Faktorizacijske algebre u kvantnoj teoriji polja

Globlek, Fran

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Fran Globlek

FAKTORIZACIJSKE ALGEBRE U KVANTNOJ TEORIJI POLJA

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Fran Globlek

Diplomski rad

Faktorizacijske algebre u kvantnoj teoriji polja

Voditelj diplomskog rada: doc. dr. sc. Zoran Škoda

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2018.

> *Then, said Stephen, you pass from point to point, led by its formal lines; you apprehend it as balanced part against part within its limits; you feel the rhythm of its structure. (. . .) You apprehend it as complex, multiple, divisible, separable, made up of its parts, the result of its parts and their sum, harmonious.*

J. Joyce, *A Portrait of the Artist as a Young Man*

Zahvaljujem svom mentoru Zoranu Škodi na svoj pomoći, dobroj volji i beskonačnoj susretljivosti, na svim novim avenijama znanosti koje mi je pokazao i na svim pričama koje je uvijek užitak slušati. Hvala mojoj majci i mojem ocu, čija je konstantna potpora i vjera u mene uvijek bila inspiracija i pokretala me iz dana u dan. Svim dragim prijateljima hvala na svoj sreći koju smo dijelili.

Sažetak

Algebraski pristupi kvantnoj teoriji polja fizikalnim opservablama nastoje dodijeliti matematičku strukturu, stoga ih možemo smatrati formalizacijom Heisenbergove slike kvantne mehanike. U ovom se radu bavimo njihovom faktorizacijskom strukturom koja omogućuje množenje opservabli definiranih na disjunktnim skupovima. Na motivirajućem primjeru konačno dimenzionalne teorije uz faktorizacijsku strukturu prirodno dobivamo i BV formalizam. Klasičnoj teoriji pristupamo pomoću teorije deformacije, dok kvantni BV formalizam promatramo kao rezultat deformacijske kvantizacije klasične teorije.

Ključne riječi: faktorizacijske algebre, opservable, BV formalizam, teorija deformacije, deformacijska kvantizacija

Factorization Algebras in Quantum Field Theory

Abstract

Algebraic approaches to quantum field theory aim to assign mathematical structure to physical observables, akin to a formalization of the Heisenberg picture of quantum mechanics. In this work we consider their factorization structure which enables one to multiply observables defined on disjoint subsets. On the motivating example of a finite dimensional theory we also naturally recover the BV formalism. We interpret classical theory through the lens of deformation theory where we reiterate these points, whereas the quantum BV formalism is viewed as the result of a deformation quantization of the classical theory.

Keywords: factorization algebras, observables, BV formalism, deformation theory, deformation quantization

Sadržaj

1 Uvod

U ovom ćemo se radu baviti istraživanjem nekih od aspekata jednog od najnovijih pristupa kvantnoj teoriji polja koji se bazira na strukturi *faktorizacijske algebre*. Započet ćemo njenom definicijom, dok će cilj čitavog uvoda biti demonstrirati kako ova struktura prirodno slijedi iz kohomološkog pristupa integraciji konačno dimenzionalnog modela na klasičnoj razini te na kvantnoj, shvaćenoj kao deformaciji klasične. Tek ćemo se kasnije baviti realističnim slučajem beskonačno mnogo stupnjeva slobode. Prilikom toga ćemo razviti klasični BV formalizam i pokazati jedan mogući pristup njegovoj kvantizaciji temeljen na deformacijskoj kvantizaciji.

Faktorizacijske algebre u ovom su kontekstu razvijene u radu Costella i Gwilliama [7, 8, 17] i baziraju se na prijašnjem radu Bellinsona i Drinfelda [2] na kiralnim algebrama.

♣ *Opaska.* Često ćemo koristiti jezik i pojmove teorija kategorija. Kratki uvod u to gradivo dan je u dodatku A jer smatramo da bi takva digresija na ovome mjestu kvarila kontinuitet i jasnoću ovog uvoda. Osim toga, od čitatelja/ice se očekuje familijarnost s topologijom, diferencijalnom i pogotovo simplektičkom geometrijom. U dodatku A se nalazi i vrlo kratki osvrt na potrebnu homološku algebru. ♣

1.1 Uvod u faktorizacijske algebre

Faktorizacijske algebre su jedan od mogućih opisa fizikalnih opservabli. Ideja je da smijemo množiti opservable isključivo ako među njima nema preklopa u prostorvremenu. Ovo je povezano sa stvarnim mjernjima na više načina. Budući da nam je za svako mjerenje potreban neki mjerni uređaj koji zauzima određen prostor, dva mjerenja možemo izvršiti bilo istodobno, no s prostorno udaljenim detektorima, bilo na istom mjestu, no tako da prvi mjerni uređaj uklonimo prije nego što postavimo drugi. S druge strane, znamo iz kvantne mehanike koliki je samo mjerenje i njegova interpretacija konceptualni problem. Zato ima smisla a priori reći da ne možemo kombinirati preklapajuće opservable.

1.1.1 Predfaktorizacijske algebre

Prije no što definiramo što točno mislimo pod pojmom faktorizacijske algebre, definirat ćemo predfaktorizacijsku algebru. To je zapravo struktura koja će nas najviše zanimati pogotovo jer opservable promatramo sa stanovišta perturbativne teorije. Neka je $\mathcal{M}$ topološki prostor i neka su $Ouv(\mathcal{M})$ njegovi otvoreni skupovi[1].

1 Definicija. *Predfaktorizacijska algebra $\mathcal{F}$ nad M je dodjeljivanje kolančanog kompleksa $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ svakom $\mathcal{U} \in Ouv(\mathcal{M})$ zajedno s dodatnim svojstvima (u kojima su svi navedeni skupovi otvoreni):*

1. *Za svaki podskup $\mathcal{U} \to \mathcal{V}$ postoji kolančano preslikavanje $m_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$. Zatim, za svaku konačnu kolekciju po parovima disjunktnih skupova $\{\mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{V}\}_{i\in\{1,\dots,n\}}$ postoji kolančano preslikavanje $m_{\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_n}^{\mathcal{V}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(\mathcal{U}_n) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$. Osim toga, $m_{\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_n}^{\mathcal{V}}$ je invarijantna na djelovanje S_n na njene argumente te je $m_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = id_{\mathcal{F}(\mathcal{U})}$.*

2. *Neka je $(\mathcal{V}_j)_{j\in J}$ skup po parovima disjunktnih podskupova $\mathcal{W}$, te neka su nadalje $(\mathcal{U}_{ij})_{i\in I_j}$ po parovima disjunktni podskupovi svakog V_j. Idući dijagram je komutativan:*

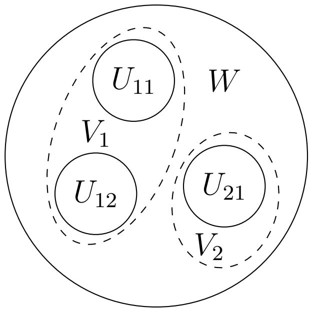
$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{(i,j)\in\coprod_k I_k} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{ij}) \arrow[rr, "m^{\mathcal{W}}_{(\mathcal{U}_{ij})\coprod_k I_k}"] \arrow[dr, "m^{\mathcal{V}_j}_{(\mathcal{U}_{ij})_{i\in I_j}}"'] & & \mathcal{F}(\mathcal{W}) \\
& \bigotimes_{j\in J} \mathcal{F}(\mathcal{V}_j) \arrow[ur, "m^{\mathcal{W}}_{(\mathcal{V}_j)_{j\in J}}"'] &
\end{tikzcd}$$

♣ *Opaska.* Istaknimo par stvari oko ove definicije.

- Definirali smo predfaktorizacijsku algebru kao dodjeljivanje kolančanih kompleksa skupovima. Poseban slučaj je dodjeljivanje abelovih grupa: kokomplekse samo trebamo koncentrirati u nuli. Definiciju je moguće i generalizirati na bilokoju monoidalnu kategoriju.

- Predfaktorizacijska algebra nad praznim skupom $\mathcal{F}(\varnothing)$ je komutativna unitalna algebra. Nadalje, budući da je $\varnothing$ inicijalan objekt u kategoriji **Set**, inkluzija $\varnothing \hookrightarrow \mathcal{U}$ inducira preslikavanje $\mathcal{F}(\varnothing) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

[1] Zloupotrebom jezika topološkim prostorom zovemo samo $\mathcal{M}$, iako je precizno govoreći on dvojka $(\mathcal{M}, Ouv(\mathcal{M}))$.



$$\begin{tikzcd} F(U_{11})\otimes F(U_{12})\otimes F(U_{21}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ F(V_1)\otimes F(V_2) \arrow[r] & F(W) \end{tikzcd}$$

Slika 1.1: Prikaz faktorizacijske strukture na primjeru disjunktih diskova.

- Drugo svojstvo ne govori ništa više od kompatibilnosti inkluzija s kompozicijama preslikavanja kolanaca i lakše ga je razumijeti specijalizacijom. Tako na primjer za svaku višestruku inkluziju oblika $\mathcal{U} \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathcal{W}$, kompozicija $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V}) \to \mathcal{F}(\mathcal{W})$ se slaže s mapom $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{W})$. Sve ostalo je samo generalizacija toga na bilokakve inkluzije. Zbog ovoga predfaktorizacijsku algebru možemo smatrati bliskom predkosnopu. Općenito, $Ouv(\mathcal{M})$ možemo smatrati kategorijom u kojem su objekti otvoreni skupovi, a morfizmi su inkluzije.

- Na kraju, primjetimo da ništa u ovoj definiciji ne govori konkretno o opservablama. Za razliku od na primjer *mreže opservabli*, ova struktura nije namjenjena isključivo za opis fizike, već se javlja i drugdje [2, 18].

♣

Dio naziva vezan uz faktorizaciju je specijalni slučaj strukturnog preslikavanja s $\mathcal{V} = \coprod_i U_i$, jer tad imamo preslikavanje

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}(\mathcal{U}_n) \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_n) \tag{1.1}$$

uz sva asocijativna svojstva koja slijede iz drugog dijela definicije. No ako $\mathcal{F}$ ne daje striktnu modoidalnu kategoriju, ovaj slučaj daje “opušteniju” strukturu A_∞ algebre.

◇ *Primjer* 1. Svaka asocijativna algebra A definira predfaktorizacijsku algebru $\mathcal{A}$ nad $\mathbb{R}$ tako da svakom otvorenom skupu (a, b) dodijelimo $\mathcal{A}((a, b)) = A$.

◇ *Primjer* 2. Neka je F predkosnop u Abelovoj kategoriji. Tada definiramo predfaktorizacijsku algebru kao $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \mathrm{Sym}F(\mathcal{U})$. Strukturna preslikavanja $F(\mathcal{U}_i) \to$

$F(\mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2)$, za disjunktne $(\mathcal{U}_i)_{i\in\{1,2\}}$ induciraju preslikavanje

$$F(\mathcal{U}_1) \coprod F(\mathcal{U}_2) \to F(\mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2) \tag{1.2}$$

pa zbog Sym$(F(\mathcal{U}_1) \coprod F(\mathcal{U}_2)) \cong$ Sym$(F(\mathcal{U}_1))\otimes$Sym$(F(\mathcal{U}_2))$ imamo i strukturno preslikavanje potrebno za definiciju predfaktorizacijske algebre:

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}_1) \otimes \mathcal{F}(\mathcal{U}_2) \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_1 \coprod \mathcal{U}_2). \tag{1.3}$$

Primjetimo također i da je prirodno definirati kategoriju predfaktorizacijskih algebra nad $\mathcal{M}$ s vrijednostima u $\mathcal{C}$, **pFA**$(\mathcal{M}, C)$. Osim toga, predfaktorizacijskim strukturama možemo prirodno dati monoidalnu strukturu pa govoriti o multikategorijama, no to nam neće biti potrebno u ovom radu.

1.1.2 Faktorizacijske algebre

Predfaktorizacijske algebre treba shvatiti kao lokalne podatke. Cilj odgovarajućeg problema silaska je njih skupiti u globalnu strukturu, kao što mnogostrukost na specifičan način možemo rekonstruirati od lokalnih karti pomoću podataka na preklopima. Ovo možemo učiniti tako da se predfaktorizacijske algebre shvatimo kao predkosnopove i da tražimo odgovarajući kosnop. To je smisao iduće definicije.

2 Definicija. *Faktorizacijska algebra nad M je predfaktorizacijska algebra nad M takva da za svaki $U \hookrightarrow M$ i Weissov pokrivač $\{U_i\}_{i\in I}$*

$$F(U) = \text{colim}\Big(\sqcup_{i,j} F(U_i \cap U_j) \rightrightarrows \sqcup_i F(U_i)\Big)$$

gdje su dva preslikavanja inkluzije $U_i \cap U_j \to U_{i,j}$.

Sjetimo se da je pokrivač Weissov ako je proizvoljan skup točaka sadržan u nekoj okolini. Budući da pričamo o aditivnim kategorijama, ekvivalentno definirajuće svojstvo je da tražimo da je

$$\oplus_{i,j} F(U_i \cap U_j) \to \oplus_i F(U_i) \to F(U) \to 0 \tag{1.4}$$

egzaktni niz.

1.2 Divergencijski kompleks i homološka integracija

Nakon što smo dali potrebne definicije, prelazimo na opis kvantne teorije polja. Tipična situacija je da je dan svežanj $P \to M$, gdje je M neka glatka mnogostrukost. Njegove glatke prereze nazivamo prostorm polja $\mathcal{M} \doteq \Gamma(M, P)$. Fizikalni sustav tada u potpunosti karakterizira lokalni funkcional $S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, te opservable računamo pomoću izraza[2]

$$\langle \mathcal{O} \rangle \doteq \int\limits_{\phi \in \mathcal{M}} \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S(\phi)} \mathcal{O}(\phi) \tag{1.5}$$

tzv. integrala po putevima. On općenito nema dobro definiranu beskonačno dimenzionalnu "mjeru" $\mathcal{D}\phi$. Ipak, kao heuristični izraz on je bio i ostaje neprocjenjiv u razvoju znanosti. Na primjer, kvantne anomalije možemo shvatiti kao nepoštivanje simetrije mjere.

Primjetimo ipak da je moguće dati njegovu definiciju u slučaju slobodnog polja, odnosno kvadratične akcije S, kao generalizaciju gaussijanske integracije. Budući da je standardna praksa da se interagirajuće kvantne teorije polja perturbativno grade počevši od slobodnih teorija, ovakav izraz može dati pravila kako pristupiti tim perturbativnim razvojima. Ta pravila, nazvana Feynmanu u slavu, prikazuju se u dijagramatskoj formi, odnosno kao način crtanja te evaluacije dijagrama koji predstavljaju određeni red u računu smetnje. Feynmanovi dijagrami i pravila odgovaraju složenoj kombinatorici integrala po putevima.

Na temelju ovakve procedure se vrši *renormalizacija*, sistematsko dodavanje lokalnih kontračlanova u S koji osiguravaju konačnost opservabilnih veličina te povezuju teoriju s eksperimentom. Ovo je šturi opis današnjeg pristupa kvantnoj teoriji polja kao što se može naći u [30].

Budući da kvantna mjera integrala po putevima nije dobro definirana, pokušat ćemo pristupiti integraciji na način koji izbjegava integraciju samu po sebi. Ovaj je pristup moguć samo u konačno dimenzionalnom slučaju, no služit će kao motivacija za punu teoriju. U konačnom broju dimenzija integraciju možemo shvatiti pomoću de Rhamovog kompleksa, što je bit homološke integracije [7, §2]. Naime, na kompaktnoj, orijentiranoj n-mnogostrukosti bez rubova M, integracija se faktorizira kroz kohomologiju. To možemo prikazati komutativnim dijagramom na idući način,

[2]Normaliziranog tako da $\langle 1 \rangle = 1$.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^n(M) \arrow[rr, "\int_M"] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \\
& H^n(M) \arrow[ur, "<[M],\text{-}>"'] &
\end{tikzcd}$$

gdje je preslikavanje $\Omega^n(M) \to H^n(M)$ jednostavno kanonsko uzimanje klase ekvivalencije. Ovo je naravno samo posljedica Stokesovog teorema. Ako odaberemo neku glatku mjeru μ takvu da je $\int_M \mu = 1$ i koja nije nigdje negativna, očekivanu vrijednost bilokoje $f \in C^\infty(M)$ možemo shvatiti kao klasu kohomologije $[f\mu] \in H^n(M)$.

U beskonačno dimenzionalnom slučaju de Rhamov kompleks nije dobar jer ne postoji "$\lim\limits_{n\to\infty} H^n(M)$". Integraciju ne možemo shvatiti pomoću kohomologije. Međutim, analogni kompleks koji ipak ostaje primjeren je *divergencijski kompleks* i on daje sličnu interpretaciju integracije.

Glavni sastojak u slučaju divergencijskog kompleksa je također probabilistička mjera μ. Naime, kontrakcijom k-polivektorskog polja s μ dobijamo $n-k$-formu. Stoga ova kontrakcija inducira novi kompleks na idući način,

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(M, \wedge^n TM) \arrow[r] \arrow[d, "\vee\mu"] & \dots \arrow[r] & \Gamma(M, \wedge^2 TM) \arrow[r] \arrow[d, "\vee\mu"] & \Gamma(M, TM) \arrow[r] \arrow[d, "\vee\mu"] & C^\infty(M) \arrow[d, "\vee\mu"] \\
C^\infty(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \dots \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{n-2}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^{n-1}(M) \arrow[r, "\mathrm{d}"] & \Omega^n(M)
\end{tikzcd}$$

Ako μ nigdje nije ne iščezava, imamo izomorfizam. Definirajmo diferencijal na gornjem lancu polivektora kao divergenciju polivektorskih polja,

$$\mathrm{div}_\mu \doteq (\vee\mu)^{-1} \circ \mathrm{d} \circ (\vee\mu). \tag{1.6}$$

Očito je da je ovo divergencija ako gledamo samo preslikavanje $\Gamma(M, TM) \to C^\infty(M)$, a njeno djelovanje lako možemo proširiti na polivektorska polja. Sve što sad moramo napraviti jest uzeti homologiju ovog kompleksa. Rezultat je isti kao da promatramo integraciju pomoću "top forme" u de Rhamovom slučaju. Naravno, u beskonačno dimenzionalnom slučaju ne postoji mjera μ, no nadamo se da je divergencijski kompleks ipak lakše generalizirati. Promotrimo ovo detaljnije.

