da su stupci matrice $T_{aa'}$ nezavisni, pa je matrica regularna. Analogno vrijedi i za matricu prijelaza $T_{b'b}$. Nadalje, za svaki par baza a, a' vrijedi da je $T_{aa'} = T_{a'a}^{-1}$. Kako je matrica prijelaza T iz jedne baze u drugu uvijek regularna, matrični prikazi u različitim bazama pridruženi istom linearnom operatoru $L \in L(V)$ slične su matrice.

Pitamo se, možemo li i obratno, tj. za neku kvadratnu matricu A naći linearni operator kojemu je matrični prikaz u nekom paru baza matrica A. Odgovor na to pitanje je da možemo i to nam omogućuje sljedeći teorem.

Teorem 1.1.3 ([2]). *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Neka je $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ bilo koja baza za V i neka su $w_1, w_2, ..., w_n$ bilo koji, ne nužno različiti, vektori iz V. Tada postoji jednoznačno određen linearni operator $L \in L(V)$ takav da je $L(a_i) = w_i, \ \forall i = 1, ..., n$.*

Dokaz. Dokaz se može naći u [2].
Zadajmo linearni operator L na bazi $\{a_1, ..., a_n\}$ s:

$$L(a_i) = w_i, \ i = 1, 2, ..., n. \tag{1.16}$$

Izračunajmo sliku općeg vektora $x \in V$. Svaki vektor x možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora baze, pa imamo

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i. \tag{1.17}$$

Sada je

$$L(x) = L(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i L(a_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i. \tag{1.18}$$

Vidimo da je linearni operator potpuno (jednoznačno) zadan svojim djelovanjem na bilo koju bazu. Dakle, ako postoji linearni operator koji zadovoljava (1.16), taj L je jednoznačno određen što smo pokazali izračunavanjem slike općeg $x \in V$.
Pokažimo da je preslikavanje L linearno.
Neka su $x, y \in V$ takvi da je

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i, \ y = \sum_{i=1}^{n} y_i a_i, \tag{1.19}$$

te neka su α i β iz $\mathbb{R}$. Po definiciji preslikavanja L, imamo:

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= L(\alpha \sum_{i=1}^{n} x_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i a_i) = L(\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta y_i w_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i w_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i w_i = \alpha L(x) + \beta L(y) \end{aligned}$$

□

Neka je V vektorski prostor takav da je $\dim V = n$ i neka je

$$A = \left[\alpha_{ij}\right] \in M_n(\mathbb{R})$$

zadana matrica. Neka je $a = \{a_1, ..., a_n\}$ baza za V, a $b = \{b_1, ..., b_n\}$ druga baza za V. Tražimo linearni operator $L : V \to V$ čiji matrični prikaz u paru baza (a, b) je baš A. Definiramo vektore $w_i,\ i = 1, ..., n$, s

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, \ j = 1, ..., n.$$

Prema Teoremu 1.1.3, postoji operator $L \in L(V)$ takav da je

$$L(a_j) = w_j, \ j = 1, ..., n.$$

Za njega vrijedi

$$L(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, \ \forall j = 1, ..., n.$$

Time je operator L potpuno zadan pomoću $n \cdot n$ skalara $\alpha_{ij},\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n$. Slijedi da je $[L]_{(b,a)} = A$, pri čemu je $[L]_{(b,a)}$ matrični prikaz operatora L u paru baza (a, b).

Vratimo se na linearni sustav (1.7). Koeficijente a_{ij} na desnoj strani sustava zapisali smo kao elemente kvadratne matrice

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Gornju matricu A možemo promatrati kao matrični prikaz operatora $L \in L(\mathbb{R}^n)$ u nekoj bazi a za $\mathbb{R}^n$, tj. $A = [L]_{(a,a)}$. Matrični sustav (1.7) ekvivalentan je operatorskoj jednadžbi $y' = L(y)$, gdje je $L \in L(\mathbb{R}^n)$ operator koji u bazi a ima matrični prikaz A, tj. $A = [L]_{(a,a)}$, a y vektor koji u bazi a ima prikaz $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$, tj.

$$[y]_{(a)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Izaberemo li kanonsku bazu e, tada imamo direktnu vezu stupca x u M_{n1} i točke u $\mathbb{R}^n$.

1.2 Spektar linearnog operatora

Definicija 1.2.1 ([2]). *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $L \in L(V)$ linearni operator. Za skalar $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ kažemo da je svojstvena vrijednost operatora L ako postoji vektor $x \in V, x \neq 0$, takav da je $Lx = \lambda_0 x$. Za vektor x kažemo da je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.*

Definicija 1.2.2 ([2]). *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica. Skalar λ_0 je svojstvena vrijednost matrice A ako postoji vektor $x \neq 0_v \in M_{n1}(\mathbb{R})$ takav da je*

$$Ax = \lambda_0 x.$$

*Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A zovemo spektrom matrice A i označavamo s $\sigma(A)$. Polinom $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ naziva se **svojstveni polinom** ili **karakteristični polinom** matrice A.*

Sljedeći teorem nam daje nužan i dovoljan uvjet da skalar λ_0 bude svojstvena vrijednost matrice A.

Teorem 1.2.3 ([2]). *Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako vrijedi*

$$k_A(\lambda_0) = 0. \tag{1.20}$$

Dokaz. Neka je λ_0 svojstvena vrijednost matrice A. Tada po definiciji, postoji vektor $x \in M_{n1}(\mathbb{R}),\ x \neq 0$, takav da je

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Odavde dobivamo da je $Ax - \lambda_0 x = 0$, tj. $(A - \lambda_0 I)x = 0$. Slijedi da matrica $A - \lambda_0 I$ nije regularna, pa je $\det(A - \lambda_0 I) = 0$. Po definiciji karakterističnog polinoma, slijedi da je $k_A(\lambda_0) = 0$. Obzirom da su u dokazu gornje navedene tvrdnje ekvivalentne, vrijedi i obrat. Slijedi tvrdnja teorema. □

Teorem 1.2.4. *Neka je $L \in L(\mathbb{R}^n)$ operator i $[L]_{(a,a)}$ matrični prikaz operatora L u bazi a. Tada je $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost od $[L]_{(a,a)}$ ako i samo ako je svojstvena vrijednost od L.*

Uvjerimo se najprije da karakteristični polinom ne ovisi o izboru baze u kojoj je matrica operatora prikazana. Stavimo $A = [L]_{(a,a)}$ i $B = [L]_{(b,b)}$, tj. matrica A je matrični prikaz operatora L u bazi a, a B je matrični prikaz operatora L u bazi b. Po Teoremu 1.1.2 matrice A i B slične su matrice. Postoji regularna matrica $T \in M_n(\mathbb{R})$ tako da vrijedi $B = T^{-1}AT$ i primjenom Binet - Cauchyjevog teorema vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
k_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - \lambda(T^{-1}IT)) = \\
&= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \det(T^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(T) = \\
&= \det(T^{-1}) \cdot \det(T) \cdot \det(A - \lambda I) = \det(T^{-1}T) \cdot \det(A - \lambda I) = \\
&= \det(I) \cdot \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = \\
&= k_A(\lambda),
\end{aligned}$$

što smo i htjeli pokazati. Ovdje smo još koristili i činjenicu da matrica $\lambda I \in M_n(\mathbb{F})$ komutira sa svakom matricom istoga tipa. Dokažimo prethodni teorem.

Dokaz. Neka je $A = [L]_{(a,a)}$, tj. neka je A matrični prikaz operatora L u bazi a. Neka je λ_0 svojstvena vrijednost matrice A. Tada postoji vektor $x \in M_{n1}(\mathbb{R})$ različit od 0 takav da je $Ax = \lambda_0 x$. Ta matrična jednadžba je ekvivalentna operatorskoj $L(y) = \lambda_0 y$, gdje je $y \in \mathbb{R}^n$ i gdje je x matrični prikaz od y u bazi a. Ako je λ_0 svojstvena vrijednost operatora L, onda primjenom Teorema 1.1.1 dobivamo:

$$Ly = \lambda_0 y \Leftrightarrow [Ly]_{(a)} = \lambda_0 [y]_{(a)} \Leftrightarrow [L]_{(a,a)} [y]_{(a)} = \lambda_0 [y]_{(a)}.$$

Odavde vidimo da je λ_0 i svojstvena vrijednost od $[L]_{(a,a)}$ Obzirom da imamo ekvivalenciju, vrijedi i obrat. □

Teorem nam govori da su svojstvene vrijednosti operatora $L \in L(V)$ nultočke karakterističnog polinoma $k_{[L]_{(a,a)}}(\lambda)$ bilo kojeg njegovog matričnog zapisa $[L]_{(a,a)}$ u bazi a prostora V. Prethodni teorem je dobra podloga u traženju Jordanove forme operatora u Odjeljku 1.3, gdje će biti potrebno odrediti njegove svojstvene vrijednosti.

1.3 Jordanova forma operatora

Vidjeli smo da svakom linearnom operatoru možemo pridružiti matrični prikaz u nekoj bazi. Cilj nam je naći što jednostavniji matrični zapis operatora (tzv. Jordanovu formu), tj. bazu u kojoj je matrični prikaz operatora najjednostavniji (tj. Jordanovu bazu). Svakako najbolji od tih prikaza je dijagonalna matrica, ali se to ne može postići za svaki linearni operator. Tražimo bazu prostora u kojoj je prikaz operatora dijagonalna blok-matrica što jednostavnijeg oblika.

Definicija 1.3.1 ([9]). *Neka je λ_0 svojstvena vrijednost matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ algebarske kratnosti $m \leq n$. Vektor $v \neq 0 \in V$ koji zadovoljava jednadžbu $(A - \lambda_0 I)^k v = 0$, za neki $k = 1, ..., m$, zovemo generaliziranim svojstvenim vektorom matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0.*

Sljedeći teorem nam opisuje tzv. Jordanovu formu matrice operatora koja će nam koristiti u teoriji koju ćemo obraditi u radu.

Teorem 1.3.2 ([9]). *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica sa realnim svojstvenim vrijednostima λ_j, $j = 1, ..., k$, i kompleksnim svojstvenim vrijednostima $\lambda_j = a_j + ib_j$ i $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = k+1, ..., n$. Tada postoji baza $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, ..., v_n, u_n\}$ za $\mathbb{R}^{2n-k}$, gdje su v_j, $j = 1, ..., k$, i w_j, $j = k+1, ..., n$, generalizirani svojstveni vektori od A, $u_j = \mathrm{Re}(w_j)$ i $v_j = \mathrm{Im}(w_j)$, $j = k+1, ..., n$, takvi da je matrica $P = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \cdots & \mathbf{v_k} & \mathbf{v_{k+1}} & \mathbf{u_{k+1}} & \cdots & \mathbf{v_n} & \mathbf{u_n} \end{bmatrix}$ invertibilna i vrijedi*

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}. \tag{1.21}$$

Temeljni Jordanovi blokovi $B = B_j$, $j = 1, ..., r$, u 1.21 su kvadratne matrice oblika:

$$(1) \qquad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

pridružen realnoj svojstvenoj vrijednosti λ matrice A, ili oblika

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & D & I_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & D \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

gdje je $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pridružen kompleksnoj svojstvenoj vrijednosti $\lambda = a + ib$ matrice A.

Dokaz Teorema 1.3.2 se može naći u knjizi [6].

Neka je $A = [L]_{(e,e)}$, tj. neka je A matrični prikaz operatora $L \in L(V)$ u kanonskoj bazi. Matricu J u gornjem teoremu zovemo Jordanovom formom operatora L, tj. matrični prikaz od L u tzv. Jordanovoj bazi. Matricu J zovemo i Jordanovom formom matrice A ili operatora L.

U ovom Odjeljku radit ćemo s matricama reda 2, $A \in M_2(\mathbb{R})$. Direktno prema Teoremu 1.3.2, postoje 3 moguće Jordanove forme:

1. Dvije različite realne svojstvene vrijednosti

Tada je Jordanova forma oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix},$$

gdje su λ i μ dvije svojstvene vrijednosti.

2. Jedna realna dvostruka svojstvena vrijednost

Jordanova forma je oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

pri čemu je λ jedna dvostruka svojstvena vrijednost.

3. Par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti

Jordanova forma je oblika

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

pri čemu je a realni, a b imaginarni dio kompleksne svojstvene vrijednosti.

1.3.1 Određivanje Jordanove forme za 2×2 matrice

Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ dana matrica s

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Po definiciji, skalar λ će biti svojstvena vrijednost matrice A ako je, po Teoremu 1.2.3, nultočka karakterističnog polinoma matrice A, tj.

$$k_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \mathrm{det}A = 0. \tag{1.23}$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \mathrm{det}A = 0 \tag{1.24}$$

dobivamo

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}A \pm \sqrt{(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A}}{2}. \tag{1.25}$$

Razlikujemo tri slučaja: kada jednadžba ima dva rješenja, jedno dvostruko rješenje ili dva kompleksno konjugirana rješenja u ovisnosti o diskriminanti $D = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$.

Napomena. Ako su A i B matrice istog operatora u različitim bazama prostora $\mathbb{R}^2$, trag i determinanta su im isti. Pokažimo to.

Dokaz. Neka je $A = [L]_{(a,a)} \in M_2(\mathbb{R})$ matrica pridružena operatoru $L \in L(\mathbb{R}^2)$ u bazi a, $B = [L]_{(b,b)} \in M_2(\mathbb{R})$ matrica pridružena tom operatoru u drugoj bazi b prostora $\mathbb{R}^2$. Tada su po Teoremu 1.1.2 matrice A i B slične matrice. Postoji regularna matrica $T \in M_2(\mathbb{R})$ takva da je $B = T^{-1}AT$. T je zapravo matrica prijelaza iz baze a u bazu b. Tada je

$$\mathrm{tr}B = \mathrm{tr}(T^{-1}AT) = \mathrm{tr}(AT^{-1}T) = \mathrm{tr}(AI) = \mathrm{tr}A.$$

Primijenili smo svojstvo traga umnoška dviju kvadratnih matrica, tj. da za sve kvadratne matrice A i B vrijedi

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Za determinantu matrice B dobivamo

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(A)\det(T) = \\ &= \det(T^{-1})\det(T)\det A = \det I \cdot \det A \\ &= \det A.\end{aligned}$$

□

Na sljedećim primjerima određivat ćemo Jordanovu formu 2×2 matrica sa različitim tipovima svojstvenih vrijednosti.

1. Dvije različite realne svojstvene vrijednosti

Propozicija 1.3.3 ([5]). *Matrični prikaz linearnog operatora $L \in L(\mathbb{R}^2)$ s realnim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \neq \lambda_2$ može se dijagonalizirati do Jordanove matrice*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

linearnom zamjenom koordinata. Drugim riječima, postoji baza za $\mathbb{R}^2$ u kojoj je matrični prikaz operatora L dijagonalna matrica.

