Fourierova transformacija i Paley-Wienerov prostor

Kovačević, Antonija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Antonija Kovačević

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA I PALEY-WIENEROV PROSTOR

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, studeni, 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Fourierova analiza ime duguje francuskom fizičaru i matematičaru Jean-Baptisteu Josephu Fourieru (1768.-1830.). Fourier se originalno bavio problemom rješavanja parcijalne diferencijalne jednadžbe za širenje topline i u svom radu koji je objavljen 1807. godine predstavio je revolucionarnu ideju da svaku funkciju možemo zapisati kao sumu sinusa različitih amplituda, faza i frekvencija koja se u današnjoj literaturi naziva Fourierov red.

Fourierova transformacija, kojom ćemo se baviti u ovom radu, proizašla je kao rezultat proučavanja Fourierova reda, no danas se najčešće proučava zasebno i predstavlja jedan od najpoznatijih matematičkih alata. Neke od najvažnijih primjena ove transformacije su u analizi diferencijalnih jednadžbi, kvantnoj mehanici i u teoriji signala. Ustvari, Fourierova transformacija je vjerojatno najvažniji alat koji se koristi u analizi signala.

Signal je funkcija jedne varijable. To može biti elektromagnetski val, zvučni val, električni val. U teoriji signala, uzorkovanje je redukcija signala u kontinuiranom vremenu(često se naziva *analogni signal*) na signal u diskretnom vremenu(često se naziva *digitalni signal*). Htjeli bismo pronaći način da obavimo tu redukciju ali da sve informacije koje smo imali u kontinuiranom vremenu ostanu sačuvane i da se može izvršiti rekonstrukcija iz digitalnog u analogni signal. Mi ćemo u ovom radu proučavati Paley-Wienerov prostor, tj. prostor funkcija koje su pojasno ograničene na interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Takve funkcije moguće je rekonstruirati iz prebrojivo mnogo vrijednosti uzoraka $f(bn), n \in \mathbb{Z}, b < 1$. Taj rezultat naziva se *klasični teorem o uzorkovanju*(poznat i kao*Shannon Sampling Theorem, Shannon-Whitaker Sampling Theorem, Nyquist-Shannon Sampling Theorem*).

Ovaj rad podijeljen je u četiri idejne cjeline. U prvom poglavlju navodimo neke važne rezultate teorije normiranih prostora, te mjere i integrala, koji će nam biti korisni u nastavku rada. Na kraju ovog poglavlja iznosimo važne rezultate iz teorije L^p prostora. U drugom poglavlju bavimo se analizom baznih okvira i promatramo neka njihova svojstva. Treće poglavlje posvećeno je Fourierovoj transformaciji, uvodimo definiciju Fourierove transformacije na prostorima $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$ i promatramo njezina svojstva na tim prostorima. U četvrtom poglavlju uvodimo Paley-Wienerov prostor, promatramo njegova svojstva i na kraju izlažemo teorem o uzorkovanju za Paley-Wienerov prostor.

Poglavlje 1

Uvodni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju iznosimo kratki pregled nekih važnih rezultata iz teorije normiranih prostora i mjere i integrala, s naglaskom na L^p-prostore koji će se pokazati korisnima u nastavku rada.

1.1 Normirani prostori

Ova točka odnosi se na standardne rezultate iz teorije normiranih prostora. Dokaze izostavljamo, ali moguće ih je pronaći u [1], [4] i [5]. Sa $\mathbb{F}$ označavamo polje realnih ili kompleksnih brojeva u situacijama kada nije potrebno specificirati izbor.

Definicija 1.1.1. *Norma na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\|x\| \geq 0, \ \forall x \in X;$
2. $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0;$
3. $\|\alpha\| = |\alpha| \, \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \ \forall x \in X;$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \ \forall x, y \in X.$

Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ se naziva normiran prostor.

Definicija 1.1.2. *Skalarni produkt na vektorskom prostoru X nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{F}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in X;$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0;$

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in X;$

4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle,\ \forall x_1, x_2, y \in X;$

5. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle},\ \forall x, y \in X.$

Uređeni par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se naziva unitaran prostor.*

U svakom unitarnom prostoru za sve vektore x i y vrijedi Cauchy- Schwarzova nejednakost:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Uz pomoć te nejednakosti lako se pokazuje da je na proizvoljnom unitarnom prostoru $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ formulom $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ zadana jedna norma.

Definicija 1.1.3. *Neka je X normiran prostor. Otvorena kugla s centrom u točki $x_0 \in X$ i radijusom $r > 0$ je skup $K(x_0, r) = \{\ x \in X\ :\ \|x - x_0\| < r\ \}$.*

Kažemo da je skup $S \subseteq X$ otvoren ako je S unija neke familije otvorenih kugala. Lako se vidi da vrijedi: $S \subseteq X$ je otvoren ako i samo ako za svaku točku $x \in S$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq S$. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako je $X \setminus F$ otvoren. Zatvarač $\overline{A}$ proizvoljnog skupa $A \subseteq X$ definira se kao najmanji zatvoreni skup u X koji sadrži A.

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je normiran prostor X separabilan ako postoji prebrojiv skup $S \subseteq X$ takav da vrijedi $\overline{S} = X$. U ovoj situaciji se još kaže da je S gust u X.*

Za niz $(x_n)_n$ u normiranom prostoru X koji razapinje gust potprostor u X (dakle, za koji vrijedi $\overline{span}\{x_n\ :\ n \in \mathbb{N}\} = X$, pri čemu $span(x_n)$ označava linearnu ljusku skupa S) kaže se da je fundamentalan u X.

Teorem 1.1.5. *Neka je X normiran prostor. Ako postoji niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X koji je fundamentalan, onda je X separabilan.*

Definicija 1.1.6. *Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru X.*
Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema $x \in X$ i pišemo $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tako da } n_0 \leq n \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Kažemo da je niz $(x_n)_n$ Cauchyjev ako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ tako da } n_0 \leq m, n \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Svaki konvergentan niz u normiranom prostoru je Cauchyjev, ali obrat ne vrijedi općenito.

Definicija 1.1.7. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun normiran prostor zove se još i Banachov prostor. Potpun unitaran prostor se naziva Hilbertov prostor.*

Neka je zadan potprostor S Banachovog prostora X. Tada je S Banachov prostor u odnosu na normu prostora X ako i samo ako je S zatvoren potprostor od X.

Definicija 1.1.8. *Neka je X normiran prostor i $S \subseteq X$. Kažemo da je skup S kompaktan ako svaki niz u S ima konvergentan podniz čiji limes je u S.*

Primjer 1.1.9.

- *Za dano $1 \leq p < \infty$, definiramo prostor ℓ^p:*

$$\ell^p \;=\; \Big\{ \, x = (x_k)_k \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \;:\; \sum_k |x_k|^p < \infty \, \Big\}.$$

  Očito je ℓ^p vektorski prostor uz koordinatno definirane operacije. Pokaže se da je $\ell^p, 1 \leq p < \infty$ Banachov prostor uz normu definiranu sa:

$$\|x\|_p \;=\; \|(x_k)_k\|_p \;=\; \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Definiramo i prostor ℓ^∞ kao prostor svih ograničenih nizova:*

$$\ell^\infty \;=\; \Big\{ \, x = (x_k)_k \;:\; (x_k)_k \textit{ je ograničeni niz} \, \Big\}$$

  ℓ^∞ je Banachov prostor uz normu definiranu sa:

$$\|x\|_\infty \;=\; \|(x_k)\|_\infty \;=\; \sup_k |x_k|.$$

Možemo promatrati prostore ℓ^p i ako indeksni skup $\mathbb{N}$ zamijenimo bilo kojim drugim prebrojivim skupom.

Primjer 1.1.10. *Definiramo*

- $$C(\mathbb{R}) \;=\; \Big\{ \, f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{F} \;:\; f \textit{ je neprekidna na } \mathbb{R} \, \Big\}$$

- *Prostor*

$$C_b(\mathbb{R}) \;=\; \Big\{ \, f \in C(\mathbb{R}) \;:\; f \textit{ je ograničena} \, \Big\}$$

  je Banachov prostor uz normu:

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{t \in R} |f(t)|.$$

- $$C_0(\mathbb{R}) \;=\; \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}) \;:\; \lim_{|t|\to\infty} f(t) = 0 \right\}$$

  je zatvoreni potprostor od $C_b(\mathbb{R})$ *uz normu* $\|\cdot\|_\infty$.

- *Nosač funkcije se definira kao* $suppf \;=\; \overline{\{\, x \in \mathbb{R} \;:\; f(x) \neq 0 \,\}}$. *Ako je ovaj skup i ograničen (pa onda zato i kompaktan) kaže se da* f *ima kompaktan nosač.*

  $$C_c(\mathbb{R}) \;=\; \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \;:\; f \text{ ima kompaktan nosač} \right\}$$

  je potprostor prostora $C_0(\mathbb{R})$ *i* $C_b(\mathbb{R})$*, vrijedi i:* $C_c(\mathbb{R})$ *je gusti ali pravi potprostor od* $C_0(\mathbb{R})$ *uz normu* $\|\cdot\|_\infty$.

- *Slično se definiraju i prostori funkcija koje su neprekidne na domeni različitoj od* $\mathbb{R}$*,npr:*

  $$C[a,b] \;=\; \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{F} \;:\; f \text{ je neprekidna na } [a,b] \right\}$$

- $$C(\boldsymbol{T}) \;=\; \left\{ f \in C(\mathbb{R}) \;:\; f(t+1) = f(t),\ \forall t \in \mathbb{R} \right\}$$

  i to je zatvoreni potprostor prostora $C_b(\mathbb{R})$.

- $$C_b^m(\mathbb{R}) \;=\; \left\{ f \in C_b(\mathbb{R}) \;:\; f, f', \cdots, f^{(m)} \in C_b(\mathbb{R}) \right\}$$

  i slično,

  $$C_0^m(\mathbb{R}) \;=\; \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}) \;:\; f, f', \cdots, f^{(m)} \in C_0(\mathbb{R}) \right\}$$

Definicija 1.1.11. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u normiranom prostoru* X. *Red* $\Sigma_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira k vektoru* $x \in X$ *ako je* $x = lim_{n\to\infty} s_n$ *gdje je* $(s_n)_n$ *niz parcijalnih suma;* $s_n = \Sigma_{k=1}^{n} x_k$.
Red $\Sigma_{k=1}^{\infty} x_k$ *u normiranom prostoru konvergira apsolutno ako konvergira red nenegativnih brojeva* $\Sigma_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$.

Definicija 1.1.12. *Neka je* $(x_n)_n$ *niz u Banachovom prostoru* X. *Kažemo da red* $\Sigma_{k=1}^{\infty} x_k$ *konvergira bezuvjetno u* X *ako red* $\Sigma_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ *konvergira(obično) u* X *za svaku permutaciju* σ *skupa* $\mathbb{N}$.

Definicija 1.1.13. *Neka su* X *i* Y *normirani prostori. Kažemo da je linearan operator* $A : X \longrightarrow Y$ *ograničen ako postoji* $M > 0$*, takav da vrijedi* $\|Ax\| \leq M\,\|x\|\,, \forall x \in X$. *Skup svih ograničenih operatora označavamo s* $\mathbb{B}(X,Y)$. *Za* $X = Y$ *pišemo* $\mathbb{B}(X)$.

Za $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ definiramo operatorsku normu:

$$\|A\| = \sup\{ \ \|Ax\| \ : \ x \in X, \|x\| \leq 1 \ \}.$$

Reći ćemo da je operator $A : X \longrightarrow Y$ izometrija, ako vrijedi $\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in X$. Bijektivan linearan operator između dva unitarna prostora koji ima svojstvo čuvanja skalarnih produkata: $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X$ zovemo unitaran operator. Svaki izometričan linearan operator između dva unitarna prostora ima to svojstvo.

Definicija 1.1.14. *Neka je X unitaran prostor i $S \subseteq X, S \neq \emptyset$. Ortogonal skupa S se definira kao $S^\perp = \{x \in X \ : \ \langle x, s \rangle = 0, \forall s \in S\}$.*

Teorem 1.1.15 (Rieszov teorem o projekciji)**.** *Neka je H Hilbertov prostor i $M \leq H$ zatvoren potprostor. Svaki vektor $x \in H$ dopušta jedinstven prikaz u obliku $x = a + b$, pri čemu je $a \in M$ i $b \in M^\perp$. Ako je $M \neq \{0\}$, preslikavanje $P : H \to H$ definirano s $Px = a$ je ograničen linearan operator za kojeg vrijedi $P^2 = P$ i $\|P\| = 1$(dok za $M = \{0\}$ očito imamo $P = 0$).*

Definicija 1.1.16. *Zadržimo oznake iz prethodnog teorema. Vektor $Px = a$ se naziva ortogonalna projekcija vektora x na potprostor M. Operator P se zove ortogonalni projektor na M.*

U svjetlu prethodnog teorema, često pišemo $X = S \oplus S^\perp$.

Lema 1.1.17. *Neka su X i Y unitarni prostori i $A : X \to Y$ linearan operator. Tada je A ograničen ako i samo ako je $M := \sup\{|\langle Ax, y \rangle| \ : \ x \in X, y \in Y, \|x\|, \|y\| \leq 1\} < \infty$. U tom je slučaju $\|A\| = M$.*

Teorem 1.1.18. *Neka su H, K Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada postoji jedinstven operator $A^* \in \mathbb{B}(K, H)$ sa svojstvom $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle, \forall x \in H, \forall y \in K$. Pritom za sve skalare α_1, α_2 i sve operatore $A, A_1, A_2 \in \mathbb{B}(H, K)$ vrijedi $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^* = \overline{\alpha} A_1^* + \overline{\alpha_2} A_2^*$, $(A^*)^* = A$, $\|A^*\| = \|A\|$ i $\|AA^*\| = \|A\|^2$. Osim toga, ako se operatori A i B mogu komponirati, vrijedi i $(AB)^* = B^* A^*$*

Definicija 1.1.19. *Kaže se da je operator A^* iz prethodnog teorema hermitski adjungiran operatoru A. Ako je X unitaran prostor i $A \in \mathbb{B}(X)$ takav da postoji $A^* \in \mathbb{B}(X)$, kažemo da je operator A:*

- *hermitski, ako je $A^* = A$;*
- *unitaran, ako je $A^* A = AA^* = I$;*
- *normalan,ako je $A^* A = AA^*$.*

Propozicija 1.1.20. *Operator $P \in \mathbb{B}(X)$ je ortogonalni projektor ako i samo ako je $P^2 = P = P^*$.*

Propozicija 1.1.21. *Neka su X,Y Hilbertovi prostori i $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada je*

$$Ker(A) = IM(A^*)^\perp, \quad Ker(A^*) = Im(A)^\perp, \quad Ker(A^*)^\perp = \overline{Im(A)}, \quad Ker(A)^\perp = \overline{Im(A^*)}.$$

Korolar 1.1.22. $X = Ker(A) \oplus \overline{Im(A^*)}, \quad Y = Ker(A^*) \oplus \overline{Im(A)}.$

Teorem 1.1.23 (Hahn-Banachov teorem za normirane prostore)**.** *Neka je X normiran prostor i $Y \leq X$ pravi potprostor od X. Za svaki ograničen linearan funkcional $f_0 \in Y'$ postoji ograničen linearan funkcional $f \in X'$ takav da je $f|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Teorem 1.1.24 (Teorem o inverznom preslikavanju)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ bijekcija. Tada je i A^{-1} ograničen operator.*

Teorem 1.1.25 (Teorem o zatvorenom grafu)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori i $A : X \to Y$ linearan operator sa zatvorenim grafom. Tada je A ograničen.*

Propozicija 1.1.26. *Neka je X Banachov, a Y normiran prostor i $(A_n)_n$ niz u $\mathbb{B}(X, Y)$ takav da za svaki $x \in X$ postoji $\lim_{n\to\infty} A_n x$. Tada je sa $Ax := \lim_{n\to\infty} A_n x$ definiran ograničen linearan operatr $A \in \mathbb{B}(X, Y)$ takav da je $\|A\| \leq \lim inf_{n\to\infty} \|A_n\|$.*

Definicija 1.1.27. *Niz $(b_n)_n$ u normiranom prostoru X se naziva topološka baza za X ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni niz skalara $(\lambda_n)_n$ takav da vrijedi $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda_n b_n$ (pri čemu se ovdje podrazumijeva obična konvergencija navedenog reda u normi prostora X).*

Korolar 1.1.28. *Svaki normiran prostor X s topološkom bazom $(b_n)_n$ je separabilan.*

Za topološku bazu $(b_n)_n$ normiranog prostora X, s obzirom da za svaki vektor $x \in X$ postoji jedinstveni niz skalara $(\lambda_n(x))_n$ sa svojstvom $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) b_n$, možemo za svaki $n \in \mathbb{N}$ promatrati funkcionale $x \mapsto \lambda_n(x)$. Svi ovi funkcionali su linearni. Kaže se da je baza $(b_n)_n$ *Schauderova* ako su svi funckionali $x \mapsto \lambda_n(x), n \in \mathbb{N}$ ograničeni. U Banachovim prostorima su sve topološke baze Schauderove.

