Konveksne funkcije realne varijable

Jelenčić, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Jelenčić

KONVEKSNE FUNKCIJE REALNE VARIJABLE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Rajna Rajić

Suvoditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, travanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici prof.dr.sc. Rajni Rajić na vodstvu, pomoći, podršci, razumijevanju i strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala mojim roditeljima, bratu i dečku na strpljenu i podršci tijekom cijelog studija i vjeri u moj uspjeh.

Sadržaj

Uvod

Konveksnost kao pojam je najpoznatiji u području geometrije, ali također je široko korišten u drugim područjima matematike kao što su: funkcijska analiza, kompleksna analiza, teorija grafova, parcijalne diferencijalne jednadžbe, diskretna matematika, teorija vjerojatnosti i mnoga druga polja. Konveksnost igra važnu ulogu i u područjima izvan matematike, kao što su fizika, kemija, biologija i druge znanosti.

Poznato je da su grčki filozofi proučavali pojam konveksnosti u geometriji, ali ne možemo točno utvrditi kada se taj pojam prvi put u povijesti spominje. Proučavanje konveksnih funkcija započinje u kontekstu proučavanja realnih funkcija realne varijable.

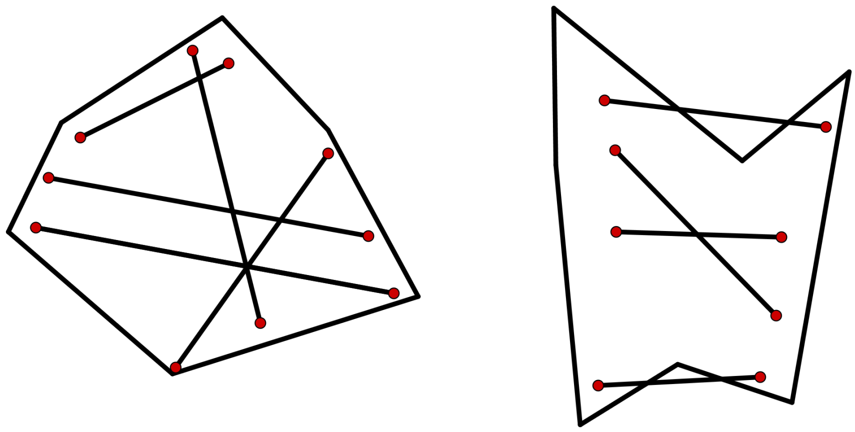
Glavni cilj ovoga rada je dati pregled osnovnih rezultata o konveksnim funkcijama, te njihovu vezu s klasičnim nejednakostima koje su nastale većinom krajem 19. i početkom 20. stoljeća. Rad je podjeljen u dva poglavlja. U prvom poglavlju dana je definicija i prikaz osnovnih svojstava konveksnih funkcija, zatim su proučena svojstva neprekidnosti i derivabilnosti, opisane operacije s konveksnim funkcijama te dane razne karakterizacije konveksnih funkcija. Konveksne funkcije su moćan alat za dokazivanje velikog broja nejednakosti. U drugom poglavlju dana je veza konveksnih funkcija s klasičnim nejednakostima poput Jensenove, Youngove, Cauchyjeve, Hölderove, Minkowskijeve, Hermite–Hadamardove nejednakosti te nejednakosti između sredina. Također je dana vrlo kratka biografija o svakom od poznatih matematičara po kojim su navedene nejednakosti nazvane, te primjeri za svaku od njih.

Poglavlje 1

Osnovni rezultati o konveksnim funkcijama

1.1 Definicija i osnovna svojstva konveksnih funkcija

Konveksne funkcije su dobro poznata klasa funkcija s kojima se obično upoznajemo u problemima ispitivanja tijeka funkcije i crtanja grafa. Prisjetimo se da je podskup ravnine konveksan ako uz svake svoje dvije točke sadrži i dužinu koja spaja te dvije točke (slika 1.1).



Slika 1.1: Konveksan i nekonveksan skup

Povijesno, logički i pedagoški gledano, proučavanje konveksnih funkcija počinje u kontekstu proučavanja realnih funkcija realne varijable. U tom kontekstu i kroz grafički prikaz realnih funkcija realne varijable intuitivno pronalazimo mnoštvo različitih teorema koje možemo smatrati elegantnima zbog jednostavnosti njihova dokaza. Iako jednostavni za dokazati, rezultati tih teorema nisu nimalo trivijalni. Oni imaju bitne primjene i u isto vrijeme daju mogućnost mnogobrojnim generalizacijama.

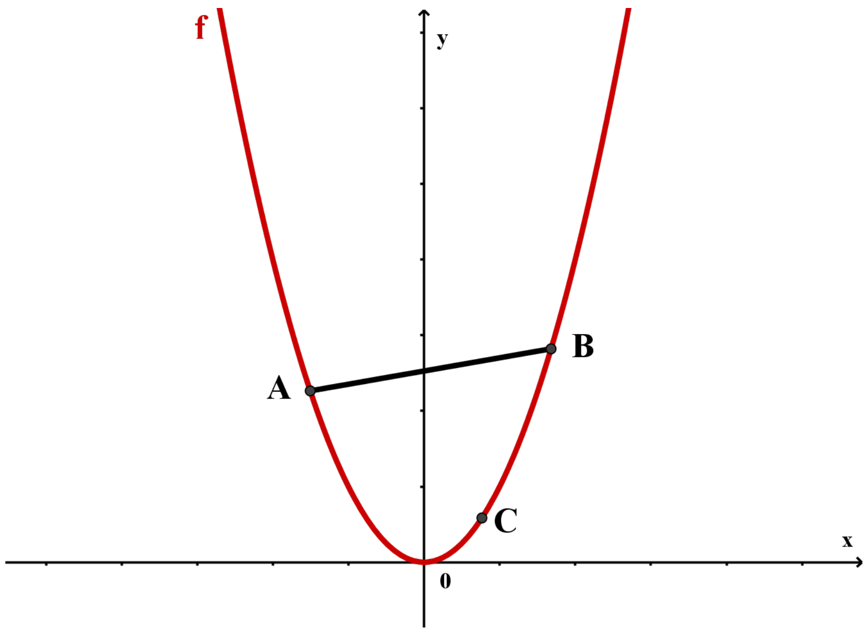
Promatrat ćemo funkcije $f : I \to \mathbb{R}$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Interval I može biti otvoren, poluotvoren ili zatvoren, može biti konačan ili beskonačan. U daljnjem ćemo s I^0 označavati unutrašnjost od I.