Primjer 1.3.4. *Odredimo Jordanovu formu matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom je $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$. *Odavde se jasno vidi da su svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 1$ *i* $\lambda_2 = 5$. *Rješavanjem pripadnog matričnog sustava jednadžbi* $(A - 1 \cdot I)\mathbf{v} = 0$, *gdje je vektor* $\mathbf{v} = (x, y) \in M_{21}(\mathbb{R})$, *dobije se svojstveni vektor* $\mathbf{v_1} = (-1, 1)$ *pridružen skalaru* $\lambda_1 = 1$. *Analogno se odredi da je svojstveni vektor pridružen skalaru* $\lambda_2 = 5$ *jednak* $\mathbf{v_2} = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. *Skup* $a = \{v_1, v_2\}$ *čini tzv. Jordanovu bazu za* $\mathbb{R}^2$. *Matrica* $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *je invertibilna i njena inverzna matrica je* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. *Uočimo kako je matrica P zapravo matrica prijelaza iz kanonske baze* $e = \{e_1, e_2\}$ *u Jordanovu bazu* $a = \{v_1, v_2\}$. *Slijedi da je matrica P regularna, pa postoji njoj inverzna matrica. Jordanova forma matrice A u Jordanovoj bazi a glasi*

$$J(a) = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je matrica dijagonalna i sastoji se od svojstvenih vrijednosti matrice A.

Prema [2], za operator kažemo da se može dijagonalizirati ako postoji baza prostora V u kojoj je tom linearnom operatoru pridružena dijagonalna matrica.

Propozicije u nastavku govore da je nužan i dovoljan uvjet da se matrica reda 2 može dijagonalizirati da ima realne i različite svojstvene vrijednosti (ili je već jednaka aI, $a \in \mathbb{R}$).

2. Jedna dvostruka realna svojstvena vrijednost

Propozicija 1.3.5 ([5]). *Pretpostavimo da je* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *dvostruka svojstvena vrijednost operatora* $L \in L(\mathbb{R}^2)$ *(algebarske kratnosti 2). Tada postoji baza takva da je matrični prikaz operatora matrica*

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$$

ili matrica $\lambda_0 I$.

Svojstvena vrijednost λ_0 može imati geometrijsku kratnost (tj. dimenziju svojstvenog potprostora) 1 ili 2.

Ako je geometrijska kratnost 2, onda imamo slučaj kao u 1. Pretpostavimo da postoje dva linearno nezavisna svojstvena vektora pridružena skalaru λ_0 koja čine Jordanovu bazu. Tada je, prema prvom slučaju, Jordanova matrica oblika

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}.$$

Tada je matrični prikaz operatora L u nekoj drugoj bazi:

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot \lambda_0 I \cdot P^{-1} = \lambda_0 I.$$

Dakle, svaki matrični prikaz tog operatora je dijagonalna matrica.
Promatramo sada slučaj kad je geometrijska kratnost jednaka 1.

Primjer 1.3.6. *Odredimo Jordanovu formu matrice (tj. operatora kojem je matrični prikaz u kanonskoj bazi matrica B)*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pripadni karakteristični polinom je $k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$. *Vidimo da matrica B ima samo jednu svojstvenu vrijednost* $\lambda_1 = 3$. *Dakle,* $\sigma(B) = \{3\}$. *Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti je u tom slučaju jednaka* 2. *Geometrijska kratnost je 1 i pridruženi svojstveni vektor skalaru* 3 *je vektor* $v_1 = (1, 1)$. *On je prvi generalizirani svojstveni vektor. Tražimo drugi generalizirani svojstveni vektor koji je s njim još i nezavisan. Takav svojstveni vektor ne možemo naći jer je jezgra* $\operatorname{Ker}(B - 3I)$ *1-dimenzionalna i razapeta samo s* v_1. *Tražimo vektor* $v_2 \in M_{21}(\mathbb{R})$ *u* $\operatorname{Ker}(B - 3I)^2$. *Obzirom da je matrica* $(B - 3I)^2$ *nul-matrica, svaki vektor različit od* 0 *je dobar. Odaberimo* $v_2 = (1, 0)$. *Skup* $b = \{v_1, v_2\}$ *je linearno nezavisan skup i čini bazu za* $\mathbb{R}^2$. *Matrica prijelaza P jednaka je*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrični prikaz u bazi b glasi

$$J(b) = P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Dokažimo Propoziciju 1.3.5.

Dokaz. Propoziciju dokazujemo kroz dva koraka: prvo nađemo bazu u kojoj operator ima gornjetrokutasti prikaz - tzv. predjordanovu formu, a zatim nađemo bazu u kojoj je element u gornjem desnom kutu jednak 1.
Općenito, predjordanova forma u slučaju dvostruke realne svojstvene vrijednosti uvijek na mjestu $(2, 1)$ ima nulu. Pokažimo to. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrica takva da ima samo jednu dvostruku svojstvenu vrijednost $\lambda_{1,2} = \lambda_0$. Tada je

$$\lambda_0 = \frac{\mathrm{tr}A}{2}, \tag{1.27}$$

gdje je $\mathrm{tr}A$ trag matrice A i vrijedi $\mathrm{tr}A = a + d$. Neka je

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

prvi generalizirani svojstveni vektor pridružen skalaru λ_0. Tada vrijedi

$$A\mathbf{v} = \lambda_0\mathbf{v}. \tag{1.28}$$

Uvrštavanjem (1.27) u (1.28) te izjednačavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} av_1 + bv_2 &= \frac{a+d}{2} v_1 \\ cv_1 + dv_2 &= \frac{a+d}{2} v_2. \end{aligned}$$

Sređivanjem, iz svake jednadžbe izrazimo b i c:

$$\begin{aligned} b &= -\frac{a-d}{2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \\ c &= \frac{a-d}{2} \cdot \frac{v_2}{v_1}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Nadalje, neka je $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ drugi generalizirani vektor takav da su $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ linearno nezavisni vektori. Tada je matrica prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

regularna. Njoj inverznu matricu P^{-1} određujemo po formuli

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \begin{bmatrix} w_2 & -w_1 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo predjordanovu formu matrice A:

$$J = P^{-1}AP = \frac{1}{\det P}\begin{bmatrix} w_2 & -w_1 \\ -v_2 & v_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{v_1w_2 - v_2w_1}\begin{bmatrix} v_1w_2a - v_1w_1c + v_2w_2b - v_2w_1d & w_1w_2a - w_1^2c + w_2^2b - w_1w_2d \\ (d-a)v_1v_2 + v_1^2c - v_2^2b & -v_2w_1a + v_1w_1c - v_2w_2b + v_1w_2d \end{bmatrix}.$$

Uvrštavanjem (1.29) na mjestu $(2,1)$ upravo dobivene Jordanove forme te računanjem dobivamo

$$(d-a)v_1v_2 + \frac{a-d}{2}v_1v_2 + \frac{a-d}{2}v_1v_2 = (d-a)v_1v_2 + (a-d)v_1v_2 = 0,$$

neovisno o izboru vektora $\mathbf{w}$ linearno nezavisnog s $\mathbf{v}$,što smo i htjeli pokazati. Nadalje, kako je matrica J gornjetrokutasta, na dijagonali joj moraju biti svojstvene vrijednosti, pa su elementi na dijagonali matrice J jednaki λ_0.
Prema [5], dobivenu predjordanovu formu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & k \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \tag{1.30}$$

pri čemu je $k \neq 0$ neki broj, možemo svesti na matricu iz Propozicije 1.3.5.Naime, matricu J zapišimo u obliku

$$J = \lambda_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{\lambda_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odaberimo proizvoljni $m \neq 0$ te formirajmo matricu oblika

$$K_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{km} \end{bmatrix}.$$

Njoj inverzna matrica je

$$K_m^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & km \end{bmatrix}.$$

Tada imamo:

$$J' := K_m^{-1}JK_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & km \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_0 & k \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{km} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & m \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Uzmemo li da je $m = 1$, dobivamo upravo matricu iz Propozicije 1.3.5. □

Primijenimo drugi dio prethodnog dokaza na matricu (1.26) iz Primjera 1.3.6. Predjordanovu formu $J(b)$ zapišimo kao

$$J(b) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za bilo koji realan broj $m \neq 0$, možemo formirati matricu oblika

$$K_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-2m} \end{bmatrix}.$$

Za $m = 1$, dobivamo matricu

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Njoj inverzna matrica je matrica

$$K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sada dobivamo da je

$$J'(b) = K_1^{-1} J(b) K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Konjugirano kompleksne svojstvene vrijednosti

Propozicija 1.3.7. *Ako je $L \in L(V)$ linearni operator s konjugirano kompleksnim svojstvenim vrijednostima $a \pm bi,\ b \neq 0$, onda postoji baza takva da je matrični prikaz tog operatora u toj bazi*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Primjer 1.3.8. *Odredimo Jordanovu formu matrice (tj. operatora koji u kanonskoj bazi ima matrični prikaz C)*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pripadni karakteristični polinom je

$$k_C(\lambda) = \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 5.$$

Kvadratna jednadžba $k_C(\lambda) = 0$ *neće imati rješenja u skupu realnih brojeva, tj. za* $C \in M_2(\mathbb{R})$ *spektar je prazan skup. Prema [2], iz činjenice da svaki polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u skupu* $\mathbb{C}$*, svaki linearni operator na konačnodimenzionalnom kompleksnom prostoru ima svojstvenu vrijednosti. Zato za* $C \in M_2(\mathbb{C})$ *svojstvene vrijednosti su par kompleksno konjugiranih brojeva* $\lambda_1 = 1 + 2i$ *i* $\lambda_2 = 1 - 2i$*, pa je spektar* $\sigma(C) = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$*. Rješavanjem pripadne jednadžbe* $Cv = \lambda v$*, dobivamo da je svojstveni vektor pridružen skalaru* $\lambda_1 = 1 + 2i$ *jednak*

$$w_1 = u_1 + iv_1 = (1, -1) + i(0, 2) = (1, -1 + 2i),$$

a svojstveni vektor pridružen skalaru $\lambda_2 = 1 - 2i$ *njemu kompleksno konjugirani vektor. Jedna Jordanova baza prema Teoremu 1.3.2 je*

$$c = \{(0, 2), (1, -1)\}.$$

Matrica prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

je invertibilna i njoj inverzna matrica je

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jordanova forma matrice C *u Jordanovoj bazi* c *je*

$$J(c) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu se na glavnoj dijagonali nalazi realni dio kompleksnog skalara $\lambda_1 = 1 + 2i$ *koji je jednak* 1*, a na sporednoj imaginarni dio koji je jednak* 2 .

Dokažimo prethodnu propoziciju.

Dokaz. Trebamo dokazati da postoji baza u $\mathbb{R}^2$ kojoj matrica operatora ima na dijagonali realni dio svojstvene vrijednosti, a na sporednoj imaginarni.
Neka A matrični prikaz operatora L u, recimo, kanonskoj bazi. Tada A ima kompleksne svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = a + ib$ i $\lambda_2 = a - ib$, gdje je $b \neq 0$. Tada možemo naći kompleksni svojstveni vektor $\mathbf{v} = v_1 + iv_2$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = a + ib$, gdje su v_1 i v_2 linearno nezavisni realni vektori u $\mathbb{R}^2$. U slučaju da nisu linearni nezavisni, tada postoji broj $k \in \mathbb{R}$ takav da je

$$v_1 = kv_2.$$

Tada po definiciji svojstvene vrijednosti i uvrštavanjem gornjeg izraza, imamo:

$$A(v_1 + iv_2) = (a + ib)(v_1 + iv_2) = (k + i)(a + ib)v_2. \tag{1.31}$$

Nadalje, za $v_1 = kv_2$ zbog linearnosti A vrijedi:

$$A(v_1 + iv_2) = (k + i)Av_2.$$

Izjednačavanjem tih dvaju izraza slijedi

$$Av_2 = (a + ib)v_2.$$

Na lijevoj strani dobivenog izraza je realni vektor, a na desnoj je kompleksan, što je kontradikcija. Dakle, vektori v_1 i v_2 su linearno nezavisni.
Nadalje, za svojstveni vektor $\mathbf{v} = v_1 + iv_2$ pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = a + ib$ imamo

$$\begin{aligned} A(v_1 + iv_2) &= (a + ib)(v_1 + iv_2) \\ &= av_1 - bv_2 + i(av_2 + bv_1) \end{aligned}$$

Iz dobivene vektorske jednadžbe izjednačimo realne i imaginarne komponente te imamo

$$\begin{aligned} Av_1 &= av_1 - bv_2 \\ Av_2 &= bv_1 + av_2. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Neka je P matrica prijelaza iz kanonske baze u bazu $\{v_1, v_2\}$ (stupci su joj vektori v_1 i v_2). Tada vrijedi

$$Pe_j = v_j, \;\; j = 1, 2,$$

pri čemu su e_j, $j = 1, 2$, vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^2$. Nadalje, vrijedi da je

$$(P^{-1}AP)e_1 = P^{-1}APe_1 = P^{-1}Av_1.$$

Uvrštavanjem prve jednadžbe iz (1.32), dobivamo da je

$$(P^{-1}AP)e_1 = P^{-1}(av_1 - bv_2) = ae_1 - be_2.$$

Isto tako dobivamo da je

$$(P^{-1}AP)e_2 = P^{-1}(bv_1 + av_2) = be_1 + ae_2$$

Tada je

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

Jordanova matrica u bazi koja se sastoji od vektora v_1 i v_2 što smo htjeli i pokazati. □

Geometrijska interpretacija linearnog operatora na $\mathbb{R}^2$ s kompleksno konjugiranim svojstvenim vrijednostima

U ovom dijelu rada, dajemo geometrijsku interpretaciju operatora $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s matričnim prikazom u Jordanovoj bazi:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Tada su svojstvene vrijednosti matrice konjugirano kompleksni par

$$\lambda_1 = a + bi, \; \lambda_2 = a - bi.$$

Pokazujemo da je A matrični zapis operatora rotacije za neki kut φ u kanonskoj bazi. Identificirajmo uređeni par (a, b) realnih brojeva s uređenim parom (r, φ) korištenjem polarnih koordinata:

$$a = r\cos\varphi, \; b = r\sin\varphi,$$

gdje je, prema [6],

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \; \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \; \varphi \in [0, 2\pi >.$$

Matrica A u polarnim koordinatama ima oblik

$$r \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Neka je $r{\cdot}\mathrm{Rot}_\varphi$ linearni operator na $\mathbb{R}^2$ rotacije za kut φ i rastezanja $r > 0$ puta. Pokažimo da operator $r \cdot \mathrm{Rot}_\varphi$ ima u kanonskoj bazi upravo matricu

$$A = r \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{1.33}$$

Koordinate vektora $e_1 = (1, 0)$ zapišimo u polarnim koordinatama kao $e_1 = (\cos 0, \sin 0)$. Operator $r\mathrm{Rot}_\varphi$ na vektor e_1 djeluje tako da ga rotira za kut φ te rastegne r puta . Tada je slika od e_1 jednaka $r\mathrm{Rot}_\varphi(e_1) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Slično i za vektor e_2, pa je slika od e_2 jednaka $r\mathrm{Rot}_\varphi = (r \cdot (-\sin\varphi), r\cos\varphi) = (-r \cdot \sin\varphi, r\cos\varphi)$. U standardnoj bazi $e = \{(1, 0), (0, 1)\}$ za $\mathbb{R}^2$, matrica operatora $r\mathrm{Rot}_\varphi$ je

$$r \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}^2$ proizvoljan vektor. Pogledajmo kako na njega djeluje operator $r\mathrm{Rot}_\varphi$. Njega možemo prikazati kao linearnu kombinaciju kanonskih vektora pa je

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Vektor x možemo zapisati u polarnim koordinatama kao

$$x = (R_x \cos\theta_x, R_x \sin\theta_x),$$

pri čemu je θ_x kut koji zatvara vektor x sa pozitivnim dijelom realne osi, a R_x duljina vektora x. Koordinatna matrica vektora x u kanonskoj bazi je

$$[x]_{(e)} = \begin{bmatrix} R_x \cos\theta_x \\ R_x \sin\theta_x \end{bmatrix}.$$

Na vektoru x pokažimo da je $r\mathrm{Rot}_\varphi$ zaista operator rotacije za kut φ i rastezanja r puta.

$$\begin{aligned}
\left[r \cdot \mathrm{Rot}_\varphi(x)\right]_{(e)} &= \left[r \cdot \mathrm{Rot}_\varphi\right]_{(e,e)} \cdot [x]_{(e)} \\
&= \begin{bmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}_{(e)} \cdot \begin{bmatrix} R_x\cos\theta_x \\ R_x\sin\theta_x \end{bmatrix}_{(e)} \\
&= \begin{bmatrix} rR_x\cos\varphi\cos\theta_x - rR_x\sin\varphi\sin\theta_x \\ rR_x\sin\varphi\cos\theta_x + rR_x\cos\varphi\sin\theta_x \end{bmatrix}_{(e)} \\
&= \begin{bmatrix} rR_x \cdot \cos(\theta_x + \varphi) \\ rR_x \cdot \sin(\theta_x + \varphi) \end{bmatrix}_{(e)}.
\end{aligned}$$

U zadnjoj jednakosti smo primijenili formulu za kosinus i sinus zbroja. Vidimo da je slika vektora x vektor koji je zarotiran za kut φ i rastegnut r puta.