1.2.1 *Primjer: gaussijanska integracija*

Pogledajmo na najjednostavnijem primjeru kako ova tehnologija radi. Uzmimo za početak mjeru

$$\mu = \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\sum x_i A_{ij} x_j\right\} \mathrm{d}^n x \tag{1.7}$$

gdje je A_{ij} nesigularna matrica. Izračunajmo njenu običnu divergenciju $\mathrm{div}_\mu : \mathfrak{X}(M) \to \mathbb{R}$, definiranu na uobičajen diferencijalno-geometrijski način za neko vektorsko polje V s polinomijalnim koeficijentima kao

$$(\mathrm{div}_\mu V)\mu = \pounds_V \mu = \mathrm{d} \circ \imath_V \mu \tag{1.8}$$

gdje smo iskoristili Cartanovu magičnu formulu i zatvorenost μ [29, §5.4]. U nekim lokalnim koordinatama možemo pisati $V = \sum v_i \partial_i$. Tako dobivamo

$$\mathrm{div}_\mu(\sum v_i \partial_i) = -\frac{2}{\hbar}\sum_{ij} v_i x_j A_{ij} + \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x^i} \tag{1.9}$$

Ovaj izraz govori mnogo toga. Ako, na primjer, promotrimo samo jednu dimenziju i uzmemo $V = (x)^p \partial_x$, tada imamo

$$\mathrm{div}_\mu(V) = -\frac{2}{\hbar}(x)^{p+1}A + p \cdot (x)^{p-1} \tag{1.10}$$

Ako uzmemo homološke klase vrijedi

$$\frac{2A}{\hbar}[x^{p+1}] = p[x^{p-1}] \tag{1.11}$$

Iz ove rekurzije lako slijedi da za parne potencije imamo

$$[x^{2n}]/[1] = (\frac{\hbar}{2A})^n (2n-1)!! = \frac{\int \mathrm{d}x e^{-\frac{1}{\hbar}Ax^2} x^{2n}}{\int \mathrm{d}x e^{-\frac{1}{\hbar}Ax^2}}. \tag{1.12}$$

Ovo je dobro poznati rezultat. Naravno, nije mogao nikako drugačije ni ispasti. U više dimenzija, s polinomijalnim funkcijama višeg reda od kvadratičnog, kombinatorika ubrzo postaje veoma komplicirana, no ipak se može formulirati koristeći Feynmanove dijagrame [17, 2.3]. Potpuno analogna formula vrijedi i ako uzemo neku općenitu mjeru tog oblika

$$\mu = e^{-\frac{1}{\hbar}S(x)}\mathrm{d}^n x \tag{1.13}$$

čime dobivamo vezu s fizikom. U tom slučaju dobivamo

$$\hbar\,\mathrm{div}_\mu(\sum v_i\partial_i) = -\sum_i v_i\frac{\partial S}{\partial x_i} + \hbar\sum_i\frac{\partial v_i}{\partial x^i} \tag{1.14}$$

gdje smo izraz pomnožili s $\hbar \neq 0$ jer se homologija ne mijenja ako promatramo $\hbar\mathrm{div}_\mu$. U tom je slučaju lakše govoriti o *klasičnom limesu*. Njega definiramo kao isti operator ali za $\hbar \to 0$. Tada isti "recept" kao prije daje kritične točke funkcije S jer drugi član iščezava. Možemo pisati

$$\hbar\,\mathrm{div}_\mu = -\imath_{\mathrm{d}S} + \hbar\Delta \tag{1.15}$$

U beskonačno dimenzionalnom slučaju, vrijedit će slične relacije, ali će ova obična derivacija biti funkcionalna derivacija po poljima. U klasičnom ćemo limesu dakle dobiti upravo uvjet da vrijede Euler-Lagrangeove jednadžbe.

1.3 Predfaktorizacijska struktura opservabli

U prošlom smo poglavlju vidjeli da je očekivana vrijendost opservable shvaćenog u konačno dimenzionalnom slučaju kao polinom dana s $H^0(P(\mathbb{R}^n)) = P(\mathbb{R}^n)/\mathrm{Im\ Div} \cong \mathbb{R}$. Da bismo pokazali predfaktorizacijsku strukturu opservabli, prostor "polja" ćemo prvo proširiti s $P(\mathbb{R}^n)$ na $P(C^\infty(\mathbb{R}^n))$. Time se lakše ograničiti na neki podskup U koristeći na primjer test funkcije i pisati $P(C^\infty(U))$ za neki podskup $U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Očito, na $P(C^\infty(U_1)) \otimes P(C^\infty(U_2))$ postoji množenje za bilokoje $U_{1,2} \hookrightarrow V$ bez obzira na preklop tih skupova. Pišimo $H^0(U)$ za opservable definirane kao prije kao kvocijent divergencije, no zadane lokalno

$$H^0(U) \doteq P(C^\infty U)/\mathrm{Im\ Div}_U \tag{1.16}$$

gdje smo domenu operatora divergencije ograničili na vektorska polja definirana na U. U ovom slučaju množenje $H^0(U_1) \otimes H^0(U_2) \to H^0(V)$ ne možemo definirati općenito, jer

$$(P(C^\infty(U_1))/\mathrm{Im\ Div}_{U_1}) \otimes (P(C^\infty(U_2))/\mathrm{Im\ Div}_{U_2}) \to P(C^\infty(V))/\mathrm{Im\ Div}_V \tag{1.17}$$

nema nužno smisla. Uzmimo bilokoje elemente $p_{1,2} \in P(C^\infty(U_{1,2}))$ i pišimo $I_{1,2}$ za Im $\mathrm{Div}_{U_{1,2}}$. Tada su $(p_{1,2} + I_{1,2})$ po definciji elementi $H^0(U_{1,2})$, i njihovo množenje bi dalo produkt

$$(p_1 + I_1)(p_2 + I_2) = p_1 p_2 + (p_1 I_2 + p_2 I_1 + I_1 I_2) \tag{1.18}$$

Na desnoj strani bismo članove u zagradi nekako morali prikazati kao Im Div_V. Sjetimo se da za bilokoju funkciju f i vektorsko polje X divergencija zadovoljava svojstvo

$$\mathrm{Div}(fX) = f\mathrm{Div}X + X(f) \tag{1.19}$$

Međutim, lako se uvjeriti da vrijedi $f\mathrm{Div}X = \mathrm{Div}(fX)$ ako f i X imaju disjunktne nosače, odnosno da $X(f)$ iščezava. Budući da je po definiciji $I_{1,2} \subseteq P(C^\infty(U_{1,2}))$, pod uvjetom da su U_1 i U_2 disjunktni čitavu zagradu možemo "uvući" pod operator divergencije koji je definiran na čitavom V. Time smo demonstrirali da

1 Propozicija. *Polinomijalne opservable promatrane konačno dimenzionalne teorije imaju predfaktorizacijsku strukturu, odnosno postoji produkt*

$$H^0(P(C^\infty(U_1))) \otimes H^0(P(C^\infty(U_2))) \to H^0(P(C^\infty(V)))$$

za disjunktne $U_{1,2} \hookrightarrow V$.

Sličan argument koji se također temelji na svojstvu divergencije nalazi se u [7, §2.3]. Ondje se nalazi i argument za kvantne opservable koji se temelji na spektralnim nizovima kojeg nećemo ovdje iznositi.

2 Klasična teorija polja

U ovom ćemo se poglavlju baviti opisom klasične teorije polja. Prvo ćemo detaljnije promotriti divergencijski kompleks i što nam on govori o klasičnoj teoriji, a zatim ćemo vidjeti kako klasičnu teoriju možemo formulirati pomoću teorije deformacija.

2.1 Derivirano mjesto kritičnih točaka

U prethodnom smo se poglavlju pri promatranju klasične teorije polja susreli s kompleksom

$$\wedge^n TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} \dots \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} \wedge^2 TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} C^\infty(M)$$

i vidjeli da sadrži istu informaciju kao Euler-Lagrangeove jednadžbe. Nameće se pitanje: čemu služi ostatak kompleksa? Odgovor je složene geometrijske naravi i fizikalno odgovara BV formalizmu. Klasična teorija polja opisana je mjestom kritičnih točaka akcijskog funckionala,

$$\text{Crit}(S) \doteq \{\phi \in \mathcal{M} \,|\, \mathrm{d}S(\phi) = 0\} \tag{2.1}$$

gdje je $\mathcal{M}$ kao i prije prostor klasičnih polja. Zasad ćemo staviti $\mathcal{M} \mapsto M$, gdje je M *konačno* dimenzionalna mnogostrukost, kao što smo i dosad radili. Ovo geometrijsko mjesto možemo promatrati i kao intersekciju grafa 1-forme $\mathrm{d}S$ sa nul-prerezom $0 \in T^*M$. Označimo taj graf sa $\Gamma(\mathrm{d}S)$. Glavna pouka algebarske geometrije jest da prostor možemo promatrati ako gledamo funkcije nad njim, stoga mjesto kritičnih točaka možemo promatrati i kao skup takvih funkcija. Konkretno,

$$\mathcal{O}(\text{Crit}(S)) = \mathcal{O}(\Gamma(\mathrm{d}S)) \otimes_{\mathcal{O}(T^*M)} \mathcal{O}(M) \tag{2.2}$$

Još nemamo nikakav kompleks. Njega prirodno dobivamo kao homološko razlučivanje mjesta kritičnih točaka (dodatak A). Ovo je osnovna konstrukcija u homološkoj algebri i potpuno je prirodna budući da upravo želimo shvatiti teoriju polja na homološki način. Rezultat je *derivirano mjesto kritičnih točaka*,

$$\mathcal{O}(\text{dCrit}(S)) = \mathcal{O}(\Gamma(\mathrm{d}S)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}(T^*M)} \mathcal{O}(M) \tag{2.3}$$

Epitet *deriviran* dolazi od istoimenog pristupa geometriji koji se, ugrubo, temelji na razlučivanjima, a povijesno je imao prvu primjenu na netransverzalne intersekcije. Korisna referenca je [34]. Slijedeći [17, §2.1], možemo odabrati Koszulov kompleks $K^\bullet$ kao razlučivanje $\mathcal{O}(\Gamma(\mathrm{d}S))$ nad $\mathcal{O}(T^*M) = \wedge^\bullet TM$,

$$K^\bullet = 0 \longrightarrow \mathcal{O}(T^*M) \otimes_{\mathcal{O}(M)} \wedge^n TM \xrightarrow{\qquad\qquad} \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\quad} \mathcal{O}(T^*M) \otimes_{\mathcal{O}(M)} \wedge^2 TM \longrightarrow \mathcal{O}(T^*M) \otimes_{\mathcal{O}(M)} TM \longrightarrow \mathcal{O}(T^*M)$$

čime dobivamo eksplicitnu komutativnu diferencijalno graduiranu algebru koja opisuje funkcije $\mathcal{O}(\mathrm{dCrit}(S))$ kao i to je upravo kompleks do kojeg smo prethodno došli.

$$K^\bullet \otimes_{\mathcal{O}(T^*M)} \mathcal{O}(M) = \wedge^n TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} \dots \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} \wedge^2 TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} TM \xrightarrow{-\vee \mathrm{d}S} O(M)$$

No primjetimo da ako pišemo $\wedge^\bullet TM = \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}(M)}(TM[1])[-1]$ ovo možemo protumačiti kao kompleks funkcija nad *pomaknutim kotangetnim svežnjem* $T^*[-1]M$.

2.1.1 Pomaknuti kotangentni svežanj i BV formalizam

Prisjetimo se da za obični kotangentni svežanj možemo pisati

$$\mathcal{O}(T^*M) = \mathrm{Sym}(M^\vee \oplus M) \tag{2.4}$$

što samo govori o tome kakve možemo lokalno uzeti koordinate. S tim u skladu na pomaknutome svežnju po definiciji imamo

$$\mathcal{O}(T^*[-1]M) = \mathrm{Sym}(M^\vee \oplus M[1]) \tag{2.5}$$

Uz oba ova izraza podrazumijeva se da dolazi i diferencijal. Uzmimo da je $E[-1] = T^*[-1]M$, odnosno

$$E = M \oplus M^\vee[-1] \tag{2.6}$$

Budući da smo M shvatili kao konačno dimenzionalan prostor polja, ovo nam govori da osim polja M moramo promatrati i *antipolja* $M[-1]$. Kasnije ćemo vidjeti da ta antipolja odgovaraju onima u BV (Batalin-Vilkovisky) formalizmu, kao što je dan u [19, §17,18].

Obični kotangentni svežanj na sebi prirodno nosi simplektičku strukturu. Dapače, on je i najjednostavniji primjer simplektičke mnogostrukosti. Do analogne zagrade ćemo u ovom slučaju doći tako da ih konstruiramo na polivektorskim poljima. Budući da vektorska polja već imaju zagradu, oni Liejevu, proces je jasan:

1. na vektorskim poljima on je Liejeva zagrada, no kohomološkog stupnja 1 zbog pomaka

2. na funkcijama je Liejeva derivacija, također kohomološkog stupnja 1

3. na polivektorskim polja tražimo kontinuaciju tako da imamo kompatibilnost s antisimetričnim produktom $\wedge$

Ovakav objekt zove se Schoutenova zagrada i označujemo ju s $\{\_,\_\}$. Za neki $X \in TM$ vrijedi

$$-\imath_{\mathrm{d}S}X = -X(S) = -\pounds_X S \doteq -\{X,S\} = \{S,X\} \tag{2.7}$$

stoga diferencijal možemo pisati kao $-\vee_{\mathrm{d}S} = \{S,\_\}$. Nilpotentnost diferencijala znači da vrijedi

$$\{S,S\} = 0 \tag{2.8}$$

U klasičnom BV formalizmu ova jednadžba se zove *klasična master jednadžba* (eng. *classical master equation*)[3]. No vidjeli smo da trebamo gledati pomaknuti kotangentni svežanj. Zato proširujemo definiciju Schoutenove zagrade na njega:

3 Definicija. *Schoutenovu zagradu na pomaknutom kotangentnom svežnju definiramo prvo za $\alpha,\beta \in M^\vee$, $a,b \in M$ tako da*

$$\{\alpha + a, \beta + b\} = \alpha(b) + (-)^{(|a|+1)(|\beta|+1)}\beta(a) \tag{2.9}$$

pa ju zatim proširimo na čitavu algebru kao biderivaciju.

Sad imamo čitav formalizam polja i antipolja izrečen na vrlo jednostavan način i znamo njegov geometrijski smisao. Dakle, sve što trebamo napraviti jest naći neku funkciju S_{BV} nad $E = M \oplus M^\vee[-1]$ takvu da vrijedi klasična master jednadžba

$$\{S_{BV}, S_{BV}\} = 0 \tag{2.10}$$

[3]U hrvatskoj literaturi se redovito koristi izraz "master jednadžba" bez prijevoda. Tu ćemo praksu poštovati. Primjetimo ona nema veze s istoimenim probabilističkim jednadžbama u drugim područjima fizike.

Ako ju rastavimo kao $S_{BV} = S + h_X$, vidimo da mora odvojeno vrijediti nekoliko stvari. Prvo, $\{S, S\} = 0$ što vrijedi po pretpostavci, zatim $\{h_X, h_X\} = [X, X] = 0$ što vrijedi trivijalno. Preostaje $\{h_X, S\} = 0$ što odgovara $XS = 0$.

2.1.2 Baždarne teorije i BV-BRST formalizam

Ovu konstrukciju trebamo poopćiti na baždarne teorije, jer upravo u tom kontekstu dolazimo do degeneriranih jednadžbi gibanja za kakve nam je potreban BV formalizam. U tom slučaju imamo nekakvu Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ i pridruženu joj grupu G koja djeluje na prostor polja. Promotrimo opet integral po putevima. U njemu moramo napraviti zamijenu

$$\int_M e^{-\frac{1}{\hbar}S} \mapsto \int_{M/G} e^{-\frac{1}{\hbar}S} \tag{2.11}$$

da bismo izbjegli integraciju po svim elementima u orbiti G jer ih smatramo fizički ekvivalentnima. To moramo napraviti, budući da čim imamo lokalnu simetriju ne možemo imati dobro definirane jednadžbe gibanja. Razlog tome je jednostavan: ako su dani neki početni uvjeti i neko rješenje, lokalna simetrija znači da možemo lokalno deformirati to rješenje bez da diramo početne uvjete. Jedini način da se osiguramo da ovakva nedeterministička evolucija daje fizikalno rješenje je da kažemo da su sva takva rješenja fizikalno ekvivalentna. To je smisao baždarne simetrije, stoga integriramo po kovarijantama odnosno G-orbitama. U dodatku A pokazali smo da koinvarijante možemo pisati kao

$$M_{\mathfrak{g}} = \mathbb{K} \otimes_{U\mathfrak{g}} M \tag{2.12}$$

gdje je $U\mathfrak{g}$ univerzalna prekrivajuća algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $\mathbb{K}$ neko polje shvaćeno kao trivijalni $\mathfrak{g}$-modul. Kao i prije, da bismo dobili kompleks uzimamo derivirani tenzorski produkt! Ova konstrukcija je poznata i zove se Chevalley-Eilenbergov kompleks za homologiju Lijeve algebre $\mathfrak{g}$-modula M. Oznaka te eksplicitan oblik su

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, M) \doteq (\mathrm{Sym}^\bullet_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}[1]) \otimes_{\mathbb{K}} M, \mathrm{d}) = \mathrm{Sym}^\bullet(g[1] \oplus M) \tag{2.13}$$

Do koinvarijanti dolazimo ako uzmemo H^0 od ovog kompleksa, po konstrukciji. No sad smo umjesto funkcija nad M dobili funkcije nad $\mathfrak{g}[1] \oplus M$. Dakle, ekvivalentan postupak jest da integriramo po

$$\int_{\mathfrak{g}[1]\oplus M} e^{-\frac{1}{\hbar}S} \tag{2.14}$$

Da bismo riješili klasičnu teoriju koju iz ovog dobivamo, kombinirat ćemo ovu konstrukciju s deriviranom slikom pomaknutog kotangentnog svežnja. Rezultat je isti, samo što gledamo funkcije nad $T[-1](g[1] \oplus M)$. Za pomaknuti svežanj nad ovim objektom dobivamo

$$E = \mathfrak{g}[1] \oplus M \oplus (\mathfrak{g}[1] \oplus M)^{\vee}[-1] = \mathfrak{g}[1] \oplus M \oplus M^{\vee}[-1] \oplus \mathfrak{g}^{\vee}[-2] \tag{2.15}$$

Redom imamo *duhove* (eng. *ghosts*), polja, antipolja i *antiduhove*[4]. Ako postoji dodatna baždarna simetrija u obliku baždarno baždarne simetrije (eng. *gauge of gauge*), ovaj postupak ćemo ponoviti nad $\mathfrak{g}[2] \otimes \mathfrak{g}[1] \otimes M$ i dobiti dodatna polja: duhove duhova, antiduhove antiduhova, itd.
Povežimo našu konstrukciju s pristupom u [19, §9]:

1. Napravili smo tzv. Koszul-Tate razlučivanje funkcija nad mjestom kritičnih točaka odnosno rješenja jednadžbi gibanja. Može se pokazati da njena nulta grupa kohomologije odgovara kvocjentu algebre funkcija idealom onih funkcija koje iščezavaju nad mjestom rješenja. Da nema baždarnih simetrija to bi bile klasične opservable.

2. Zatim smo koinvarijante shvatili na derivirani način, proširili fazni prostor još više i napravili Chevalley-Eilenbergovo razlučivanje. Henneaux i Teitelboim ovo zovu longitudinalnim diferencijalom, jer prirodno djeluje uzduž G-orbita. Nulta grupa kohomologije u ovom slučaju daje funkcije konstantne na orbitama baždarne grupe.