Propozicija 1.1.29 (Besselova nejednakost)**.** *Neka je $(e_n)_n$ ortonormiran niz u unitarnom prostoru X. Tada za sve vektore x iz X vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

Definicija 1.1.30. *Ortonormiran niz $(e_n)_n$ u unitarnom prostoru X je ortonormirana baza (ONB) za X ako za svaki vektor $x \in X$ dopušta prikaz oblika $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ (obična konvergencija u normi prostora X)*

Napomena 1.1.31. *Zbog ortonormiranosti niza* $(e_n)_n$ *i neprekidnosti skalarnog produkta iz* $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *odmah slijedi* $\langle x, e_n \rangle = \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}$*, pa je prikaz vektora* x *u ONB* $(e_n)_n$ *jedinstven. To pokazuje da je definicija ONB kompatibilna sa definicijom topološke baze u normiranom prostoru. U tom širem kontekstu sad možemo reći da je svaka ONB unitarnog prostora ujedno i topološka baza - razlika je jedino u tome što jedinstvenost prikaza vektora u ONB nije potrebno eksplicitno zahtijevati.*

Napomena 1.1.32. *Izraz* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *zove se Fourierov red vektora* x*, a skalari* $\langle x, e_n \rangle$ *Fourierovi koeficijenti vektora* x *s obzirom na ONB* $(e_n)_n$*.*

Teorem 1.1.33. *Neka je* X *unitaran prostor i* $(e_n)_n$ *ortonormiran niz u* X*. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

1. $(e_n)_n$ *je ONB za* X*;*
2. $(e_n)_n$ *je fundamentalan niz u* X*;*
3. $\|x\|^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \ \forall x \in X$ *(Parsevalova jednakost);*
4. $\langle x, y \rangle = \Sigma_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle, \ \forall x, y \in X$*.*

Teorem 1.1.34. *Neka je* H *Hilbertov prostor i* $(e_n)_n$ *ortonormiran niz u* H*. Sljedeći uvjeti su međusobno ekvivalentni:*

1. $(e_n)_n$ *je ONB prostora* H*;*
2. $(e_n)_n$ *je fundamentalan niz;*
3. $(e_n)_n$ *je maksimalan niz u* H*, tj. ima svojstvo* $x \perp e_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0$*.*

Svaki separabilan unitaran prostor ima ONB. Ako je $(e_n)_n$ ONB separabilnog Hilbertovog prostora H, onda za svaki $x \in H$ vrijedi $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ pri čemu red bezuvjetno konvergira.

1.2 Mjera i integral

U ovoj točki dajemo kratki pregled teorije mjere i integrala. Kako se radi o standardnim rezultatima, dokaze izostavljamo, ali moguće ih je pronaći u [7].

Definicija 1.2.1. *Neka je* $\emptyset \in \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *i* $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ *takva da je* $\mu(\emptyset) = 0$. *Funkcija* μ *je* $\sigma-$*aditivna na* $\mathcal{E}$ *ako za svaki niz međusobno disjunktnih skupova* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* $\mathcal{E}$ *takvih da je* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$ *vrijedi da je*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definicija 1.2.2. *Nepraznu familiju* $\mathcal{F}$ *podskupova skupa* X *zovemo* $\sigma-$*prsten (poskupova od* X*) ako ona ima sljedeća svojstva:*

1. $A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \setminus B \in \mathcal{F}$,

2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Ako $\mathcal{F}$ *sadrži cijeli* X *onda se* $\mathcal{F}$ *zove* $\sigma-$*algebra(podskupova od* X*).*
Funkcija μ *koja je* $\sigma-$*aditivna na* $\sigma-$*prstenu* $\mathcal{F}$ *zove se mjera (na* $\sigma-$*prstenu)* $\mathcal{F}$.

Uređeni par $(X, \mathcal{F})$ gdje je X skup a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\sigma-$algebra zovemo izmjeriv prostor. Mjera je konačna ako je $\mu(X) < \infty$. Prostor mjere je uređena trojka $(X, \mathcal{F}, \mu)$.
Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa X. Tada je

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\, \mathcal{A} \,:\, \mathcal{A} \text{ je } \sigma-\text{algebra}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \,\}$$

najmanja $\sigma-$algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je $\sigma-$algebra generirana s $\mathcal{F}$.
$\sigma-$algebru generiranu familijom otvorenih skupova na $\mathbb{R}$ zovemo *Borelova* $\sigma-$algebra i označavamo sa $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Propozicija 1.2.3. *Neka je* $\mathcal{F}$ *bilo koja familija podskupova od* X. *Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}^c),$$

gdje je $\mathcal{F}^c = \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$. *Elemente Borelove* $\sigma-$*algebre nazivamo Borelovim skupovima.*

Napomena 1.2.4. *Iz definicije slijedi da je svaki otvoreni interval* $\langle a, b\rangle, a, b \in \mathbb{R}$, *Borelov skup. Zbog svojstava* $\sigma-$*algebre u Borelove skupove ubrajamo: zatvorene intervale, poluotvorene (odnosno poluzatvorene) intervale, neograničene intervale, jednočlane skupove i prebrojive podskupove skupa* $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2.5. *Neka je* X *skup, a* $\mathcal{P}(X)$ *njegov partitivni skup. Vanjska mjera na skupu* X *je svaka funkcija* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$,

2. $A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

3. *Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz X vrijedi*

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Definicija 1.2.6. *Neka je μ^* vanjska mjera na $X \neq \emptyset$. Kažemo da je $B \subseteq X$ μ^*-izmjeriv ako vrijedi*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c),\ \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Teorem 1.2.7 (Caratheodory)**.** *Neka je $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ vanjska mjera na skupu X. Sa $\mathcal{M}_{\mu^*}$ označimo familiju svih μ^*-izmjerivih podskpova od X. Tada je $\mathcal{M}_{\mu^*}$ $\sigma-$algebra i $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ je mjera.*

Neka je C familija svih otvorenih intervala iz $\mathbb{R}$ oblika $(a,b), a \leq b$. Neka je A podskup od $\mathbb{R}$. Sa C_A označimo familiju svih nizova $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}, C_i \in C$ koji pokrivaju skup A,tj.

$$C_A\ :=\ \left\{ ((a_i,b_i), i \in \mathbb{N})\ :\ a_i \leq b_i\ i\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i) \right\}.$$

Definirajmo funkciju $\lambda^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ formulom

$$\lambda^*(A)\ =\ \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)\ :\ ((a_i,b_i), i \in \mathbb{N}) \in C_A \right\},$$

gdje se infimum uzima po svim nizovima iz C_A. Funkciju λ^* zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.2.8. *Lebesgueova vanjska mjera λ^* je vanjska mjera.*

Vrijedi:$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*([a,b\rangle) = \lambda^*(\langle a,b]) = \lambda^*(\langle a,b\rangle) = b - a$, gdje je $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Svaki Borelov skup na $\mathbb{R}$ izmjeriv je u smislu Lebesguea tj. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_{\lambda^*}$.

Definicija 1.2.9. *Neka su $(X,\mathcal{X})$ i $(Y,\mathcal{Y})$ izmjerivi prostori. Funkcija f je $(\mathcal{X},\mathcal{Y})-$izmjeriva ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{X}$*

Definiramo $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, tada je

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\ =\ \sigma(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \cup \{\{-\infty\},\{+\infty\}\}),$$

Borelova $\sigma-$algebra na proširenom $\mathbb{R}$. Funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je jednostavna ako je $Im(f)$ konačan skup. Uočimo da je f izmjeriva i jednostavna ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$i $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{X}$ međusobno disjunktni, takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{F_i}. \tag{1.1}$$

Neka je $\mathcal{S} = \mathcal{S}(X, \mathcal{F}, \mu)$ skup svih jednostavnih, izmjerivih funkcija. Definiramo:

$$\mathcal{S}_+ := \{ f \in \mathcal{S} : f \geq 0 \}.$$

Ako je $f \in \mathcal{S}_+$, onda u prikazu 1.1 vrijedi $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in [0, \infty\rangle$.

Definicija 1.2.10. *Za $f \in \mathcal{S}_+$ definiramo integral od f(u odnosu na mjeru μ, nad X):*

$$\int_X f d\mu := \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu(F_k).$$

Uočimo da je $\int_X f d\mu \in [0, \infty]$ jer je gornja suma uvijek definirana.

Propozicija 1.2.11. *Ako su $f, g \in \mathcal{S}_+$ i $\alpha \in [0, \infty\rangle$, tada vrijedi:*

1. $\alpha f \in \mathcal{S}_+$ *i* $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$,
2. $f + g \in \mathcal{S}_+$ *i* $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$,
3. *ako je* $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$ *tada je*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Lema 1.2.12. *Ako su $f \in \mathcal{S}_+$ i $(f_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{S}_+$ takvi da je za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ i za svaki $x \in X$ je $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Tada vrijedi*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Definicija 1.2.13. *Neka je $f : X \to [0, \infty]$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$−izmjeriva. Definiramo integral od f(u odnosu na mjeru μ, nad X):*

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X g d\mu : g \in \mathcal{S}_+, g \leq f \right\}.$$

Lema 1.2.14. *Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_+$ neopadajući niz jednostavnih izmjerivih funkcija i*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \ \forall x \in X,$$

tada je f $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$−izmjeriva i $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Teorem 1.2.15. *Ako su $f, g : X \to [0, \infty]$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$−izmjerive i $\alpha \in [0, \infty\rangle$, tada:*

1. $\alpha f : X \to [0,\infty]$ *je* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$*izmjeriva i*

$$\int_X \alpha f d\mu \ = \ \alpha \int_X f d\mu.$$

2. $(f+g) : X \to [0,\infty]$ *je* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$*izmjeriva i*

$$\int_X (f+g) d\mu \ = \ \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

3. *Ako je* $f(x) \leq g(x), \forall x \in X$, *onda je*

$$\int_X f d\mu \ \leq \ \int_X g d\mu.$$

Napomena 1.2.16. *Ako je* $P(x)$ *neko svojstvo koje ovisi o* $x \in X$, *onda kažemo da je* $P(X)$ *ispunjeno gotovo svuda(g.s.)(ili skoro svuda (s.s.)) ako postoji izmjeriv skup* N *takav da je* $\mu(N) = 0$ *i* $P(x)$ *vrijedi za svaki* $x \in N^c$.

Za funkciju $f : X \to [-\infty, +\infty]$ definiraju se funkcije $f^+, f^- : X \to [0, +\infty]$ formulama:

$$f^+(x) = max\{f(x), 0\}, \ f^-(x) = -min\{f(x), 0\}, \quad x \in X.$$

Definicija 1.2.17. *Neka je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor mjere i neka je* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$*izmjeriva funkcija. Tada su i funkcije* f^+, f^- $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))-$*izmjeive, pa postoje* $\int_X f^+ d\mu, \int_X f^- d\mu \in [0,\infty]$. *Ako je barem jedan od gornjih integrala konačan, reći ćemo da integral funkcije* f *postoji i u tom slučaju definiramo integral funkcije* f *kao*

$$\int_X f d\mu \ := \ \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ako je $X = \mathbb{R}$ i $\mu = \lambda$ govorimo o Lebesgueovom integralu i obično pišemo $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx$. Ako je $A \in \mathcal{F}$, kažemo da funkcija f ima integral nad A, ako postoji integral funkcije $\chi_A \cdot f$ i tada definiramo

$$\int_A f d\mu \ := \ \int_X \chi_A \cdot f d\mu.$$

Ako je f definirana samo na A proširimo ju tako da je $f|_{A^c} = 0$.

Teorem 1.2.18. *Ako su* $f, g : X \to \mathbb{R}$ $\mu-$*integrabilne i* $\alpha \in \mathbb{R}$, *tada su* $\mu-$*integrabilne i funkcije* αf *i* $f+g$ *i vrijedi*

$$\int_X \alpha f(x) \mu(dx) \ = \ \alpha \int_X f(x) \mu(dx),$$

$$\int_X (f+g) d\mu \ = \ \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Teorem 1.2.19 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji)**.** *Ako je $g : X \to [0, \infty]$ $\mu-$integrabilna funkcija te za gotovo svaki $x \in X$ vrijedi*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad i \quad |f_n(x)| \leq g(x),\ \forall n \in \mathbb{N},$$

tada su i f i f_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mu-$integrabilne funkcije i

$$\int_X f d\mu \ = \ \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$. Promatramo prostor s Lebesgueovom mjerom λ:

$$([a, b], \mathcal{B}([a, b]), \lambda),$$

gdje je $\mathcal{B}([a, b]) := \mathcal{B}(\mathbb{R}) \cap [a, b]$. Nadalje, funkcije koje su Riemann integrabilne na segmentu $[a, b]$ nazivati ćemo (R)-integrabilnima, funkcije koje su $\lambda-$integrabilne, odnosno Lebesgue integrabilne nazivati ćemo (L)-integrabilnima. Također ćemo uvesti oznake:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{(R)} \int_a^b f(x)dx,\ \text{Riemannov integral,}$$

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \text{(L)} \int_a^b f(x)dx,\ \text{Lebesgueov integral.}$$

Teorem 1.2.20. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.*

- *f je (R)-integrabilna na $[a, b]$ ako i samo ako je f neprekidna u gotovo svakoj točki $x \in [a, b]$.*
- *Ako je f (R)-integrabilna na $[a, b]$, tada je f i (L)-integrabilna i*

$$\textit{(R)} \int_a^b f(x)dx = \textit{(L)} \int_a^b f(x)dx.$$

1.3 L^p-prostori

U nastavku poglavlja izosimo i glavne rezultate iz teorije L^p-prostora koji će nam biti od koristi u narednim poglavljima. Svi detalji mogu se pronaći u [7]. U ovoj točki $\mathbb{F}$ će biti jedno od dva moguća polja koja promatramo, to su $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Neka je $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere i $1 \leq p < \infty$. Definiramo:

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu; \mathbb{F}) \ := \ \{\ f : X \to \mathbb{F} \text{ izmjeriva } : \ |f|^p \text{ je } \mu - \text{integrabilna} \ \}.$$

Vrijedi

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)+|g(x)|)^p \leq (2\max|f(x)|,|g(x)|)^p \leq 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p),$$

dakle,

$$\mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu;\mathbb{F}) \text{ je vektorski prostor nad } \mathbb{F}. \tag{1.2}$$

Na $\mathcal{L}^p$ definiramo $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to [0,\infty\rangle$,

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uočimo da je za $\alpha \in \mathbb{F}, \|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$, to slijedi direktno iz linearnosti integrala. Nadalje, također primijetimo da je $\|f\|_p = 0$ ako i samo ako je $f = 0$ μ-(g.s.). Nedostaje nam još nejednakost trokuta da bi $\|\cdot\|_p$ bila "skoro" norma.
Za $1 < p < \infty$ postoji točno jedan q,$1 < q < \infty$ takav da je

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Uz dogovor da je $\frac{1}{+\infty} = 0$, isto vrijedi i za parove $(p,q) = (1,+\infty),(+\infty,1)$. Kažemo da su p i q *konjugirani eksponenti*.