Sada iz Propozicije 1.3.7, slijedi tvrdnja korolara:

Korolar 1.3.9. *[5, str. 78] Operator $L \in L(\mathbb{R}^2)$ s parom kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ zapisanih u, redom, polarnim koordinatama $\lambda_1 = r \cdot e^{i\varphi}$, $\lambda_2 = r \cdot e^{-i\varphi}$ ima u Jordanovoj bazi prikaz u obliku matrice rotacije:*

$$r \begin{bmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ -sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Poglavlje 2

Geometrijska interpretacija 2×2 sustava diferencijalnih jednadžbi. Polje smjerova i fazni portret.

Faznim prostorom nazivat ćemo u radu prostor u kojem se promatraju stanja sustava (npr. gibanje čestice u prostoru) te u kojem je svako stanje sustava predstavljeno jedinstvenom točkom prostora. Označavat ćemo ga s M. U našem radu to će biti $\mathbb{R}^2$ ili rjeđe $\mathbb{R}^3$ i njegovi podskupovi. Elemente, odnosno točke faznog prostora zovemo **faznim točkama**. Obzirom da, u daljem razmatranju, radimo sa 2×2 autonomnim sustavima, fazni prostor M će biti fazna ravnina (neki podskup od $\mathbb{R}^2$).

U Poglavlju 1 definirali smo $n \times n$ autonomni sustav. Specijalno, definiramo 2×2 sustav autonomnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{2.1}$$

gdje je $\mathbf{x} : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ nepoznata funkcija i $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ poznata funkcija. Prema [6], riješiti Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) & = \mathbf{x_0}, \end{cases} \tag{2.2}$$

znači naći interval egzistencije (a, b) i funkciju $t \mapsto \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (a, b)$, takvu da zadovoljava jednadžbu i početni uvjet. Slikom te funkcije je zadana parametrizirana krivulja

$$\{\mathbf{x}(t) \ : \ t \in (a, b)\} = \{(x(t), y(t)) \ : \ t \in (a, b)\} \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{2.3}$$

Prema [9], funkcija rješenja $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ opisuje gibanje čestice duž parametrizirane krivulje (2.3) dane slikom funkcije $t \mapsto \mathbf{x}(t)$. Iz točke $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ za koju je $\mathbf{c} = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$, čestica dospijeva u točku $\mathbf{x}(t)$ na krivulji u trenutku t.

U ovom poglavlju, naš cilj je dati geometrijsku interpretaciju i vizualizaciju sustava (2.2). Da bi to mogli, nužno je definirati pojmove poput poput faznog toka sustava, integralnih krivulja ili krivulja rješenja, faznog portreta te polja smjerova sustava.

2.1 Fazni tok i fazni portret sustava diferencijalnih jednadžbi.

Sljedeće poglavlje je bazirano na [1] i [9]. Opišimo pojam faznog toka za sustav (2.2). Neka je M fazni prostor i neka je $\mathbf{x_0} \in M$ bilo koja početna točka. Neka je $\mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}) \in M$ položaj u koji dođe čestica koja se počinje gibati iz početne točke $\mathbf{x_0}$ nakon vremena t. Za svaki $t \in \mathbb{R}$, preslikavanje $\phi_t : M \to M$ definirano s

$$\phi_t(\mathbf{x_0}) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}), \tag{2.4}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(t; \mathbf{x_0})$ rješenje Cauchyjevog problema (2.2) na intervalu $[0, t]$, $t \in \mathbb{R}$, zovemo **t-tok pridružen sustavu** (2.2).

Prema [9], za svaki $\mathbf{x} \in M$, preslikavanje (2.4) ima sljedeća svojstva:
(1) $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
(2) $\phi_s(\phi_t(\mathbf{x})) = \phi_{s+t}(\mathbf{x}), \ \forall s, t \in \mathbb{R}$

Napomena 1. *Svojstvo (1) govori da je preslikavanje* 0*-toka identiteta: u trenutku* 0 *čestica se nalazi u svojoj početnoj točki.*
U svojstvu (2), na lijevoj strani jednakosti imamo kompoziciju preslikavanja koje opisuje gibanje čestice iz početne točke $\mathbf{x_0}$ *do točke* $\mathbf{x}(t)$ *nakon vremena t, a potom iz te točke čestica dođe u točku* $\mathbf{x}(t+s)$ *nakon vremena s. Na desnoj strani jednakosti, čestica iz svoje početne točke dođe u točku* $\mathbf{x}(t+s)$ *nakon vremena* $s+t$.

Gornja definicija toka sustava motivirana je sljedećom definicijom toka u faznoj ravnini:

Definicija 2.1.1 ([1]). *Neka je M fazna ravnina. Za parametarsku familiju funkcija*

$$\{\phi_t : M \to M \ : \ t \in \mathbb{R}\} \tag{2.5}$$

kažemo da je ***tok*** *na M ako za svaki* $s, t \in \mathbb{R}$ *i* $\mathbf{x} \in M$ *vrijedi*

$$\phi_{s+t}(\mathbf{x}) = \phi_s(\phi_t(\mathbf{x})).$$

i ϕ_0 *je identiteta.*

Definicija 2.1.2 ([1])**.** *Par* $(M, \{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$*, pri čemu je* M *fazna ravnina, a* $\{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ *tok na* M*, zovemo* ***fazni tok*** *u* M*.*

Definicija 2.1.3 ([1])**.** *Neka je* $(M, \{\phi_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ *fazni tok na* M*. Skup* $\{\phi_t(\mathbf{x_0}) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq M$ *nazivamo* ***faznom krivuljom*** *s početnom točkom* $\mathbf{x_0}$*.*

U ovisnosti o vremenu t, početna točka $\mathbf{x_0}$ će mijenjati svoj položaj i opisivati faznu krivulju $\{\phi_t(\mathbf{x_0}) : t \in \mathbb{R}\}$ u faznoj ravnini M.

Definicija 2.1.4 ([9])**.** *Neka je dan sustav* (2.2)*. Za početnu točku* $\mathbf{x_0} \in M$*, sa* $t \mapsto \mathbf{x}(t; \mathbf{x_0})$ *označimo rješenje Cauchyjevog problema s početnim uvjetom* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$*. Sliku te funkcije (u* $M \subseteq \mathbb{R}^2$*) zovemo* ***integralnom krivuljom*** *ili* ***trajektorijom sustava*** (2.2) *kroz točku* $\mathbf{x_0}$*.*

Gibanje čestice iz početne točke $\mathbf{x_0}$ geometrijski se može opisati trajektorijom i crtanjem strelice koja pokazuje u kojem smjeru se giba čestica u ovisnosti o t. Skup svih trajektorija za svaku početnu točku $\mathbf{x_0} \in M$ zovemo **fazni portret** pridružen sustavu (2.2).

Sustav (2.2) definira jedan fazni tok na $M \subset \mathbb{R}^2$. Prema [9], za sustav (2.2) možemo definirati tok $\{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ kao preslikavanje koje početnoj točki $\mathbf{x_0}$ pridružuje rješenje $\mathbf{x}(t; \mathbf{x_0})$ u trenutku t Cauchyjevog problema (2.2) s početnom točkom $\mathbf{x_0}$, u slučaju da rješenje Cauchyjevog problema postoji i jedinstveno je:

$$\phi_t(\mathbf{x_0}) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}), \ t \in \mathbb{R}.$$

Svojstva toka zbog jedinstvenosti rješenja su zaista zadovoljena. Vidjeti Napomenu 1.

Ilustrirajmo ove definicije na primjeru jednostavnog nevezanog linearnog sustava 2×2 (sa separiranim jednadžbama), kojeg lako znamo riješiti.

Primjer 2.1.5. *Promotrimo sljedeći sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi u* $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1 x(t) \\ \dot{y}(t) &= a_2 y(t), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

s početnim uvjetom

$$x(0) = x_0, \ y(0) = y_0.$$

Sustav (2.6) *možemo zapisati i matrično*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Obzirom da je zadan sustav u $\mathbb{R}^2$, radi se o faznoj ravnini (u $\mathbb{R}^2$). Primjenom metode separacije varijabli u svakoj jednadžbi lako se dobije da je rješenje sustava (2.6) *funkcija* $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dana s*

$$\mathbf{x}(t) = \left(x_0 e^{a_1 t}, y_0 e^{a_2 t}\right),$$

pri čemu je $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ *početna točka.*
Po definiciji, za svaki $t \in \mathbb{R}$, *t-tok sustava* (2.6) *je preslikavanje* $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definirano s*

$$\phi_t(\mathbf{x_0}) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}) = \left(x_0 e^{a_1 t}, y_0 e^{a_2 t}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Integralna krivulja iz točke $\mathbf{x_0}$ *je skup*

$$\{\left(x_0 e^{a_1 t}, y_0 e^{a_2 t}\right) : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Integralna krivulja geometrijski opisuje gibanje čestice iz početne točke $\mathbf{x_0}$.

Primjer 2.1.6. *U svrhu crtanja faznog portreta (Slika 2.1 ispod), promotrimo konkretni* 2×2 *nevezani linearni sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 4x(t) \\ \dot{y}(t) &= -5y(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

s početnim uvjetom

$$x(0) = 2, \ y(0) = 3.$$

Metodom separacije varijabli, odredimo opće rješenje sustava (2.7) *tako da odredimo rješenje svake jednadžbe. Odredimo rješenje prve jednadžbe*

$$\dot{x}(t) = 4x(t) \tag{2.8}$$

uz početni uvjet $x_0 = 2$, *odnosno riješimo Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = 4x(t) \\ x(0) & = 2 \end{cases} \tag{2.9}$$

Zapišimo jednadžbu (2.8) *u drugačijem obliku kao*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x(t).$$

Odavde dobivamo da je

$$\frac{1}{4x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Integriranjem obje strane jednakosti dobivamo

$$\frac{1}{4}\ln|x| = t,$$

te djelovanjem eksponencijalne funkcije $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dobivamo da je rješenje Cauchyjevog problema* (2.9) *funkcija* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$x(t) = 2 \cdot e^{4t}.$$

Analogno se dobije da je rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} \dot{y}(t) & = -5y \\ y(0) & = 3 \end{cases}$$

funkcija $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana s*

$$y(t) = 3 \cdot e^{-5t}.$$

Konačno, opće rješenje sustava (2.7) *je funkcija* $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dana s*

$$\mathbf{x}(t) = \left(2e^{4t}, 3e^{-5t}\right). \tag{2.10}$$

Rješenje sustava ekvivalentno možemo zapisati u matričnom obliku

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Po definiciji, za svaki $t \in \mathbb{R}$, *t-tok sustava* (2.7) *je preslikavanje* $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definirano s*

$$\phi_t(\mathbf{x_0}) = \mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}) = \left(2e^{4t}, 3e^{-5t}\right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Integralna krivulja iz početne točke $\mathbf{x_0} = (2, 3)$ *je skup*

$$\left\{\left(2e^{4t}, 3e^{-5t}\right) : \ t \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Gibanje početne točke $\mathbf{x_0} = (2, 3)$ *koje definira rješenje* (2.10) *možemo geometrijski opisati crtanjem trajektorije* $\mathbf{x}(t; \mathbf{x_0}) = \left(2e^{4t}, 3e^{-5t}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, *sustava* (2.9) *u faznoj ravnini. Fazni portret za taj sustav je i integralna krivulja kroz točku* $(2, 3)$ *prikazan na Slici 2.1 crvenom bojom.*

2.2 Polje smjerova sustava diferencijalnih jednadžbi

Neka je dan 2×2 sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \tag{2.12}$$

Interpretirajmo ga geometrijski i pokušajmo vidjeti možemo li procijeniti kako izgledaju trajektorije bez eksplicitnog rješavanja sustava.

Geometrijski, sustav kaže da je u svakoj točki fazne ravnine M nagib tangente na integralnu krivulju (iz Definicije 2.1.4) jednak vrijednosti funkcije $\mathbf{f}$ u toj točki fazne ravnine. Zato, prema [6], definiramo **polje smjerova** ili **vektorsko polje** na $\mathbb{R}^2$ sustava (2.12) kao vektorsku funkciju

$$\mathbf{f} : M \to \mathbb{R}^2,$$

koja svakoj točki $\mathbf{x} \in M$ pridružuje vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ na desnoj strani jednadžbe (2.12).
Riješiti jednadžbu (2.12) znači *provući krivulju kroz polje smjerova tako da je u svakoj točki te krivulje smjer tangente jednak smjeru vektora u toj točki iz polja smjerova*.

Vektorsko polje u ravnini predočujemo crtanjem vektora u koordinatnom sustavu u ravnini kojima je početak u početnoj točki $\mathbf{x}$ i imaju isti smjer i orijentaciju kao radijvektor. Kažemo da crtamo *polje smjerova* za sustav (2.12).

Primjer 2.2.1. *Skicirajmo polje smjerova, fazni portret te trajektoriju s početnom točkom* $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$ *za sustav* (2.7) *iz Primjera 2.1.6.*

Polje smjerova definirano je funkcijom $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*:*

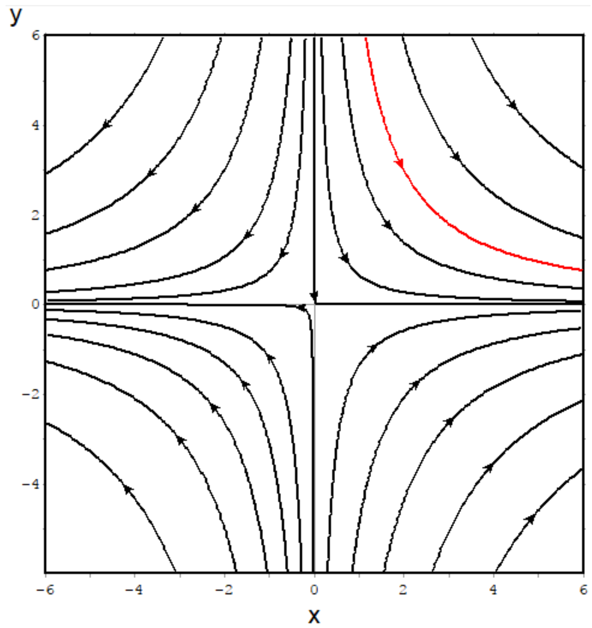
$$f(x, y) = (4x, -5y).$$

Ovako definirano polje smjerova točki, npr. $(2, 3) \in \mathbb{R}^2$*, pridružuje vektor* $f(2, 3) = (8, -15)$.