Na kraju oba ova diferencijala kombiniramo u jedan, što se u [19] pokazuje koristeći homološku perturbacijsku teoriju. Ovaj bikompleks nosi dvije različite graduacije. Graduaciju vezanu uz Chevalley-Eilenbergov kompleks zvat ćemo *duhovnim* brojem ili graduacijom i označavat ćemo ju s $\mathfrak{gh}|\cdot|$, dok ćemo ukupnu graduaciju označavati samo s $|\cdot|$.

[4]Ovdje su antiduhovi antipolja duhova, što u literaturi nije uvijek slučaj. O tome ćemo više reći u poglavlju o fiksiranju baždarenja.

2.1.3 Eksplicitni izrazi

Sad ćemo dati nekoliko eksplicitnih izraza. Pisat ćemo z^a za skup svih polja i duhova odnosno $z_a^\vee$ za antipolja i antiduhove i $\xi^a = (z^a, (z^\vee)^a)$ kao njihov zbir. Budući da se radi o kotangentnom svežnju, lokalno postoje Darbouxove koordinate tako da neparna simplektička forma glasi

$$\omega \doteq \mathrm{d}z^a \wedge \mathrm{z}_a^\vee = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\mathrm{d}\xi^a \wedge \mathrm{z}_\xi^\vee \tag{2.16}$$

Pomoću njenog inverza moguće je definirati Poissonovu zagradu, koju sada zovemo Schoutenovom zagradom

$$\{A, B\} \doteq \frac{\partial^R A}{\partial z^a}\frac{\partial^L B}{\partial (z^\vee)_a} - \frac{\partial^R A}{\partial (z^\vee)_a}\frac{\partial^L B}{\partial z^a} = \frac{\partial^R A}{\partial \xi^a}\sigma^{ab}\frac{\partial^L B}{\partial \xi^b} \tag{2.17}$$

gdje σ^{ab} označava matricu inverznu σ_{ab}. Kao i kod običnih Poissonovih mnogostrukosti, sad su polja sparena uz odgovarajuća im antipolja pomoću kanonskih komutacijskih relacija, $\{z^a, z_b^\vee\} = \delta_b^a$. Sjetimo se iz teorije superpolja da su lijeve i desne derivacije definirane kao

$$\delta A = \delta\xi^a \frac{\partial^L A}{\partial \xi^a} = \frac{\partial^R A}{\partial \xi^a}\delta\xi^a \tag{2.18}$$

One su potrebne da bismo imali ispravnu antikomutirajuću strukturu zagrade, koja je zbog suprotnih parnosti polja i antipolja u ovom slučaju pomaknuta, $\{A, B\} = -(-)^{(|A|+1)(|B|+1)}\{B, A\}$. Iz dosadašnjih izraza vidimo da za antipolja imamo

$$\mathrm{d}_{BV} z_a^\vee = \{S, z_a^\vee\} = \frac{\partial^R S}{\partial z^a} = \frac{\delta_{EL}^R \mathcal{L}}{\delta z^a} \tag{2.19}$$

stoga uzimanje kohomologije preko njih prisiljava da vrijede Euler-Lagrangeove jednadžbe.

U konačno-dimenzionalnoj kvantnoj teoriji već smo se susreli s nilpotentnim laplasijanom. Ovdje postoji jedna takva prirodna struktura, prikladno nazvana BV-laplasijan i s njim ćemo se susresti pri kvantizaciji,

$$\Delta_{BV} = \frac{\partial}{\partial z^a}\frac{\partial}{\partial z_a^\vee} \tag{2.20}$$

2.2 Klasična teorija polja

Sad ćemo razviti opis klasične teorije polja prikladan za beskonačno mnogo dimenzija. Interagirajućoj teoriji ćemo pristupiti kao *formalnom eliptičkom problemu modula*, što nije ništa drugo nego pažljiv način perturbativnog razvoja i čiji ćemo opis dati u idućoj podsekciji, slijedeći [8, §4].

Klasična teorija će dakle svakom podskupu prostorvremena $\mathcal{U}$ dodijeliti formalni eliptični problem modula koji odgovara rješenjima Euler-Lagrangeovih jednadžbi, $\mathrm{EL}(\mathcal{U})$. Ta će rješenja također morati imati extitderivirani smisao kao što smo vidjeli da je ispravno u prošlim poglavljima. Zatim ćemo definirati klasične opservable kao funkcije na tom skupu rješenja,

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{U}) = \mathcal{O}(\mathrm{EL}(\mathcal{U})) \tag{2.21}$$

Osim toga, tražit ćemo da skup rješenja ima simplektičku formu kohomološkog stupnja -1 kao što je imala i konačno dimenzionalna verzija. U suprotnome bismo mogli krenuti od bilokakvog eliptičnog kompleksa koji nema veze s deriviranim mjestom kritičnih točaka i time nije fizikalan.
Faktorizacijska struktura opservabli lako slijedi iz prirodne restrikcije $\mathcal{U}$ na disjunktne $\mathcal{V}_i \hookrightarrow \mathcal{U}$,

$$\mathrm{EL}(\mathcal{U}) \to \mathrm{EL}(\mathcal{V}_1) \times \cdots \times \mathrm{EL}(\mathcal{V}_n) \tag{2.22}$$

jer se funkcije nad njima povlače i induciraju preslikavanje

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{V}_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Obs}(V_n) \to \mathrm{Obs}(\mathcal{U}) \tag{2.23}$$

Osim toga, EL je snop pa imamo i globalnu, faktorizacijsku strukturu.

2.2.1 Deformacije općenito

Standardna je fizikalna praksa shvatiti interakcije kao smetnju slobodne teorije. Izravne posljedice ovakvog pristupa su brojne: najbitnija teoretska posljedica je da još uvijek moguće fenomene klasificirati pomoću slobodne teorije dok je eksperimentalno najbitnije da je teorija prediktivna. Slične aproksimacije sveprisutne su u svoj znanosti pa ne možemo reći da su svojstvene fizici. Slični problemi javljaju se u matematici, odakle dolazi *teorija deformacija* [26]. Ona nije zapravo aksiomatizirana teorija, već zbir heurističkih pristupa problemima deformacija geometrijskih i/ili algebarskih struktura. Interakcije ćemo promatrati kao deformacije. Valjanost ovog pristupa je neosporiva i njenu najdramatičniju potvrdu vidimo u Landeovom g faktoru elektrona. Kvantizaciju također možemo promatrati kao deformaciju klasične teorije, što je u [7] shvaćeno kao deformacija P_0 operada u BD operad, u [17] pomoću homološke perturbacijske teorije, dok će o pristupu sugestivnog naziva *deformacijska kvantizacija* biti riječi kasnije.

Ipak, treba spomenuti da u samoj kvantnoj elektrodinamici račun smetnje nije dobro definiran. Perturbacijski red je asimptotski red, za što postoje dva argumenta. S jedne strane, za broj Feynmanovih dijagrama u n-tom redu računa smetnje zna se da raste kao $n!$, što osigurava divergentnost njihove sumacije. Imamo i Dysonov argument [10] da ako razvijamo ne po $\alpha \propto e^2$, već po $-\alpha$, fizikalno je jasno da će se svaki virtualni elektron-pozitron par odbijati, stoga je radijus konvergencije nula.

Ovo samo po sebi ne mora biti problem. Dapače, asimptotski red može sadržavati više informacija od one isključivo perturbativne, o čemu nam govori teorija resurgencije [9]. Ostanemo li na primjeru kvantne elektrodinamike, poznato je da je magnetski monopol topološki fenomen. Dapače, ako električni naboj smatramo Noetherinim nabojem, magnetski naboj trebali bismo shvatiti kao topološki naboj. Kao globalni fenomen, on nije vidljiv perturbativnoj analizi. Međutim, klasična elektrodinamika daje određenu *dualnost* ovih dvaju fenomena. Pri zamjeni $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) \to (\mathbf{B}, -\mathbf{E})$, električni i magnetski naboji se mijenjaju na analogan način. Kvantizacija nas vodi na Diracov uvjet kvantizacije naboja,

$$q_m q_e \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{2.24}$$

što znači da je konstanta vezanja magnetskog monopola $\frac{1}{\alpha}$. Račun smetnje sad će dati analogon Taylorovog razvoja funkcije $f(\alpha) = \exp\{-\frac{1}{\alpha}\}$, čiji je radijus konvergencije nula. Iako magnetski monopoli nisu još detektirani, oni su primjer složenijih no u potpunosti ekvivalentnih *instantona* Yang-Mills teorija, čije se konstante vezanja ponašaju isto i time izmiču perturbacijskom računu. Ipak, teorija resurgencije daje način kako iz asimptotskih serija izvući i perturbativni i globalni fenomen. Optimističan pogled na fiziku dakle ne uzima asimptotske redove kao problem, već indikaciju samosuglasnosti i bogatstva teorije.

2.2.2 Problemi modula

Za početak ćemo opisati prostore modula. Jednostavno rečeno, prostor modula je prostor parametara koji klasficira neku familiju matematičkih objekta na u prikladnom smislu gladak način. Prostor modula svih kružnica sa zajedničkim središtem bit će $\mathbb{R}_+$ i odgovara njihovim radijusima. Prostori modula veoma su bitni u fizici. Kao rezultat mnogih no-hair teorema znamo da su crne rupe opisane sa samo nekoliko parametara, masom M, angularnim momentom J i nabojem na površini Q [36, §12.3]. Prostori modula iznimno su bitni u teoriji struna, u kojoj parametre čine *vev*-ovi skalarnih polja, dilatona, i odgovaraju konstantama vezanja teorije [1, §3.3]. Prostore modula kompliciraju razne dualnosti koje teorije struna posjeduju. S-dualnost, na primjer, tvrdi da su strune tipa IIB s konstantom vezanja g ekvivalentne onima s konstantnom vezanja $1/g$. Takvi netrivijalni automorfizmi onemogućavaju prostoru modula jednostavnu strukturu glatke mnogostrukosti već se općenito radi o mnogostrukostima sa singularitetima.

Možemo dati malo konkretniju verziju prostora modula. Slijedeći [26], uzmimo neku strukturu X_0 koja pripada klasi $\mathcal{C}$. Na primjer, X_0 je komutativni, asocijativni produkt u nekoj algebri, a klasa $\mathcal{C}$ su svi asocijativni produkti na istoj algebri. Osim toga treba nam kategorija prostora parametara $\mathcal{W}$ u kojoj svaki objekt W ima istaknutu točku w_0. Ovo su dakle sve moguće klasifikacije deformacija strukture X_0, gdje točki w_0 odgovara nedeformirana struktura X_0. Problem deformacije je sada funktor $\mathrm{Def}^{X_0} : \mathcal{W} \to$ **Set** takav da je $\mathrm{Def}^{X_0}(W)$ skup klasa ekvivalencija familija struktura klase $\mathcal{C}$ parametriziranih prostorom parametara W i vlakno nad w_0 odgovara nedeformiranoj X_0. Reprezentirajući objekt ovog funktora, ako postoji, nazivamo prostorom modula. Prostor modula je dakle "najbolji" parametarski prostor.

2.2.3 Deformacija asocijativne algebre

Ako je $\mathcal{M}$ prostor modula, deformacije ćemo shvatiti kao vektore iz $T_{[X_0]}\mathcal{M}$. Promotrit ćemo konkretan primjer asocijativne algebre A nad poljem $\mathbb{K}$ s produktom X_0. Vidjet ćemo da prirodno dolazimo do struktura koju sadržava BV teorija. Potpuno analogna razmatranja vrijede za Liejeve algebre, koalgebre, bialgebre, no i za klasičnu interagirajuću teoriju.
Uzmimo dakle algebru s nekom bazom $A = \langle e_i \rangle$, $i \in 1, \ldots, n$. Produkt $m_0 : A \otimes A \to A$

zadajemo djelovanjem na bazu i definiramo strukturne koeficijente ${c_{ij}}^k \in \mathbb{K}$

$$m_0(e_i, e_j) = {c_{ij}}^k e_k \tag{2.25}$$

Asocijativnost znači ${c_{ij}}^p {c_{pm}}^t = {c_{ip}}^t {c_{jm}}^p$. Gledat ćemo jednoparametarsku deformaciju u nekom parametru i radimo u $A[[\lambda]]$. Označimo produkt na ovom prostoru sa

$$m(a, b) = m_0(a, b) + \sum_{n \geq 1} \lambda^n m_n(a, b) \tag{2.26}$$

Asocijativnost nam daje skup uvjeta

$$S_n \doteq \sum_{i=0}^{n} \Big(m_{n-i}\big(m_i(a, b), c\big) - m_{n-i}\big(a, m_i(b, c)\big) \Big) = 0 \tag{2.27}$$

za svaki $n \geq 1$. Ubuduće ćemo za nedeformirano množenje pisati $m_0(a, b) = ab$. Ako smo uspjeli dati deformaciju algebre na $A[[\lambda]]/(\lambda^n)$, pitanje je možemo li to proširiti "korak dalje", na $A[[\lambda]]/(\lambda^{n+1})$. Ako da, u principu možemo nastaviti taj proces zauvijek. U slučaju asocijativne algebre tada mora vrijediti

$$\begin{aligned} S_{n+1} = &-a m_{n+1}(b, c) + m_{n+1}(ab, c) - m_{n+1}(a, bc) + m_{n+1}(a, b)c \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \Big(m_{n+1-i}\big(m_i(a, b), c\big) - m_{n+1-i}\big(a, m_i(b, c)\big) \Big) = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Gerstenhaber [14, 33] je deformacije asocijativne algebre povezao s *Hochschildovim kompleksom*, koji se sastoji od:

1. funkcija više varijabli kao kociklusa: $C^n(A, A) \doteq \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$ za $n \in \mathbb{N}$
2. diferencijala $\mathrm{d}_n : C^n(A, A) \to C^{n+1}(A, A)$ definiranog za $n \geq 1$ kao

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}_n f)(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= a_1 f(a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-)^i f(a_1, \ldots, (a_i a_{i+1}), \ldots, a_{n+1}) + (-)^{n+1} f(a_1, \ldots, a_n) a_{n+1} \end{aligned} \tag{2.29}$$

   proširenog s $(\mathrm{d}_0 f)(a) = af - fa$ na "konstantne funkcije".

Označit ćemo Hochschildovu kohomologiju s $HH^\bullet(A)$. Vidimo da vrijedi

$$HH^0(A) = \{ b \in A \,|\, ab - ba = 0, \forall a \in A \} = Z(A). \tag{2.30}$$

Dalje, vidimo da je uvjet

$$(\mathrm{d}_1 g)(a,b) = ag(b) - bg(a) - g(ab) = 0 \tag{2.31}$$

samo Leibnitzovo pravilo, stoga možemo ker d_1 zvati prostorom derivacija Der(A). Leibnitzovo pravilo trivijalno zadovoljavaju elementi im d_0, koje zovemo unutarnjim derivacijama Inn(A). $HH^1(A)$ je dakle prostor vanjskih derivacija.

Ako pogledamo opet jednadžbu $S_{n+1} = 0$, prvi redak je samo $-(\mathrm{d}_2 m_{n+1})(a,b,c)$. Za slučaj da gledamo deformaciju u prvom redu, imamo samo taj član

$$S_1 = -(\mathrm{d}_2 m_1)(a,b,c) = 0 \Rightarrow m_1 \in \ker \mathrm{d}_2 \tag{2.32}$$

No primjetimo da već pri definiciji nedeformiranog množenja imamo slobodu promjene baze. Uzmimo "infinitezimalnu" promjenu baze $T(a) = a + \lambda g(a)$ definiranu na $A[[\lambda]]/(\lambda^2)$. Mora vrijediti

$$\begin{aligned} & T(ab) = T(a)T(b) \\ \Rightarrow \quad & ab + \lambda g(ab) = ab + \lambda(g(a)b + ag(b)) \end{aligned} \tag{2.33}$$

Deformacija elementom iz im d_1 dakle nije zapravo deformacija množenja već samo promjena baze. Netrivijalne deformacije su elementi $HH^2(A)$. Ako je ta grupa prazna, onda je algebra *rigidna*, što znači da deformacije nisu moguće[5]. Može se pokazati, a moguće i pretpostaviti, da $HH^3(A)$ klasificira opstrukcije deformaciji.

Još nismo demostrirali da ovaj jednostavan problem deformacije asocijativne algebre nosi BV strukturu, odnosno da ima zagradu i graduaciju. Graduacija se ne čini kao problem. Za $f \in \mathrm{Hom}(A^{\otimes n}, A)$ stavit ćemo $|f| = n$, i definirati graduiranu algebru

$$C^\bullet(A,A) \doteq \bigoplus_n C^n(A,A) \tag{2.34}$$

Jedan očiti produkt je onaj tenzorski, no pomoću njega ne možemo nikako prikazati diferencijal. Tražimo relaciju oblika $\mathrm{d}f = [m_0, f]$. Ako pogledamo definiciju diferencijala, vidimo da imamo dvije različite alternirajuće sume, takve da redom, po argumentima komponiramo f s m i obratno.

[5] Obrat nije nužno istinit.

Definiramo *Gerstenhaberov produkt*[6] $\diamond : C^m(A,A)[1] \otimes C^n(A,A)[1] \to C^{m+n}(A,A)[1]$ kao

$$f \diamond g = \sum_{i=1}^{m-1} (-)^{(m-1+i)(n-1)} f \diamond_i g \tag{2.35}$$

gdje je $\diamond_i : C^m(A,A)[1] \otimes C^n(A,A)[1] \to C^{m+n-1}(A,A)[1]$ umetanje funkcije g na i-to mjesto:

$$f \diamond_i g(a_1, \ldots, a_{m+n-1}) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, g(a_i, \ldots a_{i+n-1}), a_{i+n}, \ldots, a_{m+n-1}) \tag{2.36}$$

Suspenzija graduacije preslikavanja je nužna jer produkt mora poštovati $|f| + |g| = |f \diamond g|$. Bez nje imamo $n + m \neq n + m - 1$, dok ovako vrijedi $(n-1) + (m-1) = (n+m-1) - 1$. Gerstenhaberov produkt omogućuje nam definiciju Gerstenhaberove zagrade na $C^\bullet(A,A)$

$$[f,g] \doteq f \diamond g - (-)^{|f||g|} g \diamond f \tag{2.37}$$

Uz kratak raspis može vidjeti da je ona Liejeva zagrada, da ima graduaciju -1, te da vrijedi

$$\mathrm{d}f = [m_0, f] \tag{2.38}$$

Ovakvu algebru, ako joj dodamo i obično množenje koje je u ovom slučaju tenzorski produkt, nazivamo *Gerstenhaberovom algebrom*. Preostaje nam pomoću ovih struktura prikazati naš početni uvjet, asocijativnost. Primjetimo da taj uvjet možemo napisati kao

$$\begin{aligned}[m,m] &= m \diamond m - (-)^{1 \cdot 1} m \diamond m = 2 m \diamond m \\ &= 2\left(m \diamond_1 m - m \diamond_2 m\right) \\ &= m \circ (m \oplus \mathrm{id}) - m \circ (\mathrm{id} \otimes m) = 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Sad ako napišemo $m = m_0 + \tilde{m}$, gdje je $\tilde{m} = \sum_{n \geq 1} \lambda^n m_n$, imamo

$$[m,m] = [m_0 + \tilde{m}, m_0 + \tilde{m}] = [m_0, m_0] + 2[m_0, \tilde{m}] + [\tilde{m}, \tilde{m}] = 0 \tag{2.40}$$

[6]Originalna notacija bio je krug $\circ$ pa je ovaj produkt i znan kao "circle product". Tu notaciju čuvamo za kompoziciju preslikavanja jedne varijable.

odnosno vrijedi Maurer-Cartanova jednadžba,

$$\mathrm{d}\tilde{m} + \frac{1}{2}[\tilde{m}, \tilde{m}] = 0 \tag{2.41}$$

Vidimo da imamo sve s čime smo se dosad susreli: produkt, pomak u graduaciji, generaliziranu Liejevu zagradu i diferencijal realiziran pomoću nje. BV formalizam također čini Gerstenhaberovu algebru [32].