Lema 1.3.1 (Youngova nejednakost)**.** *Ako su* $1 < p,q < \infty$ *konjugirani eksponenti i* $x,y,\in [0,\infty\rangle$*, tada vrijedi*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Teorem 1.3.2 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka je* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *prostor mjere i* $1 \leq p,q \leq \infty$ *konjugirani eksponenti. Ako je* $f \in \mathcal{L}^p$ *i* $g \in \mathcal{L}^q$*, tada je* $fg \in \mathcal{L}^1$ *i vrijedi:*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Teorem 1.3.3 (Nejednakost Minkowskog)**.** *Neka je* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *prostor mjere i* $1 \leq p \leq \infty$*. Ako su* $f,g \in \mathcal{L}^p$*, tada je* $f+g \in \mathcal{L}^p$ *i*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dakle, $\mathcal{L}^p(X,\mathcal{F},\mu)$ je "skoro" normiran prostor. Nije ispunjena tvrdnja ($\|f\|_p = 0 \Rightarrow f \equiv 0$).
Ako imamo vektorski prostor V i funkciju $|\cdot|$ sa svojstvima norme (u smislu $f \equiv 0 \Rightarrow |f| = 0$,ali obrat ne vrijedi nužno), onda promatramo klasu ekvivalencije

$$f \sim g \iff |f-g| = 0.$$

Neka je $V^{\sim} := {}^{V}\!/\!_{\sim}$ kvocijentni prostor, odnosno, prostor svih klasa ekvivalencije $[f] = \{g \in V \ : \ f \sim g\}$. Na $V^{\sim}$ definiramo $|\cdot|^{\sim}$:

$$|[f]|^{\sim} := |f|.$$

Neka su $f, g \in V$ takve da je $[f] = [g]$, tada je

$$|g| = |(g - f) + f| \leq |g - f| + |f| = |f|.$$

Dakle, $|g| \leq |f|$, analogno dobijemo i suprotnu nejednakost, stoga je $|g| = |f|$, pa je definicija dobra. Sada se lako vidi da je $(V^{\sim}, |\cdot|^{\sim})$ normiran prostor.
Sada definiramo normiran prostor $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) := (\mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu))^{\sim}$ i obično umjesto $\|[f]\|_p$ kraće pišemo $\|f\|_p$.

$$[f] := \{ \, g : X \to \mathbb{F} \ : \ g \text{ je izmjeriva i } g = f \text{ (g.s.)} \, \}.$$

Slična definicija vrijedi i za $p = +\infty$: Za izmjerivu funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ definiramo esencijalni supremum:

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{ \, a \geq 0 \ : \ \mu(\{ \, x \in X \ : \ |f(x)| > a \, \}) = 0 \, \},$$

uz dogovor $\inf \emptyset = \infty$ Sada se definira prostor

$$L^{\infty}(X, \mathcal{F}, \mu) = \{ \, f : X \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ izmjeriva, } \|f\|_{\infty} < \infty \, \}.$$

Ukoliko je $X \subset \mathbb{R}$ i ako radimo s Lebesgueovom mjerom $\mu = \lambda$, za neprekidne funkcije se esencijalni supremum podudara s običnim supremumom i skup svih neprekidnih funkcija sa sup-normom čini zatvoren potprostor $L^{\infty}(X)$.

Definicija 1.3.4. *Niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira prema f:*

1. *U srednjem reda $p (1 \leq p \leq \infty)$ ako su $f_n \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{F}, \mu), \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{L}^p$ i*

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0;$$

2. *skoro(ili gotovo) svuda(pišemo (g.s.)) ako postoji $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mu(A) = 0$ i*

$$\lim_{n \to \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0, \ \forall x \in A^c;$$

3. *po mjeri(pišemo $f_n \xrightarrow{\mu} f$) ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{ \, x \in X \ : \ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon \, \}) = 0.$$

Teorem 1.3.5. *Neka je* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor mjere i* $1 \leq p < +\infty$. *Ako su* $f_n \in \mathcal{L}^p, \forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{L}^p$ *i* $\|f_n - f\|_p \to 0$, *onda vrijedi* $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Teorem 1.3.6. *Vrijedi na općem prostoru mjere. Ako* $f_n \xrightarrow{\mu} f$, *tada postoji podniz* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *takav da* $f_{n_k} \xrightarrow{g.s.} f$

Teorem 1.3.7. *Vrijedi na općem prostoru mjere. Prostor* $(L^p(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_p), 1 \leq p \leq \infty$ *je potpun.*

Teorem 1.3.8. *Skup* $C([a, b])$ *je gust u* $L^2([a, b])$.

Primjer 1.3.9 (Trigonometrijski sistem)**.** *Neka je* $X = L^2(\boldsymbol{T})$ *prostor kompleksnih funkcija koje su 1-periodičke na* $\mathbb{R}$ *i kvadratno integrabilne na* $[0, 1]$. *Norma i skalarni produkt su definirani na sljedeći način:*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt \quad i \quad \|f\|^2_{L^2} = \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Za svako $n \in \mathbb{Z}$ *definirana je funkcija* e_n*:*

$$e_n(t) = e^{2\pi int}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *zovemo trigonometrijski sistem. Ako je* $m \neq n$,

$$\begin{aligned}\langle e_m, e_n\rangle &= \int_0^1 e_m(t)\overline{e_n(t)}dt \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i(m-n)t}dt = \frac{e^{-2\pi i(m-n)} - 1}{-2\pi i(m-n)} = 0.\end{aligned}$$

Dakle, niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *je ortogonalan U* $L^2(\boldsymbol{T})$, *a kako je* $\|e_n\|_{L^2} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$, *niz je i ortonormiran. Pokažimo da je niz* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *ONB prostora* $L^2(\boldsymbol{T})$. *Po teoremu 1.1.33, dovoljno je pokazati da je taj niz i fundamentalan, tj. da je prostor* $span\{e^{2\pi int} : n \in \mathbb{Z}\}$ *gust u* $L^2(\boldsymbol{T})$. *Uzmimo proizvoljnu funkciju* $f \in L^2(\boldsymbol{T})$ *i* $\varepsilon > 0$. *Moramo pronaći element* $h \in span\{e^{2\pi int} : n \in \mathbb{Z}\}$ *takav da vrijedi* $\|f - h\| < \varepsilon$. *To se pokazuje u tri koraka.*
Najprije, po teoremu 1.3.8 potprostor $C(\boldsymbol{T})$ *je gust u* $L^2(\boldsymbol{T})$, *pa postoji neprekidna funkcija* $g \in C(\boldsymbol{T})$ *za koju vrijedi* $\|f - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$. *Sada za funkciju* g *možemo naći također neprekidnu funkciju* $g_p \in C(\boldsymbol{T})$ *takvu da je* $g_p(0) = g(1)$ *i* $\|g - g_p\| < \frac{\varepsilon}{3}$. *Konačno, preostaje primijeniti Stone-Weierstrassov teorem na algebru kompleksnih neprekidnih periodičnih funkcija s periodom 1 i skup svih trigonometrijskih polinoma(korolar 14.2 u [6]): za našu funkciju* g_p *postoji trigonometrijski polinom* h *takav da vrijedi* $\|g_p - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. *Posebno, zato je* $\|g_p - h\|_2 \leq \|g_p - h\| < \frac{\varepsilon}{3}$. *Za tako odabrani trigonometrijski polinom* h *vrijedi* $\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - g_p\|_2 + \|g_p - h\|_2 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Ako je $f \in L^2(\boldsymbol{T})$*, onda izraz* $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle f, e_n\rangle e_n$ *zovemo Fourierov red funkcije* f*, a niz* $(\langle f, e_n\rangle)_{n\in\mathbb{Z}}$ *zovemo niz Fourierovih koeficijenata. Fourierovi koeficijenti često se označavaju sa*

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int}dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Elementi prostora $L^2(\boldsymbol{T})$ *su 1-periodičke funkcije na realnom pravcu. Ponekad se umjesto tog prostora promatra prostor* $L^2[0,1]$*, čiji su elementi kompleksne kvadratno integrabilne funkcije čija domena je podskup intervala* $[0,1]$*. Sve gornje tvrdnje analogno vrijede i na* $L^2[0,1]$*, npr.* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *je ONB za* $L^2[0,1]$*. Ustvari, zbog periodičnosti funkcija* e_n*, niz* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *je ONB za* $L^2(\boldsymbol{I})$*, gdje je I bilo koji interval duljine 1 u* $\mathbb{R}$*. Još jedna, ekvivalentna formulacija prostora* $L^2(\boldsymbol{T})$ *je da promatramo* $\boldsymbol{T}$ *kao interval* $[0,1\rangle$ *uz aditivnu operaciju uz koju je taj skup grupa. Prikladna operacija je zbrajanje modulo 1. Uz takvu formulaciju zapravo* $\boldsymbol{T}$ *identificiramo sa kvocijentnom grupom* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$*.* $\boldsymbol{T}$ *je i topološki i grupovno izomorfno sa grupom kružnice* $\{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$ *uz množenje kompleksnih skalara,* $e^{i\theta}e^{i\eta} = e^{i(\theta+\eta)}$*. Kružnica je jednodimenzionalni torus.*

Poglavlje 2

Bazni okviri

U ovom poglavlju iznosimo kratki pregled teorije baznih okvira. Započinjemo sa posebnom klasom nizova koji će nam biti od koristi u proučavanju samih baznih okvira, to su Besselovi nizovi. Svi detalji i dokazi koji nisu navedeni mogu se pronaći u [2].

2.1 Besselovi nizovi

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H Besselov ako vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty, \forall x \in H. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.2. *Ako je $(x_n)_n$ Besselov niz u Hilbertovom prostoru, onda je preslikavanje $U : H \to \ell^2$ definirano sa $Ux = (\langle x, x_n\rangle)_n$ ograničen linearan operator. Posebno, postoji konstanta $B > 0$ takva da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B \|x\|^2, \quad \forall x \in H. \tag{2.2}$$

Dokaz. Iz nejednakosti 2.1 se vidi da je U dobro definirano preslikavanje. Očito, U je linearno. Da bismo pokazali da je U ograničen, pokažimo da ima zatvoren graf. Pretpostavimo da vrijedi $y_N \to y \in H$ i $Uy_n \to (c_n)_n \in \ell^2$. Tada, za svaki fiksni m imamo

$$|c_m - \langle y_N, x_m\rangle|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n - \langle y_N, x_n\rangle|^2 = \|(c_n)_n - Uy_N\|^2 \to 0, \text{ kada } N \to \infty.$$

Dakle, $c_m = \lim_{N\to\infty} \langle y_N, x_m\rangle = \langle y, x_m\rangle$, za svako m. Sada imamo $(c_n)_n = (\langle y, x_n\rangle)_n$ pa U ima zatvoreni graf. □

Definicija 2.1.3. *Operator U definiran u prethodnoj lemi zove se operator analize pridružen nizu $(x_n)_n$. Hermitski adjungirani operator $U^* \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ zove se operator sinteze niza $(x_n)_n$.*

Konstantu B iz nejednakosti 2.2 zovemo Besselova ograda. Ona nije jedinstvena, a lako se vidi da je optimalna ograda upravo $B = \|U\|^2$.

Propozicija 2.1.4. *Neka je niz $(x_n)_n$ Besselov niz u H, te neka je U pridruženi operator analize. Tada za svaki niz $(c_n)_n$ iz ℓ^2 red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ bezuvjetno konvergira i operator sinteze U^* djeluje po formuli $U^*(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. Posebno, ako je $(e_n)_n$ standardna ONB za ℓ^2, onda vrijedi $U^*(e_n)_n = x_n$ i, posljedično, $\|x_n\| \leq \|U\|, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 2.1.5. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ konvergira za svaki niz $(c_n)_n$ u ℓ^2. Tada je $(x_n)_n$ Besselov niz.*

Dokaz. Definirajmo preslikavanje $T : \ell^2 \to H$ sa $T(c_n)_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$. T je linearno i dobro definirano preslikavanje. Promotrimo također, za svako N, operatore $T_N \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ definirane sa $T_N(c_n)_n = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Tada vrijedi $\lim_{N\to\infty} T_N(c_n)_n = T(c_n)_n, \forall (c_n)_n \in \ell^2$. Po propoziciji 1.1.26 slijedi da je T ograničen operator. Označimo $\|T\| = \sqrt{B}$. Sada vidimo da postoji i operator T^*, te vrijedi i $\|T^*\| = \sqrt{B}$. Također, imamo i

$$\langle T^* x, e_n \rangle = \langle x, T e_n \rangle = \langle x, x_n \rangle, \ \forall x \in H, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga vidimo da je $T^* x = (\langle x, x_n \rangle)_n$, za svako $x \in H$, pa činjenica da je $T^* x = (\langle x, x_n \rangle)_n \in \ell^2$ zapravo znači da je $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty, \forall x \in H$. □

Napomena 2.1.6. *Prethodna propozicija nam daje sljedeće: niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoji ograničeni linearni operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$, takav da je $T e_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, gdje je $(e_n)_n$ standardna ONB za ℓ^2. U tom slučaju, T se podudara sa operatorom sinteze U^* pridruženom nizu $(x_n)_n$. Nadalje, kako su sve ONB za separabian Hilbertov prostor ekvivalentne(preko unitarnih operatora), zaključujemo: niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je Besselov ako i samo ako postoje Hilbertov prostor K, ONB $(f_n)_n$ prostora K i ograničeni operator $T \in \mathbb{B}(K, H)$ takav da je $T f_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

2.2 Osnovna svojstva baznih okvira

Bazni okviri su reprodukcijski sustavi koji su općenitiji od baza. Oni, kao i baze, omogućavaju prikaz svakog vektora iz prostora, ali kod baznih okvira ne zahtijevamo linearnu nezavisnost elemenata. Iz tog razloga, prikaz nije nužno jedinstven, što nam daje veću otpornost na gubitak informacija npr. pri slanju signala. U ovom potpoglavlju, sa H označavamo kompleksan separabilan Hilbertov prostor, osim ako izrijekom ne kažemo drugačije.