Definicija 1.1.1. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu I ako za sve $x, y \in I$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.1}$$

Ukoliko za sve $x, y \in I, x \neq y$, i svaki $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ u (1.1) vrijedi stroga nejednakost, funkciju f nazivamo strogo konveksnom funkcijom.

Geometrijska interpretacija definicije konveksne funkcije je sljedeća. Kažemo da je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, konveksna funkcija ako je područje iznad grafa funkcije f konveksno. Drugim riječima, odaberemo li bilo koje tri točke na grafu, nazovimo ih A, B i C, takve da je C između A i B, tada se točka C nalazi na dužini ili ispod dužine $\overline{AB}$. Drugim riječima, dio grafa funkcije f između proizvoljno odabranih točaka A i B je dužina $\overline{AB}$ ili se nalazi ispod dužine koja spaja točke A i B (slika 1.2).



Slika 1.2: Konveksni graf

Ova interpretacija može se iskazati i u terminima koeficijenata smjerova pravaca koji prolaze kroz točke A, C točke A, B i točke B, C. U tu svrhu uvodimo sljedeću notaciju.

Za svake dvije različite točke T i S koordinatne ravnine xOy, označimo s $k_{T,S}$ koeficijent smjera pravca koji prolazi točkama T i S. Za svaki $x \in I$ označimo s $T_x(x, f(x))$ točku na grafu funkcije f. Tada imamo sljedeći rezultat.

Lema 1.1.2. *Neka je dana funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Neka su $a, b, c \in I$ takvi da je $a < c < b$. Tada su sljedeće tvrdnje međusobno ekvivalentne.*

(i) *Točka T_c leži na dužini ili ispod dužine koja spaja točke T_a i T_b.*

(ii) $k_{T_a,T_c} \leq k_{T_a,T_b}$.

(iii) $k_{T_a,T_b} \leq k_{T_c,T_b}$.

Pritom točka T_c leži ispod dužine koja spaja točke T_a i T_b, ako i samo ako u uvjetu (ii) odnosno (iii) vrijedi stroga nejednakost.

Dokaz. Označimo s $P(c, d)$ točku koja leži na dužini $\overline{T_aT_b}$, a čija apscisa je jednaka apscisi točke T_c (slika 1.3). Tada je $k_{T_a,T_b} = k_{T_a,P} = k_{P,T_b}$.

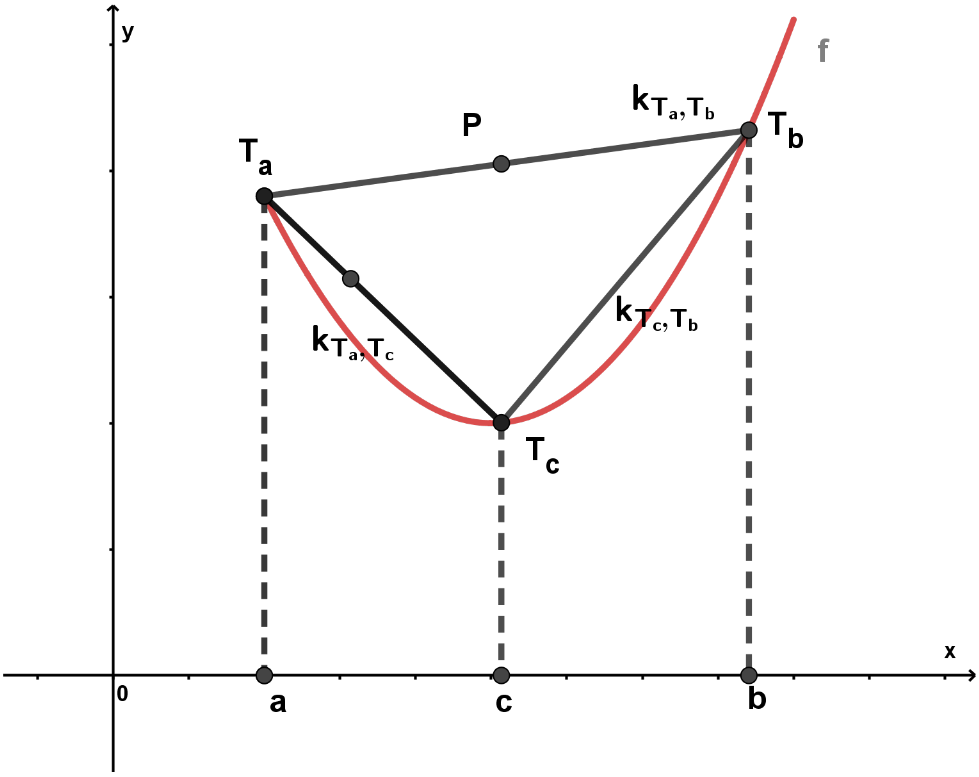
Uočimo da se uvjet (i) može zapisati kao $f(c) \leq d$, uvjet (ii) kao

$$k_{T_a,T_c} = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{d - f(a)}{c - a} = k_{T_a,P},$$

a uvjet (iii) kao

$$k_{P,T_b} = \frac{f(b) - d}{b - c} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = k_{T_c,T_b},$$

pa je jasno da su uvjeti (i), (ii) i (iii) međusobno ekvivalentni. □



Slika 1.3: $k_{T_a,T_c} \leq k_{T_a,T_b} \leq k_{T_c,T_b}$

Kao posljedicu leme 1.1.2 imamo sljedeću karakterizaciju konveksne funkcije.

Propozicija 1.1.3. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako je za svaki $x_0 \in I$ funkcija nagiba*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.2}$$

rastuća (strogo rastuća) na $I \setminus \{x_0\}$.

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija. Uzmimo proizvoljan $x_0 \in I$. Stavimo

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Tvrdimo da je funkcija g rastuća. Uzmimo $a, b \in I \setminus \{x_0\}$, $a < b$. Razlikujemo sljedeća tri slučaja.