Zanimljivo je da nam se pojavila Maurer-Cartanova jednadžba. Ako se prisjetimo teorije Liejevih algebri [29, §5], istu jednadžbu zadovoljava lijevo-invarijantna 1-forma, Maurer-Cartanova forma, koja je dualna Liejevoj algebri shvaćenoj kao tangentni prostor T_eG. U tom slučaju imamo i potvrdu da možemo rekonstruirati čitavu Liejevu grupu G pomoću tih "deformacija" oko trivijalnog elementa svake grupe, njene jedinice.

2.2.4 Formalni problemi modula

Strukturu dosad pronađenu u deformacijama asocijativne algebre možemo naći i u mnogim drugim primjerima, vidi [15]. *Formalni problemi modula* su njihova apstrakcija i koristit ćemo ih kao prikladni formalizam za pristup interagirajućim klasičnim teorijama [8, §4]. Prvo definirajmo *Artinove* algebre, koje su u suštini precizniji način razvoja "po nekom parametru".

4 Definicija. *Artinova diferencijalno graduirana algebra nad poljem $\mathbb{K}$ karakteristike nula je diferencijalno graduirana komutativna $\mathbb{K}$ algebra R koncentrirana u nepozitivnim stupnjevima takva da*

1. *Za svaki $i \in \mathbb{Z}$, dim $R^i < \infty$, dok je $R^j = 0$ za neki $j \ll 0$.*

2. *R ima jedinstveni maksimalni diferencijalni ideal t.d. $R/m = \mathbb{K}$ gdje je $m^N = 0$ za neki $N \gg 0$.*

Primjetimo da se radi o diferencijalno graudiranoj algebri jer je zbog BV-BRST formalizma naša klasična teorija graduirana. Također, za razliku od običnog računa smetnje, ovakav razvoj moguće je razviti do kojeg god reda želimo i on ostaje egzaktan. Takvu informaciju pamti N-nilpotentnost maksimalnog ideala.

Dalje, tražit ćemo simplicijalno obogaćenje kategorije Artinovih diferencijalno graduiranih algebri, $\mathbf{sArt}_{\mathbb{K}}$. Dakle, osim što Aritnove algebre pretvaramo u kategoriju na očit način tako da su Artinove algrebre objekti dok preslikavanja $R \to S$ preslikavaju i odgovarajuće ideale, definiramo n-simplekse kao simplicijalno obogaćena preslikavanja $m_R \to m_S \otimes \Omega^\bullet(\Delta^n)$. Ovo je bitno zbog baždarnih teorija. Rješenja povezana baždarnim transformacijama želimo pospremiti u simpleks. Pri promatranju deformacija asocijativne algebre nismo postavili pitanje odgovaraju li sve netrivijalne deformacije nužno različitim deformacijama. Kod fizikalnih teorija već znamo da jednadžbe gibanja ne fiksiraju jednistveno rješenje ako postoje lokalne simetrije. Kao i kod BRST pristupa, želimo istodobno pospremiti sva rješenja i pamtiti veze među njima, umjesto da uzmemo kvocijent ili fiksiramo određeno baždarenje. Ovime klasične teorije čine stog.

5 Definicija. *Formalni problem modula nad poljem $\mathbb{K}$ je funktor*

$$F : \textbf{\textit{sArt}}_{\mathbb{K}} \to \textbf{\textit{sSet}}$$

s dodatnim svojstvima

1. *$F(\mathbb{K})$ je kontraktibilan*
2. *F šalje surjektivne morfizme u fibracije*
3. *preslikavanje $F(B \times_A C) \to F(B) \times_{F(A)} F(C)$ je slaba homotopska ekvivalencija*

Umjesto direktnog rada s Artinovim diferencijalno graduiranim algebrama, postoji ekvivalentan način koji koristi L_∞ algebre. Uzmimo dakle L_∞ algebru $\mathfrak{g}$ i (R, m) Artinovu diferencijalno graduiranu algebru te definirajmo simplicijalni skup rješenja Maurer-Cartanove jednadžbe:

$$MC(\mathfrak{g} \otimes m) \doteq \{\alpha \in g \otimes m \otimes \Omega^\bullet(\Delta^n) \,|\, \mathrm{d}\alpha + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} \ell_n(\alpha, \ldots, \alpha) = 0, |\alpha| = 1\} \quad (2.42)$$

Tvrdnja je da je $R \to \mathrm{MC}(\mathfrak{g} \otimes m)$ formalni problem modula kojeg ćemo označiti s $B\mathfrak{g}$.

$\diamond$ *Primjer* 3. Jednostavan primjer ovakve konstrukcije dolazi iz deformacija diferencijalno graduiranih Liejevih algebri: $(V^\bullet, \mathrm{d}) \mapsto (\tilde{V}^\bullet, \tilde{\mathrm{d}})$ tako da $(\tilde{V}^\bullet, \tilde{\mathrm{d}}) \bmod m = (V^\bullet, \tilde{\mathrm{d}})$. Dakle, $\tilde{\mathrm{d}} = \mathrm{d} + \xi$, gdje je $\xi \in \mathrm{Hom}^1(V, V) \otimes m$. Mora vrijediti

$$0 = \tilde{\mathrm{d}}^2 = \mathrm{d}^2 + [\mathrm{d}, \xi] + \frac{1}{2}[\xi, \xi] = \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}[\xi, \xi] \quad (2.43)$$

što je Maurer-Cartanova jednadžba.

♣ *Opaska.* L_∞ struktura nad $\mathfrak{g}$ konačno dimenzionalnom po stupnjevima je ekvivalentno diferencijalno graduirana struktura nad $\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}^\vee = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}^\vee[-1])$. Trebamo samo uzeti baze $\{t_a\}$ za $\mathfrak{g}$ i $\{t^a\}$ za $\mathfrak{g}^\vee$ pa definirati diferencijal

$$\mathrm{d}t^a = \sum_n \frac{1}{n!}\ell_n(t_{a_1}, \dots, t_{a_n})t^{a_1} \wedge \dots \wedge t^{a_n} \tag{2.44}$$

Jednakost $\mathrm{d}^2 = 0$ slijedi iz uvjeta L_∞ strukture. Ovime smo definirali Chevalley-Eilenbergovu homologiju $C^\bullet(\mathfrak{g})$ za L_∞ algebru.

Također slijedi i da je preslikavanje Artinovih algebri

$$\alpha : C^\bullet(\mathfrak{g}) \to R \tag{2.45}$$

element MC($\mathfrak{g} \otimes m$) zbog $[\mathrm{d}, \alpha] = \mathrm{d}\alpha = 0$. ♣

U [8] tvrdi se da je ovo zapravo ekvivalencija $(\infty, 1)-$kategorija. Prihvatit ćemo ovo više kao opće pravilo budući da se javlja diljem teorije deformacija. Dakle, klasične teorije opisivat ćemo pomoću MC-elemenata i L_∞ algebri. Trebaju nam još dva svojstva. Prvo svojstvo je lokalnost: želimo da L_∞ algebra opisuje klasičnu teoriju polja. Zato ćemo ju definirati na graduiranim vektorskim svežnjevima:

6 Definicija. *Lokalna L_∞ algebra nad M se sastoji od*

1. *graduiranog vektorskog svežnja $L \to M$ s glatim sekcijama $\mathcal{L}$*

2. *kolekcije alternirajućih polidiferencijalnih operatora $\ell_n : \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}$ za $n \geq 1$ kohomološkog stupnja $2 - n$ koji $\mathcal{L}$ čine L_∞ algebrom.*

Pisat ćemo samo $\mathcal{L}$ za lokalnu L_∞ algebru. Zadnje svojstvo je eliptičnost, što je nekakav zahtjev regularnosti rješenja, o čemu će biti više riječi kasnije:

7 Definicija. *Lokalna L_∞ algebra $\mathcal{L}$ je eliptična ako je $(\mathcal{L}, \ell_1 = \mathrm{d})$ eliptični kompleks.*

Sve skupa imamo predsnop $B\mathcal{L}$ formalnih problema modula koji šalju (R, m) i otvoreni skup $\mathcal{U} \hookrightarrow M$ u $B\mathcal{L}(\mathcal{U})(R) = \mathrm{MC}(\mathcal{L}(\mathcal{U}) \times m)$

2.2.5 Dodatne strukture

Sad ćemo dovršiti konstrukciju deriviranog mjesta kritičnih točaka u beskonačno mnogo dimenzija. Zasad imamo samo prostor polja ostvaren kao formalni eliptični problem modula. Prethodno smo uveli Chevalley-Eilenbergov kompleks. Sad ćemo ga elaborirati i uvesti dodatne strukture koje traži BV formalizam.

8 Definicija. *Neka je $E \to M$ graduiran vektorski svežanj neka su $\mathcal{E}$ njegovi globalni glatki prerezi. Lokalno djelovanje $\mathcal{L}$ na $\mathcal{E}$ je djelovanje takvo da su sva strukturna preslikavanja*

$$\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \quad n \geq 1 \tag{2.46}$$

polidiferencijalni operatori i vrijede sve uobičanjene koherencije. Tada $\mathcal{E}$ zovemom lokalnim $\mathcal{L}$-modulom.

♣ *Opaska.* Primjetimo da je $\mathcal{L}$ također lokalni $\mathcal{L}$-modul, s koadjungiranom akcijom. Djelovanja su definirana kao $\ell_{n+1}(\,\_\,, \dots, \_\,; \_\,)$. ♣

9 Definicija. *Neka je $\mathcal{E}$ lokalni $\mathcal{L}$-modul. Za svaki $\mathcal{U} \hookrightarrow M$ definiramo Chevalley-Eilenbergov kompleks*

$$C^{\bullet}\left(\mathcal{L}(\mathcal{U}), \mathcal{E}(\mathcal{U})\right) \doteq \Pi_{n\geq 0} \mathit{Hom}\left((L(\mathcal{U})[1])^{\otimes n}, \mathcal{E}(\mathcal{U})\right)_{S_n} \tag{2.47}$$

gdje je tenzorski produkt kompletiran projektivni tenzorski produkt, Hom su linearna neprekidna preslikavanja i $(\_)_{S_n}$ označava koinvarijante. Ako je $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ trivijalni prerez, pišemo samo $C^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U}))$. Također ćemo definirati reducirani Chevalley-Eilenbergov kompleks $C^{\bullet}_{\text{red}}(\mathcal{L}(\mathcal{U}))$ kao kernel augmentacije $C^{\bullet}(\mathcal{L}(\mathcal{U})) \to \mathbb{R}$.

O $C^{\bullet}_{\text{red}}(\mathcal{L})$ ćemo razmišljati kao o prostoru funkcija na odgovorajućem formalnom problemu modula $B\mathcal{L}$. Treba nam i simplektička forma.

Tražit ćemo postojanje *k-pomaknute simplektičke forme* na formalnom problemu modula $B\mathfrak{g}$. Ovo je 2-forma zatvorena na unutarnje i de Rhamove diferencijale. Naravno, nismo još definirali 2-forme na formalnom problemu modula. No očito će ovo biti element $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}^{\vee}$ kohomološkog stupnja $k-2$. Definirajmo odmah traženo sparivanje:

10 Definicija. *Neka je $E \to M$ eliptička L_{∞} aglebra i neka su Dens_M gustoće nad M. Invarijantno sparivanje na E kohomološkog stupnja k je preslikavanje vektorskih svežnjeva*

$$\langle\,\_\,,\_\,\rangle_E : E \otimes E \to \mathit{Dens}_M[k] \tag{2.48}$$

s dodatnim svojstvima:

1. *sparivanje inducira izomorfizam svežnjeva* $E \to E^\vee \otimes \text{Dens}_M[-k]$

2. *neka su* $\mathcal{E}_c$ *kompaktno podržani prerezi od* E*. Uparivanje na* E *inducira unutarnji produkt na* $\mathcal{E}_c$

$$\langle \_ , \_ \rangle : \mathcal{E}_c \otimes \mathcal{E}_c \to \mathbb{R} \tag{2.49}$$

$$\alpha \otimes \beta \to \int_M \langle \alpha, \beta \rangle \tag{2.50}$$

i tražimo da je on invarijantan u smislu da je

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{n+1} \to \langle \ell_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_{n+1} \rangle \tag{2.51}$$

totalno graduirano antisimetrično preslikavanje $\forall n$*.*

Očito, BV formalizam traži preslikavanje kohomološkog stupnja -1.

♣ *Opaska.* Napomenimo da ćemo raditi lokalnim funkcionalima definiranim kao integrali umnoška polidiferencijalnih operacija nad lokalnim sekcijama [8, §4.5]. Pisat ćemo

$$\mathcal{O}_{\text{loc}}(B\mathcal{L}) = C^\bullet_{\text{loc}}(\mathcal{L}) \tag{2.52}$$

Bilokoji $F \in \mathcal{O}_{\text{loc}}(B\mathcal{L})$ možemo shvatiti kao sumu $F = \sum_n F_n$ s

$$F_n \in \text{Dens}_M \otimes_{D_M} \text{Hom}_{C^\infty(M)} \left(J(L)^{\otimes n}, C^\infty(M) \right) \tag{2.53}$$

$n-$tu Taylorovu komponentu od F shvatit ćemo kao linearno preslikavanje

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n \to \sum_i \int_M \omega(D_1^i \alpha_1) \cdots (D_n^i \alpha_n) \tag{2.54}$$

gdje je $\omega \in \text{Dens}_M$ a D_j^i su diferencijalni operatori. Osim toga, definirat ćemo i krik-dual $\mathcal{L}^!$ kao $\mathcal{L}^\vee \otimes \text{Dens}_M$. ♣

2.2.6 *Novi pogled na derivirano mjesto kritičnih točaka*

Ako imamo lokalni funkcional $S \in \mathcal{O}_{\text{loc}}(B\mathcal{L})$, želimo dobiti klasičnu teoriju polja opisanu deriviranim mjestom kritičnih točaka, za što nam treba odgovarajuća 1-forma. Budući da sad radimo na formalnom eliptičnom problemu modula, a ne na konačno dimenzionalnoj mnogostrukosti, nju ćemo definirati kao $\mathrm{d}S \in C^{\bullet}_{\text{loc}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}^![-1])$ dan funkcionalnom derivacijom:

11 Definicija. *Derivirano mjesto kritičnih točaka od S je lokalna L_∞ algebra dobivena dodavanjem Taylorovih koeficijenata $\mathrm{d}S$*

$$\mathrm{d}_n S : \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}^! \tag{2.55}$$

strukturnim preslikavanjima ℓ_n poludirektnog produkta eliptične L_∞ algebre $\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^![-3]$. Zvat ćemo ju Crit$(S)$

Imamo li također traženo simplektično preslikavanje? Da.

1. imamo izomorfizam $(\mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^![-3])^![-3] \cong \mathcal{L}^![-3] \oplus \mathcal{L}$

2. za $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathcal{L}_c \oplus \mathcal{L}^!_c[-3]$, $\langle \ell_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_{n+1} \rangle$ je totalno antisimetrično preslikavanje. n-ti Taylorov koeficijent $\mathrm{d}_n S$ je

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \alpha_{n+1}} S(0) \tag{2.56}$$

   Iako parcijalne derivacije komutiraju, definirali smo $C^{\bullet}(\mathcal{L})$ s pomakom. Stoga je i ovo totalno antisimetrično.

2.2.7 Drugačija formulacija

Sve ovo možemo i drugačije izreći. Primjetimo da L ima simetrično invarijanto sparivanje stupnja -3, stoga je $L[1] \cong (L[1])^![-1]$ antisimetrični izomorfizam. Takav antisimetrični izomorfizam $E \cong E^![-1]$ za bilokakve graduirane vektorske svežnjeve zvat ćemo -1 simplektičnom strukturom na E.

Krenimo u drugom smjeru:

2 Propozicija. *Neka je E graduirani vektorski svežanj s -1 simplektičnom strukturom i neka je $\mathcal{O}_{loc}(\mathcal{E})$ prostor lokalnih funkcionala na $\mathcal{E}$. Tada simplektička struktura na $\mathcal{E}$ inducira Poissonovu zagradu na $\mathcal{O}_{loc}(\mathcal{E})$ stupnja 1. Nadalje, dati $E[-1]$ lokalnu L_∞ strukturu kompatibilnom sa sparivanjem na $E[-1]$ ekvivalentno je odabiru barem kvadratičnog $S \in \mathcal{O}_{loc}(\mathcal{E})$ kohomološkog stupnja 0 koji zadovoljava*

$$\{S, S\} = 0 \tag{2.57}$$

Dokaz. $L = E[-1]$ je sama po sebi *abelova* L_∞ algebra, sa $\ell_n = 0\ \forall n$. U tom slučaju je $\mathcal{O}(B\mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_{\text{loc}}(\mathcal{E})$. Možemo definirati netrivijalnu L_∞ strukturu ako definiramo

$$\ell_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{\ldots\{S, \alpha_1\}, \ldots, \alpha_n\} \tag{2.58}$$

uz odgovarajući pomak. Aksiomi L_∞ algebre vrijede ako $\{S, S\} = 0$. □

Sad ćemo dati definiciju klasične teorije polja kao u [8, §5]:

12 Definicija. *Predklasična teorija polja na M je graduirani vektorski svežanj $E \to M$ sa -1 simplektičnom formom i lokalnim, barem kvadratičnim funkcionalom $S \in \mathcal{O}_{loc}(\mathcal{E})$ takvom da $\{S, S\} = 0$.*

Ovime je klasična teorija formulirana na uobičajen način, no iza svega stoji L_∞ algebra odgovarajućeg problema modula. Možemo pisati

$$S(e) = \langle e, Qe\rangle + I(e) \tag{2.59}$$

gdje je $Q : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ antihermitski operator s $|Q| = 1$. Za kraj, tražimo eliptičnost.