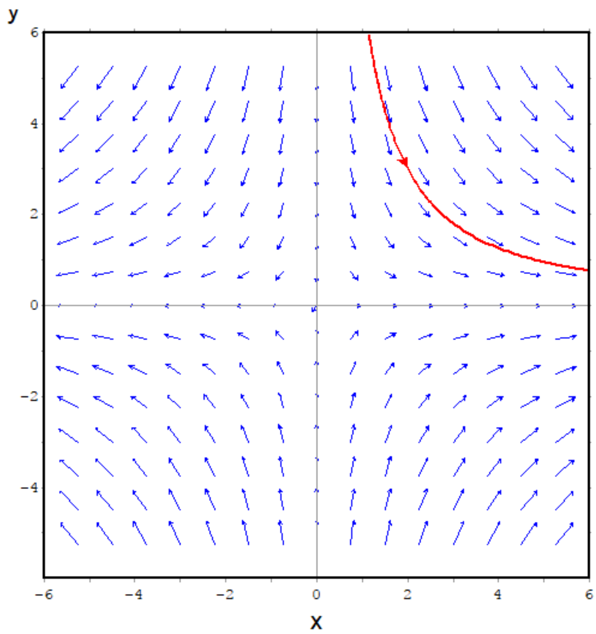
Fazni portret pridružen sustavu (2.7) *je dan na Slici 2.1. Crvenom bojom je istaknuta trajektorija istog sustava iz točke* (2, 3).

Slika 2.2 daje izgled polja smjerova (plava boja) i trajektorije (crvena boja) sustava (2.7).

Uočimo da izgled trajektorije iz svake pojedine točke, tj. fazni portret sustava, možemo očitati i bez eksplicitnog rješavanja sustava, ako znamo nacrtati polje smjerova za sustav. To je ideja kvalitativne teorije u rješavanju diferencijalnih jednadžbi.



Slika 2.1: Fazni portret i trajektorija iz točke $(2,3)$ za sustav (2.7).



Slika 2.2: Polje smjerova i trajektorija iz npr. točke $(2,3)$ koja prati polje smjerova.

Poglavlje 3

Linearni sustavi

3.1 Osnovno o normiranim prostorima. Operatorska norma matrice.

U ovom poglavlju objekt proučavanja jest eksplicitno rješenje linearnog sustava

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{3.1}$$

gdje je $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrica (tj. matrični prikaz nekog operatora $L \in L(\mathbb{R}^n)$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^n$). Kao pripremu za iskaz i dokaz teorema o eksplicitnom rješenju linearnog sustava (3.1), uvodimo pojam operatorske norme matrice na $M_n(\mathbb{R})$ koja prostoru $M_n(\mathbb{R})$ daje strukturu normiranog prostora i koja omogućuje promatranje konvergencije niza, odnosno reda, matrica. Nakon toga pomoću konvergentnog reda u $M_n(\mathbb{R})$ definiramo eksponencijalnu funkciju matrice i pokazujemo da je njome dano rješenje za (3.1). Potom iskazujemo neka njena svojstva.

Definicija 3.1.1 ([2])**.** ***Norma*** *na vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : V \to \mathbb{F}$ koje ima sljedeća svojstva:*
(1) $\|x\| \geqslant 0, \ \forall x \in V$
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| , \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \forall x \in V$
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| , \ \forall x, y \in V.$
Uređen par $(V, \ \|\cdot\|)$ zovemo normirani prostor.

Definicija 3.1.2 ([4])**.** *Neka je $\|\cdot\|$ neka norma na $\mathbb{R}^n$. Definiramo* ***operatorsku normu matrice*** *A na prostoru $M_n(\mathbb{R})$* ***induciranu normom*** *$\|\cdot\|$ kao*

$$\|A\|_{\text{op}} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \|A\mathbf{x}\| . \tag{3.2}$$

Za vektorsku normu $\|\cdot\|$ kažemo da inducira odgovarajuću matričnu normu.

Prema [6], upravo definirana norma $\|A\|_{\text{op}}$ je najveća vrijednost od $\|A\mathbf{x}\|$ na jediničnoj kugli sa središtem u $0 \in \mathbb{R}^n$

$$K(0,1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}. \tag{3.3}$$

Maksimum postoji jer je funkcija, definirana s

$$f(\mathbf{x}) := \|A\mathbf{x}\|,$$

neprekidna, a skup (3.3) kompaktan.

Primijetimo da je zadnja jednakost u (3.2) istinita jer se na skupu (3.3), maksimalna vrijednost $\|A\mathbf{x}\|$ postiže na rubu, tj. za neki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ takav da je $\|\mathbf{x}\| = 1$. Naime, za svaki $\mathbf{x}$ u unutrašnjosti (tj. $\|\mathbf{x}\| < 1$) postoji $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ na rubu te je

$$\left\| A \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} > \|A\mathbf{x}\|.$$

Iz toga slijedi da se maksimum ne može postizati u unutrašnjosti.

***Napomena* 2.** *Pojam operatorske norme matrice je motiviran pripadnom operatorskom normom linearnog operatora $L \in L(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|L\| := \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{x}\|=1}} \|L(\mathbf{x})\|,$$

kojem je A matrični prikaz u kanonskoj bazi.

Teorem 3.1.3. *Operatorska norma matrice definirana u* (3.2) *je norma na $M_n(\mathbb{R})$, odnosno par $\left(M_n(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_{\text{op}}\right)$ je normirani prostor.*

Dokaz. Da bi dokazali teorem, dovoljno je provjeriti da operatorska norma matrice zadovoljava svojstva norme. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ kvadratna matrica i neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ proizvoljni vektor. Neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ koja inducira operatorsku normu. Provjeravamo svojstva norme iz Definicije 3.1.1.
(1) Za matricu A imamo:

$$\|A\|_{\text{op}} = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|.$$

Budući da je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$, ona zadovoljava svojstvo (1), pa je

$$\max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geqslant 0.$$

Stoga je $||A||_{\text{op}} \geqslant 0$.
(2) Uvrštavanjem nul-matrice u definiciju operatorske norme, lako se vidi da je najveća vrijednost jednaka nuli. Time smo dobili jedan smjer. Pokažimo drugi smjer, tj. da $||A||_{\text{op}} = 0$ povlači da je A nul-matrica. Ako je $||A||_{\text{op}} = 0$, onda iz Definicije 3.1.2 slijedi

$$\max_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}|| = 0. \tag{3.4}$$

Ako je $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$, onda je $||A\mathbf{x}|| = 0$ automatski. Pretpostavimo sada da je $\mathbf{x} \neq 0$. Tada je

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \right\| = 1, \tag{3.5}$$

te je po (3.4)

$$\left\| A \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||} \right\| = \frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} = 0. \tag{3.6}$$

Kako je $||\mathbf{x}|| \neq 0$, dobivamo

$$||A\mathbf{x}|| = 0.$$

Odavde slijedi da je

$$A\mathbf{x} = 0, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

pa A mora biti nul-matrica. Time je dokazan drugi smjer tvrdnje.
(3) Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Imamo

$$||\lambda A||_{\text{op}} = \max_{||\mathbf{x}||=1} ||(\lambda A)\mathbf{x}|| \, .$$

Norma $||\cdot||$ zadovoljava svojstvo (3) norme, pa je

$$\begin{aligned} ||\lambda A||_{\text{op}} &= \max_{||\mathbf{x}||=1} ||(|\lambda| \cdot A\mathbf{x})|| \\ &= |\lambda| \max_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}|| \\ &= |\lambda| \, ||A||_{\text{op}} \end{aligned}$$

(4) Neka je $B \in M_n(\mathbb{R})$ matrica. Imamo

$$||A + B||_{\text{op}} = \max_{||\mathbf{x}||=1} ||(A + B)x|| \, .$$

Kako je $||\cdot||$ norma, ona zadovoljava nejednakost trokuta (svojstvo (4) norme), pa vrijedi:

$$\begin{aligned}||A+B||_{\text{op}} &= \max_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}+B\mathbf{x}|| \\ &\leqslant \max_{||\mathbf{x}||=1} (||A\mathbf{x}|| + ||B\mathbf{x}||) = \max_{||\mathbf{x}||=1} ||A\mathbf{x}|| + \max_{||\mathbf{x}||=1} ||B\mathbf{x}|| \\ &\leqslant ||A||_{\text{op}} + ||B||_{\text{op}}\,.\end{aligned}$$

Ovdje smo koristili još i svojstvo pozitivnosti norme (svojstvo (1) iz Definicije 3.1.1). Time smo pokazali da operatorska norma matrice $||\cdot||_{\text{op}}$ zadovoljava sva svojstva norme. Dakle, uređeni par $(M_n(\mathbb{R}),\ ||\cdot||_{\text{op}})$ je normirani prostor. □

∞-norma je jedna od normi koja se često upotrebljava kod vektorskih normi na $\mathbb{R}^n$ i kod matričnih normi na prostoru $M_n(\mathbb{R})$. Za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{R})$, definirana je ovako:

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \tag{3.7}$$

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{3.8}$$

Takve norme zadovoljavaju svojstva norme iz Definicije 3.1.1.

Pokažimo da je ∞- norma (3.8) na prostoru matrica $M_n(\mathbb{R})$ zapravo operatorska norma inducirana normom $||\cdot||_\infty$ na $\mathbb{R}^n$ (3.7).

Teorem 3.1.4 ([4])**.** *$||\cdot||_\infty$ je operatorska norma matrice inducirana normom $||\cdot||_\infty$ na $\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Dokaz baziran na [4]. Neka je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ bilo koji vektor, i $A \in M_n(\mathbb{R})$. Tada po definiciji norme $||\cdot||_\infty$ imamo:

$$\begin{aligned}||A\mathbf{x}||_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \\ &\leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot |x_j| \right) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = ||\mathbf{x}||_\infty \cdot ||A||_\infty\,.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$\max_{||\mathbf{x}||_\infty=1} ||Ax||_\infty \leqslant ||A||_\infty\,. \tag{3.9}$$

Nadalje, neka matrica A ima u nekom k-tom retku najveću sumu apsolutnih vrijednosti svojih koeficijenata. Neka je vektor $\mathbf{x}$ jedinični ($\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$) takav da su mu komponente 1 ili -1, a predznak j-te komponente od $\mathbf{x}$ odgovara predznaku koeficijenta a_{kj}. Sada imamo

$$|(A\mathbf{x})_k| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|A\|_\infty .$$

Slijedi da je

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty \geqslant \|A\|_\infty . \tag{3.10}$$

□

Lema 3.1.5 ([9]). *Neka je $\|\cdot\|$ norma na $\mathbb{R}^n$ i $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ njome inducirana operatorska norma na $M_n(\mathbb{R})$. Za matrice $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ i vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vrijede sljedeća svojstva:*
(1) $\|A(\mathbf{x})\| \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|\mathbf{x}\|$
(2) $\|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B\|_{\mathrm{op}}$
(3) $\left\|A^k\right\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}}^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Dokažimo svojstvo (1). Za $\mathbf{x} = 0$ je jasno da vrijedi nejednakost. Neka je $\mathbf{x} \neq 0$. Tada je $\|\mathbf{x}\| \neq 0$. Definirajmo jedinični vektor $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$. Prema definiciji operatorske norme matrice (3.2) je

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \geqslant \|A(\mathbf{y})\| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|} \|A(\mathbf{x})\| .$$

Odatle dobivamo $\|A\|_{\mathrm{op}} \|\mathbf{x}\| \geqslant \|A(\mathbf{x})\|$, što smo htjeli i pokazati.
Svojstvo (2) slijedi iz svojstva (1). Naime, za $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ dobivamo sljedeće nejednakosti:

$$\begin{aligned} \|A(B(\mathbf{x}))\| &\leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B(\mathbf{x})\| \\ &\leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B\|_{\mathrm{op}} \cdot \|\mathbf{x}\| \\ &\leq \|A\|_{\mathrm{op}} \cdot \|B\|_{\mathrm{op}} . \end{aligned}$$

Kako je po definiciji operatorske norme matrice $\|AB\|_{\mathrm{op}} = \max_{\|\mathbf{x}\|\leq 1} \|AB(\mathbf{x})\|$, slijedi tvrdnja (2).
Preostaje još dokazati svojstvo (3). Operatorsku normu matrica $\left\|A^k\right\|_{\mathrm{op}}$ možemo zapisati kao $\|A \cdot \ldots \cdot A\|_{\mathrm{op}}$, gdje se A pojavljuje k puta. Direktnom primjenom svojstva (2), slijedi svojstvo (3). □

Sljedeći teorem pokazuje da je na $M_n(\mathbb{R})$, koji je konačnodimenzionalni vektorski prostor, operatorska norma matrice ekvivalentna normi beskonačno, kao i svakoj drugoj matričnoj normi. Tu činjenicu ćemo koristiti kod računanja limesa niza matrica u $M_n(\mathbb{R})$, gdje je lakše računati s beskonačno nego s operatorskom normom.

Definicija 3.1.6 ([3]). *Za dvije norme $\|\cdot\|_a$ i $\|\cdot\|_b$ u normiranom vektorskom prostoru V kažemo da su* ***ekvivalentne*** *ako postoje brojevi $A, B > 0$ takvi da vrijedi*

$$A\,\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\,\|x\|_a\,,\ \forall x \in V. \tag{3.11}$$

Teorem 3.1.7 ([3]). *Sve norme na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru su ekvivalentne.*

Dokaz. Dokaz je baziran na knjizi [3]. Neka je $a = \{a_1, ..., a_n\}$ bilo koja baza za prostor V. Za $x \in V,\ x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, stavimo

$$\|x\|_a = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|.$$

Tada je $\|\cdot\|_a$ norma na V. Da bi to pokazali, dovoljno je provjeriti svojstva norme iz Definicije 3.1.1.