Ako je $x_0 < a < b$, onda zbog konveksnosti funkcije f, točka T_a leži na dužini ili ispod dužine $\overline{T_{x_0}T_b}$ pa prema lemi 1.1.2 vrijedi $g(a) = k_{T_{x_0},T_a} \leq k_{T_{x_0},T_b} = g(b)$.

Ako je $a < x_0 < b$, onda zbog konveksnosti funkcije f, točka T_{x_0} leži na dužini ili ispod džine $\overline{T_a T_b}$ pa prema lemi 1.1.2 vrijedi $g(a) = k_{T_{x_0},T_a} \leq k_{T_{x_0},T_b} = g(b)$.

Ako je $a < b < x_0$, onda zbog konveksnosti funkcije f, točka T_b leži na dužini ili ispod dužine $\overline{T_a T_{x_0}}$ pa prema lemi 1.1.2 vrijedi $g(a) = k_{T_{x_0},T_a} \leq k_{T_{x_0},T_b} = g(b)$.

Time smo pokazali da je g rastuća funkcija.

Obratno, pretpostavimo da je za svaki $x_0 \in I$ funkcija (1.2) rastuća. Neka je $a, b, c \in I$, $a < c < b$. Za $x_0 = a$ prema pretpostavci je

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

odnosno $k_{T_a,T_c} \leq k_{T_a,T_b}$ pa prema lemi 1.1.2 točka T_c leži na dužini ili ispod dužine $\overline{T_a T_b}$. Dakle, funkcija f je konveksna. □

Jednostavni primjeri konveksnih funkcija su neke dobro poznate funkcije:

1) $f(x) = x^2, \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle$,
2) $g(x) = \sin x, \quad x \in [-\pi, 0]$,
3) $f(x) = |x|, \quad x \in \langle -\infty, \infty \rangle$.

Prve dvije funkcije su strogo konveksne dok treća nije.

Definicija 1.1.4. *Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konkavna na intervalu I ako za sve $x, y \in I$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y). \tag{1.3}$$

Ukoliko za sve $x, y \in I, x \neq y$, i svaki $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ u (1.3) vrijedi stroga nejednakost, funkciju f nazivamo strogo konkavnom funkcijom.

Uočimo, ako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda je funkcija $-f : I \to \mathbb{R}$ konkavna.

Ako je funkcija f istovremeno konveksna i konkavna, tada je f afina funkcija, tj. f je oblika $f(x) = kx + l$, gdje su k i l prikladno odabrane realne konstante.

Možemo reći da je teorija o konkavnim funkcijama u direktnoj vezi s teorijom o konveksnim funkcijama. Naime, svi rezultati o konveksnim funkcijama mogu se preformulirati u terminima konkavnih funkcija. Stoga ćemo našu pažnju ograničiti na konveksne funkcije.

Vezano uz geometrijsku interpretaciju konveksnosti imamo sljedeći rezultat.

Teorem 1.1.5. *Neka je f realna funkcija definirana na intervalu I. Funkcija f je konveksna ako i samo ako za svaki kompaktni podinterval J od I, i za svaku afinu funkciju L, supremum od $f + L$ na J se postiže u rubnim točkama.*

Dokaz. Nužnost. Ako je f konveksna, tada je i suma $F = f + L$ konveksna. Kako je svaka točka podintervala $J = [a, b]$ konveksna kombinacija $z = (1 - \lambda)a + \lambda b$ od a i b za neki $\lambda \in [0, 1]$, imamo

$$\sup_{z\in J} F(z) = \sup_{\lambda\in[0,1]} F((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} [(1 - \lambda)F(a) + \lambda F(b)] = \max\{F(a), F(b)\}.$$

Dovoljnost. Neka su $a, b \in I$ proizvoljne točke i $J = [a, b]$ kompaktni podinterval od I. Postoji afina funkcija $L(x) = mx + n$ koja se podudara s f u rubnim točkama a i b. Prema pretpostavci se supremum od $f + (-L)$ na J postiže u rubnim točkama intervala J pa je

$$\sup_{\lambda\in[0,1]} [(f - L)((1 - \lambda)a + \lambda b)] = 0$$

iz čega proizlazi

$$\begin{aligned} 0 &\geq f((1 - \lambda)a + \lambda b) - L((1 - \lambda)a + \lambda b) \\ &= f((1 - \lambda)a + \lambda b) - (1 - \lambda)L(a) - \lambda L(b) \\ &= f((1 - \lambda)a + \lambda b) - (1 - \lambda)f(a) - \lambda f(b) \end{aligned}$$

za svaki $\lambda \in [0, 1]$, pa je f konveksna funkcija.

□

Propozicija 1.1.6. *Konveksna funkcija* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena je odozgo i odozdo.*

Dokaz. Primjenimo li teorem 1.1.5 na funkcije f i $L = 0$ na segmentu $I = J = [a, b]$, zaključujemo da je funkcija f omeđena odozgo, te da maksimalnu vrijednost postiže u nekoj od rubnih točaka a ili b segmenta $[a, b]$. Dakle, $f(z) \leq M$ gdje je $M = \max\{f(a), f(b)\}$.

Funkcija f je također omeđena odozdo, što možemo vidjeti tako da uzmemo proizvoljnu točku $z \in [a, b]$ i prikažemo je u obliku $z = \frac{a+b}{2} + t$ za neki t takav da je $|t| \leq \frac{b-a}{2}$. Tada je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right)$$

odnosno

$$f(z) = f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right). \tag{1.4}$$

Stavimo $m = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$. Koristeći M kao gornju granicu funkcije f, imamo $-f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \geq -M$, pa iz (1.4) slijedi

$$f(z) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m.$$

Time smo pokazali da je m donja međa funkcije f. □

1.2 Neprekidnost i derivabilnost konveksnih funkcija

U ovoj točki pažljivo ćemo proučiti svojstva konveksnih funkcija, kao što su neprekidnost i derivabilnost. Možda nije iznenađujuće da su konveksne funkcije neprekidne, osim možda u rubnim točkama domene. Više je iznenađujuće da su konveksne funkcije, uz moguće iznimke u prebrojivo mnogo točaka, derivabilne.