Definicija 2.2.1. *Niz $(x_n)_n$ u H se naziva bazni okvir (frame) prostora H ako postoje konstante $A, B > 0$ takve da vrijedi:*

$$A\,\|x\|^2 \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \;\leq\; B\,\|x\|^2\,,\ \forall x \in H. \tag{2.3}$$

Optimalne konstante A i B s ovim svojstvom nazivaju se granice baznog okvira.
Ako je $A = B$ kažemo da je bazni okvir napet, a ako je $A = B = 1$, tj. ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \;=\; \|x\|^2\,,\ \forall x \in H.$$

kaže se da je bazni okvir Parsevalov.
Konačno, kažemo da je bazni okvir egzaktan ako niz dobiven izostavljanjem bilo kojeg njegovog člana više nije bazni okvir za H.

Primijetimo da granice baznog okvira nisu jedinstveno određene. Zbog apsolutne konvergencije reda u 2.3 ta je konvergencija i bezuvjetna. Zato je svaka permutacija baznog okvira opet bazni okvir, pa za indeksni skup možemo uzeti proizvoljan prebrojiv skup. Također, bazni okvir je niz, a ne skup pa se njegovi elementi mogu ponavljati.

Primjer 2.2.2. *Neka je $(e_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H. Tada:*

- $e_1, e_2, e_3, \cdots$ *je Parsevalov egzaktni bazni okvir za H;*
- $e_1, 0, e_2, 0, e_3, \cdots$ *je Parsevalov neegzaktni bazni okvir za H.*

Propozicija 2.2.3. *Svaki bazni okvir $(x_n)_n$ u H je fundamentalan niz u H.*

Dokaz. Po teoremu 1.1.34, dovoljno je pokazati da je niz $(x_n)_n$ maksimalan. Uzmimo stoga da je $x \in H, x \perp x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Iz prve nejednakosti u 2.3 odmah slijedi da je $A\,\|x\|^2 \leq 0$; pa je $x = 0$. □

Obrat ne vrijedi. Na primjer, niz $e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, \cdots$ je fundamentalan, ali nije bazni okvir za H. Jednostavna posljedica ove propozicije je činjenica da u beskonačnodimenzionalnom Hilbertovom prostoru ne može postojati konačan bazni okvir.
Primijetimo da je svaki bazni okvir za H Besselov niz. Operatori analize i sinteze imaju još bolja svojstva na baznim okvirima nego u slučaju kada smo ih promatrali na Besselovim nizovima. U nastavku ćemo trebati neke općenite rezultate o ograničenim operatorima na Hilbertovim prostorima.

Propozicija 2.2.4. *Neka su H i K Hilbertovi prostori i $T \in \mathbb{B}(H, K)$. Tada vrijedi:*

1. *T ima zatvorenu sliku ako i samo ako T^* ima zatvorenu sliku.*
2. *T je surjekcija ako i samo ako je T^* ograničen odozdo.*

Teorem 2.2.5. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Tada je pridruženi operator analize $U \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ odozdo ograničen, a adjungirani operator U^* je surjekcija. Obratno, ako je $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$ surjekcija i $(e_n)_n$ standardna ONB za ℓ^2, onda je niz $(x_n)_n$, $x_n = Te_n, n \in \mathbb{N}$, bazni okvir za H čiji operator analize se podudara s T^*.*

Dokaz. Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir. Znamo da je operator analize U ograničen i ograničen odozgo. Prethodna propozicija nam daje surjektivnost operatora U^*. Uzmimo sada surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(\ell^2, H)$. Operator T^* je ograničen, a po prethodnoj lemi je i odozdo ograničen. Zato postoje konstante $A, B > 0$ za koje vrijedi

$$A\,\|x\|^2 \leq \|T^*x\|^2 \leq B\,\|x\|^2\,, \forall x \in H.$$

S druge strane, znamo da je

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T^*x, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Te_n \rangle e_n.$$

Zato je $\|T^*x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$. Dakle, $(x_n)_n$ je bazni okvir za H. Osim toga, rezultat prethodnog računa možemo zapisati i kao $T^*x = (\langle x, x_n \rangle)_n \in \ell^2$, a to pokazuje da je T^* operator analize za bazni okvir $(x_n)_n$.

□

Korolar 2.2.6. *Niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H je bazni okvir za H ako i samo ako postoje separabilan Hilbertov prostor L, surjektivan operator $T \in \mathbb{B}(L, H)$ i ONB $(f_n)_n$ prostora L takva da vrijedi $x_n = Tf_n, \forall n \in \mathbb{N}$.*

Napomena 2.2.7. *Operator analize pridružen Parsevalovom baznom okviru je izometrija. Iz toga slijedi da je pripadajući operator sinteze ko-izometrija(surjektivna parcijalna izometrija).*

Korolar 2.2.8. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, neka je $B \in \mathbb{B}(H, K)$ surjektivan operator s H na Hilbertov prostor K, te neka je $y_n = Bx_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Tada je $(y_n)_n$ bazni okvir za K.*

Definicija 2.2.9. *Reći ćemo da je niz $(x_n)_n$ u Hilbertovom prostoru H Rieszova baza za H ako postoje ONB $(e_n)_n$ prostora H i bijekcija $T \in \mathbb{B}(H)$ takva da je $x_n = Te_n$, za svaki n.*

Znamo da je niz u Hilbertovom prostoru H bazni okvir ako i samo ako je taj niz slika ONB po ograničenom surjektivnom operatoru. Zaključujemo da je svaka Rieszova baza bazni okvir. No, baza u Hilbertovom prostoru ne mora biti Rieszova baza.

Propozicija 2.2.10. *Ako je bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H baza za H, onda je i Rieszova baza.*

Propozicija 2.2.11. *Bazni okvir $(x_n)_n$ Hilbertovog prostora H je baza prostora H ako i samo ako je $(x_n)_n$ egzaktni bazni okvir.*

Na kraju ove točke navodimo neke rezultate o Parsevalovim baznim okvirima.

Propozicija 2.2.12. *Ako je Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora H baza za H, onda je taj niz i ONB prostora H.*

Dokaz. Neka je Parsevalov bazni okvir $(x_n)_n$ baza prostora H. Tada je pripadni operator analize U izometrija, a onda je i surjekcija. Dakle, U je unitaran. Jer je $x_n = U^* e_n, n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $(e_n)_n$ kanonska baza prostora ℓ^2, slijedi da je $(x_n)_n$ ONB prostora H. □

Propozicija 2.2.13. *Neka je $(x_n)_n$ niz u Hilbertovom prostoru H. Tada je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir prostora H ako i samo ako je*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Posebno, ako je $(f_n)_n$ ONB Hilbertovog prostora H i ako je M zatvoreni potprostor od H, tada je niz $(Pf_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za M, pri čemu je P ortogonalni projektor na potprostor M.

Propozicija 2.2.14. *Neka je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir Hilbertovog prostora H. Tada postoji Hilbertov prostor H_0 koji sadrži H kao zatvoreni potprostor i ONB $(f_n)_n$ prostora H_0 takva da vrijedi $x_n = Pf_n$, za svako n, gdje je $P \in \mathbb{B}(H_0)$ ortogonalni projektor na prostor H.*

2.3 Dualni bazni okviri

Ključno svojstvo baznih okvira je svojstvo rekonstrukcije. U teorijskom pogledu najvažniji način rekonstrukcije dobivamo pomoću kanonskog dualnog baznog okvira.
Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H i neka je $U \in \mathbb{B}(H, \ell^2)$ pridruženi operator analize. Neka je $F := U^*U \in \mathbb{B}(H)$, pri čemu je U^* pridruženi operator sinteze. F se naziva *operator baznog okvira*. U^* je surjekcija, pa je po propoziciji 2.2.4 i $Im(U)$ zatvoren potprostor od ℓ^2. Stoga možemo pisati $\ell^2 = Im(U) \oplus Ker(U^*)$, pa imamo $Im(U^*) = U^*(ImU \oplus Ker(U^*)) = U^*(ImU) = ImU^*U$. U^*U je surjekcija jer je i U^* surjekcija. Također, imamo $KerU = \{0\}$ i

$KerU^*U = KerU$, pa je U^*U i injekcija. Zaključujemo da je $F = U^*U$ regularan operator. Osim toga, iz

$$Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ux, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, U^* e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle e_n \tag{2.4}$$

slijedi

$$Fx = U^*Ux = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle U^* e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H.$$

Jer je F regularan operator, za svaki $y \in H$ postoji jedinstven $x \in H$ za koji je $y = Fx$. Sada prethodni račun daje $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F^{-1} y, x_n \rangle x_n$. Jer je F hermitski, hermitski je i F^{-1} pa odavde imamo $y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, F^{-1} x_n \rangle x_n$. Stavimo $y_n = F^{-1} x_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Po kororalru 2.2.8 i niz $(y_n)_n$ je bazni okvir za H. Taj se bazni okvir naziva *kanonski dualni bazni okvir* za $(x_n)_n$ i za njega vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{2.5}$$

Sada vidimo da za svaki vektor x jedan mogući izbor rekonstrukcijskih koeficijenata predstavlja niz $(\langle x, y_n \rangle)_n$ gdje je $(y_n)_n$ kanonski dualni bazni okvir polaznog baznog okvira. Ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir, onda je U izometrija pa je $F = U^*U = I$. Zato je ovdje $y_n = F^{-1} x_n = x_n, \forall n \in \mathbb{N}$, i rekonstrukcijska formula 2.5 ovdje poprima oblik

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \ \forall x \in H. \tag{2.6}$$

Zaključke ovih razmatranja rezimiramo u sljedećem teoremu.

Teorem 2.3.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H, te neka je $F = U^*U \in \mathbb{B}(H)$, gdje je U operator analize pridružen baznom okviru $(x_n)_n$. Tada je F regularan, niz $(y_n)_n$ definiran s $y_n = F^{-1} x_n, n \in \mathbb{N}$, je bazni okvir za H i za svaki $x \in H$ vrijedi*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n. \tag{2.7}$$

Ako je $(x_n)_n$ Parsevalov bazni okvir za H onda je

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Jednadžbe 2.7 i 2.8 često se nazivaju rekonstrukcijskim svojstvima baznih okvira.

Definicija 2.3.2. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir za H. Svaki niz $(z_n)_n$ u H sa svojstvom*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, z_n \rangle x_n, \ \ \forall x \in H$$

naziva se dual baznog okvira $(x_n)_n$.

Napomena 2.3.3. *Navedena formulacija sugerira da bazni okvir može imati više različitih duala. Zaista, pogledajmo ONB $(e_n)_n$ u H i napeti bazni okvir $(e_1, e_1, e_2, e_2, \cdots)$. Očito je da ovdje imamo $A = B = 2, F = U^*U = 2I$, pa je $F^{-1} = \frac{1}{2}I$ i kanonski dualni bazni okvir je $(\frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, \cdots)$. Međutim, i nizovi $(e_1, 0, e_2, \cdots)$ i $(0, e_1, 0, e_2, \cdots)$ su duali za naš bazni okvir $(x_n)_n$.*

I općenito je tako: kanonski dualni bazni okvir danog baznog okvira samo je jedan od njegovih duala.

Propozicija 2.3.4. *Neka su $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$ Besselovi nizovi u Hilbertovom prostoru H takvi da je*

$$x \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, v_n \rangle w_n, \forall x \in H.$$

Tada su i $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$ bazni okviri i međusobno su dualni. Posebno, ako je je Besselov niz dualni bazni okvir nekog baznog okvira, onda je taj niz bazni okvir.

Dokaz. Označimo sa V i W pripadne operatore analize. Tada se naša pretpostavka može zapisati kao $W^*V = I$. Iz toga slijedi da je W^* surjekcija, pa je $(w_n)_n$ bazni okvir po korolaru 2.2.6. Kako iz $W^*V = I$ slijedi $V^*W = I$, isti argument pokazuje da je $(v_n)_n$ bazni okvir. □

Primjer 2.3.5. *Pogledajmo Parsevalov bazni okvir $(e_1, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \frac{1}{\sqrt{3}}e_3, \cdots)$ za H, gdje je $(e_n)_n$ ONB za H. Niz $(e_1, \sqrt{2}e_2, 0, \sqrt{3}e_3, 0, 0, \cdots)$ je njegov dual, a kako taj niz nije ograničen, ne može biti bazni okvir.*

Sljedeća propozicija kazuje nam po čemu se kanonski dualni bazni okvir ističe među svim dualima danog baznog okvira.

Propozicija 2.3.6. *Neka je $(x_n)_n$ bazni okvir Hilbertovog prostora H, neka je U pridruženi operator analize, F operator baznog okvira, te neka je $(y_n)_n$ kanonski dualni bazni okvir od $(x_n)_n$ i $x \in H$.*

1. *Neka je $x \in H$. Ako za niz skalara $(c_n)_n$ vrijedi $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$, onda je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle - c_n|^2.$$

(Drugim riječima, niz $(\langle x, y_n \rangle)_n$ *ima najmanju* ℓ^2-*normu od svih rekonstrukcijskih nizova vektora x)*

2. *Ako je* $(z_n)_n$ *dual baznog okvira* $(x_n)_n$ *za koji postoji operator* $D \in \mathbb{B}(H)$*, ne nužno regularan, takav da je* $z_n = Dx_n, \forall n$*, onda je* $D = (U^*U)^{-1}$ *i* $z_n = y_n$*, za svako n.(Kanonski dualni bazni okvir je jedini dual danog baznog okvira koji nastaje djelovanjem ograničenog operatora na taj zadani bazni okvir)*

Dokaz. 1. Kako je $(y_n)_n$ bazni okvir za H, znamo da je $(\langle x, y_n \rangle)_n \in \ell^2$. Pretpostavimo da je i niz $(c_n)_n \in \ell^2$. Zbog jednostavnosti, označimo $\langle x, y_n \rangle = a_n, n \in \mathbb{N}$. Sada imamo:

$$\langle x, (U^*U)^{-1}x \rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, (U^*U)^{-1}x \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle (U^*U)^{-1}x_n, x \rangle = \langle (a_n)_n, (a_n)_n \rangle$$

i

$$\langle x, (U^*U)^{-1}x \rangle = \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, (U^*U)^{-1}x \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle (U^*U)^{-1}x_n, x \rangle = \langle (c_n)_n, (a_n)_n \rangle.$$

Usporedbom se vidi da je $(c_n)_n - (a_n)_n \perp (a_n)_n$ u prostoru ℓ^2 pa vrijedi $\|(c_n)_n\|^2 = \|(c_n - a_n)_n + (a_n)_n\|^2 = \|(c_n - a_n)_n\|^2 + \|(a_n)_n\|^2$.

2. Po pretpostavci imamo $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n \rangle x_n$ i $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, (U^*U)^{-1}x_n \rangle x_n$, za svaki x.Ako za proizvoljni x u H primijenimo drugu jednakost na $(U^*U)D^*x$, dobijemo

$$(U^*U)D^*x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle (U^*U)D^*x, (U^*U)^{-1}x_n \rangle x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, Dx_n \rangle x_n = x.$$

Dobili smo $(U^*U)D^* = I$ pa slijedi $D^* = (U^*U)^{-1}$. Kada oba operatora hermitski adjungiramo, slijedi $D = (U^*U)^{-1}$.