13 Definicija. *Predklasična teorija polja je klasična teorija polja ako je kompleks $(\mathcal{E}, Q)$ eliptični kompleks.*

2.2.8 Primjer: masivna ϕ^4 skalarna teorija

Sve dosad možemo ilustrirati na jednostavnom primjeru. Uzmimo akciju

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\int_M \phi(\Delta + m^2)\phi + \frac{1}{4!}\int_M \phi^4 \tag{2.60}$$

L_∞ algebra koja opisuje derivirano mjesto kritičnih točaka je eliptički kompleks

$$\mathcal{L} = C^\infty(M)[-1] \xrightarrow{\Delta + m^2} \text{Dens}_M[-2] \tag{2.61}$$

dok je nelinearna interakcija sadržana u višoj zagradi

$$\ell_3(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \doteq \phi_1\phi_2\phi_3 \text{dVol}_g \tag{2.62}$$

Odgovarajuća Maurer-Cartanova jednadžba je za Artinov prsten koncentriran u nultom stupnju jednostavno

$$(D+m^2)\phi + \frac{1}{3!}\phi^3 d\mathrm{Vol}_g = 0 \tag{2.63}$$

Ovu jednadžbu možemo pojednostaviti ako uzmemo prsten $R = \mathbb{K}[\epsilon]/(\epsilon^n)$. Puni diferencijalno graduirani Artinov prsten u sve ovo bi uklopio i homotopije.

Osim toga imamo i simplektičku strukturu odnosno simetrično sparivanje

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_M \phi\psi \tag{2.64}$$

gdje je $\phi \in C^\infty(M)$ a $\psi \in \mathrm{Dens}_M$.

2.2.9 Klasične opservable

14 Definicija. *Opservable klasične teorije nad $\mathcal{U} \hookrightarrow M$ su komutativna diferencijalno graduirana algebra*

$$\mathit{Obs}(\mathcal{U}) = C^\bullet(\mathcal{L}(\mathcal{U})) \tag{2.65}$$

One očito tvore faktorizacijsku algebru. Ovdje treba paziti na regularnost funcionala. Pun dokaz nalazi se u [8, §6], no situacija je zapravo ista kao u uvodu ovog poglavlja. Alternativno, možemo pisati

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{U}) = (\mathcal{O}(\mathcal{E}(\mathcal{U})), \{S, \_\}) \tag{2.66}$$

što je oblik koji ćemo koristiti kasnije.

3 Kvantizacija

U ovom ćemo poglavlju opisati deformacijski pristup kvantizaciji i mogući pristup renormalizaciji. Kao primjer ćemo promotriti topološku BF teoriju.

3.1 Motivacija

Pri promatranju konačno dimenzionalnog deriviranog mjesta kritičnih točaka lako smo došli do čitavog BV-BRST formalizma i klasične master jednadžbe $\{S, S\} = 0$. Prisjetimo se da su ta razmatranja krenula od konačno dimenzionalnog divergencijskog kompleksa, čiju smo kvantnu verziju izveli u uvodu. Tada je diferencijal glasio

$$\hbar \mathrm{div}_S = -\imath_{\mathrm{d}S} + \hbar\Delta \doteq \{S, \_\} + \hbar\Delta \tag{3.1}$$

Budući da vrijedi jednadžba $\mathrm{div}_S^2 = 0$, kvantizacija se svodi na nalaženje funkcije $S \in \mathcal{O}(\mathcal{E})[[\hbar]]$ takve da

$$\hbar^2 \mathrm{div}_S^2 = \left\{\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S, \_\right\} = 0 \tag{3.2}$$

Jednadžbu koja to osigurava

$$\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S = 0 \tag{3.3}$$

zovemo *kvantnom master jednadžbom* (QME). Budući da smo klasičnu teoriju definirali za akcije oblika $S = Q + I$ gdje je I barem kubična interakcija, QME možemo pisati kao

$$QI + \hbar\Delta I + \frac{1}{2}\{I, I\} = 0 \tag{3.4}$$

ili, ekvivalentno

$$(Q + \hbar\Delta)\, e^{\frac{1}{\hbar}I} = 0 \tag{3.5}$$

U [6, §5.2.6] uvjet $\Delta I = 0$ je shvaćen kao iščezavanje divergencije mjere integrala po putevima.

♣ *Opaska.* Od sad sve veličine i konstrukcije smatramo kao definirane formalnim razvojem u $\hbar$. Radimo, dakle, na polju $\mathbb{K}[[\hbar]]$. Ovo znači da akcija koja zadovoljava QME zadovoljava i klasičnu ME, barem u nultom redu u $\hbar$. ♣

3.2 Deformacijska kvantizacija

Pretpostavimo da nam je poznata klasična faktorizacijska algebra koja opisuje opservable nad klasičnim deriviranim mjestom točaka

$$\mathrm{Obs}^{cl} \doteq (\mathcal{O}(\mathcal{E}), \mathrm{d} = \{S, \_\}) \tag{3.6}$$

Uzmimo neki objekt

$$\alpha \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} = C^{\infty}(M \times M, E \boxtimes E) \tag{3.7}$$

i definirajmo

$$\partial_\alpha : \mathcal{O}(\mathcal{E}) \to \mathcal{O}(\mathcal{E}) \tag{3.8}$$

kao djelovanje kontrakcijom $\alpha \vee \_$. Sad definirajmo novi produkt

$$A \star_\alpha B \doteq e^{-\hbar\partial_\alpha}\left((e^{\hbar\partial_\alpha} A) \cdot (e^{\hbar\partial_\alpha} B)\right) \tag{3.9}$$

za $A \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_c(\mathcal{U}))$, $B \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_c(\mathcal{V}))$ gdje su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ disjunktni a $\cdot$ je klasični (faktorizacijski) produkt. Ovime smo dobili novu faktorizacijsku algebru: $\mathcal{O}(\mathcal{E})[[\hbar]]$ s deformiranim $\star$-produktom.

3 Propozicija. *Diferencijal nad ovom algebrom glasi*

$$\mathrm{d}_\star \doteq e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \mathrm{d} \circ e^{\hbar\partial_\alpha} \tag{3.10}$$

Dokaz. Očito vrijedi $\mathrm{d}_\star^2 = 0$. Treba provjeriti njegovo ponašanje na produktima:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\star(A \star B) &= \left(e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \mathrm{d} \circ e^{\hbar\partial_\alpha}\right)\left(e^{-\hbar\partial_\alpha}\left((e^{\hbar\partial_\alpha} A) \cdot (e^{\hbar\partial_\alpha} B)\right)\right) && (3.11)\\
&= \left(e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \mathrm{d}\right)\left((e^{\hbar\partial_\alpha} A) \cdot (e^{\hbar\partial_\alpha} B)\right) && (3.12)\\
&= e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \left(\mathrm{d}\left(e^{\hbar\partial_\alpha} A\right) \cdot \left(e^{\hbar\partial_\alpha} B\right) + \dots\right) && (3.13)\\
&= e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \left(\left(e^{\hbar\partial_\alpha} \mathrm{d}_\star A\right) \cdot \left(e^{\hbar\partial_\alpha} B\right) + \dots\right) && (3.14)\\
&= (\mathrm{d}_\star A) \star B + (-)^{|A|} A \star (\mathrm{d}_\star B) && (3.15)
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili definirajuće svojstvo $\mathrm{d} \circ e^{\hbar\partial_\alpha} = e^{\hbar\partial_\alpha}\mathrm{d}_\star$, i izostavili drugi član radi lakšeg čitanja. □

Budući da je $\mathrm{d} = \{S, \_\}$, sad imamo diferencijal

$$\{S, \_\}_\star \doteq e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \{S, \_\} \circ e^{\hbar\partial_\alpha} \tag{3.16}$$

Razlika ovih dvaju diferencijala je operator barem linearan u $\hbar$,

$$\hbar\Delta \doteq \{S, \_\}_\star - \{S, \_\} \tag{3.17}$$

Operator Δ zovemo BV operatorom, koji je na formalno sličan, no konceptualno različit način definiran u [12]. Kasnije ćemo vidjeti da ima veze s BV-laplasijanom. Izračunajmo posljedicu egzaktnosti $\mathrm{d}_\star^2 = 0$ pomoću ovog zapisa:

$$0 = (\{S, \_\}_\star)^2 = (\{S, \_\} + \hbar\Delta)^2 \tag{3.18}$$

$$= \{\frac{1}{2}\{S, S\} + \hbar\Delta S, \_\} \tag{3.19}$$

Ovo je opet kvantna master jednadžba u nedeformiranoj algebri.

3.2.1 Princip korespondencije

Još nismo odabrali neki konkretan $\alpha \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} = C^\infty(M \times M, E \boxtimes E)$. Sad ćemo dati nekoliko razloga zašto on treba na određen način odgovarati propagatoru.

Prvi razlog ima veze s konzistencijom. Naime, cilj nam je imati deformiranu faktorizacijsku algebru. Već smo definirali deformirani produkt, no osim faktorizacijskog produkta imamo i datum diferencijala koji je bio ključan za opis deriviranog mjesta kritičnih točaka. Taj diferencijal nadalje mora biti konzistentan s faktorizacijskom strukturom.

U [8, §8] kvantna teorija je definirana pomoću parametrica. One nisu zapravo ništa drugo nego regularizirani propagatori, odnosno njihove regularizirane integralne jezgre[7]. Jedna od posljedica eliptičnosti je da parametrice uvijek postoje. Poanta je da je regularizirani propagator inverz jednadžbi gibanja, kao i obični propagator, no do na neku glatku funkciju. Za danu parametricu Φ Costello i Gwilliam definiraju i diferencijal d_Φ koji je u suštini isti kao naš uzmemo da je P u $\star_P$-produktu

[7] Ova distinkcija nam nije toliko bitna jer svaki neprekidni operator možemo prikazati pomoću njegove integralne jezgre.

propagator kojeg regularizira Φ. Oni su primjetili da tako definirani diferencijal proširuje nosač, što nije konzistentno s faktorizacijskom strukturom.

Konkretno, napišimo $f \in \mathcal{O}(\mathcal{E})[[\hbar]]$ u obliku $f = \sum \hbar^i f_{i,k}$ gdje su $f_{i,k} : \mathcal{E}^{\otimes n} \to \mathbb{K}$, te promotrimo $\mathrm{supp}_{\leq(i,k)} f$, definiran kao unija svih $\mathrm{supp} f_{r,s}$ s $(r, s) < (i, k)$. Tada je

$$\mathrm{supp}_{\leq(i,k)} \mathrm{d}_\Phi f \subset \Phi^{c_{i,k}}(\mathrm{supp}_{\leq(i,k)} f) \tag{3.20}$$

gdje $\Phi^n(K)$ za neki $K \subset M$ označava n-puta iteriranu konvoluciju s $\mathrm{supp}\Phi$, a $c_{i,k}$ su potpuno kombinatorijalne konstante koje ne ovise o konkretnoj teoriji. Tek kad je $\mathrm{supp}\Phi \to 0$ i propagator više nije regulariziran imamo dobro definirani diferencijal.

Postoji još jedan matematički razlog zašto je propagator dobar izbor koji ima veze s množenjem distribucija. Budući da smo opservable definirali kao funkcionale $\mathcal{O}(\mathcal{E})$, prirodno je promatrati ih kao distribucije, duale funkcija. Simbolično,

$$\mathbb{R} \ni F(\phi) = \langle \tilde{F}, \phi \rangle, \quad F \in \mathcal{O}(\mathcal{E}), \phi \in \mathcal{E} \tag{3.21}$$

gdje je sparivanje dano integracijom. $\tilde{F}$ živi u dualnom prostoru $\mathcal{D}(M, E)$ i zove se distribucija ili generalizirana funkcija.

Slično možemo definirati i za operatore. Konkretno, svakom linearnom operatoru $F : \mathcal{E}_c \to \bar{\mathcal{E}}$ gdje je $\bar{\mathcal{E}}$ distribucijski prerez na M pridružujemo jezgru $K_F \in \bar{\mathcal{E}} \otimes \bar{\mathcal{E}}^!$. Uz simplektičko inducirani izomorfizam $\bar{\mathcal{E}} \cong \bar{\mathcal{E}}^![-1]$, K_F možemo gledati kao element $\bar{\mathcal{E}} \otimes \bar{\mathcal{E}}$ kohomološkog stupnja $|K_F| = |F| + 1$. Sad imamo reprezentaciju

$$F = \langle K_F, \_ \rangle \tag{3.22}$$

Ovo je povezano s deformacijskom kvantizacijom jer smo deformaciju definirali djelovanjem operatora

$$e^{\hbar \partial_P} = \sum_n \frac{\hbar}{n!} (P \vee)^n \tag{3.23}$$

gdje $P\vee$ označava kontrakciju. Konkretno, za neki funkcional F imamo

$$e^{\hbar \partial_P} F = \sum_n \frac{\hbar}{n!} \langle P^{\otimes n}, F^{(n)} \rangle \tag{3.24}$$

Da bi ovo bilo dobro definirano moramo znati odgovor na to kad smijemo množiti distribucije. Intuitivan odgovor je: tamo gdje nisu singularne. No postoji profinjeniji odgovor koji koristi *skupove valnih fronti*.

Inuitivno, skup valne fronte distribucije $u \in \mathcal{D}(M)$ je

$$WF(u) \subseteq T^*M_\times \tag{3.25}$$

gdje indeks $\times$ označava da ne uključujemo iščezavajuću nula 1-formu. On nam govori ne samo gdje je distribucija u singularna već i u kojim smjerovima singularna. Točna definicija je dana u [20, §8].

$\diamond$ *Primjer* 4. Ovo je intuitivno lako vidjeti i bez eksplicitne definicije. Promotrimo jednostavni kvadratični funkcional

$$F(\phi) = \int \phi(x)^2 f(x) \tag{3.26}$$

Integralne jezgre njegovih prvih dvaju derivacija su

$$F^{(1)}(\phi)(x_1) = 2\phi(x_1)f(x_1)\delta(x_1) \tag{3.27}$$

$$F^{(2)}(\phi)(x_1, x_2) = 2f(x_1)\delta(x_1)\delta(x_1 - x_2) \tag{3.28}$$

pa možemo zaključiti da su valne fronte

$$WF(F^{(1)}(\phi)) = \{(0, 0) \in T^*M\} \tag{3.29}$$

$$WF(F^{(2)}(\phi)) = \{(x_1, x_2; k_1, k_2) \in T^*M^2 | x_1 = x_2, k_1 + k_2 = 0\} \tag{3.30}$$

Jedan od načina da izračunamo skup valnih fronti je da promatramo Fourierov transformat distribucije i gledamo gdje je on signularan. Budući da će nam uskoro biti potreban, promotrimo skup valnih fronti delta distribucije na dijagonali $\delta_{\Delta(M^2)} = \delta(x - y)$. Njen Fourierov transformat je

$$\mathcal{F}(\delta(x-y))(k_x, k_y) = \int_{M \times M} e^{i(k_x \cdot x + k_y \cdot y)} \delta(x - y) = \int_M e^{i(k_x - k_y)\cdot x} = \delta(k_x - k_y) \tag{3.31}$$

stoga je ova distribucija "singularna u smjerovima" $k_x + k_y = 0$.

Valna fronta derivacija lokalnih funkcionala uvijek je okomita na tangentni svežanj dijagonale, $WF(F(n)) = \{(\{x_i\}_i; \{k_j\}_j) \in T^*M^n | x_1 = \ldots = x_n, \sum_j k_j = 0\}$, dok za *eliptični* operator D vrijedi, prema teoremu 8.3.1 iz [20],

$$WF(u) = WF(Du), u \in \mathcal{D}(M) \tag{3.32}$$

Budući da imamo propagator vrijedi $WF(\delta_{M^2}) = WF(DP)$. Dakle

$$WF(P) = WF(\delta_{M^2}) = \{(x_1, x_2; k_1, k_2) \in T^*M^2 | x_1 = x_2, k_1 + k_2 = 0\} \tag{3.33}$$

Ovo je ključni identitet. U ovom slučaju, kriteriji za postojanje distribucija kažu da će produkt

$$A \star_P B = \sum_n \frac{\hbar^n}{n!} \int_{M^{2n}} A(x_1, \dots x_n) B(y_1, \dots, y_n) P(x_1, y_1) \cdots P(x_n, y_n) \tag{3.34}$$

postojati ako su F i G lokalni funkcionali s disjunktnim nosačima, što je i bila naša pretpostavka.

♣ *Opaska.* Iz prošlog izraza vidi se da njime računamo 2-point korelacijsku funkciju. ♣

Drugi razlog je fizikalan. $\alpha(x, y)$ u raspisu $\star_\alpha$-produkta uvijek "povezuje" disjunktna polja. Kad bismo htjeli to prikazati dijagramatski koristeći neki oblik Feynmanovih pravila, očito je da na unutarnje linije moramo staviti α, pa je to nekakav propagator. Nadalje, znamo da se naša kvantna teorija mora reducirati na klasičnu teoriju, koja je dana isključivo na razini stabala, iako ovdje imamo posla s dodatnim faktorom $\hbar$. Stoga zahtijevamo

15 Definicija. *$\star$-produkt zadovoljava princip korespondencije ako vrijedi*

$$\{A, B\} = \lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{\hbar} (A \star B - B \star A) \tag{3.35}$$

za sve parno graduirane opservable.

♣ *Opaska.* Budući da radimo nad $\mathcal{O}(\mathcal{E})[[\hbar]]$, ovo treba shvatiti kao jednakost

$$\hbar\{A, B\} = A \star B - B \star A \tag{3.36}$$

u $\hbar\mathcal{O}(\mathcal{E})[[\hbar]]/(\hbar^2)$. Radi potpunosti spomenut ćemo i općenitiju deformacijsku kvantizaciju od naše. Tražimo $\star$-produkt definiran kao

$$A \star B = \sum_n \hbar^n C_n(A, B) \tag{3.37}$$

koji zadovoljava iduća svojstva:

1. asocijativan je
2. $C_0(A, B) = AB$
3. $C_1(A, B) - C_1(B, A) = 2\{A, B\}$

Treće svojstvo je princip korespondencije. Kontsevich je u [25] pokazao da svaka Poissonova mnogostrukost ima deformacijsku kvantizaciju i dao eksplicitnu dijagramatsku konstrukciju. ♣

Naša tvrdnja je da

4 Propozicija. *$\star_P$-produkt zadovoljava princip korespondencije.*

Dokaz. Dokaz ima nekoliko suptilnosti. Uzmimo par linearnih funkcionala

$$A(\phi) = \int_M \phi(x)a(x), B(\phi) = \int_M \phi(x)b(x), \tag{3.38}$$

Lako je dobiti

$$\frac{1}{2}\left(C_1(A, B) - C_1(B, A)\right) = \int_{M^2} P_C(x, y)a(x)b(y) \tag{3.39}$$

gdje je $P_C(x, y) \doteq \frac{1}{2}\left(P(x, y) - P(y, x)\right)$ antisimetrični dio P. Ako je ovo jednako *kauzalnom* propagatoru, ovo se zove *Peierlsova* zagrada. Očito je da je ovaj izraz antisimetričan i bilinearan. Treba provjeriti Jacobijev identitet, što je direktnim putem veoma naporan račun i može se naći u [3]. Umjesto toga, svest ćemo ovaj izraz na uobičajeniji oblik za konkretan primjer skalarnog polja.