Prisjetimo se da se neprekidnost funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u točki x_0 otvorenog intervala $I \subseteq R$ može karakterizirati na sljedeće načine:

- f je neprekidna u x_0 ako i samo ako ima limes u točki x_0 i vrijedi
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- f je neprekidna u x_0 ako i samo ako ima limese slijeva i zdesna u točki x_0 i vrijedi
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) = \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna, ili diferencijabilna, u točki $x_0 \in I$ ako postoji limes
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Problem neprekidnosti i diferencijabilnosti riješit ćemo na jednodimenzionalnom slučaju, a taj slučaj predstavlja osnovu za rješavanje odgovarajućeg problema u višedimenzionalnom slučaju.

Definicija 1.2.1. *Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna (zadovoljava Lipschitzov kriterij) s konstantom $K > 0$ na $[a, b]$ ako za sve $x, y \in [a, b]$ vrijedi*
$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|. \tag{1.5}$$

Napomena 1.2.2. *Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija je ujedno i neprekidna funkcija.*

Teorem 1.2.3. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada je f Lipschitz-neprekidna na svakom segmentu $[a, b] \subset I^0$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ takav da $a - \varepsilon$ i $b + \varepsilon$ pripadaju intervalu I, i neka su m i M donja i gornja granica funkcije f na intervalu $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$. Ako su x i y različite točke iz $[a, b]$ i vrijedi
$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y - x|}(y - x), \quad \lambda = \frac{|y - x|}{\varepsilon + |y - x|},$$

tada $z \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, $y = \lambda z + (1-\lambda)x$, te imamo

$$f(y) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(x) = \lambda[f(z) - f(x)] + f(x),$$

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M-m) < \frac{|y-x|}{\varepsilon}(M-m) = K|y-x|$$

gdje je $K = \frac{(M-m)}{\varepsilon}$. Kako ovo vrijedi za sve $x, y \in [a,b]$ zaključujemo da je $|f(y) - f(x)| \leq K|y-x|$, što smo i željeli pokazati. □

Kao direktnu posljedicu prethodnog teorema imamo sljedeći rezultat.

Korolar 1.2.4. *Konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu je neprekidna.*

Koristeći definiciju konveksnosti funkcije, tj. relaciju (1.1), općenito nije jednostavno ispitati je li neka funkcija konveksna. Ako je dana funkcija neprekidna, tada nam sljedeći kriteriji uvelike olakšavaju provjeru konveksnosti. Prvi kriterij dokazao je J. L. W. V. Jensen u radu [9].

Teorem 1.2.5. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f konveksna ako i samo ako za sve $x, y \in I$ vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{1.6}$$

Pritom je f strogo konveksna ako i samo ako u (1.6) *za $x \neq y$ vrijedi stroga nejednakost.*

Dokaz. Očito, samo dio dokaza o dovoljnosti treba argumentirati. Pretpostavimo da f nije konveksna funkcija. Tada bi postojao podinterval $[a,b]$ od I takav da graf od $f|[a,b]$ nije ispod tetive koja spaja točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, to jest, za funkciju

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a), \quad x \in [a,b],$$

vrijedi $\gamma = \sup\{\varphi(x) \,|\, x \in [a,b]\} > 0$. Uočimo da je φ neprekidna i da vrijedi $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Također, direktnim računom dobivamo da je

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}. \tag{1.7}$$

Stavimo da je $c = \inf\{x \in [a,b] \,|\, \varphi(x) = \gamma\}$. Tada je nužno $\varphi(c) = \gamma$ i $c \in \langle a,b \rangle$. Po definiciji od c, za svaki $h > 0$ za koji $c \pm h \in \langle a,b \rangle$ imamo

$$\varphi(c-h) < \varphi(c), \quad \varphi(c+h) \leq \varphi(c),$$

tako da je

$$\varphi(c) > \frac{\varphi(c-h)+\varphi(c+h)}{2}$$

u kontradikciji s (1.7). Prema tome, funkcija f je konveksna. □

Korolar 1.2.6. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je f konveksna ako i samo ako je*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0 \tag{1.8}$$

za sve $x \in I$ i sve $h > 0$ takve da $x+h$ i $x-h$ pripadaju intervalu I. Pritom je f strogo konveksna funkcija ako i samo ako u (1.8) *vrijedi stroga nejednakost.*

Primjer 1.2.7. *Koristeći korolar 1.2.6 pokažimo da su sljedeće funkcije konveksne*:

(a) $f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

(a) *Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $h > 0$. Tada je*

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x-h) - 2f(x) &= (x+h)^2 + (x-h)^2 - 2x^2 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + x^2 - 2xh + h^2 - 2x^2 \\ &= 2h^2 > 0. \end{aligned}$$

Prema korolaru 1.2.6, funkcija f je strogo konveksna.

(b) *Neka je $x \in \mathbb{R}$ i $h > 0$. Tada je*

$$f(x+f) - f(x-h) - 2f(x) = |x+h| + |x-h| - 2|x|.$$

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

$$x \in \langle -\infty, -h] \Rightarrow |x+h| + |x-h| - 2|x| = -x - h - x + h + 2x = 0,$$

$$x \in [-h, 0] \Rightarrow |x+h| + |x-h| - 2|x| = x + h - x + h + 2x = 2(x+h) \geq 0,$$

$$x \in [0, h] \Rightarrow |x+h| + |x-h| - 2|x| = x + h - x + h - 2x = 2(h-x) \geq 0,$$

$$x \in [h, \infty\rangle \Rightarrow |x+h| + |x-h| - 2|x| = x + h + x - h - 2x = 0.$$

Prema tome, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0$ pa je prema korolaru 1.2.6 funkcija f konveksna.

(c) *Uočimo da za* $a, b > 0$, $a \neq b$, *vrijedi*

$$0 < (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}.$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$ *i* $h > 0$. *Tada za* $a := e^{x+h}$ *i* $b := e^{x-h}$ *imamo*

$$0 < e^{x+h} + e^{x-h} - 2\sqrt{e^{x+h}e^{x-h}} = e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x.$$

Stoga je

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = e^{x+h} + e^{x-h} - 2e^x > 0$$

pa je prema korolaru 1.2.6 funkcija f *strogo konveksna.*

Sljedeći kriterij o konveksnosti neprekidne funkcije dokazao je T. Popoviciu u radu [12].