(1) Za $x \neq 0,\ x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, barem jedan λ_j je različit od nula, pa je

$$\|x\|_a = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| > 0$$

jer je $|\lambda_j| > 0$ za $\lambda_j \neq 0,\ j = 1, ..., n$.
(2) Ako je $x = 0$, tada je $\lambda_j = 0,\ \forall j = 1, ..., n$, pa je $\|x\|_a = 0$.
(3) Neka je $\lambda \in \mathbb{F}$. Po definiciji $\|\cdot\|_a$, imamo

$$\|\lambda x\|_a = \sum_{j=1}^{n} |\lambda\lambda_j|,$$

pa slijedi

$$\|\lambda x\|_a = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = |\lambda|\,\|x\|_a\,,\ \forall x \in V.$$

(4) Neka je $y \in V,\ y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j a_j$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_a &= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j + \mu_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| + \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| = \|x\|_a + \|y\|_a\,.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $\|\cdot\|_a$ zaista norma na V.
Neka je $\|\cdot\|$ proizvoljna norma na V i pokažimo da je ona ekvivalentna normi $\|\cdot\|_a$.
Definiramo $B := \max\left\{\left\|a_j\right\| \;:\; j = 1, ..., n\right\}$. Za proizvoljni $x \in V,\; x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j a_j$, imamo

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \left\|a_j\right\| \leq B \|x\|_a .$$

Time smo pokazali nejednakost u jednom smjeru. Pokažimo sada da za norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_a$ vrijedi nejednakost u drugom smjeru, tj. da postoji $A > 0$ takav da vrijedi

$$A \|x\|_a \leq \|x\| .$$

U tu svrhu, promotrimo funkciju $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(\alpha) = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j\right\|, \;\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

Funkcija f je neprekidna na $\mathbb{F}^n$ kao kompozicija neprekidnih funkcija $g : \mathbb{F}^n \to V$ i $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$. Neka je skup

$$S = \{\alpha \in \mathbb{F}^n \;:\; \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| = 1\}.$$

Kako je skup S ograničen i zatvoren u $\mathbb{F}^n$, slijedi da je on kompaktan. Obzirom da je f neprekidna na kompaktnom skupu S, postoji točka $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in S$ takva da je

$$f(\beta) \leq f(\alpha), \;\forall \alpha \in S. \tag{3.12}$$

Definirajmo $y := \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j a_j$. Tada je $y \in V$ i $\|y\|_a = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$. Slijedi $y \neq 0$. Iz prethodne nejednakosti (3.12), slijedi da je

$$\|y\| \leq \|x\| ,$$

za svaki $x \in V$ takav da je $\|x\|_a = 1$.
Neka je $x \in V,\; x \neq 0$, po volji. Jer je $\left\|\frac{x}{\|x\|_a}\right\|_a = 1$, slijedi da je

$$\|y\| \leq \left\|\frac{x}{\|x\|_a}\right\|.$$

Iz toga slijedi da je

$$\|y\| \, \|x\|_a \leq \|x\| \, .$$

Stavimo $A := \|y\|$. Kako je $y \neq 0$, slijedi da je i $A > 0$ te možemo pisati

$$A \, \|x\|_a \leq \|x\| \, .$$

Time smo pokazali nejednakost u drugom smjeru. Sad konačno imamo

$$A \, \|x\|_a \leq \|x\| \leq B \, \|x\|_a \, .$$

□

Definicija 3.1.8 ([9]). *Za niz matrica $(A_k)_k \subseteq M_n(\mathbb{R})$ kažemo da konvergira matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$ u normiranom prostoru $M_n(\mathbb{R})$ s operatorskom normom $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$, kad n teži u beskonačnost i pišemo $\lim_{k\to\infty} A_k = A$, ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n_0$ vrijedi*

$$\|A_k - A\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon \tag{3.13}$$

Drugim riječima, niz matrica konvergira ako za svaki $\varepsilon > 0$, postoji konačan broj matrica A_k za koje je $\|A_k - A\|_{\mathrm{op}}$ veća od ε.

Definicija 3.1.9 ([3]). *Za niz matrica $A_k \subseteq M_n(\mathbb{R})$ u normiranom prostoru $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{op}})$ kažemo da je **Cauchyjev** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l \geqslant n_0$, vrijedi*

$$\|A_k - A_l\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon. \tag{3.14}$$

Definicija 3.1.10 ([3]). *Za normiran prostor kažemo da je **potpun** ili **Banachov prostor** ako svaki Cauchyjev niz u tom prostoru konvergira.*

Propozicija 3.1.11 ([3]). *Svaki konačnodimenzionalni normirani prostor je Banachov.*

Dokaz. Može se naći u [3]. □

***Napomena* 3.** *Specijalno, iz prethodne propozicije slijedi da je normirani prostor $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, s bilo kojom normom na $M_n(\mathbb{R})$ Banachov prostor.*

Definicija 3.1.12 ([8]). *Kažemo da red $\sum x_n$ u normiranom prostoru V apsolutno konvergira ako red $\sum \|x_n\|$ konvergira u $\mathbb{R}$.*

Teorem 3.1.13 ([8]). *U Banachovom prostoru V svaki apsolutno konvergentni red* $\sum x_n$ *konvergira i vrijedi*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| .$$

Dokaz. Može se naći u [8, str. 150]. □

Teorem 3.1.14 ([8]). ***(Weierstrassov M-test)*** *Neka je* $\sum x_n$ *red u Banachovom prostoru V i neka je* $\sum y_n$ *red s pozitivnim članovima* $y_n \geqslant 0$ *tako da su ispunjeni sljedeći uvjeti:*
(1) red $\sum y_n$ *majorira* $\sum x_n$*, tj.*

$$\|x_n\| \leqslant y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(2) red $\sum y_n$ *je konvergentan.*
Tada red $\sum x_n$ *apsolutno konvergira i vrijedi*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \tag{3.15}$$

Dokaz. Dokaz je baziran na [8]. Zbog svojstva pozitivnosti norme, $\sum \|x_n\|$ je red s pozitivnim članovima. Kako je $\sum y_n$ red s pozitivnim članovima, i majorira red $\sum x_n$, slijedi da je

$$\sum_{n=1}^{k} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{k} y_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} y_n, \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Odavde slijedi da je niz $(\sigma_k)_k$ parcijalnih suma, $\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|$, omeđen odozgo. Slijedi da red $\sum \|x_n\|$ konvergira. Prema Definiciji 3.1.12, slijedi da red $\sum x_n$ konvergira apsolutno. Prema Teoremu 3.1.13, vrijedi

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|. \tag{3.17}$$

Time smo pokazali prvu nejednakost u (3.15).
Ako pustimo limes kada $k \to \infty$ u (3.16), dobivamo drugu nejednakost u (3.15). □

3.2 Eksponencijalna funkcija matrice. Eksplicitno rješenje linearnih sustava.

Teorem 3.2.1 ([9]). *Neka je dana neka norma* $\|\cdot\|$ *na prostoru* $M_n(\mathbb{R})$*. Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *i neka je* $t_0 > 0$*. Tada red*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{3.18}$$

konvergira u normiranom prostoru $(M_n(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|)$ *apsolutno za svaki* $t \in \mathbb{R}$. *Nadalje, vrijedi*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leq e^{t_0 \|A\|},\ |t| < t_0. \tag{3.19}$$

Dokaz. Stavimo $a = \|A\|$. Primjenom Leme 3.1.5, za svaki $|t| \leq t_0$ vrijedi

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k\, t^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!}.$$

Red pozitivnih realnih brojeva $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \cdot t_0)^k}{k!}$ konvergira k e^{at_0}, tj. vrijedi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \cdot t_0)^k}{k!} = e^{at_0}.$$

Kako je $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ red u Banachovom prostoru $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, a red $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!}$ majorira red $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ i konvergira k e^{at_0}, iz Teorema 3.1.14, slijedi da red $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ konvergira apsolutno (pa stoga i konvergira) u prostoru $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, za svaki $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leqslant t_0$, i vrijedi ocjena iz iskaza. □

Napomena 4. *Kako su sve norme na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* $M_n(\mathbb{R})$ *ekvivalentne, konvergencija niza u* $M_n(\mathbb{R})$ *u jednoj normi povlači konvergenciju u drugoj, pa i za konvergenciju reda vrijedi da konvergencija reda matrica u jednoj normi povlači konvergenciju u drugoj. Zato od sad na dalje nećemo pisati koju normu na prostoru* $M_n(\mathbb{R})$ *podrazumijevamo kad govorimo o konvergentnim redovima ili nizovima.*

Sada smo u mogućnosti definirati eksponencijalnu funkciju matrice pomoću konvergentnog reda matrica.

Definicija 3.2.2 ([9]). *Neka je* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *matrica i* $t \in \mathbb{R}$. *Tada definiramo* ***eksponencijalnu funkciju matrice*** *A kao red*

$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \tag{3.20}$$

Primijetimo da po prethodnom Teoremu 3.2.1 dani red konvergira (čak i apsolutno i uniformno po $|t| < t_0$) u normiranom prostoru $M_n(\mathbb{R})$ (obzirom na bilo koju normu) i da je suma matrica iz $M_n(\mathbb{R})$. Zato je definicija dobra.

Propozicija 3.2.3 ([7]). *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ te neka je $T \in M_n(\mathbb{R})$ regularna matrica. Tada vrijede sljedeća svojstva:*
(1) *Ako je $B = T^{-1}AT$, onda je $e^B = T^{-1}e^A T$*
(2) *Ako vrijedi $AB = BA$, onda je $e^{A+B} = e^A e^B$*
(3) *Matrica e^A je regularna i vrijedi $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.*

Dokaz. Tvrdnja (1) slijedi iz definicije eksponencijalne funkcije matrice, tj. imamo:

$$e^B = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} = T^{-1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} T = T^{-1}e^A T.$$

Dokaz tvdnje (2) može se naći u [7, str. 126]. Tvrdnju (3) dobijemo stavljanjem $B = -A$ te direktnom primjenom tvrdnje (2).

□

Pretpostavimo sad da je A matrični prikaz operatora $L \in L(\mathbb{R}^n)$ u kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^n$, tj. $[L]_{(e)} = A$. U Odjeljku 1.3 ispitali smo sve tipove Jordanovih formi operatora $L \in L(\mathbb{R}^2)$ u ovisnosti o svojstvenim vrijednostima. To su bile sljedeće matrice:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}. \tag{3.21}$$

Pokazat ćemo sada da su eksponencijalne matrice redom:

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, \; e^{Jt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ili } e^{Jt} = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Propozicija 3.2.4. *Neka je $J \in M_n(\mathbb{R})$ Jordanova matrica operatora $L \in L(\mathbb{R}^n)$, a $A \in M_n(\mathbb{R})$ njegov matrični prikaz u kanonskoj bazi. Neka je P matrica prijelaza iz kanonske u Jordanovu bazu. Tada je $J = P^{-1}AP$ i*

$$e^{Jt} = P^{-1}e^{At}P, \; t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Posljedica Propozicije 3.2.3 (svojstvo (1)). □

3.2.1 Eksponencijalna matrica u slučaju dvije različite realne svojstvene vrijednosti

Propozicija 3.2.5 ([9]). *Ako je matrica J oblika*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{3.23}$$

onda je

$$e^J = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

Dokaz. Neka je matrica J oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Tada vrijedi $J^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{bmatrix}$. Po Definiciji 3.2.2 eksponencijalne funkcije matrice imamo

$$e^J = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{\mu^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix}.$$

□

Primijetimo da je zadnja jednakost posljedica konvergencije reda matrica u matričnoj normi koja odgovara konvergenciji po komponentama, npr. $||A||_\infty$. No, sve norme na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru $M_n(\mathbb{R})$ su ekvivalentne, pa možemo uzeti bilo koju normu.

3.2.2 Eksponencijalna matrica u slučaju dvije konjugirano kompleksne svojstvene vrijednosti

Propozicija 3.2.6 ([9])**.** *Ako je matrica J oblika*

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R},$$

onda je

$$e^J = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Iz matrice J jasno se vidi da su svojstvene vrijednosti matrice $\lambda = a \pm bi$. Tada je

$$J^k = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\lambda^k) & -\mathrm{Im}(\lambda^k) \\ \mathrm{Im}(\lambda^k) & \mathrm{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

U Poglavlju 1, pomoću polarnih koordinatana, uređeni par (a, b) identificirali smo s uređenim parom (r, φ), pri čemu je

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \varphi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right),\ \varphi \in [0, 2\pi >. \tag{3.26}$$

Matrica J u polarnim koordinatama ima oblik

$$r\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Pokazali smo da je matrica J matrični zapis operatora rotacije za neki kut φ i produljenja r puta ima u kanonskoj bazi. Posljednja jednakost slijedi iz toga što je matrica matrica rotacije za kut φ i produljenja r puta, pa je produkt matrice k puta sa samom sobom k takvih rotacija i produljenja.

Izračunajmo sad e^J. Po definiciji imamo:

$$\begin{aligned}
e^J &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} J^k = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) & -\mathrm{Im}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) \\ \mathrm{Im}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) & \mathrm{Re}(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(e^{\lambda}) & -\mathrm{Im}(e^{\lambda}) \\ \mathrm{Im}(e^{\lambda}) & \mathrm{Re}(e^{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(e^{a+ib}) & -\mathrm{Im}(e^{a+ib}) \\ \mathrm{Im}(e^{a+ib}) & \mathrm{Re}(e^{a+ib}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(e^a e^{ib}) & -\mathrm{Im}(e^a e^{ib}) \\ \mathrm{Im}(e^a e^{ib}) & \mathrm{Re}(e^a eib) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(e^a(\cos b + i\sin b)) & -\mathrm{Im}(e^a(\cos b + i\sin b)) \\ \mathrm{Im}(e^a(\cos b + i\sin b)) & \mathrm{Re}(e^a(\cos b + i\sin b)) \end{bmatrix} \\
&= e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ako je $a \neq 0$, dobivena matrica je matrica rotacije za b radijana i produljenja (skraćivanja) e^a puta. Ako je $a = 0$, onda e^J ima matricu

$$\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix},$$

i ona je matrica rotacije za b radijana. □

3.2.3 Eksponencijalna matrica u slučaju jedne realne dvostruke svojstvene vrijednosti

Propozicija 3.2.7. *Ako je matrica J oblika*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbb{R},$$

onda je

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Matricu A zapišimo u obliku $A = aI + B$, gdje je $aI = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Posebno, matrice aI i B komutiraju, te prema svojstvu (2) iz Propozicije 3.2.3, vrijedi

$$e^A = e^{aI+B} = e^{aI}e^B = e^a I e^B. \tag{3.27}$$

Uočimo da je $B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pa vrijedi $B^k = 0, \forall k > 1$. Primjenom Definicije 3.20, dobivamo da je

$$e^B = \sum_{k=0}^{1} \tfrac{B^k}{k!} = \tfrac{1}{0!}B^0 + \tfrac{1}{1!}B^1 = I + B.$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti u (3.27) dobivamo

$$e^A = e^a I e^B = e^a I\,(I + B) = e^a(I + B) = e^a \cdot \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Lema 3.2.8. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ te e^{At} kao u Definiciji 3.2.2. Tada je funkcija $t \mapsto e^{At}$ derivabilna na $\mathbb{R}$ i vrijedi*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}. \tag{3.28}$$

Dokaz. Obzirom da matrica A komutira sama sa sobom, primjenom svojstva (2) iz Propozicije 3.2.3, po definiciji derivacije funkcije dobivamo da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{At}e^{Ah} - e^{At}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{At}(e^{Ah} - I)}{h} = e^{At} \lim_{h\to 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h\to 0} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A^i h^{i-1}}{i!} \right) = e^{At} \lim_{k\to\infty} \lim_{h\to 0} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{A^i h^{i-1}}{i!} \right) = Ae^{At}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

U zadnjoj jednakosti primijenili smo činjenicu iz Teorema 3.2.1 da red

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i h^{i-1}}{i!}$$

konvergira uniformno za $|h| \leq 1$, pa smo zato mogli zamijeniti ova dva limesa.