□

Vidjeli smo da bazni okviri općenito imaju više dualnih nizova koji ne moraju nužno biti bazni okviri. No, ako se ograničimo da Besselove duale, ta tvrdnja će vrijediti.

Propozicija 2.3.7. *Neka je* $(x_n)_n$ *bazni okvir za H. Ako je niz* $(y_n)_n$ *u H Besselov i dualan za* $(x_n)_n$*, tada je i* $(y_n)_n$ *bazni okvir za H i* $(x_n)_n$ *je njegov dual.*

Sljedeća propozicija kaže nam u kojoj situaciji imamo jedinstveni dualni bazni okvir.

Korolar 2.3.8. *Neka je* $(x_n)_n$ *bazni okvir Hilbertovog prostora H. Tada postoji jedinstveni dual baznog okvira* $(x_n)_n$ *ako i samo ako je* $(x_n)_n$ *Rieszova baza prostora H.*

Poglavlje 3

Fourierova transformacija na realnom pravcu

Fourierova transformacija jedan je od osnovnih matematičkih alata, a nama će u ovom radu biti posebno korisna. U ovom poglavlju dati ćemo definiciju Fourierove transformacije na prostoru $L^1(\mathbb{R})$ i vidjeti ćemo kako tu definiciju možemo proširiti na prostor $L^2(\mathbb{R})$, te dajemo pregled nekih važnih svojstava Fourierove transformacije. U sljedeća dva poglavalja pratimo razvoj teorije kao u knjizi [4].
Često ćemo proučavati kompleksne eksponencijalne funckije:

Napomena 3.0.1. *Za zadano $\lambda \in \mathbb{R}$ koristiti ćemo pokratu:*

$$e_\lambda(x) \;=\; e^{2\pi i\lambda x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.1 Osnovna svojstva Fourierove transformacije na $\mathbb{R}$

Preciznu definiciju Fourierove transformacije dati ćemo u sljedećim točkama, dok u ovoj točki iznosimo samo kratak pregled najvažnijih svojstava te transformacije. Fourierova transformacija se može definirati na mnogim prostorima funkcija ili distribucija, ali nama će od interesa biti Banachov prostor $L^1(\mathbb{R})$ i Hilbertov prostor $L^2(\mathbb{R})$. Koristiti ćemo oznaku $\mathcal{F}$ za sam operator Fourierove transformacije, a vrijednost operatora na funkciji f ćemo označavati s

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f). \tag{3.1}$$

Prva važna činjenica jest da je Fourierova transformacija unitaran operator na $L^2(\mathbb{R})$ i ograničen operator na $L^1(\mathbb{R})$.

Teorem 3.1.1 (Svojstva Fourierove transformacije)**.**

1. *Fourierova trasformacija $\mathcal{F}$ je linearno, ograničeno, injektivno preslikavanje prostora $L^1(\mathbb{R})$ u prostor $C_0(\mathbb{R})$.*

2. *Fourierova transformacija je unitarno preslikavanje prostora $L^2(\mathbb{R})$ u samog sebe.*

Sljedeća važna činjenica je odnos Fourierove transformacije i operatora translacije, modulacije i dilatacije.

Napomena 3.1.2 (translacija,modulacija,dilatacija)**.** *Definiramo sljedeće operacije na funkcijama $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$.*

- *Translacija:* $(T_a f)(x) = f(x-a), \quad a \in \mathbb{R}.$
- *Modulacija:* $(M_b f)(x) = e^{2\pi ibx} f(x), \quad b \in \mathbb{R}.$
- *Dilatacija:* $(D_r f)(x) = r^{\frac{1}{2}} f(rx), \quad r > 0.$

Operatori translacije i modulacije su izometrije na $L^p(\mathbb{R})$ za svaki $1 \le p \le \infty$. Operator dilatacije je izometrija na $L^2(\mathbb{R})$ i umnožak izometrija na $L^p(\mathbb{R})$, za svako drugo p.

Teorem 3.1.3. *Za svako $f \in L^1(\mathbb{R})$ ili $f \in L^2(\mathbb{R})$ imamo:*

(a)
$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = M_{-a}\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi ia\xi}\hat{f}(\xi).$$

(b)
$$\widehat{(M_b f)}(\xi) = T_b\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi - b).$$

(c)
$$\widehat{(D_r f)}(\xi) = D_{\frac{1}{r}}\hat{f}(\xi) = \frac{1}{r}\hat{f}(\frac{\xi}{r}).$$

Svojstva nekog niza poput npr. činjenice da taj niz čini bazu ili bazni okvir ostaju sačuvana primjenom unitarnog operatora, pa ako primijenimo Fourierovu transformaciju na niz $(f_n)_n$, dobiti ćemo niz koji ima drugačiju strukturu ali i dalje će biti baza ili bazni okvir ukoliko je to i početni niz. Često nam je lakše raditi sa $(\hat{f}_n)_n$ nego sa $(f_n)_n$, posebno zbog odnosa Fourierove transformacije i operacija translacije, modulacije i dilatacije.

Korolar 3.1.4. *Neka je $(f_n)_n$ niz u $L^2(\mathbb{R})$. Tada je niz $(f_n)_n$ u $L^2(\mathbb{R})$ Schauderova baza, Rieszova baza, Besselov niz, ili bazni okvir za $L^2(\mathbb{R})$ ako i samo ako isto vrijedi i za niz $(\widehat{f_n})_n$.*

3.2 Motivacija: trigonometrijski sistem

U nastavku rada cilj nam je uvesti Fourierovu transformaciju na grupi $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ je, baš kao i torus $\mathbf{T}$ lokalno kompaktna Abelova grupa, a svaka takva grupa ima pridruženu Fourierovu transformaciju. Mi ćemo najprije promotriti trigonometrijski sistem i Fourierovu transformaciju na $\mathbf{T}$ i vidjeti ćemo da su Fourierova transformacija i njen inverz zapravo operatori analize i sinteze pridruženi trigonometrijskom sistemu $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Prisjetimo se da smo u primjeru 1.3.9 vidjeli da je trigonometrijski sistem ortonormirana baza za $L^2(\mathbf{T})$. Iz tog razloga svaka funkcija $f \in L^2(\mathbf{T})$ se može zapisati kao Fourierov red:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n. \tag{3.2}$$

Fourierovi koeficijenti u gornjoj jednadžbi dani su sa:

$$\hat{f} = \langle f, e_n\rangle = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Niz

$$\hat{f} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

je *Fourierova transformacija funkcije f*, a preslikavanje $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$ je *Fourierova tranformacija* za torus.

U terminologiji baznih okvira, Fourierova transformacija je operator analize U za Parsevalov bazni okvir $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tj. $\hat{f} = \mathcal{F}f = Uf$. Uzimamo funkciju $f \in L^2(\mathbf{T})$ i dobijemo niz $\hat{f}$ indeksiran po skupu $\mathbb{Z}$.
Rekonstrukciju funkcije f iz jednadžbe 3.2 možemo promatrati kao inverz Fourierove transformacije $\mathcal{F}^{-1}$ ali i kao operator sinteze U^* za Parsevalov bazni okvir $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Operator sinteze $\mathcal{F}^{-1} = U^*$ preslikava prostor $\ell^2(\mathbb{Z})$ u prostor $L^2(\mathbb{R})$. Uobičajeno je rezultat ove operacije na $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ označavati sa $\check{c}$. Dakle, imamo:

$$\check{c} = (\mathcal{F}^{-1}c)(x) = (U^*c)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi inx},$$

gdje red bezuvjetno konvergira u $L^2(\mathbb{R})$. Jednadžba 3.2 je zapravo prikaz $f = U^*Uf$ tj. imamo:

$$f(x) = U^*Uf(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, e_n\rangle e_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{2\pi inx} \tag{3.3}$$

a to možemo pisati i na sljedeći način:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) = (\hat{f})^{\vee}, \quad f \in L^2(\mathbf{T}). \tag{3.4}$$

Prethodne dvije jednadžbe i jednadžba 3.2 su ekvivalentne. Kako je trigonometrijski sistem ortonormirana baza za $L^2(\mathbf{T})$, vrijedi i sljedeći identitet:

$$c = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}c) = (\check{c})^{\wedge}, \quad c \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{3.5}$$

3.3 Fourierova transformacija na $L^1(\mathbb{R})$

Fourierova transformacija na realnom pravcu u vezi je sa operatorima analize i sinteze pridruženima kompleksnim eksponencijalima, ali kako funkcije $e^{2\pi inx}$ nisu kvadratno integrabilne na $\mathbb{R}$, nije odmah jasno kako bismo ih mogli iskoristiti za analizu funkcija u prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Naime, niz $(e^{2\pi inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ nije sadržan u $L^2(\mathbb{R})$, a onda nikako ne može biti ni ortonormirana baza za taj prostor. Unatoč tome, postoji analogija između Fourierove transformacije na $\mathbb{R}$ i transformacije na torusu koju smo uveli u prethodnom poglavlju.
Funkcija $e^{2\pi inx}$ je ograničena funkcija, pa ako uzmemo funkciju $f \in L^1(\mathbb{R})$, skalarni produkt funkcija f i $e^{2\pi inx}$ je dobro definiran u $L^1(\mathbb{R})$. No, kako više ne radimo sa periodičkim funkcijama, morati ćemo promatrati $e_\xi = e^{2\pi i\xi x}$ za sve realne vrijednosti ξ tako da više nemamo prebrojivi niz koji čini bazni okvir, ali vidjeti ćemo da ćemo i dalje imati operatore analize i sinteze. Naš operator analize na prostoru $L^1(\mathbb{R})$ je definiran na sljedeći način:

Definicija 3.3.1 (Fourierova transformacija na $L^1(\mathbb{R})$)**.** *Fourierova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je funkcija $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definirana sa*

$$\hat{f}(\xi) = \langle f, e_\xi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Fourierova transformacija je preslikavanje $\mathcal{F} : f \longmapsto \hat{f}$.

Unatoč tome što je funkcija $f \in L^1(\mathbb{R})$ definirana samo gotovo svugdje, njena Fourierova transformacija $\hat{f}$ je definirana za svako $\xi \in \mathbb{R}$ i integral u jednadžbi 3.6 apsolutno konvergira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-2\pi i\xi x}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1} < \infty. \tag{3.7}$$

Pokažimo i neprekidnost funkcije $\hat{f}$ na $\mathbb{R}$:

Lema 3.3.2. *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$, onda je $\hat{f}$ ograničena i uniformno neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ i vrijedi:*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}. \tag{3.8}$$

Dokaz. Za zadane $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i(\xi+\eta)x}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left|e^{-2\pi i\xi x}\right| \left|e^{-2\pi i\eta x} - 1\right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left|e^{-2\pi i\eta x} - 1\right| dx. \end{aligned}$$

Primijetimo da zadnji izraz u gornjoj jednadžbi ne ovisi o ξ. Za skoro svaki x (one za koje je $f(x)$ definirano), imamo

$$\lim_{\eta\to 0} |f(x)| \left|e^{-2\pi i\eta x} - 1\right| \;=\; 0.$$

Također, imamo:

$$|f(x)| \left|e^{-2\pi i\eta x} - 1\right| \leq 2\,|f(x)| \;\in\; L^1(\mathbb{R}),$$

Sada, po Lebesgueovom teoremu o donimiranoj konvergenciji slijedi

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \left|\hat{f}(\xi+\eta) - \hat{f}(\xi)\right| \;\leq\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \left|e^{2\pi i\eta x} - 1\right| dx \;\to\; 0 \quad \textit{kada } \eta \to 0.$$

Dakle, $\hat{f}$ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$. Ograničenost slijedi iz 3.7 zbog:

$$\left|(\hat{f})(\xi)\right| \;=\; \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i\xi x} dx\right| \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x) e^{-2\pi i\xi x}\right| dx \;=\; \|f\|_{L^1}.$$

Uzimanjem supremuma po $\xi \in \mathbb{R}$ dobijamo $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$. □

Kada smo promatrali Fourierovu transformaciju na torusu, imali smo $\hat{f} \;=\; \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, tj. imali smo niz. Za $f \in L^1(\mathbb{R})$, Fourierova transformacija je neprekidna funkcija $\hat{f} \in C_b(\mathbb{R})$.

Primjer 3.3.3. *Karakteristična funkcija $\chi_{[-T,T]}$ pripada prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a njena Fourierova transformacija dana je sa:*

$$(\chi_{[-T,T]})\,\hat{}\,(\xi) \;=\; \int_{-T}^{T} e^{-2\pi i\xi x} dx \;=\; \begin{cases} \frac{\sin(2\pi T\xi)}{\pi\xi}, & \xi \neq 0, \\ 2T, & \xi = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Ovo je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Obično se piše samo $(\chi_{[-T,T]})\,\hat{}\,(\xi) = \frac{\sin 2\pi T\xi}{\pi\xi}$, uz pretpostavku da je funkcija dobro definirana u ishodištu.
Poseban slučaj je takozvana sinc funckija $d_\pi = \left(\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)\hat{}$, koja je eksplicitno dana sa:

$$d_\pi \;=\; \left(\chi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)\hat{}\,(\xi) \;=\; \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}. \tag{3.10}$$

Iako je sinc funkcija neprekidna, ona nije integrabilna na $\mathbb{R}$. S druge strane, d_π je neprekidna i $d_\pi \to 0$ kada $|\xi| \to \infty$, pa je $d_\pi \in C_0(\mathbb{R})$. Prisjetimo se, $C_0(\mathbb{R})$ je Banachov prostor uz normu $\|\cdot\|_\infty$, pa imamo

$$\left\|\left(\chi_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)\hat{}\,\right\|_\infty \;=\; \|d_\pi\|_\infty \;=\; 1,$$

dakle, d_π je jedinični vektor u $C_0(\mathbb{R})$.

Iz prethodnog primjera vidimo da $f \in L^1(\mathbb{R})$ općenito ne povlači $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, dakle Fourierova transformacija ne preslikava prostor $L^1(\mathbb{R})$ u samog sebe. Pokažimo da $\mathcal{F}$ preslikava prostor $L^1(\mathbb{R})$ u $C_0(\mathbb{R})$.

Teorem 3.3.4 (Riemann-Lebesgueova lema)**.** *Fourierova transformacija preslikava prostor $L^1(\mathbb{R})$ u $C_0(\mathbb{R})$:*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in C_0(\mathbb{R}).$$

Dokaz. Vidjeli smo u lemi 3.3.2 da je $\hat{f}$ neprekidna funkcija, a sada moramo pokazati da $\hat{f}$ iščezava u beskonačnosti. Kako je $e^{-\pi i} = -1$, za $\xi \neq 0$ imamo

$$\begin{aligned} \hat{f} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi x}e^{-2\pi i\xi\frac{1}{2\xi}}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i\xi(x+\frac{1}{2\xi})}dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} f\Big(x-\frac{1}{2\xi}\Big)e^{-2\pi i\xi x}dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Sada imamo

$$\hat{f} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x) - f\Big(x-\frac{1}{2\xi}\Big)\Big)e^{-2\pi i\xi x}dx.$$

Dalje, slijedi:

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|f(x) - f\Big(x-\frac{1}{2\xi}\Big)\Big|dx = \frac{1}{2}\Big\|f - T_{\frac{1}{2\xi}}f\Big\|_{L^1} \to 0$$

kada $|\xi| \to \infty$. Dakle, $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$. □

Do sada smo dokazali: Fourierova transformacija je ograničeni operator sa prostora $L^1(\mathbb{R})$ u prostor $C_0(\mathbb{R})$ i norma tog preslikavanja je najviše 1. Kako je $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ jedinični vektor u prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a njegova Fourierova transformacija, tj. sinc funkcija d_π je jedinični vektor u $C_0(\mathbb{R})$, slijedi da je operatorska norma od $\mathcal{F}$ upravo

$$\|\mathcal{F}\|_{L^1\to C_0} = 1. \tag{3.12}$$

Ipak, $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ nije izometrija i može se pokazati da je slika tog operatora gusti ali pravi potprostor od $C_0(\mathbb{R})$.
Potražimo sada operator sinteze za Fourierovu transformaciju.