Teorem 1.2.8. *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *konveksna ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{f(x) + f(y) + f(z)}{3} + f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)\right] \tag{1.9}$$

za sve $x, y, z \in I$.

Za strogo konveksne funkcije nejednakost (1.9) je stroga osim u slučaju kada je $x = y = z$.

Dokaz. Nužnost. (Za ovu implikaciju nije nužna pretpostavka neprekidnosti). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$. Ako je $y \leq \frac{x+y+z}{3}$, tada je

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \frac{x+z}{2} \leq z, \quad \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{y+z}{2} \leq z$$

pa postoje $s, t \in [0, 1]$ takvi da vrijedi

$$\frac{x+z}{2} = s \cdot \frac{x+y+z}{3} + (1-s) \cdot z$$

$$\frac{y+z}{2} = t \cdot \frac{x+y+z}{3} + (1-t) \cdot z.$$

Sumiranjem ovih dviju jednakosti dobivamo da je

$$(x + y - 2z)(s + t - \frac{3}{2}) = 0.$$

Ako je $x + y - 2z = 0$, tada je nužno $x = y = z$ pa u (1.9) vrijedi jednakost.

Ako je $s + t = \frac{3}{2}$, tada sumiranjem sljedeće tri nejednakosti:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+z}{2}\right) &\leq s \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-s)\cdot f(z), \\ f\left(\frac{y+z}{2}\right) &\leq t \cdot f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) + (1-t)\cdot f(z), \\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{2}\cdot f(x) + \frac{1}{2}\cdot f(y), \end{aligned}$$

te zatim množenjem obiju strana dobivene nejednakosti s $\frac{2}{3}$. dobivamo nejednakost (1.9).

Slučaj kada je $\frac{x+y+z}{3} < y$ možemo promatrati na sličan način.

Dovoljnost. Nejednakost (1.9) primjenjena na $y = z$ glasi

$$\frac{1}{4}f(x) + \frac{3}{4}f\left(\frac{x+2y}{3}\right) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ za sve } x, y \in I. \tag{1.10}$$

Koristeći (1.10), dokaz slijedi argument teorema 1.2.5. Naime, kada f ne bi bila konveksna funkcija, tada bi postojao podinterval $[a, b]$ od I takav da graf od $f|[a, b]$ nije ispod tetive koja spaja točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, to jest, za neprekidnu funkciju

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a), \quad x \in [a, b],$$

vrijedilo bi $\gamma = \sup\{\varphi(x) \,|\, x \in [a, b]\} > 0$ i $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Prema (1.10), dobivamo da je

$$\frac{1}{4}\varphi(x) + \frac{3}{4}\varphi\left(\frac{x+2y}{3}\right) \geq \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{ za sve } x, y \in I. \tag{1.11}$$

Stavimo da je $c = \inf\{x \in [a, b] \,|\, \varphi(x) = \gamma\}$. Tada je nužno $\varphi(c) = \gamma$ i $c \in \langle a, b\rangle$. Po definiciji od c, za svaki $h > 0$ za koji $c - \frac{3h}{2}$ i $c + \frac{h}{2}$ pripadaju intervalu $\langle a, b\rangle$ imamo

$$\varphi\left(c - \frac{3h}{2}\right) < \varphi(c), \quad \varphi\left(c + \frac{h}{2}\right) \leq \varphi(c),$$

tako da je

$$\frac{1}{4}\varphi\left(c - \frac{3h}{2}\right) + \frac{3}{4}\varphi\left(c + \frac{h}{2}\right) < \varphi(c). \tag{1.12}$$

Uvrstimo li $x := c - \frac{3h}{2}$ i $y := c + \frac{3h}{2}$ u formulu (1.11), dolazimo u kontradikciju s (1.7). Prema tome, funkcija f je konveksna. □

Konveksna funkcija ne mora biti derivabilna. Primjerice, funkcija $f(x) = |x|$ je konveksna, ali nije derivabilna u nuli. Derivabilnost konveksnih funkcija najbolje se proučava u smislu derivabilnosti slijeva i derivabilnosti zdesna definiranih sa

$$f'_-(x) = \lim_{y \to x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad f'_+(x) = \lim_{y \to x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

pod uvjetom da navedeni limesi postoje.

Teorem 1.2.9. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada $f'_-(x)$ i $f'_+(x)$ postoje za svaki $x \in I^0$. Štoviše, za sve $x, y \in I^0$, $x < y$, vrijedi*

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le f'_-(y) \le f'_+(y). \tag{1.13}$$

Posebno, funkcije f'_- i f'_+ su rastuće na I^0. Ako je funkcija f strogo konveksna, onda su f'_- i f'_+ strogo rastuće funkcije na I^0.

Dokaz. Najprije ćemo pokazati da postoje lijeva i desna derivacija funkcije f te da one zadovoljavaju prvu odnosno posljednju nejednakost u (1.13). Neka je $z \in I^0$ proizvoljna točka. Uzmimo $x, y \in I^0$ takve da je $x < z < y$. Prema propoziciji 1.1.3 (uz $x_0 := y$) vrijedi

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}, \tag{1.14}$$

te lijeva strana nejednakosti (1.14) raste kako x raste slijeva prema z i ograničena je odozgo s $\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Ove činjenice garantiraju da postoji $f'_-(z)$ i da vrijedi nejednakost

$$f'_-(z) \le \frac{f(z) - f(y)}{z - y}. \tag{1.15}$$

Uočimo da prema propoziciji 1.1.3 (uz $x_0 := z$) desna strana nejednakosti (1.15) pada kako y pada zdesna prema z i ograničena je odozdo s $f'_-(z)$. Stoga postoji $f'_+(z)$ i vrijedi

$$f'_-(z) \le f'_+(z). \tag{1.16}$$

Kako je z proizvoljna točka intervala I^0, dokazali smo prvu i posljednju nejednakost u (1.13).