Prvo konstruiramo simplektičku formu za skalarno polje kao

$$\omega_\Sigma(\alpha, \beta) \doteq \int_\Sigma K(\alpha, \beta) \tag{3.40}$$

gdje je Σ neka Cauchyjeva površina, a K nekakav bidiferencijalni operator. Radi jednostavnosti radit ćemo na prostoru Minkowskog $M = \mathbb{R}^{1,p}$. Ako uzmemo očitu

Cauchyjevu površinu Σ_0 zadanu s $x^0 = 0$, želimo da vrijedi

$$\omega_{\Sigma_0}(\alpha, \beta) \doteq \int_{\Sigma_0} (\alpha \partial_0 \beta - \beta \partial_0 \alpha) \, \mathrm{dVol}_{\Sigma_0} \tag{3.41}$$

jer je to isto kao da umjesto u komponentama pišemo, simbolički,

$$\omega_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}\dot{\phi} \tag{3.42}$$

što je standardna simplektička forma u beskonačno dimenzionalnom obliku. Za općenitu Cauchyjevu površinu integrand će glasiti

$$\omega_\Sigma(\alpha, \beta) = \int_\Sigma (\alpha \partial_\mu \beta - \beta \partial_\mu \alpha) \, n^\alpha \mathrm{dVol}_\Sigma \tag{3.43}$$

te je lako vidjeti da [23, §2.5]

$$\mathrm{d}K(\alpha, \beta) = (D(\alpha)\beta - \alpha D(\beta)) \, \mathrm{dVol}_M \tag{3.44}$$

Bidiferencijalni operator koji zadovoljava ovo svojstvo[8] možemo smatrati Wronskijanom. Za α, β na ljusci mase taj izraz iščezava. Sad jednostavno korištenje Stokesovog teorema daje dvije stvari. Prvo,

$$\omega_\Sigma(P_s \alpha, \beta) = \int_M \alpha \beta \tag{3.45}$$

što znači da nije zapravo bitno koju Cauchyjevu površinu odaberemo. Drugo, dobivamo Poissonovu zagradu

$$\omega_\Sigma(P_s \alpha, P_s \beta) = \int_{M^2} P_s(x, y) \alpha(x) \beta(y) \doteq \{\alpha, \beta\} \tag{3.46}$$

□

Primjetimo da je iz osnovne kvantne teorije polja već poznato da [30, §3]

$$\{\Phi(x), \Phi(y)\} = P_S(x, y) \tag{3.47}$$

[8] Općenito, tražimo $\mathrm{d}K(\alpha, \beta) = (D(\alpha)\beta - \alpha D^*(\beta)) \, \mathrm{dVol}_M$ no u ovom slučaju je $D^* = D$.

3.2.2 Fiksiranje baždarenja i eliptičnost

U prošlom smo poglavlju pričali o propagatoru, no on ne postoji ako su jednadžbe gibanja degenerirane. Općenito tražimo način kako pretvoriti Q u eliptički operator. Postoje dva načina:

Pomoću operatora fiksiranja baždarenja. Ovo je način korišten u [6, 7]. Pretpostavlja se da imamo poseban operator $Q_{GF} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ koji zadovoljava svojstva:

1. $|Q_{GF}| = -1$
2. $Q_{GF}^2 = 0$
3. Q_{GF} je samoadjungiran na sparivanje
4. komutator $D \doteq [Q_{GF}, Q]$ je generalizirani laplasijan.

jednostavna je posljedica da je

5 Propozicija. *Slika $L = \mathit{Im}\ Q_{GF}$ je izotropni potprostor.*

Dokaz. Budući da je $0 = \langle Q_{GF}^2 z^a, z_b^\vee \rangle = \langle Q_{GF} z^a, Q_{GF} z_b^\vee \rangle$, simplektička forma iščezava na Im Q_{GF}. □

Pomoću fermiona koji fiksira baždranje. Ovo je način prezentiran u [19] i s njim se u praksi računa. Cilj je riješiti se antipolja, odnosno prikazati ih kao funkcije polja. Rezultat je u tom slučaju opet taj da simplektička forma iščezava. U ovoj metodi poljima dodajemo kohomološki trivijalne Lagrangeove multiplikatore odnosno pomoćna polja tako da tražimo

$$\mathrm{d}_{BV} \lambda_a = \lambda_a^\vee, \quad \mathrm{d}_{BV} \lambda_a^\vee = 0 \tag{3.48}$$

Ako je originalna akcija izgledala kao $S(z, z^\vee)$, tzv. *neminimalnu* akciju koja uključuje dodatna polja dobivamo kao

$$S(z, z^\vee) \to S(z, z^\vee) + \langle \lambda, \lambda^\vee \rangle \tag{3.49}$$

gdje podrazumijevamo nekakvo sparivanje tih dodatnih polja. Ako odaberemo neki funkcional isključivo polja $\psi(z, \lambda)$ kohomološkog stupnja -1 i gledamo podmnogostrukost $(z^\vee, \lambda^\vee) = \delta\psi/\delta(z,\lambda)$, preostat će nam samo trivijalna kohomologija multiplikatora λ kojeg nismo fiksirali. Tada imamo baždarno fiksiranu akciju

$$S_\psi = S\left(z, \lambda, z^\vee = \frac{\delta\psi}{\delta z}, \lambda^\vee = \frac{\delta\psi}{\delta\lambda}\right) = S\left(z, z^\vee = \frac{\delta\psi}{\delta z}\right) + \tilde{\mathrm{d}}_{BV}\psi(z,\lambda) \tag{3.50}$$

gdje $\tilde{\mathrm{d}}_{BV}$ označava djelovanje d_{BV} samo na λ. ψ se zbog svojih svojstava zove *fermion koji fiksira baždarenje*, što nažalost nije previše intuitivan naziv (doslovni prijevod eng. *gauge-fixing fermion*). Na kraju svega treba pokazati da rezultat ne ovisi o fiksiranju baždarenja.

♣ *Opaska.* Bitno je napomenuti da se u literaturi pomoćna polja koja smo označili λ često zovu Nakanishi-Lauturp polja dok se njihova antipolja nazivaju $\lambda^\vee$ *antiduhovima* [35]. Tu konvenciju smatramo kontraintuitivnom. ♣

Primjetimo da izraz "fiksiranje baždarenja" u oba slučaja odgovara odstranjivanju degeneracije klasičnog akcijskog funkcionala. U oba slučaja želimo reducirati fazni prostor kojeg smo pomno proširili BV formalizmom. To moramo učiniti na takav način da o njemu ne ovisi fizikalni rezultat. Prema [19], to osigurava kvantna master jednadžba za drugi način. Za prvi način je u [5] pokazano da su teorije dobivene uvjetima Q_{GF} parametriziranima simpleksom Δ^n izomorfne.

Eliptičnost je zahtjev regularnosti rješenja. Već smo spomenuli da je svakom eliptičnom operatoru moguće dodijeliti parametricu, koja je njegov inverz do na neku glatku funkciju. Osim toga, na kompaktnoj mnogostrukosti su svi eliptični operatori Fredholmovi operatori [29, §12.1], što znači da imaju konačnu jezgru i kojezgru. Neke posljedice eliptičnosti za homološki račun smetnje dane su u [17, §2.6], dok je teorija Fredholmovih operatora izložena u [16].

Sad možemo dobiti i eksplicitan oblik BV operatora argumentom kao u [31, §5.1.2]

6 Propozicija. *BV operator za slobodnu teoriju s fiksiranim baždarenjem glasi*

$$\Delta = (-)^{|\phi^a|} \int_M \frac{\delta}{\delta\phi^a(x)} \frac{\delta}{\delta\phi^\vee_a(x)}$$

gdje su $\phi^a, \phi^\vee_a$ oznake za sva polja i antipolja.

Dokaz. Budući da je baždarenje fiksirano, akcija ne ovisi eksplicitno o antipoljima, stoga imamo samo jedan sumand

$$\{S, \_\} = \int \frac{\delta^R S}{\delta\phi^a} \frac{\delta}{\delta\phi_a^\vee} = (-)^{|\phi^a|+1} \int D\phi^a(x) \frac{\delta}{\delta\phi_a^\vee(x)} \tag{3.51}$$

D označava kinetički operator koji dolazi od jednadžbi gibanja jer imamo slobodnu teoriju, a predznak dolazi od razlike desne i lijeve derivacije. Sad je jasno da imamo

$$\hbar\Delta = e^{-\hbar\partial_\alpha} \circ \{S, \_\} \circ e^{\hbar\partial_\alpha} - \{S, \_\} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}[-\hbar\partial_\alpha, \{S, \_\}]_n \tag{3.52}$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\hbar \int_{M^2} P^{ab}(x,y) \frac{\delta}{\delta\phi^a(x)} \frac{\delta}{\delta\phi^b(y)}, (-)^{|\phi^a|+1} \int D\phi^a(x) \frac{\delta}{\delta\phi_a^\vee(x)} \right] \tag{3.53}$$

$$= \hbar(-)^{|\phi^a|} \int_{M^2} PD(x,y) \frac{\delta}{\delta\phi^a(x)} \frac{\delta}{\delta\phi_a^\vee(y)} \tag{3.54}$$

iz čega slijedi traženi rezultat jer je P propagator. U drugom redu smo koristili BCH formulu i $[\_, \_]_n$ označava iterirani komutator odnosno adjungiranu akciju. Članovi viših redova u $\hbar$ ne postoje jer je D linearan u poljima. $\square$

3.3 Ekstenzija distribucija kao renormalizacija

Sad ćemo pokazati da faktorizacijska struktura omogućuje Epstein-Glaserovu odnosno kauzalne renormalizaciju, koja je prvi put razvijena u [11]. Pristup blizak ovome kojeg kanimo izložiti se može naći u [13,22]. Označimo za $n \geq 2$ kao pokratu za faktorizacijski produkt

$$\tilde{\Pi}_n(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = A_1 \star \cdots \star A_n \tag{3.55}$$

gdje su supp$A_i \subseteq V_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ te su kao inače V_i po parovima disjunktni.

Pokazat ćemo da je moguće na rekurzivan način ovaj produkt proširiti i na distribucije kojima se nosači sijeku. Time je moguće povezati ovu kvantizaciju sa S-matricom i sudarima čestica. Poanta ovog pristupa je da izbjegavamo množenje distribucija tamo gdje nije definirano, na presjecima nosača, već da se produkti definiraju ondje gdje je to moguće pa se pažljiv način prošire posvuda, što se zove *ekstenzija distribucija*.

♣ *Opaska.* Krucijalni aspekt kauzalne renormalizacije je kauzalnost. Iako to zvuči trivijalno, sa sobom vuče velike tehničke i konceptualne probleme jer kauzalnost nije nešto što a priori neki prostor nosi sa sobom. Ovo je pogotovo problem na zakrivljenim mnogostrukostima. Ovdje ćemo se zbog tog razloga zadržati na $\mathbb{R}^n$ i njegovim otvorenim skupovima. ♣

Uzmimo prvo za bazu indukcije $\Pi_0(A) = 1$, $\Pi_1(A) = e^{-\hbar\partial_P}A$, gdje F_k označava ekstenziju faktorizacijskog produkta $\tilde{\Pi}_k$. Od ekstenzija ćemo također tražiti da su simetrične. Pretpostavimo da smo konstruirali produkte Π_k za $k < n$. Prvo primjetimo da faktorizacijska struktura sa sobom nosi određen smisao kauzalnosti, jer

$$\Pi_{|K|}(\bigotimes_{k\in K} A_k) = \Pi_{|I|}(\bigotimes_{i\in I} A_i) \star \Pi_{|K-I|}(\bigotimes_{j\in K-I} A_j) \tag{3.56}$$

gdje je I neprazni podskup indeksnog skupa $K = \{1, \ldots, k\}$ ako vrijedi $\mathrm{supp}A_i \cap \mathrm{supp}A_j = \varnothing$ za svaki $i \in I$, $j \in K - I$.

Sad ćemo konstruirati produkte $\Pi^I_{|N|}$ koji ovise o odabiru indeksnog skupa $I \subset N$ na prirodan način:

$$\Pi^I_{|N|}(\bigotimes_{n\in N} A_n) = \Pi_{|I|}(\bigotimes_{i\in I} A_i) \star \Pi_{|N-I|}(\bigotimes_{j\in N-I} A_j) \tag{3.57}$$

Pisat ćemo skraćeno $\Pi^I_{|N|} \doteq \Pi_{|I|} \star \Pi_{|N-I|}$. Promotrimo da

$$\begin{aligned}
\Pi^I_{|N|}\mid_{I\cap J} &= \Pi_{|I|}\mid_{I\cap J} \star \Pi_{|N-I|}\mid_{I\cap J} && (3.58)\\
&= \left(\Pi_{|I\cap J|} \star \Pi_{|I\cap(N-J)|}\right) \star \left(\Pi_{|(N-I)\cap J|} \star \Pi_{|(N-I)\cap(N-I)|}\right) && (3.59)\\
&= \left(\Pi_{|J\cap I|} \star \Pi_{|J\cap(N-I)|}\right) \star \left(\Pi_{|(N-J)\cap I|} \star \Pi_{|(N-J)\cap(N-I)|}\right) && (3.60)\\
&= \Pi^J_{|N|}\mid_{I\cap J} && (3.61)
\end{aligned}$$

gdje smo restrikciju shvatili kao preklop uvjeta na disjunktnost nosača. Dakle, moguće je ove produkte "polijepiti" tako da rezultat ne ovisi o bilokakvom izboru podindeksnih skupova. Rezultat će biti definiran na $M^n - \Delta(M^n)$.

Možemo gledati svaki funkcional alternativno kao element $\mathcal{E}^! = \mathcal{E}^\vee \otimes \mathrm{Dens}_M$. Tada bismo uz odabir određene particije jedinice $f_I \in \mathrm{Dens}_M$ traženi produkt dobili kao jedinstvenu linearnu kombinaciju

$$\Pi_{|N|} = \sum_I f_I \Pi^I_{|N|} \tag{3.62}$$

stoga imamo

7 Propozicija. *Iz F_k, $k < n$ s već izrečenim pretpostavkama moguće je rekurzivno definrati $\Pi_n : \mathcal{O}_{\text{lok.}}(\mathcal{E})^{\otimes n} \to \mathcal{O}_{\text{lok.}}(\mathcal{E})$ definiran na svim funkcionalima s nosačima na $M^n - \Delta(M^n)$.*

Dokaz. Već smo vidjeli da ova definicija ne ovisi o odabiru indeksnih skupova, a da ne ovisi o particiji jedinice može se pokazati promatranjem preklopa indeksnih skupova kao u teoriji integracije diferencijalnih formi. □

Epstein-Glaserova metoda rigorozan je pristup problemu renormalizacije, koji se s tog gledišta svodi na konzistentnu definiciju produkta distribucija. Naime, zasad smo definirali te produkte svugdje osim na dijagonali. Epstein i Glaser dali su proceduru koja dodaje sigularne članove s obzirom na skaliranje distribucija, što je argument na tragu renormalizacijske grupe. Wilsonovski pristup u [6] se svodi na oduzimanje kontračlanova, pa smatramo da je usko vezan uz BPHZ pristup renormalizaciju iako ne koristi S-matricu direktno. U deformacijskoj kvantizaciji "obogaćenoj" Epstein-Glaser normalizacijom, moguće je definirati formalnu S-matricu

$$\mathbf{S}(A) \doteq \sum_n \frac{1}{n!}\Pi_n(A^{\otimes n}) \tag{3.63}$$

Dapače, odabir (kontra)članova ekvivalentan je postavljanju nekoliko fizičkih zahtijeva na S-matricu. U [22, §4B] su oni dani kao

1. $S(A+B) = S(A) \star S(B)$ za A, B s disjunktnim nosačima
2. $S(0) = 1$, $S^(1) = 1$

uz još neka dodatna tehnička svojstva. Prvo svojstvo je kauzalnost i produkti koje smo definirali će to i omogućiti. Naravno, teorija bazirana na faktorizacijskim algebrama uglavnom je euklidska, iako su nam se i prirodno javljali kauzalni propagatori. Originalno, prvi uvjet zahtjeva da su A i B kauzalno disjunktni, za što nam treba prostor Minkowskog (ili neki globalno hiperbolični prostor).

♣ *Opaska.* Epstein-Glaserova renormalizacija sastavni je dio moderne perturbativne algebarske kvantne mehanike (pAQFT). Taj se pristup sastoji od funktora koji otvorenim skupovima dodjeljuje asocijativne algebre. Osim toga, definirana je kauzalna disjunktnost pa opservable komutiraju ako su kauzalno disjunktne. Vremenska evolucija je realizirana izomorfizmom opservabli na skupovima koji dijele Cauchyjevu površinu. Usporedba faktorizacijskog pristupa sa pAQFT dana je u [18] na sličan način kao naš, dok je u [37] opisana općenita usporedba homotopskih verzija tih teorija. ♣

3.4 Primjer: BF teorija

Primjenit ćemo dosad razvijeni formalizam na BF teoriju. Neka je M glatka orijentabilna mnogostrukost bez ruba, neka je G kompaktna Liejeva grupa s odgovarajućom Liejevom algebrom $\mathfrak{g}$ te neka je dan neki glavni G-svežanj $P \to M$. Definirat ćemo sparivanje

$$\langle \alpha \otimes X, \beta \otimes Y \rangle \doteq \int_M \alpha \wedge \beta \langle X, Y \rangle_{\mathfrak{g}} \tag{3.64}$$

pomoću sparivanja na algebri g koje je preko Killingove forme. To osigurava kompaktnost grupe, dok s druge strane njegova nedegeneriranost preko Cartanovog kriterija implicira da je $\mathfrak{g}$ polujednostavna Liejeva algebra. Ostaje nam nekompaktnost M, što je uzrok IR divergencija pri kvantizaciji, no pretpostavit ćemo da se njih možemo nekako riješiti. BF teorija definirana je akcijom

$$S_{BF} = \langle F(A), B \rangle \tag{3.65}$$

gdje je $A \in \omega^1(M) \otimes \mathfrak{g}$, $B \in \omega^{d-2}(M) \otimes \mathfrak{g}$ te imamo $F(A) = \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A]$. Često ćemo koristiti kovarijantni diferencijal $\mathrm{d}_{A}\_ = \mathrm{d}\_ + [A, \_]$. Naziv "BF teorija" i dolazi upravo od kombinacije B i $F(A)$.