Definicija 3.3.5. *Inverzna Fourierova transformacija funckije $f \in L^1(\mathbb{R})$ je*

$$\check{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{2\pi i\xi x}dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pišemo i $\mathcal{F}^{-1}f = \check{f}$.

Primijetimo da je $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$. Dakle, $\hat{f}$ i $\check{f}$ imaju mnogo sličnosti pa ćemo imati i više "simetrije" za Fourierovu transformaciju na realnom pravcu nego na torusu.
Posebno, i Fourierova transformacija i njezin inverz preslikavaju prostor $L^1(\mathbb{R})$ u prostor $C_0(\mathbb{R})$. Ipak, ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}$ ne mora pripadati prostoru $L^1(\mathbb{R})$ pa općenito ne možemo promatrati kompoziciju Fourierove transformacije i njenog inverza. Dakle, naša terminologija nije baš precizna jer funkcija $\mathcal{F}^{-1}$ definirana u 3.3.5 nije doslovno inverzna funkciji $\mathcal{F}$. Ipak, pokazati će se da je operator $\mathcal{F}^{-1}$ zapravo operator sinteze i preslikavanje inverzno preslikavanju $\mathcal{F}$ ako primijenimo odgovarajuće restrikcije. Posebno, ako su funkcije f i $\hat{f}$ obje integrabilne tada se f može dobiti iz $\hat{f}$ pomoću operatora sinteze $\mathcal{F}^{-1}$. Ta veza je dana u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3.6 (Formula inverzije)**.** *Ako su $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, onda su f i $\hat{f}$ neprekidne i vrijedi*

$$f(x) = (\hat{f})\check{}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi \tag{3.13}$$

Slično,

$$f(x) = (\check{f})\hat{}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\xi)e^{-2\pi i\xi x}d\xi,$$

za svaki x.

Prije dokaza teorema navodimo definiciju i primjer koji su nam potrebni u dokazu. Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Zamjenom varijabli $z = y + x, dz = dy$ vrijedi formula:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dzdx.$$

Funkcija

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dzdx$$

je skoro svuda dobro definirana i vrijedi $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Definicija 3.3.7. *Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Funkciju $h = g * f$ definiranu s*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(x-z)dz = (g * f)(x)$$

zovemo konvolucija funkcija f i g.

Primjer 3.3.8. *Izračunajmo Fourierovu transformaciju funkcije $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$. Ta funkcija se ponekad u literaturi naziva Gaussian.*

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} e^{-\pi x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+2ix\xi)} dx \\ &= e^{-\pi\xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx.\end{aligned}$$

Označimo: $f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$. Sada je $\hat{\phi} = f\phi$ Htjeli bismo pokazati $f \equiv 1$. Vrijedi $f'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} 2(-\pi(x+i\xi))(-\pi i)e^{-\pi(x+i\xi)^2} = 0$ i $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$ pa imamo tvrdnju. Dakle, $\hat{\phi} = \phi$.

Dokaz. Pokažimo prvu jednakost. Neka je $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$, $\phi_r(x) = \frac{1}{r}\phi(\frac{x}{r})$. Primijetimo, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_r = 1$, za sve $r > 0$. Vrijedi: $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), f * \phi_r \to f$ u normi L^1. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{r\to 0} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi)\phi(r\xi) d\xi \\ &= \lim_{r\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi)\phi(r\xi) d\xi.\end{aligned}$$

Dalje, računamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi} \phi(r\xi)\hat{f}(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi}\phi(r\xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y\xi} f(y) dy d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r\xi) e^{-2\pi i(y-x)\xi} d\xi dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\phi_r(x-y) dy.\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x) = \lim_{r\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\phi_r(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

□

Napomena 3.3.9. *Funkcije f i $\hat{f}$ pripadaju prostoru $L^1(\mathbb{R})$, a elementi tog prostora su klase ekvivalencije funkcija koje su jednake gotovo svugdje, stoga ne bismo smjeli reći "f je neprekidna". Zapravo se misli da postoji neprekidna funkcija g koja pripada klasi ekvivalencije f, tj, funkcija g je jednaka f gotovo svugdje.*

Posljedica prethodnog teorema je činjenica da su funkcije iz $L^1(\mathbb{R})$ potpuno određene pripadnom Fourierovom transformacijom.

Korolar 3.3.10 (Teorem jedinstvenosti)**.** *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$. Tada je*

$$f = 0 \text{ g.s.} \iff \hat{f} = 0 \text{ g.s.}$$

stoga je Fourierova transformacija $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$ injektivno preslikavanje.

Još jedno važno svojstvo Fourierove transformacije daje nam sljedeći teorem:

Teorem 3.3.11. *Neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ako je $x^m f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ za neki $m \in \mathbb{N}$ tada je*

$$\hat{f} \in C_0^m(\mathbb{R})$$

tj., $\hat{f}$ je m puta derivabilna i $\hat{f}, \hat{f}', \dots, \hat{f}^{(m)} \in C_0(\mathbb{R})$. Nadalje, u tom slučaju imamo $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ za $k = 0, \dots, m$, i k-ta derivacija funkcije $\hat{f}$ je Fourierova transformacija funkcije $(-2\pi i x)^k f(x)$:

$$\hat{f}^{(k)} = \frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f} = ((-2\pi i x)^k f(x))^\wedge, \quad k = 0, \dots, m. \tag{3.14}$$

Dokaz ovog teorema bazira se na formalnoj zamjeni derivacije i integrala:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i \xi x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d\xi}e^{-2\pi i \xi x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-2\pi i x)e^{-2\pi i \xi x}dx \\ &= (-2\pi i x f(x))^\wedge(\xi). \end{aligned}$$

Ustvari, dokaz se sastoji u opravdanju ove zamjene, a to se napravi pomoću Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji.

Teorem 3.3.12. *Neka je zadano $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $m \in \mathbb{N}$. Ako je f svugdje m-puta derivabilna i $f, f', \cdots, f^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$, onda je*

$$(f^{(k)})^\wedge(\xi) = (2\pi i \xi)^k \hat{f}(\xi), \quad k = 0, \cdots, m.$$

Stoga je

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{\left\|f^{(m)}\right\|_{L^1}}{|2\pi\xi|^m}, \quad \xi \neq 0$$

Iz ovih teorema možemo zaključiti sljedeće: veća glatkoća integrabilne funkcije f implicira da njena Fourierova transformacija $\hat{f}$ brže opada u beskonačnosti. Posebno, ako je f dovoljno glatka, $\hat{f}$ je integrabilna.

Korolar 3.3.13. *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ dva puta derivabilna i $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, onda $\hat{f}$ opada kao $C/|\xi|^2$ pa je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Posebno,*

$$f \in C_c^2(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Dokaz. Kako je $\hat{f}$ neprekidna, ograničena je oko ishodišta. Također, kako je f'' integrabilna funkcija, po teoremu 3.3.12 imamo $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{|\xi|^2}$ dalje od ishodišta. Kombinacija ovih dviju činjenica daje nam da je $\hat{f}$ integrabilna funkcija. □

Sada uvodimo još jednu klasu funkcija:

Definicija 3.3.14 (Schwartzova klasa)**.** *Schwartzova klasa $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sastoji se od svih beskonačno derivabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju*

$$\left\| x^m f^{(n)}(x) \right\|_\infty < \infty, \quad m, n \geq 0.$$

Ako je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tada za svaki izbor m i n postoji konstanta C_{mn} takva da je

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{mn}}{|x|^m}, \quad x \neq 0. \tag{3.15}$$

Konstanta C_{mn} može rasti ovisno o m ili n. Često se za funkcije koje zadovoljavaju nejednakost 3.15 kaže da *brzo opadaju* u beskonačnosti.
Prostor $C_c^\infty(\mathbb{R})$ koji sadrži sve beskonačno derivabilne funkcije sa kompaktnim nosačem je sadržan u $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Primjer funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ koja nema kompaktni nosač je Gaussian $\phi(x) = e^{-\pi x^2}$. Vrijedi i sljedeće:

Teorem 3.3.15. *Fourierova transformacija je bijektivno preslikavanje na prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Pokažimo najprije da Fourierova transformacija preslikava prostor $S(\mathbb{R})$ u samog sebe. Neka je $f \in S$. Tada je f ograničena i neprekidna, a vrijedi i: $(1 + x^2)f(x)$ je ograničena, pa postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx \leq \infty,$$

pa f leži u $L^1(\mathbb{R})$. Također, imamo da je za svako $f \in S$, Fourierova transformacija $\hat{f}$ beskonačno derivabilna i da je

$$((-2\pi i x)^n f)\hat{} = \hat{f}^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada, po teoremu 3.3.12 imamo da je za svako $f \in S$, $(f^{(n)})\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^n \hat{f}(\xi), \forall n \in \mathbb{N}$. Dakle, za svaku funkciju $f \in S$ i svake $m, n \geq 0$ imamo da je

$$x^m \hat{f}^{(n)}(x)$$

Fourierova transformacija funkcije iz S i ona je ograničena. Bijektivnost slijedi odmah iz teorema jedinstvenosti. □

Korolar 3.3.16. *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R})$ i $\hat{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, tada je $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Funkcija $\hat{f}$ je integrabilna po pretpostavci, pa je po formuli inverzije $f = (\hat{f})^\vee$. S druge strane imamo $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pa nam teorem 3.3.15 daje $(\hat{f})^\vee \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. □

3.4 Fourierova transformacija na $L^2(\mathbb{R})$

Do sada smo definirali Fourierovu transformaciju kao operator na $L^1(\mathbb{R})$, a sada ćemo vidjeti kako možemo proširiti domenu na $L^2(\mathbb{R})$.

Teorem 3.4.1. *Ako je $f \in C_c^2(\mathbb{R})$, onda je $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ i vrijedi*

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Dokaz. Navodimo samo skicu dokaza. Primijetimo da je $f \in L^1(\mathbb{R})$, stoga je $\hat{f}$ neprekidna funkcija. Uvedimo oznaku $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, pa primijenimo Fourierovu transformaciju

$$(\tilde{f})\hat{}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Konvolucija funckija f i $\tilde{f}$ je

$$g(x) = (f * \tilde{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\tilde{f}(x-y)dy.$$

Funckija g je neprekidna sa kompaktnim nosačem. Primijetimo

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\tilde{f}(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}dy = \|f\|_{L^2}^2.$$

Kako je g integrabilna, ona ima Fourierovu transformaciju u smislu definicije 3.3.1 i $\hat{g}$ je oblika

$$\hat{g}(\xi) = (f * \tilde{f})\hat{}(\xi) = \hat{f}(\xi)(\tilde{f}\hat{}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2.$$

Također vrijedi da je $g = f * \tilde{f}$ glatka onoliko koliko je glatka funkcija f pa je $g \in C_c^2(\mathbb{R})$ pa je po korolaru 3.3.13 $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Sada, primjenom formule inverzije imamo

$$g(0) = (\hat{g})^\vee(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2.$$

Dakle, $\left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2 = g(0) = \|f\|_{L^2}$. □

Koristiti ćemo činjenicu da je prostor $C_c^2(\mathbb{R})$ gust u $L^2(\mathbb{R})$:

Lema 3.4.2. *Neka je $\varphi \in L^1$ t.d. $\int \varphi(x)dx = 1$. Tada vrijedi: ako je $f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty$, onda $f * \varphi_t \to f$ u L^p normi, kada $t \to 0$.*

Lema 3.4.3 (C^∞- Urysohnova lema)**.** *Neka je K kompaktan skup u $\mathbb{R}^n$ i neka je U td $K \subseteq U$. Tada postoji funkcija $f \in C_c^\infty$ t.d. je $f \geq 0, f = 1$ na K i $supp(f) \subseteq U$.*

Teorem 3.4.4. *Prostor $C_c^\infty(\mathbb{R})$ je gust u $L^2(\mathbb{R})$.*

Dokaz. Po lemi 3.4.2 imamo: $f * \varphi_t \to f$ u L^p normi. Neka su $f \in L^p$ i $\varepsilon > 0$ fiksirano. Neka je K kompaktan skup odabran tako da je $\|f\chi_K\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nadalje, neka je t_0 t.d. $\|f\chi_K - (f\chi_K) * \varphi_t\|_p < \frac{\epsilon}{2}$ za $0 < t < t_0$. Primjetimo da je $(f\chi_K) * \varphi_t \in C_c^\infty$ za sve $t > 0$. Tada je

$$\|f - (f\chi_k) * \varphi_t\|_p \; < \; \|f - f\chi_K\|_p + \|f\chi_K - (f\chi_K) * \varphi_t\|_p \; < \; \varepsilon.$$

□

Sada, zbog $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq C_c^2(\mathbb{R})$ vrijedi da je i $C_c^2(\mathbb{R})$ gusto u $L^2(\mathbb{R})$. Slično se pokaže da je $C_c^2(\mathbb{R})$ gusto u $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$(Theorem 3 u [3]). Kako vrijedi i $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$, i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ je gusto u $L^2(\mathbb{R})$.
U teoremu 3.4.1 vidjeli smo da je Fourierova transformacija izometrija sa prostora $(C_c^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ na prostor $L^2(\mathbb{R})$. Jer je $C_c^2(\mathbb{R})$ gusto u $L^2(\mathbb{R})$, operator $\mathcal{F}$ se može proširiti po neprekidnosti do izometrije na cijelom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Kako je $\mathcal{F}$ bijektivno preslikavanje prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ na samog sebe, $Im(\mathcal{F})$ sadržava gusti potprostor $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Kako je $\mathcal{F}$ izometrija, $Im(\mathcal{F})$ je zatvoren prostor, pa zaključujemo da je $\mathcal{F}$ izometrija na cijelom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Dakle, $\mathcal{F}$ je unitaran operator na $L^2(\mathbb{R})$.