Uzmimo sada proizvoljne točke $x, y \in I^0$, $x < y$. Neka su $u, v \in I^0$ takve da je $x < u < v < y$. Koristeći ponovo propoziciju 1.1.3, vidimo da vrijedi

$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \le \frac{f(v) - f(x)}{v - x} \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le \frac{f(v) - f(y)}{v - y} \tag{1.17}$$

(uz stroge nejednakosti ako je f strogo konveksna). Pustimo li $u \to x^+$ i $v \to y^-$ u (1.17), dobijemo

$$f'_+(x) \le \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \le f'_-(y),$$

čime je teorem dokazan. □

Rezultati ovog teorema (ako se prikladno interpretiraju) vrijede na cijelom I, ne samo na njegovoj unutrašnjosti. Na primjer, ako je $I = \langle a, b]$, tada $f'_-(b)$ postoji barem u smislu beskonačnosti te f'_- raste na $\langle a, b]$. Slično, za $I = [a, b\rangle$, desna derivacija $f'_+(a)$ postoji barem u smislu beskonačnosti te f'_+ raste na $[a, b\rangle$. U slučaju $I = [a, b]$, obje derivacije $f'_+(a)$ i $f'_-(b)$ postoje barem u smislu beskonačnosti, f'_+ raste na $[a, b\rangle$, a f'_- raste na $\langle a, b]$.

Postoje brojne važne činjenice vezane za svojstva neprekidnosti od f'_- i f'_+. Na tim se svojstvima temelji dokaz sljedeće propozicije, koja će nam omogućiti da neprekidnost od f'_+ (odnosno f'_-) dovedemo u vezu s derivabilnošću konveksne funkcije f.

Propozicija 1.2.10. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda za svaki $x \in I^0$ vrijedi*

$$\lim_{y\to x^+} f'_+(y) = f'_+(x), \qquad \lim_{y\to x^-} f'_+(y) = f'_-(x).$$

Dokaz. Uzmimo $x, y \in I^0$, $x < y$. Kako je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, prema teoremu 1.2.9 funkcija f'_+ monotono raste pa stoga limes od $f'_+(y)$ postoji kada y pada prema x. Za $w \in I^0$, $y < w$, iz nejednakosti

$$f'_+(y) \le \frac{f(w) - f(y)}{w - y}$$

(koja je zadovoljena prema (1.13)) i neprekidnosti od f na I^0 slijedi

$$\lim_{y\to x^+} f'_+(y) \le \lim_{y\to x^+} \frac{f(w) - f(y)}{w - y} = \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

pa je

$$\lim_{y\to x^+} f'_+(y) \le \lim_{w\to x^+} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = f'_+(x). \tag{1.18}$$

S druge strane, kako je $y > x$, monotonost od f'_+ implicira da je $f'_+(y) \ge f'_+(x)$, što zajedno s (1.18) daje

$$\lim_{y\to x^+} f'_+(y) = f'_+(x). \tag{1.19}$$

Nadalje, ako za $x, y \in I^0$ vrijedi $y < x$, onda prema teoremu 1.2.9 slijedi $f'_+(y) \le f'_-(x)$. Osim toga, funkcija f'_+ je rastuća pa zaključujemo da $\lim_{y\to x^-} f'_+(y)$ postoji te da je

$$\lim_{y\to x^-} f'_+(y) \le f'_-(x). \tag{1.20}$$

Za $w \in I^0$, $w < y$, prema teoremu 1.2.9 vrijedi

$$\frac{f(y) - f(w)}{y - w} \le f'_+(y),$$

odakle zbog neprekidnosti funkcije f na I^0 imamo

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} = \lim_{y\to x^-} \frac{f(y)-f(w)}{y-w} \leq \lim_{y\to x^-} f'_+(y),$$

pa je

$$f'_-(x) = \lim_{w\to x^-} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \leq \lim_{y\to x^-} f'_+(y). \tag{1.21}$$

Sada iz (1.20) i (1.21) slijedi

$$\lim_{y\to x^-} f'_+(y) = f'_-(x). \tag{1.22}$$

□

Istaknimo da prethodna propozicija također vrijedi i u slučaju kada je x rubna točka od I, ako je funkcija f definirana i neprekidna u toj točki. Također, napomenimo da se propozicija 1.2.10 može iskazati u terminima lijevog i desnog limesa od $f'_-(y)$.

Teorem 1.2.11. *Neka je $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada je f skoro svuda derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Pri tome f' nije definirana na najviše prebrojivom skupu A, a sama funkcija f' neprekidna je na $\langle a,b\rangle\backslash A$.*

Dokaz. Za derivabilnost funkcije nam je neophodna jednakost lijeve i desne derivacije. Stoga, na osnovi propozicije 1.2.10, jasno je da će za $x \in \langle a,b\rangle$ vrijediti $f'_-(x) = f'_+(x)$ ako i samo ako je funkcija f'_+ neprekidna u točki x. Time će skup A sadržavati one elemente u kojima je monotona funkcija f'_+ prekidna. Poznato je da monotone funkcije imaju najviše prebrojivo mnogo točaka prekida pa je time skup A najviše prebrojiv.

Prebrojivost skupa A možemo ustanoviti i na sljedeći način. Uočimo da za svaki $x \in A$ prema teoremu 1.2.9 vrijedi $f'_-(x) < f'_+(x)$. Stoga za svaki $x \in A$ možemo izabrati racionalni broj, označimo ga s $r(x)$, za koji vrijedi $f'_-(x) < r(x) < f'_+(x)$. Time smo definirali funkciju $r : A \to \mathbb{Q}$. Pokažimo da je r injekcija. Uzmimo proizvoljne $x, y \in A$, $x < y$. Tada prema teoremu 1.2.9 imamo

$$f'_-(x) < r(x) < f'_+(x) \leq f'_-(y) < r(y) < f'_+(y)$$

pa je $r(x) < r(y)$. Time smo pokazali da je r injektivna funkcija pa je $\mathrm{card}(A) \leq \mathrm{card}(\mathbb{Q})$. Prema tome, A je prebrojiv.

Neprekidnost funkcije f'_+ na $\langle a,b\rangle\backslash A$ povlači i neprekdnost funkcije f' na istom skupu.

□

1.3 Karakterizacije konveksnih funkcija

Definicija konveksne funkcije služi u korisne svrhe, no često će matematičari prepoznati konveksne funkcije ili razmišljati o njima na drugačiji način; na primjer integralnim prikazom, svojstvima derivacija, geometrijskim svojstvima grafa i slično. U ovoj točki bavimo se takvim karakterizacijama konveksnih funkcija, a točku započinjemo prikazom konveksnih funkcija pomoću integrala. Sljedeća propozicija je poopćenje osnovnog teorema infinitezimalnog računa za konveksne funkcije.