♣ *Opaska.* U onome što slijedi označivat ćemo BV-diferencijal s $\mathrm{d}_{BV} = s$ da izbjegnemo sličnost kovarijantnom i de Rhamovom diferencijalu, d_A odnosno d. Ovo je i uobičajena oznaka u literaturi. ♣

Iz varijacije akcije koristeći Bianchijev identitet $\mathrm{d}_A F(A) = 0$ dobivamo

$$\delta S = \langle \delta A, \mathrm{d}_A B \rangle + \langle F(A), \delta B \rangle \tag{3.66}$$

iz čega slijede jednadžbe gibanja $F(A) = 0$, $\mathrm{d}_A B = 0$. Lako se vidi da je teorija simetrična na infinitezimalne transformacije

$$\delta A = \mathrm{d}_A \alpha \tag{3.67}$$

$$\delta B = \mathrm{d}_A \beta + [B, \alpha] \tag{3.68}$$

Međutim, simetrija nije ireducibilna za $d \geq 4$ jer možemo translatirati parametar β. Zato se ograničavamo na $d = 3$. Promovirat ćemo polja $\alpha, \beta \in \Omega^0(M) \otimes \mathfrak{g}$ u duhove. Kako se u tom slučaju trebaju transformirati duhovi? Promotrimo nilpotentnost

$$\begin{aligned} s^2 A = s(sA) &= \mathrm{d}(s\alpha) + [sA, \alpha] - [A, s\alpha] \\ &= \mathrm{d}(s\alpha) + [\mathrm{d}\alpha, \alpha] + [[A, \alpha], \alpha] - [A, s\alpha] \end{aligned} \tag{3.69}$$

Budući da je α nekakva nilpotentna deformacija, očiti kandidat bila bi Maurer-Cartanova jednadžba, $s\alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha] = 0$, iz čega slijedi

$$s^2 A = -[\mathrm{d}\alpha, \alpha] + [\mathrm{d}\alpha, \alpha] + [[A, \alpha], \alpha] + \frac{1}{2}[A, [\alpha, \alpha]] = 0 \tag{3.70}$$

gdje smo koristili graduirani Jacobijev identitet. Situacija s β je malo kompliciranija:

$$\begin{aligned} s^2 B = &\mathrm{d}(s\beta) + [\mathrm{d}\alpha, \beta] + [[A, \alpha], \beta] - [A, s\beta] \\ &- \frac{1}{2}[[\alpha, \alpha], B] - [\alpha, \mathrm{d}\beta] - [\alpha, [A, \beta]] + [\alpha, [\alpha, B]] \end{aligned} \tag{3.71}$$

koristeći Jacobijev identitet imamo

$$s^2 B = \mathrm{d}(s\beta) + \mathrm{d}[\alpha, \beta] + [A, [\alpha, \beta]] - [A, s\beta] \tag{3.72}$$

stoga je očito da je tražena transformacija $s\beta = -[\alpha, \beta]$. Sad možemo definirati ukupnu BV akciju,

$$S_{BV} = \langle F(A), B \rangle + \langle \mathrm{d}_A \alpha, A^\vee \rangle + \langle \mathrm{d}_A \beta + [B, \alpha], B^\vee \rangle + \langle \frac{1}{2}[\alpha, \alpha], \alpha^\vee \rangle + \langle [\alpha, \beta], \beta^\vee \rangle \tag{3.73}$$

koju smo zapisali tako da automatski zadovoljava

$$s z^a = -\frac{\delta^R S}{\delta z^\vee_a} = (-)^{\mathfrak{gh}|z^\vee_a|+1} \frac{\delta S}{\delta z^\vee_a} \tag{3.74}$$

Naravno, za antipolja vrijedi analogno pravilo s drugim predznakom, stoga imamo

$$sA^\vee = -\mathrm{d}_A B - [\alpha, A^\vee] - [\beta, B^\vee] \tag{3.75}$$

$$sB^\vee = -F(A) - [\alpha, B^\vee] \tag{3.76}$$

$$s\alpha^\vee = -\mathrm{d}_A A^\vee - [B, B^\vee] + [\alpha, \alpha^\vee] - [\beta, \beta^\vee] \tag{3.77}$$

$$s\beta^\vee = -\mathrm{d}_A B^\vee - [\alpha, \beta^\vee] \tag{3.78}$$

Transformacije za antipolja imaju očekivanu strukturu: kad bismo uzeli kohomologiju pa prešli na lagranžijansku podmnogostrukost na kojem antipolja iščezavaju, dobili bismo početne, degenerirane jednadžbe gibanja. Ako antipolja prisilimo da budu funkcije polja, nadamo se da ćemo dobiti dobro definirane jednadžbe gibanja. Provjerimo BV-zatvorenost akcije. Pišemo[9]

$$\begin{aligned} sS_{BV} = s\langle \mathrm{d}_A, B\rangle + \langle \mathrm{d}_A\alpha, -\mathrm{d}_A B\rangle - \langle \mathrm{d}_A\beta, -\mathrm{d}_A A\rangle - \langle [B, \alpha], -\mathrm{d}_A A\rangle \\ + (A^\vee) + (B^\vee) + (\alpha^\vee) + (\beta^\vee) \end{aligned} \tag{3.79}$$

gdje je prva zagrada originalna akcija. Lako je vidjeti da prvi red iščezava jer

$$s\langle \mathrm{d}_A A, B\rangle = \langle s\mathrm{d}_A A, B\rangle + \langle \mathrm{d}_A A, sB\rangle = \langle \mathrm{d}_A(\mathrm{d}_A\alpha), B\rangle + \langle \mathrm{d}_A A, \mathrm{d}_A\beta + [B, \alpha]\rangle$$

i preostaje parcijalna integracija. Simbolično označeni članovi u zagradama su oni linearni upravo u tim članovima. Oni eksplicitno glase

$$\begin{aligned}
(A^\vee):\quad & \langle -\mathrm{d}_A\alpha, [\alpha, A^\vee]\rangle - \frac{1}{2}\langle [\alpha, \alpha], \mathrm{d}_A A^\vee\rangle = \langle [\alpha, \mathrm{d}_A\alpha], A^\vee\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{d}_A[\alpha, \alpha], A^\vee\rangle = 0 \\
(B^\vee):\quad & \langle \mathrm{d}_A\alpha, -[\beta, B^\vee]\rangle - \langle \mathrm{d}_A\beta, -[\alpha, B^\vee]\rangle - \langle [\alpha, \beta], -\mathrm{d}_A B^\vee\rangle \\
& + \langle [B, \alpha], [\alpha, B^\vee]\rangle + \frac{1}{2}\langle [\alpha, \alpha], -[B, B^\vee]\rangle \\
& = \langle -[d_A\alpha, \beta], B^\vee\rangle + \langle [\alpha, \mathrm{d}_A\beta], B^\vee\rangle + \langle \mathrm{d}_A[\alpha, \beta], B^\vee\rangle \\
& + \langle [\alpha, [B, \alpha]], B^\vee\rangle + \frac{1}{2}\langle [B, [\alpha, \alpha]], B^\vee\rangle = 0 \\
(\alpha^\vee):\quad & \frac{1}{2}\langle [\alpha, \alpha], [\alpha, \alpha^\vee]\rangle = -\frac{1}{2}\langle [\alpha, [\alpha, \alpha]], \alpha^\vee\rangle = 0 \\
(\beta^\vee):\quad & \frac{1}{2}\langle [\alpha, \alpha], -[\beta, \beta^\vee]\rangle - \langle [\alpha, \beta], -[\alpha, \beta^\vee]\rangle = \frac{1}{2}\langle [\beta, [\alpha, \alpha]], \beta^\vee\rangle + \langle [\alpha, [\alpha, \beta]], \beta^\vee\rangle = 0
\end{aligned}$$

---

[9] Predznake namjerno ne kratimo da ih bude lakše pratiti.

Tablica 3.1: Sadržaj polja BV-BF teorije

$\_ \otimes \_$	$\mathfrak{g}[2]$	$\mathfrak{g}[1]$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}[-1]$
$\Omega^0(M)$				α, β
$\Omega^1(M)$			A,B	
$\Omega^2(M)$		$A^\vee$,$B^\vee$		
$\Omega^3(M)$	$\alpha^\vee$,$\beta^\vee$			

3.4.1 Deformacija BF teorije

Klasična BF akcija koju imamo je u suštini slobodna teorija. BV formalizam daje nam i sistematski način kako naći sve konzistentne interakcije. Slijedeći [21] promatrat ćemo

$$S(c) = S^0 + cS^1 + c^2 S^2 + \dots \tag{3.80}$$

gdje je $S^0 = S_{BV}$. Relevantna jednadžba je klasična master jednadžba za novu akciju, $\{S(c), S(c)\} = 0$. Nju ćemo riješavati red po red u c. Nulti red vrijedi po pretpostavci, dok prvi red daje uvjet

$$s_0 S^1 = \{S^0, S^1\} = 0 \tag{3.81}$$

Kao uvijek, pretpostavljamo da su S^n lokalni funkcionali. Rješenje gornjeg uvjeta je tada[10]

$$s_0 \mathcal{L}^1 = \mathrm{d}_A \mathcal{K}_2 \tag{3.82}$$

gdje je $\mathcal{K}_2$ 2-forma duhovne graduacije 1, čija BV-transformacija opet mora biti egzaktna forma, i tako dalje, odnosno vrijede relacije

$$s_0 \mathcal{K}_2 = \mathrm{d}_A \mathcal{K}_1 \tag{3.83}$$

$$s_0 \mathcal{K}_1 = \mathrm{d}_A \mathcal{K}_0 \tag{3.84}$$

$$s_0 \mathcal{K}_0 = 0 \tag{3.85}$$

Krećemo od "repa". $\mathcal{K}_0$ je 0-forma duhovne graduacije 3. Njezin općeniti oblik je zbog Jacobijevih identiteta restringiran na

$$\mathcal{K}_0 = -\frac{c_1}{2}[\beta, [\alpha, \alpha]] + \frac{c_2}{2}[\alpha, [\beta, \beta]] = c_1[\beta, s_0\alpha] + c_2[\beta, s\beta] \tag{3.86}$$

[10]Ovdje koristimo vanjsku kovarijantnu derivaciju. Budući da gledamo polja s vrijednostima u Lie algebri, podrazumijevamo da ćemo pri integraciji lagranžijana uzeti i trag, pa ćemo iskoristiti fundamentalno svojstvo $\mathrm{tr} \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d} \circ \mathrm{tr}$.

do na BV-egzaktne članove, s realnim konstantama c_1, c_2. BV-zatvorenost daje $c_1 = 0$, pa pišemo samo $c_2 \doteq c$. Na kraju imamo

$$\mathcal{K}_1 = c[A, [\beta, \beta]] - 2c[\alpha, [B, \beta]] \tag{3.87}$$

$$\mathcal{K}_2 = -2c[A, [B, \beta]] - c[\alpha, [B, B]] \tag{3.88}$$

$$\mathcal{L}^1 = -c[A, [B, B]] \tag{3.89}$$

gdje smo izostavili antipolja[11]. Jednadžbe gibanja bez antipolja glase

$$\mathrm{d}_A B + c[B, B] = 0 \tag{3.90}$$

$$F(A) + 2c[A, B] + \lambda[B, B] = 0 \tag{3.91}$$

i može se proveriti da su konzistentne s Bianchijevim identitetom $d_A F(A) = 0$. Nadalje, ako uzmemo $c = \frac{1}{2}$, ili ako redefiniramo $B \to \frac{1}{c} B$ na što su jednadžbe gibanja invarijantne, jednadžba za polje B je Maurer-Cartanova. Jednadžbe gibanja možemo shvatiti kao deformaciju ravne koneksije A G-glavnog svežnja koju kontroliramo deformacijom B, dok nam teorija bez interakcije samo daje ravnu koneksiju A i kovarijantno konstantno polje B. Slična deformacija je opisana u [8]. Primjetimo još jedno zanimljivo svojstvo. Jednadžbe gibanja su tad simetrične na $A \leftrightarrow B$, kao i akcija ako parcijalno integriramo.

♣ *Opaska.* BF teorija se ponekad deformira *kozmološkim članom* $\frac{\lambda}{6}\langle B, [B, B]\rangle$. Lako se može provjeriti da je dodatak ovog člana konzistentan s originalnom akcijom i deformacijom koju smo već pronašli. Dapače, ako skaliramo B tako da je $c = \frac{1}{2}$, akcija glasi

$$S = \langle A, F(B)\rangle + \frac{\lambda}{6}\langle B, [B, B]\rangle \tag{3.92}$$

i skoro je identična Chern-Simons teoriji. ♣

3.4.2 Opservable i kvantizacija

Klasične opservable slobodne BF teorije su elementi $H^0(s)$. Fizikalno, ograničavamo se na funkcije A i B. BV-egzaknost ograničava odgovarajuće funkcionale na one koji su baždarno invarijantni te zadovoljavaju jednadžbe gibanja. U slučaju polja A,

[11] Puni lagranžijan sadrži članove oblika $2c[B^\vee, [B, \beta]] + 2c[A, [A^\vee, \beta]] + 2c[\alpha, [A^\vee, \beta]]$ te sektor antiduhova, no interesirat će nas lagranžijanska podmnogostrukost gdje su oni nula.

opservable su općenitog oblika $P(F(A)) \otimes W_L(A)$ gdje je $P(A)$ invarijantni simetrični polinom i

$$W_L(A) \doteq \text{tr}\, \mathcal{P} \exp \oint_L A \tag{3.93}$$

je Wilsonova petlja odnosno holonomija, uređena po putevima, s integracijom po zatvorenoj petlji $L : [0,1] \to M$. Budući da vrijede jednadžbe gibanja, jedini invarijantni polinom je trivijalan $P(F(A)) = 1$.

Zbog kompliciranije transformacije polja B, opservable koje nju sadrže nije očito definirati. U [4] one su dane kao

$$\gamma_2(C,K) \doteq \int_{x \in C} H^x_{x_0}(K) B(x) H^x_{x_0}(K)^{-1} \tag{3.94}$$

i njene iteracije, gdje je $x_0 \in C$ neka odabrana točka na petlji, K je krivulja s početnim i krajnjim točkama x_0 i x iz M, a

$$H^x_{x_0}(K) \doteq \text{tr}\, \mathcal{P} \exp \int_K A \tag{3.95}$$

je paralelni transport po K, odnosno njenom podizanju na G-svežanj. Abelov slučaj je puno jednostavniji, jer imamo samo zatvorene 1-forme A i B. To daje faktorizacijsku strukturu,

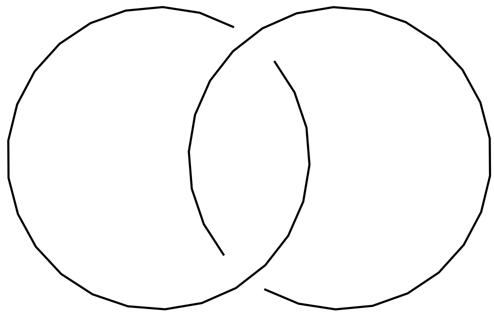
$$\text{Obs}(\mathcal{U}) = \text{Sym}^\bullet(\Omega^\bullet(\mathcal{U}) \otimes \Omega^\bullet(\mathcal{U})) = \text{Sym}^\bullet(\Omega^\bullet(\mathcal{U})) \oplus \text{Sym}^\bullet(\Omega^\bullet(\mathcal{U})) \tag{3.96}$$

dok za opservable možemo uzeti samo

$$O_L(A) \doteq \oint_L A \tag{3.97}$$

i analogno $O_L(B)$. One ovise samo o klasi homotopije petlji, što možemo vidjeti ako uzmemo dvije kobordantne petlje.

Što se tiče kvantnih opservabli, nema opstrukcije kvantizaciji slobodne BF teorije jer ona zadovoljava QME. Vidjeli smo da je BV-akcija BV-egzaktna, no može se i pokazati da leži u jezgri BV-laplasijana, čime zadovoljava kvantnu master jednadžbu. Naime, budući da Δ_{BV} djeluje na kanonski sparena polja i antipolja, moramo provje-



Slika 3.1: Hopfovo omatanje.

riti

$$\Delta_{BV}\left(\langle[A,\alpha],A^\vee\rangle+\langle[B,\alpha],B^\vee\rangle+\langle\frac{1}{2}[\alpha,\alpha],\alpha^\vee\rangle+\langle[\alpha,\beta],\beta^\vee\rangle\right)=0 \tag{3.98}$$

Budući da svaki član možemo napisati kao $\langle\alpha,[z,z^\vee]\rangle$ do na predznak, imat ćemo alternirajuću sumu članova s integrandima $\delta(0)\alpha^j(x)f^i_{ji}$, gdje su f^i_{jk} strukturni koeficijenti Liejeve algebre. Ovaj argument je samo heuristički jer BV-laplasijan ima ovakvu strukturu ako smo već fiksirali baždarenje i time se riješili ovisnosti o antipoljima u S. Puni argument je varijanta argumenta danog za Chern-Simons teoriju u [5]. Za BF teoriju je pokazano da je konačna u svim redovima smetnje u [27].

BF teorija ima samo jedan kinetički član, $\langle \mathrm{d}A,B\rangle$, i analogno za duhove, neovisno o tome je li teorija abelova ili ne. Na $\mathbb{R}^3-\{0\}$ Greenova funkcija de Rhamovog diferencijala glasi [24]

$$P(x,y)=\frac{1}{8\pi}\epsilon_{ijk}\frac{(x^i-y^i)\mathrm{d}(x^j-y^j)\wedge\mathrm{d}(x^k-y^k)}{|x-y|} \tag{3.99}$$

Ograničimo li se na abelovu teoriju, klasične opservable su samo integrali po petljama. Uzmimo dvije disjunktne petlje $L_{1,2}$ i pripadajuće opservable $W_{L_1}(A)$ i $W_{L_2}(B)$. Tada je

$$W_{L_1}(A)\star W_{L_2}(B)=W_{L_1}(A)W_{L_2}(B)+\hbar\int_{L_1}\mathrm{d}x\int_{L_2}\mathrm{d}yA(x)B(y)P(x,y) \tag{3.100}$$

Integral je slavni Gaussov vezivni broj petlji L_1 i L_2, koji opisuje koliko su puta ove krivulje omotane jedna oko druge, originalno izveden u kontekstu elektromagnetizma. Na slici 3.1 prikazana je najjednostavnija takva situacija. Ovo je očito topološka invarijanta. U [4] pokazano je da neabelova BF teorija sadrži strukturu Alexander-Conwayevih polinoma čvorova.

4 Zaključak

U ovom smo radu dali osvrt na faktorizacijsku strukturu fizikalnih opservabli kao što je definirana u radu Costella i Gwilliama. Jednostavno rečeno, moguće je množiti opservable definirane na disjunktnim skupovima, što smo pokazali na primjeru konačno dimenzionalne teorije.

Konačno dimenzionalni slučaj nam je služio kao motivacija za uvod BV formalizma polja i antipolja, u kojem baždarno invarijantne opservable shvaćamo na kohomološki način. Osim toga, dali smo uvod u teoriju deformacije i na primjeru deformacije asocijativne algebre vidjeli strukturu analognu onu BV formalizma. Interagirajuće teorije moguće je shvatiti kao formalne probleme modula, stoga smo na taj način formulirali klasičnu teoriju polja.

Kvantizaciju možemo promatrati kao deformaciju faktorizacijske strukture klasične teorije, čime dolazimo do kvantne master jednadžbe i kvantnog BV formalizma. Od te deformacijske kvantizacije zahtijevamo postojanje klasičnog limesa koji se svodi na princip koresponedncije i određuje kakva je deformacija moguća. Dotakli smo se i problema renormalizacije kvantne teorije te smo dali kratki osvrt na kauzalni pristup renormalizaciji. Na kraju smo BV formalizam primjenili na trodimenzionalnu topološku BF teoriju, čija struktura opservabli je daje neke invarijante u teoriji čvorva.