□

Sljedeći teorem jest fundamentalni teorem o jedinstvenosti rješenja sustava (3.1) uz početni uvjet $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}$.

Teorem 3.2.9 ([9])**.** ***(Fundamentalni teorem za linearne sustave).*** *Neka je $A \in M_n$ kvadratna matrica. Tada za $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$, Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = \mathbf{x_0}, \end{cases} \tag{3.30}$$

ima jedinstveno rješenje dano s funkcijom

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.31}$$

Dokaz. Pokažimo prvo da je s (3.31) dano rješenje (3.30). Prema Lemi 3.2.8, dobivamo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}\mathbf{x_0} = Ae^{At}\mathbf{x_0} = A\mathbf{x}(t), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.32}$$

Nadalje, vrijedi i $\mathbf{x}(0) = e^{0A}\mathbf{x_0} = I\mathbf{x_0} = \mathbf{x_0}$. Dakle, funkcija $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0}$ je zaista rješenje od (3.30). Preostaje pokazati da je to jedino rješenje. Neka je $\mathbf{x}(t)$ bilo koje rješenje od (3.30) i neka je $\mathbf{y}(t) := e^{-At}\mathbf{x}(t)$. Primjenom Leme 3.2.8 i zbog činjenice da je $\mathbf{x}(t)$ rješenje od (3.30) dobivamo

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}A\mathbf{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + Ae^{-At}\mathbf{x}(t) \\ &= 0, \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Dakle, $\mathbf{y}(t)$ je konstantna funkcija. Dalje, za $t = 0$ je

$$\mathbf{y}(0) = e^{-A\cdot 0}\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}.$$

Slijedi da je $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x_0}, \ t \in \mathbb{R}$. Zato je bilo koje rješenje Cauchyjevog problema (3.30) dano s

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0}, \ t \in (\mathbb{R}).$$

□

Objasnimo sada algoritam kako rješavamo Cauchyjev problem za linearni 2×2 sustav diferencijalnih jednadžbi. Neka je dan Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) & = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) & = \mathbf{x_0}, \end{cases} \tag{3.34}$$

pri čemu je $A \in M_n(\mathbb{R})$ zadana kvadratna matrica.
1. Nađemo Jordanovu bazu za operator u kanonskoj bazi dan matricom A kao u Poglavlju 1. Tada je

$$J = P^{-1}AP,$$

gdje je J Jordanova forma matrice A, a P regularna matrica prijelaza. Odavde dobivamo da je

$$A = PJP^{-1}.$$

2. Sad imamo sustav:

$$P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = JP^{-1}\mathbf{x}.$$

Napravimo linearnu zamjenu varijabli: $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$. Odavde je

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}. \tag{3.35}$$

Sada imamo

$$\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}\dot{\mathbf{x}} = P^{-1}A\mathbf{x} = (P^{-1}AP)\mathbf{y}$$

i $\mathbf{y}(0) = P^{-1}\mathbf{x}(0)$. Dakle, dobili smo novi sustav

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = J\mathbf{y}(t). \tag{3.36}$$

3. Rješavamo sad Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) & = J\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) & = \mathbf{y_0}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Prema Teoremu 3.2.9, rješenje za (3.37) je

$$\mathbf{y}(t) = e^{Jt}\mathbf{y_0} = e^{(P^{-1}AP)t}\mathbf{y_0}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Prema Propoziciji 3.2.4, slijedi da je konačno rješenje

$$\mathbf{y}(t) = P^{-1}e^{At}P\mathbf{y_0}, \ t \in \mathbb{R}.$$

4. Vratimo se na stare koordinate. Ako je $\mathbf{y}(t)$ rješenje sustava (3.36), onda iz (3.35), slijedi da je $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ rješenje sustava $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ u (3.34).

***Napomena* 5.** *Ovdje smo mogli iskoristiti i direktno Propoziciju 3.2.4. Naime, ako je* $\mathbf{x}(t)$ *rješenje sustava* (3.34) *za početnu točku* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^2$ *onda imamo:*

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0}.$$

Iz Propozicije 3.2.4 dobivamo metodu za računanje e^{At}

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1},$$

gdje je J *u Jordanovoj formi pa* e^{Jt} *lako računamo po Propozicijama 3.2.5, 3.2.6 i 3.2.7.*

Ilustrirajmo taj postupak na sljedećem konkretnom primjeru:

Primjer 3.2.10. *Riješimo Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3.38}$$

Najprije uočimo da je zadana matrica već u Jordanovoj formi iz Propozicije 3.2.6. Prema Teoremu 3.2.9 i Propoziciji 3.2.6, rješenje je dano s

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x_0} = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = e^{3t}\begin{bmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

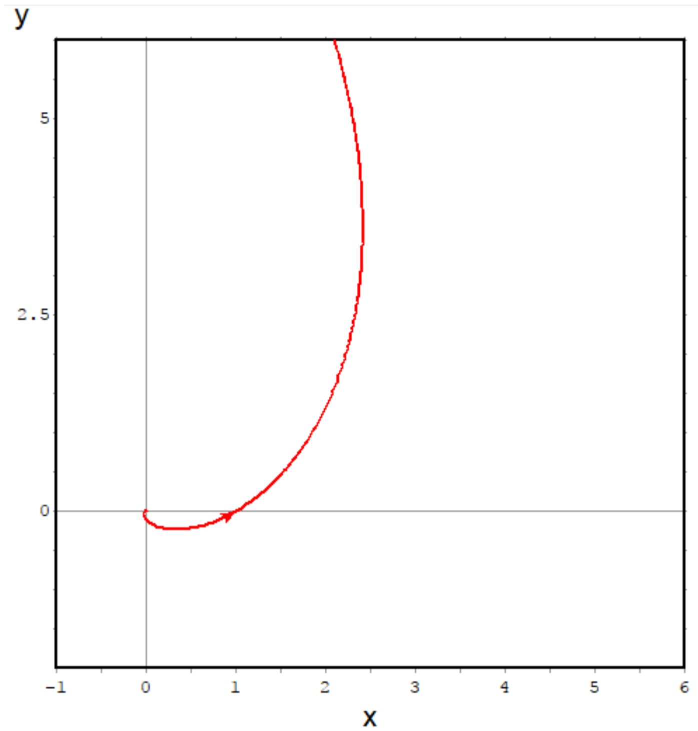
Slika 3.1 prikazuje trajektoriju (3.38) *koja prolazi točkom* $(1, 0)$*, a koju opisuje rješenje* (3.39).

U sljedećem primjeru ilustriramo kako se dobiva rješenje za neku matricu koja nije već unaprijed zadana u Jordanovoj formi.

Primjer 3.2.11. *Riješimo Cauchyjev problem*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{3.40}$$

Označimo s A *zadanu matricu. Vidimo da su svojstvene vrijednosti matrice* A *skalari* $\lambda_1 = -1$ *i* $\lambda_2 = -2$*. Dobivamo da je* $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ *svojstveni vektor pridružen* $\lambda_1 = -1$ *te*



Slika 3.1: Trajektorija sustava (3.38) koja prolazi točkom $(1, 0)$.

$\mathbf{v_2} = (0, 1)$ *svojstveni vektor pridružen* $\lambda_2 = -2$. *Sad formiramo matricu prijelaza P čiji su stupci svojstveni vektori:*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica P je regularna, pa je invertibilna, te dobivamo da je

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada dobivamo Jordanovu formu J matrice A sljedećeg izgleda:

$$J = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Sada iz sustava

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \tag{3.41}$$

prelazimo na novi sustav oblika $\dot{\mathbf{y}}(t) = (P^{-1}AP)\mathbf{y}(t),\ t \in \mathbb{R}$, *tj. imamo*

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t). \tag{3.42}$$

Rješavamo Cauchyjev problem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} & = J\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(0) & = \mathbf{y_0}, \end{cases} \tag{3.43}$$

gdje je

$$\mathbf{y}(0) = P^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

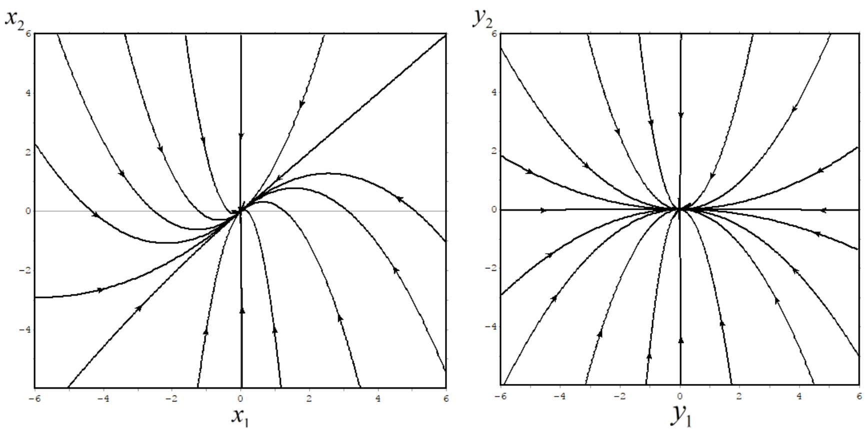
Po Teoremu 3.2.9 i Propoziciji 3.2.4, rješenje za (3.43) *je dano s*

$$\mathbf{y}(t) = e^{Jt}\mathbf{y_0} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Sada je rješenje za početni Cauchyjev problem 3.40, funkcija $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Nacrtajmo sad fazni portret za sustave (3.41) *i* (3.42).



(a) Fazni portret za sustav (3.41). (b) Fazni portret za sustav (3.42).

Slika 3.2

Prema [9], fazni portret (a) na Slici 3.2 se može dobiti iz faznog portreta (b) primjenom linearne zamjene koordinata $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

3.3 Kvalitativna analiza linearnih sustava i fazni portreti.

U ovom poglavlju opisat ćemo razne fazne portrete koji su mogući za 2×2 sustave oblika

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \tag{3.45}$$

za $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ i $A \in M_n(\mathbb{R})$. U Odjeljku 1.3.1 određivali smo Jordanovu formu matrice A. Ovisno o svojstvenim vrijednostima matrice A, ona ima jedan od sljedećih oblika:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \text{ili} \quad J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

gdje je $J = P^{-1}AP$, za neku regularnu matricu P.

U ovom poglavlju pristup rješavanju sustava (3.45) je kvalitativni, a ne kvantitativni. Nećemo eksplicitno rješavati linearne sustave, nego pokušati napraviti tzv. kvalitativnu analizu: iz oblika jednadžbi procijeniti izgled trajektorija koristeći polja smjerova.

Pravi značaj kvalitativnih metoda je kod nelinearnih sustava, koje vrlo često ne znamo eksplicitno riješiti, pa ponašanje trajektorija možemo procijeniti jedino kvalitativno.

Kod linearnih sustava ćemo usporediti rješenja dobivena kvalitativnom analizom s onim dobivenim eksplicitno u prethodnom poglavlju.

Zamjenom varijabli $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ sustav (3.45) prelazi u jednostavniji sustav

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = J\mathbf{y}(t). \tag{3.47}$$

Prema Teoremu 3.2.9, njegovo je rješenje u jednom od oblika:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} \mathbf{y_0}, \quad \mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y_0}, \quad \text{ili} \quad \mathbf{y}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \mathbf{y_0}, \tag{3.48}$$

za početni uvjet $\mathbf{y_0}$.
Tada je rješenje početnog sustava uz početni uvjet $\mathbf{x_0} = P(\mathbf{y_0})$ dano s:

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t). \tag{3.49}$$

Kao i kod eksplicitnog rješavanja, za kvalitativnu analizu linearnih sustava bit će dovoljno opisati fazne portrete za jednostavne linearne sustave

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J\mathbf{x}(t), \tag{3.50}$$

pri čemu J ima jedan od oblika iz (3.46).
Prema [9], fazni portret za sustav (3.45) dobiva se jednostavno iz faznog portreta za sustav (3.50) linearnom zamjenom koordinata $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$. On se suštinski geometrijski neće promijeniti (samo zakrenuti), kao što smo vidjeli na slikama u Primjeru 3.2.11.

3.3.1 Klasifikacija linearnih sustava prema izgledu faznog portreta

Fazni portreti sustava (3.45) ovisit će o svojstvenim vrijednostima matrice A, stoga ćemo grupirati linearne sustave obzirom na svojstvene vrijednosti dane matrice. Za početak, promatramo matrice J koje su već u Jordanovoj formi.

3.3.1.1 Različite realne svojstvene vrijednosti

Promotrimo sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J\mathbf{x}(t). \tag{3.51}$$

Pretpostavit ćemo da matrica J ima dvije različite realne svojstvene vrijednosti λ i μ. Obzirom na njihove predznake razlikovat ćemo sljedeća tri slučaja:
1. $\lambda < 0 < \mu$
2. $\lambda < \mu < 0$
3. $0 < \lambda < \mu$.

1. slučaj: $\lambda < 0 < \mu$,

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Polje smjerova danog sustava dano je funkcijom $\mathbf{f} : R^2 \to \mathbb{R}^2$,

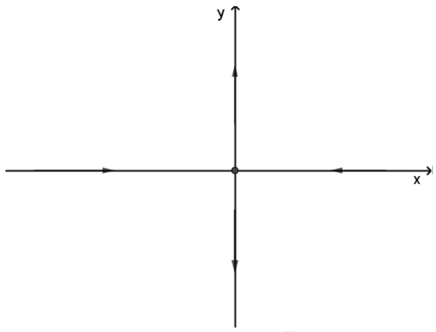
$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \mu y \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu y \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iz toga je lako dobiti polje smjerova na koordinatnim osima. Radi predznaka svojstvenih vrijednosti, polje smjerova na osima izgleda ovako:

Lako se vidi da trajektorija koja kreće u ishodištu zauvijek tamo i ostaje jer je za $\mathbf{x}(t) = 0$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ i nema promjene položaja. Kažemo da je ishodište *ravnotežna točka*. Iz polja smjerova na osima vidimo: trajektorija s početnom točkom na x-osi ostaje na x-osi i približava se ishodištu, a trajektorija koja kreće na y-osi ostaje na y-osi i udaljava se od ishodišta. Kažemo da je ishodište *sedlasta točka (sedlo)*.

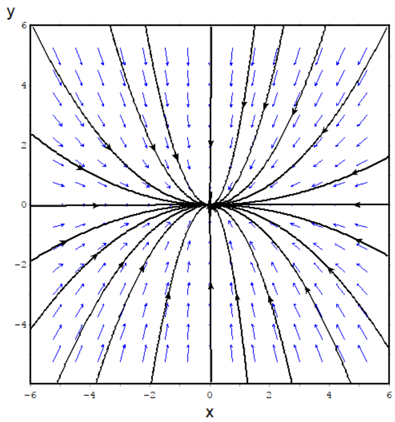


Slika 3.3: Polje smjerova na osima.

Potkrijepimo tu analizu stvarnim računom korištenjem fundamentalnog teorema. Primjenom fundamentalnog teorema dobivamo, za početni uvjet $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\mu t} \end{bmatrix}.$$

Iz oblika rješenja zbog $\lambda < 0$, $\mu > 0$, vidimo: ako čestica krene na y-osi ($x_0 = 0$), tada, kad se t povećava, čestica se giba po y-osi te se eksponencijalnom brzinom udaljava od ishodišta. Ako krene na x-osi, približava se ishodištu kad se t povećava, ali ga nikad ne dosegne. U slučaju $\lambda < \mu < 0$, dobivamo fazni portret sa Slike 3.4.