Propozicija 1.3.1. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna, tada za svaki $a, b \in I^0$ vrijedi*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'_-(t)dt = \int_a^b f'_+(t)dt. \tag{1.23}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti uzmimo da je $a < b$. Neka je $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ proizvoljna razdioba segmenta $[a, b]$. Tada je prema teoremu 1.2.9

$$f'_-(t_{k-1}) \leq f'_+(t_{k-1}) \leq \frac{f(t_k) - f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \leq f'_-(t_k) \leq f'_+(t_k), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.24}$$

pa je stoga

$$\sum_{k=1}^{n} f'_-(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_-(t_k)(t_k - t_{k-1})$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} f'_-(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \leq f(b) - f(a) \leq \sum_{k=1}^{n} f'_-(t_k)(t_k - t_{k-1}). \tag{1.25}$$

Kako je, prema teoremu 1.2.9, funkcija f'_- rastuća, vrijedi

$$m_k = \inf_{t \in [t_{k-1}, t_k]} f'_-(t) = f'_-(t_{k-1}), \quad M_k = \sup_{t \in [t_{k-1}, t_k]} f'_-(t) = f'_-(t_k)$$

pa donji i gornji integralni zbroj funkcije f'_- koji odgovaraju razdiobi $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ iznose redom

$$s_\Delta = \sum_{k=1}^{n} m_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f'_-(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}), \quad S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} M_k(t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f'_-(t_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Stoga, prema (1.25), imamo

$$s_\Delta \leq f(b) - f(a) \leq S_\Delta. \tag{1.26}$$

Označimo li s

$$\mathcal{I}_* = \sup\{s_\Delta \,|\, \Delta \text{ razdioba segmenta } [a,b]\}, \quad \mathcal{I}^* = \inf\{S_\Delta \,|\, \Delta \text{ razdioba segmenta } [a,b]\}$$

donji i gornji Riemannov integral funkcije f'_- redom, tada iz (1.26), zbog proizvoljnosti razdiobe Δ, slijedi

$$\mathcal{I}_* \leq f(b) - f(a) \leq \mathcal{I}^*. \tag{1.27}$$

Kako je f'_- monotona funkcija na $[a,b]$, to je f'_- integrabilna funkcija na $[a,b]$ i vrijedi

$$\int_a^b f'_-(t)dt = \mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*,$$

što zajedno s (1.27) daje

$$\int_a^b f'_-(t)dt = f(b) - f(a).$$

Koristeći relacije (1.24), slično se pokaže da je

$$\int_a^b f'_+(t)dt = f(b) - f(a).$$

□

Teorem 1.3.2. *Funkcija $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako postoji rastuća (strogo rastuća) funkcija $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ i točka $c \in \langle a,b\rangle$ takve da za sve $x \in \langle a,b\rangle$ vrijedi*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt. \tag{1.28}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f konveksna funkcija. Tada se, prema propoziciji 1.3.1, za funkciju g može izabrati funkcija f'_- ili f'_+. Pritom je, prema teoremu 1.2.9, funkcija g rastuća, odnosno strogo rastuća ako je f strogo konveksna funkcija.

Obrnuto, pretpostavimo da jednakost (1.28) vrijedi za neku rastuću funkciju g. Neka su $\alpha, \beta \geq 0$ te $\alpha + \beta = 1$. Tada za $x, y \in \langle a,b\rangle$, $x < y$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) - (\alpha + \beta) f(\alpha x + \beta y) \\
&= \beta(f(y) - f(\alpha x + \beta y)) + \alpha(f(x) - f(\alpha x + \beta y)) \\
&= \beta \int_{\alpha x + \beta y}^{y} g(t)dt - \alpha \int_x^{\alpha x + \beta y} g(t)dt.
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Uočimo da iz $x < y$ slijedi $x \leq \alpha x + \beta y \leq y$ pa, kako je g monotono rastuća funkcija, imamo $g(t) \geq g(\alpha x + \beta y)$ za $t \in [\alpha x + \beta y, y]$ i $g(t) \leq g(\alpha x + \beta y)$ za $t \in [x, \alpha x + \beta y]$. Odavde slijedi

$$\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)dt \geq \int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(\alpha x + \beta y)dt = g(\alpha x + \beta y) \int_{\alpha x+\beta y}^{y} dt = \alpha g(\alpha x + \beta y)(y - x),$$

$$\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)dt \leq \int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(\alpha x + \beta y)dt = g(\alpha x + \beta y) \int_{x}^{\alpha x+\beta y} dt = \beta g(\alpha x + \beta y)(y - x)$$

pa je

$$\beta \int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)dt - \alpha \int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)dt \geq \alpha\beta g(\alpha x + \beta y)(y - x) - \alpha\beta g(\alpha x + \beta y)(y - x) = 0.$$

Stoga, prema (1.29), imamo

$$\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) \geq 0$$

što je ekvivalentno nejednakosti kojom smo definirali konveksnost. Konačno, procjena koju smo proveli je stroga kada g strogo raste. □

Prethodni teorem omogućuje nam da konveksnost funkcije karakteriziramo pomoću njene druge derivacije (ukoliko druga derivacija postoji).

Teorem 1.3.3. *Pretpostavimo da je f derivabilna na $\langle a, b\rangle$. Tada je f konveksna (strogo konveksna) ako i samo ako je f' rastuća (strogo rastuća).*

Dokaz. Prema teoremu 1.2.9, za derivabilnu funkciju, konveksnost (stroga konveksnost) implicira rastuću (strogo rastuću) prvu derivaciju.