Dodaci

Dodatak A Kategorije i homološka algebra

Ukratko ćemo reći nešto o osnovnim pojmovima teorije kategorija dok zainteresiranog čitatelja pozivamo da pogleda standardnu referencu [28]. Jedna od osnovnih metoda teoretske znanosti je klasifikacija i apstrakcija prirodnih ili logičkih fenomena. Pojam simetrije, na primjer, prirodno vodi do aksiomatike grupe. Nakon što zapišemo nekoliko primjera grupa možemo se pitati postoje li među grupama nekakve veze. Njiih ćemo prikazati preslikavanjima koja po definiciji čuvaju strukturu grupe. U slučaju grupa njih nazivamo homomorfizmima grupa. Pojam *kategorije* apstrakcija je skupa struktura povezanih preslikavanjima kompatibilnim s istim strukturama.

Neka je dana kategorija $\mathbf{C}$. Ako ignoriramo fundamentalna pitanja veličine, možemo reći da se ona sastoji od skupa *objekata* $C_0 = \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ i *preslikavanja* odnosno *morfizama* $C_1 = \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$. Oni zadovoljavaju nekoliko pravila:

1. Svakom preslikavanju $f \in C_1$ dodjeljeni su objekti $s(f), t(f) \in C_0$, njezina domena i kodomena. Simboli s, t dolaze od eng. *source* i *target*.

2. Svakom objektu $a \in C_0$ dodjeljeno je preslikavanje $1_A \in C_1$, njegova identiteta.

3. Uvedemo li skup parova kompozabilnih preslikavanja

$$C_1 \times_{C_0} C_1 = \{(f,g)|\, s(f) = t(g)\}$$

možemo definirati kompoziciju $f \circ g \in C_1$.

4. Kompozicija je asocijativna,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

za one $f, g, h \in C_1$ za koje to ima smisla. Nadalje, jedinica zadovoljava

$$1_{t(f)} \circ f = f \circ 1_{s(f)} = f$$

Grupe i homomorfizmi grupa čine kategoriju **Grp**, skupovi i funkcije čine **Set**, vektorski prostori i linearna preslikavanja **Vect**. Budući da je ovo tako općenita struktura, primjera ne nedostaje. Možemo tražiti neka dodatna svojstva, recimo invertibilnost preslikavanja. Za specijalni slučaj kad imamo samo jedan objekt i sve morfizme invertibilne, vidimo da se aksiomi za C_1 svode na one za grupu, dok općenitiji slučaj s više objekata i svim morfizmima invertibilnim zovemo grupoidom. Jednostavan primjer je geometrijski: objekti su točke na nekoj mnogostrukosti M, a preslikavanja su neprekidni putevi od jedne točke do druge. Asocijativnost u ovom slučaju nije zadovoljena osim ako ne prijeđemo na klase homotopija s fiksnim krajevima. Njega nazivamo *fundamentalnim grupoidom* $\Pi(M)$. Njegovu podkategoriju, općenito definiranu s nekim podskupom objekata i preslikavanja koji također čine kategoriju, čini prva fundamentalna grupa homotopije za svaku točku, $\pi_1(M, x)$.

U prošlom primjeru se nazire prava moć jezika kategorija. Ona se ne sastoji u samim kategorijama, već u preslikavanjima među različitim kategorijama. Sad ćemo shvatiti sve kategorije kao objekte u "višoj" kategoriji **Cat**. Preslikavanja u njoj zvat ćemo *funktori*. Funktor $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ svakom će objektu $a \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ dodijeliti $F(a) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B})$. Svakom preslikavanju $f : a_1 \to a_2$ dodijelit će preslikavanje $F(f) : F(a_1) \to F(a_2)$. Ovakav funktor zovemo kovarijantnim, dok kontravarijantni funktor okreće smjerove preslikavanja. Jednostavan primjer funktora je *zaboravljivi funktor*, $Z : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, koji će svaku grupu poslati u skup njenih elemenata, sve morfizme pretvoriti u obične funkcije i zaboraviti grupnu strukturu.

Manje jednostavan primjer je onaj predsnopa, što je kontravarijantni funktor $F : \mathbf{C} \to$ **Set**. U svakoj kategoriji postoji jednostavan primjer predsnopa. Označimo prvo s $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ skup svih preslikavanja $f : A \to B$ u **C**. Promotrimo funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B)$. Iz notacije je očito da on šalje $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$. Što se tiče funkcija, šalje $f : A_1 \to A_2$ u $(-) \circ f$ odnosno postkomponira ju jer možemo napraviti samo kombinaciju $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \to B$. Ovo je kontravarijantni funktor u **Set**, dakle predsnop.

Bilo bi zanimljivo znati postoji li neka veza između predsnopova $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B_1)$ i $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B_2)$ ako imamo dva različita objekta, no ne znamo uspoređivati predsnopove. Budući da fuktore definiramo njihovim djelovanjem na preslikavanja, $f : A_1 \to A_2$, za usporedbu dvaju funktora F, G iz **A** u **C** trebaju za sve objekte $A_{1,2}$ preslikavanja $\alpha_{A_{1,2}}$ takva da dijagrami oblika komutiraju. Skup svih ovih preslikavanja nazivamo *prirodnim transformacijama* i pišemo $\mathrm{Nat}(F, G)$ (prema eng. *natural*). Ako

$$\begin{array}{ccc} F(A_1) & \xrightarrow{F(f)} & F(A_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_{A_1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{A_2}} \\ G(A_1) & \xrightarrow{G(f)} & G(A_2) \end{array}$$

raspišemo gornji dijagram za već spomenute predsnopove, dobit ćemo

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B_1), \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B_2)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B_1, B_2) \tag{A.1}$$

što smo mogli očekivati. Ovo je jedan od izričaja Yonedine leme.

Ovime dolazimo do pojma *reprezentablinosti*. Za predsnop F kažemo da je reprezentabilan ako za njega postoji invertibilna prirodna transformacija u $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, R)$ za neki *reprezentirajući* objekt R iz **C**. Lako je vidjeti da je objekt R jedinstven do na izomorfizam ako koristimo prijašnju relaciju. Pomoću reprezentabilnosti možemo definirati mnoge konstrukcije poznate u teoriji skupova na jedinstven način. Kao primjer, budući da na **Set** postoji produkt, možemo definirati predsnop

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\_, B) \tag{A.2}$$

Njegov reprezentirajući objekt je upravo produkt $A \times B$, ako postoji.

Preostaje nam dati skicu homološke algebre. Ona je u suštini teorija kolančanih kompleksa, čiji je poznati primjer de Rhamov kompleks:

$$\Omega^\bullet(M) = C^\infty(M) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \Omega^1(M) \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \dots \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \Omega^{\dim M}(M)$$

Da bismo taj primjer generalizirali i dali općenitu definiciju, treba nam kategorija u kojoj preslikavanja možemo zbrajati te u kojoj postoji neki smisao jezgre i kojezgre. Ako hoćemo napisati $\mathrm{d}^2 = 0$, očito nam treba neko preslikavanje "0". Ova svojstva imaju *aditivne* kategorije. Ako radimo s njima, kolančani kompleks $A^\bullet$ je kolekcija objekata $\{A^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ s pripadajućim diferencijalima $\{\mathrm{d}^n : A^n \to A^{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ koji zadovoljavaju $\mathrm{d}^{n+1} \circ \mathrm{d}^n = 0$. Ako definiramo kolančana preslikavanja $f : A^\bullet \to B^\bullet$, dobivamo kategoriju kolančanih kompleksa **coCh** (eng. *cochain*).

Indeks n zovemo stupnjem ili graduacijom. $A^\bullet$ možemo pretvoriti u *diferencijalno graudiranu algebru* ako definiramo množenje $m : A^\bullet \otimes A^\bullet \to A^\bullet$ tako da vrijedi $m(A^j, A^k) \subseteq A^{j+k}$. Elemente, na primjer, zovemo komutativnima ako vrijedi $m(a_j, a_k) = (-)^{jk} m(a_k, a_j)$.

Korisna operacija je ona pomaka u graduaciji. Nju označujemo sa zagradama i za pomaknuti kompleks $A[k]^\bullet$ vrijedi

$$(A[k])^n \doteq A^{k+n} \tag{A.3}$$

gdje je k cijeli broj. Budući da on mijenja komutacijske relacije, inducira izomorfizam pomaka (fr. *décalage*) na simetričnoj i antisimetričnoj tenzorskoj algebri, $\mathrm{Sym}^n(A[1]) \cong (\wedge^k A)[k]$.

Kohomologiju definiramo na uobičajen način, $H^n(A^\bullet) = \ker \mathrm{d}^n / \mathrm{im}\, \mathrm{d}^{n-1}$. Ona je kontravarijantni funktor. Ako preslikavanje kolančanih kompleksa inducira izomorfizam na razini kohomologije, to preslikavanje zovemo kvazi-izomorfizam. Pojam kvazi-izomorfizma koristi BV formalizam, koji u sebi sadrži dva *razlučivanja*. Promotrit ćemo jedan od njih, Chevalley-Eilenbergov kompleks, čiju nultu kohomologiju čine koinvarijante Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i kojeg gradimo pomoću razlučivanja.

Razlučivanje nekog objekta B je kolančani kompleks $A^\bullet$ čija je kohomologija izomorfna tom objektu, $H(A^\bullet) = B$. Objekt B prvo trebamo shvatiti kao kolančani kompleks $B^\bullet$ gdje je $B^n = 0$ za sve $n \neq 0$ i $B^0 = B$. Poanta razlučivanja je da smo od jednog objekta dobili kompleks. On nije jedinstven. Slobodni smo odabrati neka posebna svojstva razlučivanja. Na kraju, umjesto da radimo direktno s B, možemo raditi s $A^\bullet$ i uzeti kohomologiju.

Pogledajmo primjer koinvarijanti $M_\mathfrak{g} = M/\mathfrak{g}M$ $\mathfrak{g}$-modula M. Tvrdimo da možemo pisati

$$M_\mathfrak{g} = \mathbb{K} \otimes_{U\mathfrak{g}} M \tag{A.4}$$

gdje je $U\mathfrak{g}$ univerzalna omotačka algebra od $\mathfrak{g}$. Po definiciji tenzorskog produkta modula, ovo znači jednakost $(\mathbb{K} \cdot U\mathfrak{g}) \otimes M = \mathbb{K} \otimes (U\mathfrak{g} \cdot M)$. Budući da je $\mathbb{K}$ trivijalni $\mathfrak{g}$-bimodul, $U\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}) \cong \mathbb{K}$ stoga je $\mathbb{K} \cdot U\mathfrak{g} = \mathbb{K}$. Preostala jednakost može biti zadovoljena samo ako uzmemo kvocijent idealom $\mathfrak{g} \cdot M$.

Uzimanje koinvarijanti možemo shvatiti kao djelovanje funktorom $(-) \otimes_{U\mathfrak{g}} M$. Umjesto da njime djelujemo na trivijalni modul $\mathbb{K}$, možemo uzeti njegovo razlučivanje, djelovati na njega pa uzeti kohomologiju. Time će nulta kohomologija reproducirati koinvarijante. Nećemo ulaziti u detalje ovog postupka, već samo reći da na kraju dobivamo baš Chevalley-Eilenbergov kompleks,

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, M) = \mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}[1]) \otimes_{\mathbb{K}} M \tag{A.5}$$

Ako je $M = \mathbb{K}$, pišemo samo $C^\bullet(\mathfrak{g})$. Treba napomenuti da u tekstu na par mjesta koristimo izraz razlučivanje za čitav ovaj postupak, što bi trebalo biti jasno iz konteksta.

Za kraj ćemo spomenuti diferencijalno graduirane Liejeve algebre i L_∞ algebre. Diferencijalno graduirane Liejeve algebre su, kao što im kaže naziv, istodobno diferencijalno graduirane algebre i Liejeve algebre. Uz oznaku $\mathfrak{g}^\bullet$, imamo diferencijal $\mathrm{d} : \mathfrak{g}^\bullet \to \mathfrak{g}^\bullet[1]$ i bilinearnu zagradu $[-,-] : \mathfrak{g}^\bullet \otimes \mathfrak{g}^\bullet \to \mathfrak{g}^\bullet$ uz pravila

1. $[g_1, g_2] = -(-)^{|g_1||g_2|}[g_2, g_1]$
2. $\mathrm{d}[g_1, g_2] = [dg_1, g_2] + (-)^{|g_1|}[g_1, \mathrm{g}_2]$
3. $\sum\limits_{\text{cycl}}(-)^{|g_1||g_3|}[g_1, [g_2, g_3]] = 0$

Ova pravila smo koristili pri konkretnim računima. Osim ove strukture, možemo tražiti da graduirani Jacobijev identitet vrijedi do na neku "višu" zagradu. Definirat ćemo dakle niz graduirano antisimetričnih preslikavanja

$$\ell_n : \wedge^n \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[2-n] \tag{A.6}$$

za $n = \mathbb{N}$. Ona trebaju zadovoljavati pravila identična onima za diferencijalno graduiranu Liejevu algebru ako stavimo $\ell_{n\geq 3} = 0$. Posebno, ℓ_1 će biti diferencijal, ℓ_2 zagrada. Do potrebnih relacija je lakše doći ako koristimo već spomenuti izomorfizam pomaka, $\wedge^n \mathfrak{g} = \mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1])[-n]$. Sada ℓ_n možemo gledati kao preslikavanja $\mathrm{Sym}^n(\mathfrak{g}[1]) \to \mathfrak{g}[2]$. Ovakav zapis sugerira da promatramo sve zagrade kao komponente nekog $\oplus_n \ell_n = \ell_{\text{tot}}$ kohomološkog stupnja $+1$ koji djeluje na $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathfrak{g}[1])$. Do potrebnih pravila dolazimo ako tražimo nilpotentnost $\ell_{\text{tot}}^2 = 0$. Za vezu L_∞ algebri i teoriji deformacija vidjeti [26].

Literatura

[1] Becker, Katrin, Melanie Becker i John H. Schwarz: *String theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge University Press, 2006.

[2] Beilinson, Alexander i Vladimir Drinfeld: *Chiral algebras*, svezak 51. American Mathematical Soc., 2004.

[3] Bimonte, Giuseppe, Giampiero Esposito, Giuseppe Marmo i Cosimo Stornaiolo: *Peierls brackets: From Field theory to dissipative systems*. arXiv preprint hep-th/0307090, 2003.

[4] Cattaneo, Alberto S., Paolo Cotta-Ramusino i Maurizio Martellini: *Three-dimensional BF theories and the Alexander-Conway invariant of knots*. arXiv preprint hep-th/9407070, 1994.

[5] Costello, Kevin: *Renormalisation and the Batalin-Vilkovisky formalism*. arXiv preprint arXiv:0706.1533, 2007.

[6] Costello, Kevin: *Renormalization and effective field theory*. Broj 170. American Mathematical Soc., 2011.

[7] Costello, Kevin i Owen Gwilliam: *Factorization algebras in quantum field theory*, svezak 1. Cambridge University Press, 2016.

[8] Costello, Kevin i Owen Gwilliam: *Factorization algebras in quantum field theory*, svezak 2. Cambridge University Press, 2016.

[9] Dorigoni, Daniele: *An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus*. arXiv preprint arXiv:1411.3585, 2014.

[10] Dyson, Freeman J.: *Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics*. Physical Review, 85(4):631, 1952.

[11] Epstein, Henri i Vladimir Glaser: *The role of locality in perturbation theory*. 19(3):211–295, 1973.

[12] Fredenhagen, Klaus i Katarzyna Rejzner: *Batalin-Vilkovisky formalism in perturbative algebraic quantum field theory*. Communications in Mathematical Physics, 317(3):697–725, 2013.

[13] Fredenhagen, Klaus i Katarzyna Rejzner: *Quantum field theory on curved spacetimes: Axiomatic framework and examples*. Journal of Mathematical Physics, 57(3):031101, 2016.

[14] Gerstenhaber, Murray: *The cohomology structure of an associative ring*. Annals of Mathematics, stranice 267–288, 1963.

[15] Giaquinto, Anthony: *Topics in algebraic deformation theory*. U *Higher structures in geometry and physics*, stranice 1–24. Springer, 2011.

[16] Grothendieck, Alexandre: *La théorie de Fredholm*. Bull. Soc. Math. France, 84(31):384, 1956.

[17] Gwilliam, Owen: *Factorization algebras and free field theories*. Disertacija, Northwestern University, 2012.

[18] Gwilliam, Owen i Kasia Rejzner: *Comparing nets and factorization algebras of observables: the free scalar field*. arXiv preprint arXiv:1711.06674, 2017.

[19] Henneaux, Marc i Claudio Teitelboim: *Quantization of gauge systems*. Princeton university press, 1994.

[20] Hörmander, Lars: *The analysis of linear partial differential operators. I. Distribution theory and Fourier analysis*. Springer, Berlin, 2003.

[21] Ikeda, Noriaki: *Lectures on AKSZ sigma models for physicists*. U *Noncommutative Geometry and Physics 4*, stranice 79–169. World Scientific, 2017.

[22] Keller, Kai J.: *Euclidean Epstein–Glaser renormalization*. Journal of Mathematical Physics, 50(10):103503, 2009.

[23] Khavkine, Igor: *Covariant phase space, constraints, gauge and the Peierls formula*. International Journal of Modern Physics A, 29(05):1430009, 2014.

[24] Kontsevich, Maxim: *Feynman diagrams and low-dimensional topology*. U *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992*, stranice 97–121. Springer, 1994.

[25] Kontsevich, Maxim: *Deformation quantization of Poisson manifolds*. Letters in Mathematical Physics, 66(3):157–216, 2003.

[26] Kontsevich, Maxim i Yan Soibelman: *Deformation theory*. 2002.

[27] Lucchesi, Claudio, Olivier Piguet i Silvio Paolo Sorella: *Renormalization and finiteness of topological BF theories*. arXiv preprint hep-th/9208047, 1992.

[28] Mac Lane, Saunders: *Categories for the working mathematician*, svezak 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[29] Nakahara, Mikio: *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.

[30] Peskin, Michael E. i Daniel V. Schroeder: *Quantum field theory*. 1995.

[31] Rejzner, Katarzyna: *Batalin-Vilkovisky formalism in locally covariant field theory*. arXiv preprint arXiv:1111.5130, 2011.

[32] Roger, Claude: *Gerstenhaber and Batalin-Vilkovisky algebras; algebraic, geometric, and physical aspects*. Archivum Mathematicum, 45(4):301–324, 2009.

[33] Schack, M. i S. D. Gerstenhaber: *Algebras, bialgebras, quantum groups and algebraic deformations*. Contemp. Math, 134:51–92, 1992.

[34] Toën, Bertrand: *Derived algebraic geometry*. arXiv preprint arXiv:1401.1044, 2014.

[35] Troost, Walter, P. Van Nieuwenhuizen i Antoine Van Proeyen: *Anomalies and the Batalin-Vilkovisky lagrangian formalism*. Nuclear Physics B, 333(3):727–770, 1990.

[36] Wald, Robert M.: *General Relativity*. 1984.

[37] Yau, Donald: *Homotopical Quantum Field Theory*. arXiv preprint arXiv:1802.08101, 2018.