Definicija 3.4.5 (Fourierova transformacija na $L^2(\mathbb{R})$)**.** *Gore definiran unitaran operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ je Fourierova transformacija na prostoru $L^2(\mathbb{R})$.*

Definicija Fourierove transformacije na $L^2(\mathbb{R})$ nije eksplicitna kao definicija na $L^1(\mathbb{R})$. Poanta je da je $\mathcal{F}$ izometrija s obzirom na $L^2 -$ *normu* na nekom prostoru koji je gust i u $L^1(\mathbb{R})$ i u $L^2(\mathbb{R})$ pa nam to dozvoljava implicitno proširenje $\mathcal{F}$ na unitaran operator na cijelom prostoru $L^2(\mathbb{R})$.
Za računanje Fourierove trasformacije funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$ po ovoj definiciji, moramo odabrati funkcije $f_n \in C_c^2(\mathbb{R})$ t.d. $f_n \to f$ u $L^2(\mathbb{R})$. Tada je Fourierova transformacija funkcije f jedinstvena funkcija $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ za koju vrijedi $\hat{f_n} \to \hat{f}$ u normi prostora $L^2(\mathbb{R})$. Može se pokazati da ova definicija ne ovisi o izboru funkcija $\hat{f_n}$, pa je Fourierova transformacija jedinstveno definirana na $L^2(\mathbb{R})$ i ova definicija proširuje Fourierovu transformaciju sa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
$\mathcal{F}$ je unitaran operator na $L^2(\mathbb{R})$ pa na tom prostoru vrijedi formula inverzije :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad f \;=\; (\hat{f})^{\check{}} \;=\; (\check{f})^{\hat{}}. \tag{3.16}$$

Ova jednakost vrijedi za funkcije iz prostora $L^2(\mathbb{R})$ pa ju valja shvaćati u smislu "gotovo svugdje". S druge strane, ovaj izraz je analogan izrazu 3.3 za Fourierovu transformaciju na $L^2(\mathbf{T})$.Sada imamo i sljedeće jednakosti:

Teorem 3.4.6. *Za sve $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ vrijedi:*

1. *Plancherelova jednakost:* $\left\|\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

2. *Parsevalova jednakost:* $\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$.

Napomena 3.4.7. *Ukoliko je $f \in L^1(\mathbb{R})$, funkcija $\hat{f}$ je neprekidna funkcija koja je definirana svugdje, ali ukoliko je $f \in L^2(\mathbb{R})$, onda je $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ pa je definirana gotovo svugdje. Transformacije se podudaraju ako je $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ i u tom slučaju identificiramo $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ sa klasom ekvivalencije funkcija koje su joj jednake gotovo svugdje pa cijelu klasu zovemo funkcija $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$*

Za mnoge formule koje vrijede za Fourierovu transformaciju na $L^1(\mathbb{R})$ vrijede analogne formule koje vrijede za Fourierovu transformaciju na $L^2(\mathbb{R})$, iako često moramo zamijeniti tvrdnje koje vrijede točkovno svuda sa tvrdnjama koje vrijede točkovno gotovo svuda. Na primjer, imamo

$$(T_a f)\hat{} = M_{-a}\hat{f}, \quad f \in L^1(\mathbb{R}),$$

i pokažimo kako ovu jednadžbu možemo proširiti na funkcije iz $L^2(\mathbb{R})$.
Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ i $a \in \mathbb{R}$ fiksno. Kako je $C_c^2(\mathbb{R})$ gusto u $L^2(\mathbb{R})$, postoje funkcije $f_n \in C_c^2(\mathbb{R})$ takve da $f_n \longrightarrow f$ u normi prostora $L^2(\mathbb{R})$. Kako je Fourierova transformacija unitarno preslikavanje, vrijedi i $\hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}$ u normi $L^2(\mathbb{R})$. Po teoremu 1.3.6, konvergencija u $L^2(\mathbb{R})$-normi povlači da postoji podniz koji konvergira točkovno gotovo svuda. Sada, prelaskom na podniz, možemo pretpostaviti: $\hat{f}_n(\xi) \longrightarrow \hat{f}(\xi)$ gotovo svuda. Kako je $f_n \in L^1(\mathbb{R})$, imamo $(T_a f_n)\hat{}(\xi) = M_{-a}\hat{f}_n(\xi)$, za svako ξ. Prelaskom na limese, slijedi $(T_a f)\hat{}(\xi) = M_{-a}\hat{f}(\xi)$, za gotovo svako ξ. Posebno, ovo dokazuje da prva tvrdnja u teoremu 3.1.2 vrijedi za svako $f \in L^2(\mathbb{R})$. Slično se dokazuje da vrijede i preostale dvije tvrdnje iz tog teorema za svako $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Poglavlje 4

Teorem o uzorkovanju

U ovom poglavlju ćemo teoriju baza i baznih okvira iskoristiti za analizu posebnih vrsta nizova koji se javljaju u različitim situacijama u primijenjenoj harmonijskoj analizi ali i u drugim područjima. Bazirati ćemo se na nizovima koji su bliski trigonometrijskom sustavu $(e^{2\pi inx})_{n\in\mathbb{Z}}$, koji čini ortonormiranu bazu prostora $L^2(T)$.
Kada razmišljamo o eksponencijalnoj funkciji

$$e_n(x) = e^{2\pi inx}$$

obično ju smatramo funkcijom perioda 1 na $\mathbb{R}$. Kao takva, ta funkcija pripada prostoru $L^2(\mathbf{T})$ ali ona ne pripada prostoru $L^2(\mathbb{R})$ jer je $|e^{2\pi inx}| = 1$ za svaki x. U ovom poglavlju tim funkcijama ćemo pristupiti malo drugačije. Umjesto da te funkcije promatramo kao periodičke, ograničiti ćemo se na interval duljine 1 i proširiti ćemo funkcije izvan tog intervala sa nulom. Na ovaj način dobiti ćemo niz koji pripada prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Unatoč tome što je ideja poprilično jednostavna, dobiju se značajni rezultati. Biti će nam zgodno uzeti domenu koja je simetrična oko ishodišta, što znači da ćemo promatrati funkcije:

$$\epsilon_n = e_n \cdot \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Kako je interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ duljine 1, niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormiran u $L^2(\mathbb{R})$. No, taj niz nije fundamentalan u $L^2(\mathbb{R})$. Zatvarač linearne ljuske toga niza ($\overline{span}\{\epsilon_n\}$) je:

$$L^2_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f(x) = 0 \text{ za gotovo sve } |x| > \frac{1}{2} \right\}.$$

To je potprostor od $L^2(\mathbb{R})$. Kako je Fourierova transformacija unitaran operator, niz $(\hat{\epsilon}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ je također ortonormiran niz u $L^2(\mathbb{R})$. Neka je sada

$$d_\pi = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$$

sinc funkcija iz primjera 3.3.3. Tada $\hat{\epsilon}_n$ možemo pisati kao translatiranu sinc funkciju:

$$\hat{\epsilon}_n(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i n x} e^{-2\pi i \xi x} dx = \frac{\sin \pi(\xi - n)}{\pi(\xi - n)} = d_\pi(\xi - n) = T_n d_\pi(\xi).$$

Funkcije $T_n d_\pi$ nemaju kompaktan nosač ali svaka od njih ima Fourierovu transformaciju koja je različita od nule jedino unutar intervala $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Zapravo, zato jer je $\hat{f}(\xi) = \check{f}(-\xi)$, imamo sljedeće:

$$(T_n d_\pi)^\wedge(\xi) = (\hat{\epsilon}_n)^\wedge(\xi) = (\hat{\epsilon}_n)^\vee(-\xi) = \epsilon_n(-\xi) = e^{-2\pi i n \xi} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi).$$

Zatvarač linearne ljuske ortonormiranog niza $(\hat{\epsilon}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (T_n d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ je

$$PW(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ \hat{f}(\xi) = 0 \text{ za gotovo sve } |\xi| > \frac{1}{2} \right\}.$$

$PW(\mathbb{R})$ zovemo $Paley - Wienerov\ prostor$.
Činjenica da je $(T_n d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormirana baza za $PW(\mathbb{R})$ uvesti će nas u potpoglavlje 4.2 i dokaz klasičnog teorema o uzorkovanju. To je sveprisutan rezultat u teoriji signala koji daje algoritam za rekonstrukciju pojasno ograničenih funkcija iz prebrojivo mnogo "vrijednosti uzoraka" $f(n), n \in \mathbb{Z}$.

4.1 Paley-Wienerov prostor

U nastavku rada želimo dokazati teorem o uzorkovanju za pojasno ograničene funkcije. To ćemo podijeliti u dva dijela. U ovoj točki ćemo definirati Paley-Wienerov prostor i razmatrati neka njegova svojstva, a u sljedećoj ćemo to iskoristiti u samom dokazu teorema o uzorkovanju i nekih rezultata u vezi s njim.
Uvedimo precizne definicije vremenski ograničenih i pojasno ograničenih funkcija:

Definicija 4.1.1. *Neka je $T, \Omega > 0$.*

1. *Kažemo da je funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ vremenski ograničena na $[-T, T]$ ako $supp(f) \subseteq [-T, T]$ (tj. $f(x) = 0$ za gotovo sve $|x| > T$). Prostor funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$ sa tim svojstom označavamo sa:*

$$L^2_{[-T,T]}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ supp(f) \subseteq [-T, T] \right\}.$$

2. *Kažemo da je funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ pojasno ograničena na $[-\Omega, \Omega]$ ako je $supp(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega]$ (tj. $\hat{f}(\xi) = 0$ za gotovo sve $|\xi| > \Omega$). Prostor funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$ sa tim svojstvom označavamo sa:*

$$\mathcal{F}L^2_{[-\Omega,\Omega]}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ supp(\hat{f}) \subseteq [-\Omega, \Omega] \right\}.$$

Prostori $L^2_{[-T,T]}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{F}L^2_{[-\Omega,\Omega]}(\mathbb{R})$ su zatvoreni potprostori u $L^2(\mathbb{R})$. Nadalje, kao što oznaka i sugerira, $\mathcal{F}L^2_{[-\Omega,\Omega]}(\mathbb{R})$ je slika Fourierove transformacije primijenjene na prostor $L^2_{[-\Omega,\Omega]}(\mathbb{R})$.
Mnogi signali s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu su pojasno ograničeni, ili su im dovoljno slični da bismo ih mogli smatrati takvima. Na primjer, iako zvučni val općenito može imati različite frekvencije, ljudsko uho može osjetiti samo ograničeni opseg frekvencija, otprilike između 20 Hz i 20000 Hz. Signal koji proizvodi prosječni telefonski zvučnik obuhvaća puno manji opseg frekvencija, često samo od 300 Hz do 3000 Hz. Ustvari, nosač Fourierove transformacije signala koji izlazi iz telefonskog zvučnika leži između $[-3000, -300] \cup [300, 3000]$, tako da taj signal pripada prostoru $\mathcal{F}L^2_{[-\Omega,\Omega]}(\mathbb{R})$, pri čemu je $\Omega = 3000$. Zanimljivo, nenul funkcija ne može istovremeno biti vremenski i pojasno ograničena, to ćemo vidjeti u koloraru 4.1.5.
Nama će u ovom potpoglavlju najzgodnije biti da fiksiramo vrijednost Ω na $\frac{1}{2}$.

Definicija 4.1.2 (Paley-Wienerov prostor)**.** *Paley − Wienerov prostor $PW(\mathbb{R})$ je prostor funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$ čije Fourierove transformacije imaju nosač sadržan u intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:*

$$PW(\mathbb{R}) = \mathcal{F}L^2_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ supp(\hat{f}) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \Big\}.$$

Primjer 4.1.3. *Promotrimo ponovno sinc funkciju $d_\pi = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}$. Prešutno uzimamo $d_\pi(0) = 1$, pa je d_π neprekidno derivabilna na $\mathbb{R}$.*
Sinc funkcija je pojasno ograničena, ali moramo biti pažljivi. d_π nije integrabilna, stoga ne možemo koristiti formulu $\hat{f}(\xi) = \int f(x)e^{2\pi i\xi x}$ da to pokažemo. Umjesto toga, primijetimo da karakteristična funkcija $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ pripada i prostoru $L^1(\mathbb{R})$ i $L^2(\mathbb{R})$, a kada na nju primijenimo inverznu Fourierovu transformaciju dobijemo sljedeće:

$$(\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})^\vee(\xi) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i\xi x}dx = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi} = d_\pi(x).$$

Kako je $d_\pi \in L^2(\mathbb{R})$, a $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ su međusobno inverzne operacije na $L^2(\mathbb{R})$, zaključujemo

$$\hat{d}_\pi = (\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})^{\vee\wedge} = \chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}.$$

Prema tome, nosač funkcije $\hat{d}_\pi$ je u $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ pa je $d_\pi \in PW(\mathbb{R})$. Primijetimo još i da je $\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ parna funkcija pa su njena Fourierova transformacija i inverzna Fourierova transformacija jednake, slično, Fourierova transformacija funkcije d_π se podudara sa inverznom Fourierovom transformacijom. Kako Fourierova transformacija translaciju pretvara u modulaciju, svaka translacija sinc funkcije $T_a d_\pi = d_\pi(x-a)$ također pripada Paley-Wienerovom prostoru. Primijenom teorema 3.1.1 vidimo:

$$(T_a d_\pi)^\wedge(\xi) = M_{-a}\hat{d}_\pi(\xi) = e^{2\pi iax}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x).$$

U sljedećem teoremu dokazati ćemo neka važna svojstva Paley-Wienerovog prostora.

Teorem 4.1.4. *1. $PW(\mathbb{R})$ je zatvoreni potprostor $L^2(\mathbb{R})$.*

2. Prostor $PW(\mathbb{R})$ je invarijantan na translaciju, tj.

$$f \in PW(\mathbb{R}), \ a \in \mathbb{R} \implies T_a f \in PW(\mathbb{R}).$$

3. Ako je $f \in PW(\mathbb{R})$, tada je $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ i $f = (\hat{f})^\vee \in C_0(\mathbb{R})$.

4. Svaka funkcija $f \in PW(\mathbb{R})$ je beskonačno derivabilna i $f^{(n)} \in PW(\mathbb{R})$, za svako $n \geq 0$.

5. $(T_n d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza prostora $PW(\mathbb{R})$.

6. Ako je $0 < b < 1$, onda je $(T_{bn} d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ napeti bazni okvir za $PW(\mathbb{R})$, pri čemu je $A = B = b^{-1}$

7. Ako je $b > 1$, onda $(T_{bn} d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ nije fundamentalan niz u $PW(\mathbb{R})$.

Dokaz. 1. Ako imamo niz (f_n) u $PW(\mathbb{R})$ i ako $f_n \to f$ u L^2-normi, onda vrijedi i $\hat{f}_n \to \hat{f}$ u L^2-normi. Sada treba dokazati da je $supp\hat{f} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. U suprotnom, imali bismo skup S mjere > 0 takav da je $f \neq 0$ na S. Međutim, tada vrijedi $\|f - f_n\|_2^2 \geq \int_S |f - f_n| = \int_S |f| > m, \forall n \in \mathbb{N}$. Kontradikcija.

2. Neka je $f \in PW(\mathbb{R})$, tada je $\hat{f}(\xi) = 0$ za gotovo svako $|\xi| > \frac{1}{2}$. Za zadano $a \in \mathbb{R}$, po teoremu 3.1.1 imamo:

$$(T_a f)^\wedge = M_{-a}\hat{f}(\xi) = e^{-2\pi i a\xi}\hat{f}(\xi).$$

Dakle, $(T_a f)^\wedge(\xi) = 0$ za gotovo svako $|\xi| > \frac{1}{2}$, pa je $T_a f \in PW(\mathbb{R})$.