Slika 3.4: Polje smjerova i fazni portret za slučaj $\lambda < \mu < 0$.

Prema [7], za $\lambda < 0$, $\mu > 0$, za x-os kažemo da je *stabilni potprostor*, a za y-os *nestabilni potprostor*. Primijetimo da su stabilni i nestabilni potprostori uvijek razapeti svojstvenim vektorima matrice sustava, bez obzira je li ona svedena na Jordanovu formu.

Naime, polje smjerova sustava dano je s:

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

a svojstveni vektori su upravo oni za koje vrijedi

$$A\mathbf{v_1} = \lambda\mathbf{v_1}, A\mathbf{v_2} = \lambda\mathbf{v_2},$$

pa je duž svojstvenih vektora polje smjerova, a time i gibanje, u smjeru tih vektora, s orijentacijom ovisnom o predznaku svojstvene vrijednosti.

Ako matrica sustava nije svedena na Jordanovu formu, fazni portret sustava $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ se dobiva određivanjem faznog portreta za sustav $\dot{\mathbf{y}} = J\mathbf{y},\ J = P^{-1}AP$, i zamjenom koordinata $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, što odgovara zakretanju koordinatnih vektora u svojstvene vektore matrice A, tj. samo zakretanju slike. Primijetimo,

$$P\mathbf{e_1} = \mathbf{v_1},\ P\mathbf{e_2} = \mathbf{v_2},$$

gdje su $\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2}$ svojstveni vektori matrice A. Ilustrirajmo rečeno na sljedećem primjeru.

Primjer 3.3.1. *Promotrimo konkretni sustav*

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{3.52}$$

gdje je $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *i početni uvjet* $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Pridružena matrična jednadžba je

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vidimo da su svojstvene vrijednosti matrice A jednake $\lambda_1 = -1$ *i* $\lambda_2 = 4$. *Za* $\lambda_1 = -1$, *svojstveni vektor je* $\mathbf{v_1} = (-4, 1)$, *a za* $\lambda_2 = 4$, *svojstveni vektor je* $\mathbf{v_2} = (1, 1)$. *Stoga je* $A = P^{-1}JP$, *gdje je matrica prijelaza P (matrica prijelaza iz kanonske u bazu svojstvenih vektora) dana s:*

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada Jordanova forma matrice A izgleda ovako:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

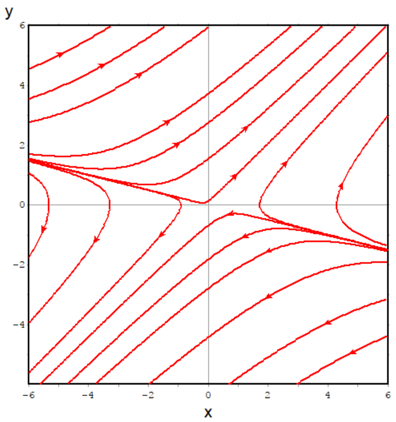
Novi sustav u Jordanovoj formi je oblika

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}(t), \; t \in \mathbb{R}. \tag{3.53}$$

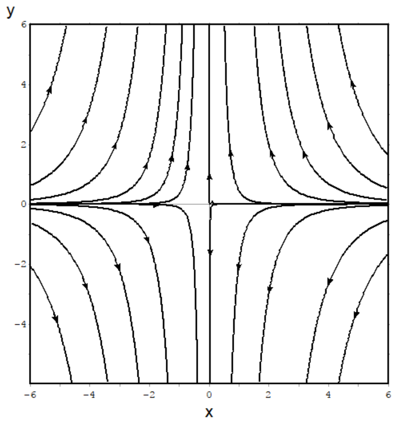
Prema fundamentalnom teoremu, rješenje je dano s:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = P e^{Jt} P^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4e^{-t} - 2e^{4t} \\ -e^{-t} - 2e^{4t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Crtamo fazni portret originalnog sustava u primjeru i sustava u Jordanovoj formi. Vidimo da se radi samo o zakretanju faznog portreta.



(a) Fazni portret za sustav (3.52).



(b) Fazni portret za sustav (3.53).

Slika 3.5

U ostalim slučajevima crtamo fazne portrete samo za sustave čije su matrice već u Jordanovoj formi, uz napomenu da se fazni portret originalnog sustava dobiva nekom linearnom promjenom koordinata i suštinski ne mijenja.

3.3.1.2 Dvostruka realna svojstvena vrijednost

Promatramo sustav

$$\dot{\mathbf{x}} = J\mathbf{x}(t), \tag{3.54}$$

pri čemu je J Jordanova forma oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ili } \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdje je λ dvostruka realna svojstvena vrijednost neke matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$.

Slučaj 1.

Neka je matrica J oblika

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

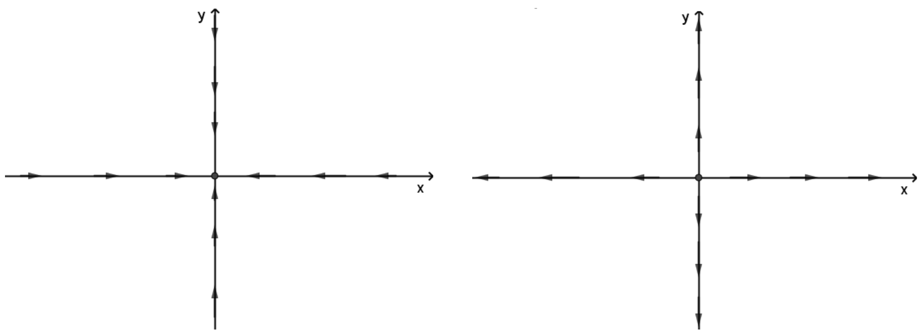
Polje smjerova sustava (3.54) dano je funkcijom $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Stoga je

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda y \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

U ovisnosti o predznaku svojstvene vrijednosti, iz polja smjerova na osima vidimo:



(a) Polje smjerova na osima za $\lambda < 0$. (b) Polje smjerova na osima za $\lambda > 0$.

Slika 3.6

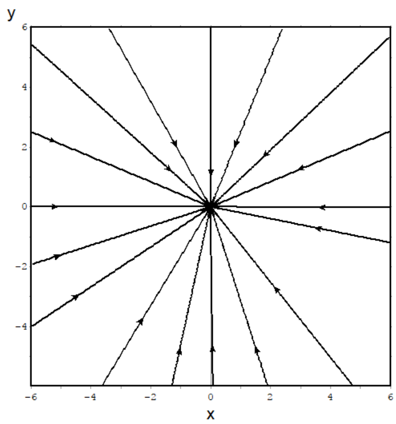
Za $\lambda < 0$, vidimo da trajektorije s početnom točkom na x-osi i y-osi ostaju na osima i približavaju se ishodištu (Slika 3.6 (a)). Za x-os i y-os kažemo da su stabilni potprostori. Prema [9], za ishodište kažemo da je *čvor (ponor)*.

Za $\lambda > 0$, trajektorije s početnom točkom na x-osi i y-osi se udaljavaju od ishodišta (Slika 3.6 (b)). Za x-os i y-os kažemo da su nestabilni potprostori. Prema [9], za ishodište kažemo da je *čvor (izvor)*.

S druge strane, prema fundamentalnom teoremu, rješenje za sustav (3.54) s početnom točkom $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je dano s

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t}. \end{bmatrix}$$

Ako je $\lambda < 0$, iz oblika rješenja vidimo da će se čestica s povećanjem t približavati ishodištu eksponencijalnom brzinom, ali ga nikad neće doseći. Ako je $\lambda > 0$, čestica će se udaljavati od ishodišta eksponencijalnom brzinom kad se t povećava. Fazni portret za sustav (3.54) za $\lambda < 0$ izgleda ovako:



Slika 3.7: Fazni portret za sustav (3.54) kad je $\lambda < 0$.

Fazni portret za taj sustav u slučaju $\lambda > 0$ je isti, osim što se sada trajektorije udaljavaju od ishodišta.

Slučaj 2.

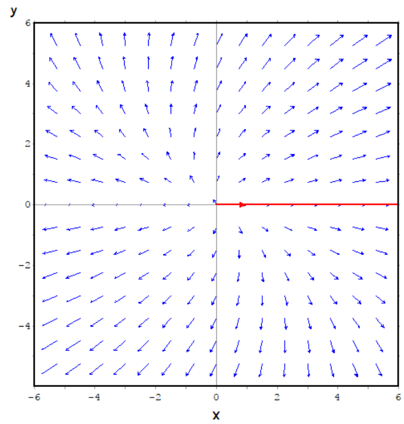
Neka je matrica J oblika

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Vidimo da je svojstvena vrijednost jednaka λ. Za razliku od prvog slučaja, ovdje imamo samo jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ i on je jednak $(1, 0)$. Drugi generalizirani vektor koji je linearno nezavisan s $(1, 0)$ je oblika $(t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Polje smjerova sustava dano je s

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + y \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Vidimo da trajektorija koja kreće na x-osi ostaje na x-osi (smjer jedinog svojstvenog vektora), dok za trajektoriju na y-osi to nije slučaj. Ako je svojstvena vrijednost λ pozitivna, trajektorija na x-osi se udaljava od ishodišta. (Slika 3.8)



Slika 3.8: Polje smjerova za **Slučaj 2.**: $\lambda > 0$.

Ako je λ negativna, trajektorija se približava ishodištu.

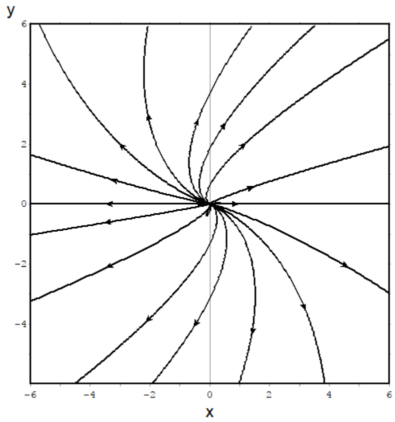
Za sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\mathbf{x}(t), \tag{3.55}$$

primjenom fundamentalnog teorema dobivamo, za početni uvjet $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} + y_0 t e^{\lambda t} \\ y_0 e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Neka je $\lambda > 0$. Odavde jasno vidimo da se, kad se t povećava, čestica udaljava od točke $(0, 0)$ eksponencijalnom brzinom. Za ishodište kažemo da je *nestabilni čvor (izvor)*. Fazni portret za taj sustav vidimo na Slici 3.9. Ako je $\lambda < 0$, fazni portret izgleda slično, samo je ishodište *stabilni čvor (ponor)*.



Slika 3.9: Fazni portret za sustav (3.55) za dvostruku svojstvenu vrijednost $\lambda = 2$.

3.3.1.3 Par konjugirano kompleksnih svojstvenih vrijednosti

U ovom slučaju rješenja karakterističnog polinoma pridruženog nekoj matrici A su kompleksni brojevi, odnosno matrica A će imati za svojstvene vrijednosti par konjugirano kompleksnih brojeva. Tada nećemo više imati trajektorije na osima. Uvjerimo se u to na sljedećim konkretnim primjerima. Razlikujemo dva slučaja: kada je realni dio kompleksne svojstvene vrijednosti jednak nuli (tj. slučaj čisto imaginarne svojstvene vrijednosti) i kada je različit od nule.

1. slučaj. Slučaj čisto imaginarne svojstvene vrijednosti.

Neka je dan sustav

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = J\mathbf{x}, \tag{3.56}$$

pri čemu je matrica J oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}, \ b > 0.$$

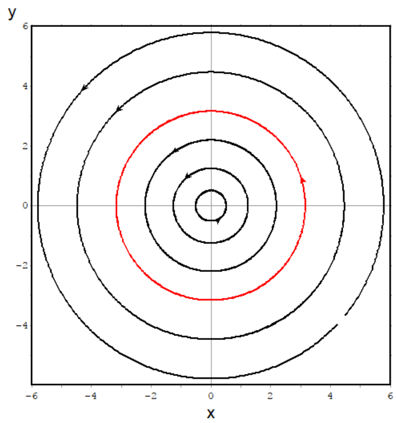
Jasno je da su onda svojstvene vrijednosti imaginarni brojevi $\pm bi$. Polje smjerova za taj sustav definirano funkcijom $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, je dano s

$$\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -by \\ bx \end{pmatrix}.$$

Odavde možemo vidjeti da se trajektorije neće kretati niti na jednoj osi. Prema fundamentalnom teoremu, za neki početni uvjet $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ rješenje sustava (3.56) je dano s:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} \mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} x_0 \cos bt - y_0 \sin bt \\ x_0 \sin bt + y_0 \cos bt \end{bmatrix}.$$

Iz oblika rješenja vidimo da se čestica, koja krene iz početne točke $\mathbf{x_0}$, giba po kružnici polumjera $\sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2}$ (jer je $x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 + y_0^2$), u smjeru suprotno od kazaljke na satu, a središte kružnice je u ishodištu. Prema [9], za sustav kažemo da ima *centar u ishodištu*. Fazni portret za sustav (3.56) su koncentrične kružnice sa središtem u ishodištu (Slika 3.10).



Slika 3.10: Fazni portret za sustav (3.56) s $b = 3$ i s trajektorijom iz npr. točke $(3, 1)$.

***Napomena* 6.** *U slučaju da smo uzeli b negativan broj, dobili bi isti fazni portret, ali tada bi se čestica gibala u smjeru kazaljke na satu.*

2. slučaj. Slučaj ne-nul realnog dijela.

Neka je sad matrica J oblika

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \; a < 0, \; b > 0.$$

Prema fundamentalnom teoremu, rješenje za neku početnu točku $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ je dano s:

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \mathbf{x_0} = e^{at} \begin{bmatrix} x_0 \cos(bt) - y_0 \sin(bt) \\ x_0 \sin(bt) + y_0 \cos(bt) \end{bmatrix}.$$

Na primjer, rješenje $\mathbf{x}(t)$ za točku $(1,0)$ dano je s

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}\begin{bmatrix}\cos(bt)\\ \sin(bt)\end{bmatrix}.$$

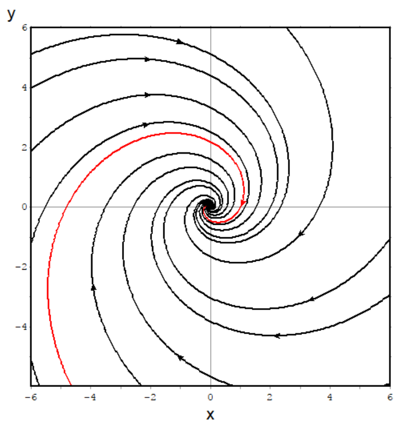
Objasnimo izgled faznog portreta pomoću polarnih koordinata. Identificirajmo uređeni par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ s uređenim parom (r,φ), gdje je $r \geqslant 0$ udaljenost točke od ishodišta, a $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, kut koji radijvektor zatvara s x-osi. Tada je

$$r(t) = e^{at},\ \varphi(t) = bt,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.57}$$

Tada dobivamo da je

$$r(\varphi) = e^{\frac{a}{b}\varphi}. \tag{3.58}$$

Iz ovoga možemo vidjeti: čestica koja krene iz točke $(1,0)$, se giba po spirali u smjeru kazaljke na satu (vidimo iz predznaka za kut u (3.57), zbog $a < 0,\ b > 0$) te se udaljenost od ishodišta eksponencijalno smanjuje. Pritom čestica nikad neće doći u ishodište. Iz (3.58), vidimo da kad se t povećava, radijvektor s završnom točkom $(1,0)$ rotira u smjeru kazaljke na satu, a duljina mu se smanjuje u ovisnosti o kutu φ. Stoga će fazni portret biti skup spirala prema ishodištu (Slika 3.11). Prema [9], za ishodište kažemo da je *stabilan fokus*.