3. Ako je $f \in PW(\mathbb{R})$, onda je $f \in L^2(\mathbb{R})$, pa je $f = (\hat{f})^\vee$ gotovo svugdje. Sada primjenom Cauchy-Schwartz nejednakosti dobivamo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\xi)| \cdot 1 d\xi \leq \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Dakle, $\hat{f}$ je integrabilna funkcija, pa pripadajuća inverzna Fourierova transformacija $(\hat{f})^\vee$ leži u prostoru $C_0(\mathbb{R})$ po teoremu 3.3.4. Stoga je f neprekidna, u smislu da je gotovo svugdje jednaka neprekidnoj funkciji $(\hat{f})^\vee$. Dakle, ako redefiniramo funkciju f na skupu mjere nula, smijemo pisati $f(x) = (\hat{f})^\vee(x)$ za svaki x.

4. Za svako $f \in PW(\mathbb{R})$, po prethodnom, f možemo zapisati kao:

$$f(x) = (\hat{f})^{\vee} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \tag{4.1}$$

Kako je $\hat{f}$ integrabilna funkcija sa kompaktnim nosačem, isto vrijedi i za funkciju

$$g(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

Posebno, $supp(g) \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. I Fourierova transformacija i inverzna transformacija integrabilne funkcije su neprekidne, pa je $\check{g}$ neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Korištenjem jednadžbe 4.1 i formalnom zamjenom integrala i limesa, dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\ &= \lim_{y \to x} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i \xi x} - e^{2\pi i \xi y}}{x - y} d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) \lim_{y \to x} \frac{e^{2\pi i \xi x} - e^{2\pi i \xi y}}{x - y} d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi) \frac{d}{dx} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f} 2\pi i \xi e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= \check{g}(\xi). \end{aligned}$$

Interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ima konačnu mjeru, pa je zamjena integrala i limesa dozvoljena po teoremu o dominiranoj konvergenciji. Dakle, f je derivabilna u svakoj točki i vrijedi $f' = \check{g}$. Nosač funkcije $\hat{f'} = g$ je unutar intervala $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ pa je $f' \in PW(\mathbb{R})$. Induktivno se dokaže da je f beskonačno derivabilna.

5. Trigonometrijski sustav $(e^{2\pi i n x})_{n \in \mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $L^2(\mathbf{T})$ pa slijedi da je

$$(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{2\pi i n x} \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x))_{n \in \mathbb{Z}} = (M_n \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]})_{n \in \mathbb{Z}}$$

ortonormirana baza za $L^2_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\mathbb{R})$. Fourierova transformacija unitarno preslikava $L^2_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\mathbb{R})$ u prostor $PW(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\hat{\epsilon}_n = (M_n \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]})^{\wedge} = T_n d_{\pi},$$

pa slijedi da je $(T_n d_{\pi})_{n \in \mathbb{Z}}$ ortonormirana baza za $PW(\mathbb{R})$

6. Pokažimo najprije da je $(e^{2\pi ibnx})_{n\in\mathbb{Z}}$ napeti bazni okvir za $L^2(\mathbf{T})$. Prostor $L^2(\mathbf{T})$ identificiramo sa $L^2([0,1])$. Ako bismo funkcije $e^{2\pi ibnx}$ promatrali na cijelom prostoru $\mathbb{R}$, one su perioda $\frac{1}{b}$. Kako je $0 < b < 1$, vrijedi $[0,1\rangle \subset [0,\frac{1}{b}\rangle$. Pogledajmo sada operator $D : L^2([0,1]) \to L^2([0,\frac{1}{b}])$ definiran sa $Df(x) = \sqrt{b}f(bx)$. Taj operator je unitaran, pa je niz $(\sqrt{b}e^{2\pi ibnx})_{n\in\mathbb{Z}}$ ONB prostora $L^2([0,\frac{1}{b}])$. Ako svaku funkciju $f \in L^2([0,1])$ proširimo nulom na intervalu $\langle 1,\frac{1}{b}]$, prostor $L^2([0,1])$ možemo smatrati pravim potprostorom od $L^2([0,\frac{1}{b}])$. Sada je očito da je operator P definiran na $L^2([0,\frac{1}{b}])$ sa $Pf = f\chi_[0,1]$ zapravo ortogonalni projektor na prostor $L^2([0,1])$. Neka je sada $f \in L^2([0,1])$ i neka je $g \in L^2([0,\frac{1}{b}])$ njeno proširenje. Zbog jednostavnosti zapisa uvodimo oznake $e_{bn} = e^{2\pi ibnx}$ i $f_{bn} = \sqrt{b}e_{bn}$. Imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_bn\rangle_{L^2([0,1])}|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_{bn}\rangle_{L^2([0,1])}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^1 f(x)\overline{e_{bn}(x)}dx \right|^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \langle Pg, b^{-1/2}Pf_{bn}\rangle_{L^2([0,\frac{1}{b}])} \right|^2 \\
&= \frac{1}{b}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \langle P^2g, f_{bn}\rangle_{L^2([0,\frac{1}{b}])} \right|^2 \\
&= \frac{1}{b}\|g\|^2_{L^2([0,\frac{1}{b}])} = \frac{1}{b}\int_0^{\frac{1}{b}} |g|^2 \\
&= \frac{1}{b}\|f\|^2_{L^2([0,1])} = \frac{1}{b}\int_0^1 |f|^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $(e^{2\pi ibnx})_{n\in\mathbb{Z}}$ je napeti bazni okvir za $L^2([0,1])$, pri čemu je $A = B = b^{-1}$. Sada, istim zaključivanjem kao u 5., slijedi da je $(T_{bn}d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ napeti bazni okvir prostora $PW(\mathbb{R})$, sa granicama $A = B = b^{-1}$.

□

Tvdrnja 4. nam govori da je svaka funkcija $f \in PW(\mathbb{R})$ glatka, ali vrijedi čak i više: Ako je $f \in L^2(\mathbb{R})$ i ako $\hat{f}$ ima kompaktni nosač, onda postoji jedinstveno proširenje funkcije $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ na funkciju $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ koja je analitička u kompleksnoj ravnini. Ova tvrdnja je dio *Paley – Wienerovog teorema*, koji daje vezu između harmonijske i kompleksne analize. Jedna od posljedica ovog teorema jest činjenica da funkcija ne može istovremeno biti vremenski i pojasno ograničena.

Korolar 4.1.5. *Ako je $f \in L^2(\mathbb{R})$ i ako f i $\hat{f}$ imaju kompaktne nosače, onda je $f = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $f \in L^2(\mathbb{R})$ i da $\hat{f}$ ima kompaktan nosač. Tada, po Paley-Wienerovom teoremu slijedi da postoji proširenje funkcije f koje je analitičko na $\mathbb{C}$. Pretpostavimo da f ima kompaktan nosač, neka je $f(x) = 0$ za $|x| > R$. Važno svojstvo analitičkih funkcija jest da su one potpuno određene svojom vrijednošću na segmentu, krivulji ili skupu u $\mathbb{C}$ koji ima gomilište u $\mathbb{C}$. Kako je f analitička i $f(z) = 0$ za sve $z = x + i0$ gdje je $|x| > R$, f mora biti 0 za sve z. $\square$

4.2 Teorem o uzorkovanju

Za danu funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$, formula inverzije govori nam kako možemo rekonstruirati funkciju f iz njene Fourierove transformacije $\hat{f}$ i to primjenom inverzne Fourierove transformacije: $f = (\hat{f})^\vee$. U slučaju kada je $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, imamo formulu iz teorema 3.3.6:

$$f(x) \ = \ (\hat{f})^\vee(x) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Dakle, ako znamo vrijednosti $\hat{f}(\xi)$ za svako ξ, superpozicijom "elementarnih funkcija" $e^{2\pi i\xi x}$ pomnoženih sa amplitudama $\hat{f}(\xi)$, možemo dobiti vrijednosti za f. Ovo je neprebrojiva superpozicija u smislu integracije po svim $\xi \in \mathbb{R}$, ali amplitude $\hat{f}(\xi)$ imaju fizikalnu intepretaciju i one predstavljaju "količinu" frekvencije ξ koja je prisutna u signalu f.

Ako je $(f_n)_n$ bazni okvir za prostor $L^2(\mathbb{R})$, tada za svaku funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$ imamo

$$f \ = \sum_n \langle f, \tilde{f}_n\rangle f_n$$

gdje je $(\tilde{f}_n)_n$ kanonski dualni bazni okvir pridružen $(f_n)_n$ i red konvergira u normi prostora $L^2(\mathbb{R})$. Sada su naše "elementarne funkcije" f_n. Zanima nas postoji li neki način odabira okvira $(f_n)_n$ kojim bi koeficijenti $\langle f, f_n\rangle$ predstavljali neko korisno svojstvo za f. Naravno, primjena određuje ono što nam je u danom trenutku korisno. Nas će zanimati mogućnost konstrukcije baznog okvira $(f_n)_n$ takvog da koeficijenti $\langle f, f_n\rangle$ budu upravo vrijednosti od f, na primjer $f(n)$. Vidjeti ćemo da je to moguće ako posvetimo pažnju funkcijama koje su pojasno ograničene na određenom intervalu.

Ključ je u sljedećem računu koji je zasnovan na svojstvima pojasno ograničenih funkcija i činjenici da je Fourierova transformacija unitarno preslikavanje. Neka su $f \in PW(\mathbb{R})$ i $a \in \mathbb{R}$ fiksni. Iz teorema 4.1.4 znamo da je f glatka i da formula inverzije $f(x) \ = \ (\hat{f})^\vee(x)$

vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$. Primjetimo da vrijedi $\hat{f}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \hat{f}$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
\langle f, T_a d_\pi \rangle &= \langle \hat{f}, (T_a d_\pi)^\wedge \rangle \\
&= \langle \hat{f}, M_{-a}\hat{d}_\pi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{e^{-2\pi i a\xi}\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i a\xi}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{2\pi i a\xi}d\xi \\
&= (\hat{f})^\vee(a) \;=\; f(a).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

pri čemu se u prvom koraku koristi Parsevalova jednakost. Ovo razmatranje navodi nas na klasični teorem o uzorkovanju(također pozat i kao *Shannon Sampling Theorem, Shannon-Whitaker Sampling Theorem, Nyquist-Shannon Sampling Theorem*)

Teorem 4.2.1 (Klasični teorem o ozorkovanju)**.** *Ako je $0 < b \leq 1$, onda za sve $f \in PW(\mathbb{R})$ imamo:*

$$f(x) = b \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(bn)\frac{\sin \pi(\xi - bn)}{\pi(\xi - bn)}, \tag{4.4}$$

pri čemu red bezuvjetno konvergira u L^2-normi.

Dokaz. Po teoremu 4.1.4 znamo da je $(T_{bn}d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ b^{-1}-napeti bazni okvir za $PW(\mathbb{R})$, Dakle, za dano $f \in PW(\mathbb{R})$ imamo

$$f = b \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, T_{bn}d_\pi \rangle T_{bn}d_\pi, \tag{4.5}$$

pri čemu red bezuvjetno konvergira u L^2-normi. Iz jednakosti 4.3 imamo $\langle f, T_{bn}d_\pi \rangle = f(bn)$, slijede jednadžbe 4.4 i 4.5. □

Dakle, pojasno ograničene funkcije f u Paley-Wienerovom prostoru u potpunosti su određene sa prebrojivo mnogo vrijednosti $f(bn), n \in \mathbb{Z}$, dok je $b \leq 1$. Primijetimo da postoji beskonačno mnogo funkcija(uključujući i glatke funkcije) čija vrijednost se poklapa sa vrijednošću funkcije f u točkama uzorkovanja bn, ali se razlikuju od f u drugim točkama. No, Paley-Wienerov teorem nam kaže da su pojasno ograničene funkcije zapravo restrikcije kompleksnih analitičkih funkcija na prostor $\mathbb{R}$. Analitičke funkcije imaju mnoga ograničenja, pa nije tako iznenađujuće da su pojasno ograničene funkcije određene sa samo prebrojivo mnogo vrijednosti. Ipak, točke uzorkovanja moraju biti dovoljno guste.
Ako odaberemo $b > 1$, onda niz $(T_{bn}d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ nije fundamentalan u $PW(\mathbb{R})$ pa ni funkcije

$f \in PW(\mathbb{R})$ nisu u potpunosti određene vrijednostima $(f(bn))_{n\in\mathbb{Z}}$. Ukoliko odaberemo $b = 1$, $(T_n d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ je ortonormirana baza za $PW(\mathbb{R})$ i ovu situaciju zovemo *kritično uzorkovanje* ili *uzorkovanje Nyquistove gustoće*. Kada je $0 < b < 1$ niz $(T_{bn} d_\pi)_{n\in\mathbb{Z}}$ je neegzaktan napeti okvir za $PW(\mathbb{R})$, u tom slučaju govorimo o *preuzorkovanju*. Funkciju možemo rekonsturirati samo ako imamo kritično uzorkovanje ili preuzorkovanje. Preuzorkovanje ima mnoge prednosti u primjenama, jer u pozadini ovog slučaja imamo neegzaktan bazni okvir.Teorija uzorkovanja je jedna od glavnih tema u modernoj matematici i teoriji signala.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, (2017), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/np/predavanja/np-1718.pdf.

[2] ______, *Notes on frames*, 2017, https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/frames/notes%20on%20frames%20final.pdf.

[3] D. Gilliam, *Mollifiers and Approximation by Smooth Functions with Compact Support*, http://texas.math.ttu.edu/~gilliam/f06/m5340_f06/mollifiers_approx.pdf.

[4] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Birkhäuser, 2011.

[5] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska Knjiga, 1981.

[6] M. Young, *The Stone-Weierstrass Theorem*, (2006), http://www.mast.queensu.ca/~speicher/Section14.pdf.

[7] H. Šikić, *Mjera i integral*, (2012), https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mii/mii_predavanja.pdf.

Sažetak

U ovome radu izložene su osnove Fourierove transformacije na Banachovom prostoru $L^1(\mathbb{R})$ i Hilbertovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Također, opisana su glavna svojstva Paley-Wienerovog prostora i dokazan je teorem o uzorkovanju na tom prostoru. Rad je podijeljen u četiri idejne cjeline, u prvom poglavlju navedeni su rezultati iz teorije normiranih prostora, te mjere i integrala koji su potrebni u proučavanju Fourierove transformacije. U drugome dijelu pažnju smo posvetili baznim okvirima koji se pokazuju korisnima u samom teoremu o uzorkovanju. Treće poglavlje posvećeno je Fourierovoj transformaciji. U četvrtom poglavlju uvodi se Paley-Wienerov prostor, proučavaju se svojstva tog prostora i na samom kraju, dokaže se teorem o uzorkovanju.

Summary

In this thesis we introduce outlines of Fourier transform in Banach space $L^1(\mathbb{R})$ and Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. Also, main properties of Paley-Wiener space is disscused and Sampling theorem has been proved. The thesis consists of four parts. Chapter 1 is a review of normed linear spaces theory and measure and integration theory, needed in coming chapters. Chapter 2 is devoted to frames, which will show useful in the Sampling theorem. In Chapter 3 we commit to Fourier transform. In final chapter, Paley-Wiener space has been introduced, main properties have been brought up and Classical Sampling Theorem has been demonstrated.

Životopis

Rođena sam 4.srpnja 1993. godine u Splitu. Nakon završene osnovne škole u Starom Gradu, upisala sam opću gimnaziju u Jelsi. Maturirala sam 2012. godine i iste godine upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Splitu koji sam završila 2015. godine. Po završetku preddiplomskog studija upisala sam diplomski studij Primijenjene matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.