Slika 3.11: Fazni portret sustava s matricom $J = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$.

Napomena 7. *Ako je $a > 0$, tada se čestica giba po spirali u suprotnom smjeru od kazaljke na satu i udaljava se od ishodišta. Tada za ishodište kažemo da je* nestabilan fokus.

Poglavlje 4

Primjena na nelinearne sustave

U ovom poglavlju razmatrat ćemo nelinearne sustave diferencijalnih jednadžbi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{4.1}$$

gdje je $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ poznata funkcija. Analogno kao i kod linearnih sustava, rješenje ovog sustava je funkcija $\mathbf{x} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definirana na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ takvo da za $t \in I$, vrijedi (4.1).

Kod linearnih sustava diferencijalnih jednadžbi mogli smo uvijek eksplicitno pronaći rješenje za svaku početnu točku. U slučaju nelinearnih sustava to više neće biti moguće učiniti za svaki nelinearni sustav. Štoviše, neka osnovna svojstva kao što su postojanje i jedinstvenost rješenja koja su vrijedila za linearne sustave, ne vrijede više za nelinearne sustave. Prema [9], mogu se naći uvjeti na funkciju $\mathbf{f}$ iz (4.1) tako da nelinearni sustav ima jedinstveno rješenje kroz početnu točku $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ na intervalu postojanja $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ (vidjeti Picardov teorem egzistencije i jedinstvenosti u npr. [9]). Ovdje ćemo iskazati Hartman - Grobmanov teorem, važan u kvalitativnoj analizi rješenja sustava diferencijalnih jednadžbi. Ovaj teorem pokazuje da se, blizu ravnotežne točke, pod nekim uvjetima na funkciju $\mathbf{f}$, nelinearni sustav (4.1) ponaša slično kao i linearni, tj. fazni portret nelinearnog sustava možemo usporediti s faznim portretom linearnog sustava.

4.1 Linearizacija nelinearnog sustava

U ovom odjeljku pokušavamo lokalno, u okolini ravnotežne točke, aproksimirati nelinearni sustav linearnim. Prema [9], u nekim slučajevima će se pokazati da je ponašanje sustava (4.1) dobro aproksimirano ponašanjem linearnog sustava:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{4.2}$$

pridruženog sustavu (4.1).
Objasnimo sad što znači da je sustav (4.2) linearna aproksimacija sustava (4.1), tj. koja je veza $\mathbf{f}$ iz (4.1) i matrice A. Pretpostavimo da je $\mathbf{f}$ neprekidno diferencijabilna funkcija (tj. klase C^1) na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ koji sadrži ravnotežnu točku. Slijedi definicija diferencijabilne funkcije više varijabli.

Definicija 4.1.1 ([9]). *Neka je $\|\cdot\|$ neka norma na $\mathbb{R}^n$. Za funkciju $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***diferencijabilna u*** $\mathbf{x_0} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *ako postoji linearan operator, i označimo ga s $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, takav da vrijedi:*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+h) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{4.3}$$

Taj linearni operator $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$, ako postoji, nazivamo ***diferencijal od*** $\mathbf{f}$ ***u*** $\mathbf{x_0}$.

Primijetimo da Definicija 4.1.1 zapravo govori da je za diferencijabilne funkcije u točki $\mathbf{x_0}$ djelovanje diferencijala $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})(h)$ prva aproksimacija pomaka funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+h) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0})$ za malo h. Označimo sad s

$$A := [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}$$

prikaz tog operatora u kanonskoj bazi. Tu matricu zovemo Jacobijevom matricom funkcije $\mathbf{f}$. Tada možemo pisati

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}(h) = Ah.$$

Matrica A u sustavu (4.2) je Jacobijeva matrica od $\mathbf{f}$, tj. vrijedi

$$A = [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)} . \tag{4.4}$$

Sljedeći teorem opisuje kako računamo Jacobijevu matricu funkcije $\mathbf{f}$ u $\mathbf{x_0}$.

Teorem 4.1.2 ([9]). *Pretpostavimo da je $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija u $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ te neka su $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., n$, njezine koordinatne funkcije, tj.*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_n(\mathbf{x})).$$

Tada postoje sve parcijalne derivacije koordinatnih funkcija f_i u točki $\mathbf{x_0}$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}),\ i, j = 1, 2, ..., n, \tag{4.5}$$

u točki $\mathbf{x_0}$. *Nadalje, za svaku točku* $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi*

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}\,\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}) x_j, \tag{4.6}$$

gdje je

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}), ..., \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}) \right), \; j = 1, .., n,$$

parcijalna derivacija funkcije $\mathbf{f}$ *po* j*-toj varijabli.*

Iz (4.6) vidimo da je

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}\, e_k = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_k}(\mathbf{x_0}), \; k = 1, ..., n,$$

za $e_k = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$, k-ti vektor kanonske baze. Stoga je Jacobijeva matrica od $\mathbf{f}$ jednaka

$$A = [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)} = \left[\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_0}) \right]_{i,j=1,...n}.$$

Definicija 4.1.3 ([9]). *Za točku* $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *kažemo da je* ***ravnotežna točka*** *sustava* (4.1) *ako vrijedi*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = 0.$$

Dalje, za ravnotežnu točku $\mathbf{x_0}$ *kažemo da je* ***hiperbolička*** *ravnotežna točka sustava* (4.1) *ako niti jedna svojstvena vrijednost operatora* $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$ *nema nulu za realni dio.*

U tom smislu je sustav (4.9) aproksimiran linearnim sustavom (4.2).

Definicija 4.1.4 ([9]). *Matricu* $A = [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}$ *sustava* (4.2) *zovemo* ***linearizacijskom matricom*** *sustava* (4.1).

Neke nelinearne sustave (tj. uz određene uvjete na funkciju desne strane $\mathbf{f}$) možemo rješavati tako da najprije odredimo linearizacijski sustav. Linearni sustav znamo eksplicitno riješiti (npr. koristeći fundamentalni teorem za linearne sustave).

Sljedeći teorem daje ponašanje nelinearnog sustava

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \tag{4.7}$$

u okolini hiperboličke ravnotežne točke. Teorem garantira da sustav (4.7) uz uvjet hiperboličnosti ima istu kvalitativnu strukturu kao linearni sustav

$$\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}, \tag{4.8}$$

pri čemu je $A = [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)} \in M_n(\mathbb{R})$.

Teorem 4.1.5 ([9])**.** ***(Hartman - Grobman).*** *Neka je podskup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni takav da sadrži ishodište. Neka je funkcija $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$. Pretpostavimo da je ishodište ravnotežna točka, tj. vrijedi $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$ i da je matrica $A = [D\mathbf{f}(\mathbf{0})]_{(e,e)}$ takva da niti jedna svojstvena vrijednost nema nulu za realni dio. Tada postoji homeomorfizam H koji preslikava s okoline ishodišta na okolinu ishodišta koji preslikava trajektorije sustava* (4.7) *u okolini ishodišta u trajektorije sustava* (4.8) *u okolini ishodišta i čuva orijentaciju po vremenu. Drugim riječima, fazni portret lineariziranog sustava u okolini ishodišta istog je kvalitativnog tipa kao i fazni portret originalnog sustava u okolini ishodišta.*

Ilustrirajmo postupak na sljedećem primjeru

Primjer 4.1.6. *Linearizirajmo sljedeći* 2×2 *nelinearni sustav*

$$\begin{cases} x' &= 2x - y^2 \\ y' &= 2y. \end{cases} \tag{4.9}$$

Funkcja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *zadana je s*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x - y^2 \\ 2y \end{bmatrix}.$$

Odredimo prvo ravnotežnu točku $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *za koju vrijedi* $\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) = 0$. *Dakle, moramo riješiti sustav*

$$\begin{cases} 2x_0 - {y_0}^2 &= 0 \\ 2y_0 = 0 \end{cases}.$$

Odavde vidimo da je tražena ravnotežna točka $\mathbf{x_0} = (0, 0)$. *Odredimo Jacobijevu* 2×2 *matricu.*

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x})]_{(e,e)} = \begin{bmatrix} 2 & -2y \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Tada je

$$[D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

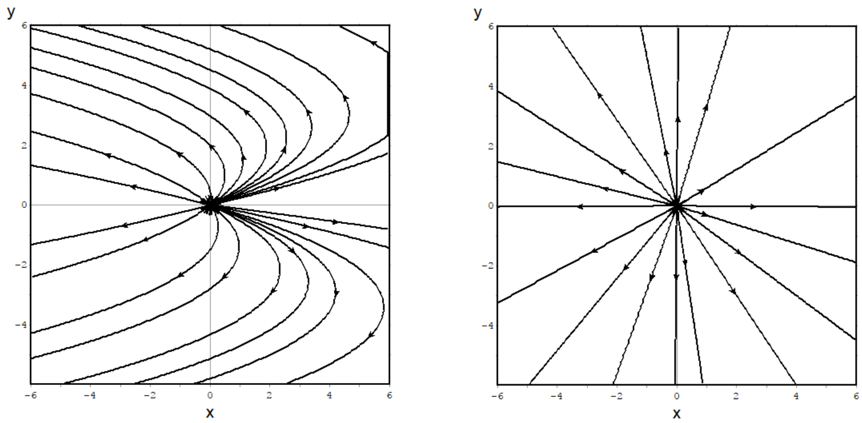
Sada dobivamo sustav oblika (4.2) *koji izgleda ovako:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})]_{(e,e)}\, \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{4.11}$$

Primjenom Fundamentalnog teorema 3.2.9 dobivamo da je rješenje tog sustava dano s

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_0 e^{2t} \\ y_0 e^{2t} \end{bmatrix},$$

za neku početnu točku $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Hartman-Grobmanov teorem nam govori da u okolini ravnotežne točke* $(0,0)$*, ponašanje nelinearnog sustava* (4.9) *je približno aproksimirano njegovom linearizacijom u točki* $(0,0)$. *Dakle, možemo reći da je fazni portret od* (4.9) *nalik faznom portretu njemu pridruženog linearnog sustava.*



(a) Fazni portret sustava (4.9).

(b) Fazni portret sustava (4.11).

Slika 4.1

Bibliografija

[1] V. I. Arnold, *Ordinary Differential equations*, The MIT Press, 1973.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska Knjiga, 2008.

[3] D. Bakić, *Normirani prostori*, (2012), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1617.pdf`.

[4] N. Bosner, *Iterativne metode za rješavanje linearnog sustava*, (2001), `https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/kostur.pdf`.

[5] B. Hasselblatt i A. Katok, *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.

[6] M. W. Hirsch i S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, 1974.

[7] M. W. Hirsch, S. Smale i R. L. Dewaney, *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*, Academic Press, 2013.

[8] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Školska knjiga, 1974.

[9] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer, 1996.

[10] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos*, Westview Press, 2015.

Sažetak

U ovom radu uglavnom se bavimo 2×2 linearnim sustavima običnih diferencijalnih jednadžbi. U prvom poglavlju ponavljamo osnovne činjenice o matričnom zapisu linearnog operatora i Jordanovoj bazi, sa svrhom traženja linearne zamjene varijabli koja sustav prevodi u što jednostavniji (ako je moguće dijagonalni) koji je lakše riješiti. U drugom poglavlju dajemo geometrijsku interpretaciju 2×2 linearnih sustava običnih diferencijalnih jednadžbi koristeći polje smjerova. Uvodimo osnovne pojmove kao što su integralna krivulja i fazni portret sustava (skup trajektorija sustava prikazan u $\mathbb{R}^2$). Kao pripremu za iskaz fundamentalnog teorema o eksplicitnom rješenju linearnog sustava, u trećem poglavlju uvodimo pojam operatorske norme matrice kojom prostoru kvadratnih matrica dajemo strukturu normiranog prostora te smo u mogućnosti promatrati konvergenciju nizova i redova matrica. Zatim iskazujemo fundamentalni teorem o rješenju linearnog sustava u kojem je rješenje izraženo kao eksponencijalna funkcija matrice, u smislu konvergentnog reda u prostoru matrica. Ovisno o izgledu Jordanove matrice, tj. o tipu svojstvenih vrijednosti, dobivamo različite tipove rješenja, tj. faznog portreta. Na kraju poglavlja klasificiramo linearne sustave prema tipovima faznog protreta. Potkrepljujemo eksplicitne račune i kvalitativnom teorijom, tj. analizom trajektorija sustava korištenjem polja smjerova i geometrijske interpretacije sustava. U četvrtom poglavlju određujemo linearnu aproksimaciju nelinearnog sustava. Iskazujemo Hartman-Grobmanov teorem koji pod nekim uvjetima daje podudarnost faznog portreta sustava i njegove linearne aproksimacije. Time dajemo primjenu teorije razvijene za linearne sustave i na nelinearne sustave. Ilustriramo na primjeru.

Summary

In this thesis we mainly deal with a 2×2 linear systems of ordinary differential equations. In the first chapter, we revise the basic facts about the matrix representation of the linear operator and about the Jordan basis, with the aim of finding a linear change of variables in which the system has a simpler (possibly diagonal) form and is easier to solve. In the second chapter, we give a geometric interpretation of 2×2 linear systems of ordinary differential equations using the field of directions. We introduce basic terms such as an integral curve and the phase portrait (the trajectories of the system displayed in $\mathbb{R}^2$). As a preparation for the statement of the fundamental theorem about the explicit solution of the linear system, in the third chapter we introduce the concept of the matrix norm, which gives the space of the square matrices the structure of the normed space and we are able to study the convergence of the sequences and series of matrices. Then we express a fundamental theorem about the solution of the linear system in which the solution is expressed as a matrix exponential in terms of the convergent series in the space of matrices. Depending on the form of the Jordan matrix, i.e. on the type of its eigenvalues, we get different types of phase portraits. At the end of the chapter we classify linear systems according to the types of eigenvalues. The explicit computations of solutions are explained from the viewpoint of qualitative analysis, i.e. by analyzing the trajectories of the system using fields of directions and the geometric interpretation of the system. In the fourth chapter, we define the linear approximation of the nonlinear system. We state the Hartman-Grobman's theorem which under some circumstances states the similarity of the phase portrait of the system and of its linear approximation. Thus we give an application of the linear theory to non-linear systems, and illustrate on an example.

Životopis

Rođen sam 11. prosinca 1989. godine u Zagrebu. Osnovnu školu završio sam u Lekeniku. 2009. godine završavam "Nadbiskupsku klasičnu gimnaziju s pravom javnosti" u Zagrebu. Istu godinu upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Nakon dvije godine prelazim na isti studij, smjer: nastavnički. 2014. godine završavam preddiplomski studij te istu godinu upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer: nastavnički.