Obratno, pretpostavimo da je f' rastuća (strogo rastuća). Tada po osnovnom teoremu infinitezimalnog računa vrijedi

$$f(x) - f(c) = \int_{c}^{x} f'(t)dt$$

za sve $x, c \in \langle a, b\rangle$. Tada činjenica da je f konveksna (strogo konveksna) proizlazi iz teorema 1.3.2. □

Teorem 1.3.4. *Pretpostavimo da f'' postoji na $\langle a, b\rangle$. Tada je f konveksna ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$. Ako je $f''(x) > 0$ na $\langle a, b\rangle$, tada je f strogo konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Pod navedenom pretpostavkom, f' je rastuća ako i samo ako je f'' nenegativna i f' je strogo rastuća kada je f'' pozitivna. Ova činjenica zajedno s tvrdnjom teorema 1.3.3 nam daje dokaz ovog teorema. □

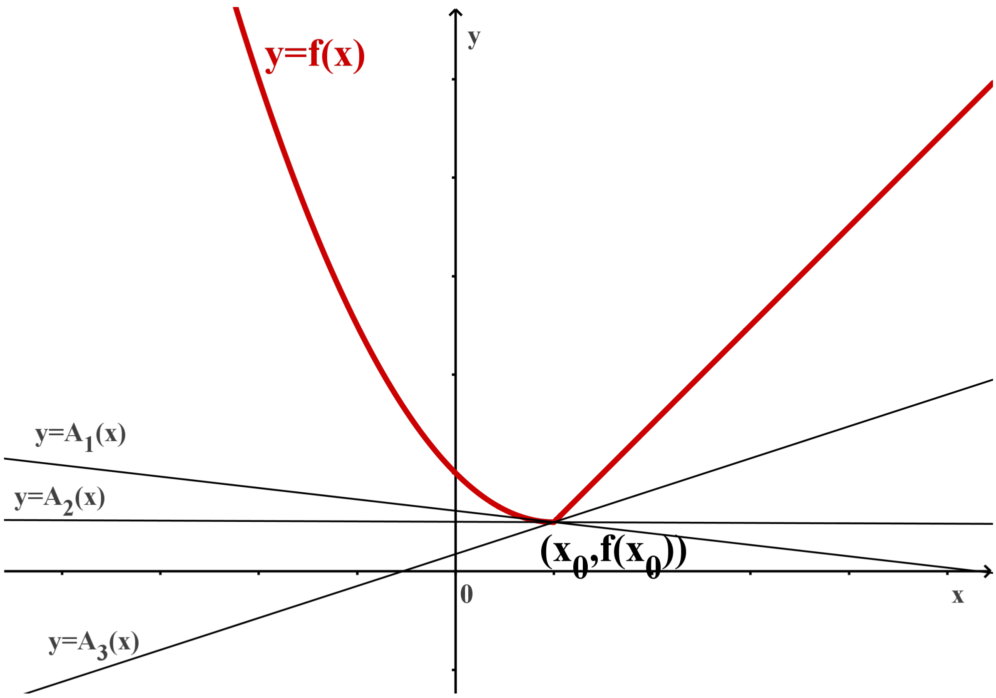
Obrat posljednje tvrdnje teorema 1.3.4 ne vrijedi. Promotrimo, na primjer, $f(x) = x^4$ na $\langle -1, 1\rangle$. Ova funkcija je strogo konveksna na $\langle -1, 1\rangle$, a $f''(0) = 0$.

Naša sljedeća karakterizacija ovisi o očiglednoj geometrijskoj činjenici da kroz bilo koju točku grafa konveksne funkcije, postoji pravac koji leži na grafu ili ispod grafa te funkcije.

Formalnije rečeno, funkcija f definirana na I ima *nosač* u $x_0 \in I$ ako postoji afina funkcija $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ takva da je $A(x) \le f(x)$ za svaki $x \in I$. Graf funkcije A nazivamo *potpornim pravcem* od f u točki x_0 (slika 1.4). U slučaju konveksnih funkcija koje nisu glatke, nedostatak tangente na graf funkcije može se nadomjestiti potpornim pravcem. Skup $\partial f(x_0)$ svih $m \in \mathbb{R}$ za koje je

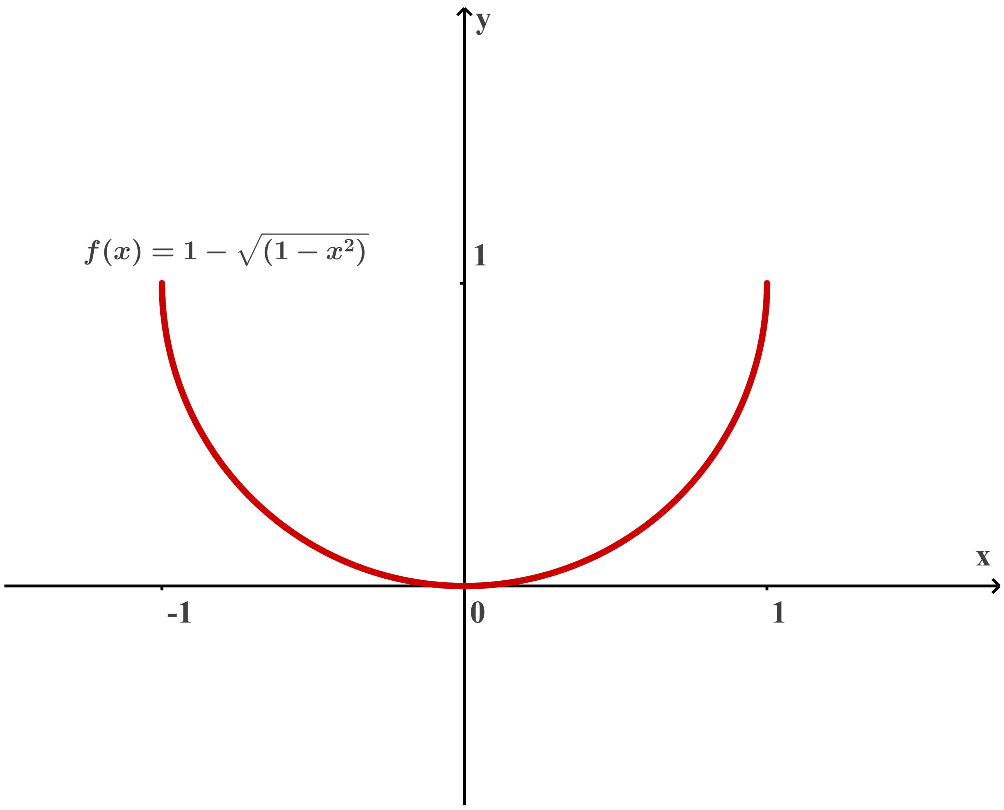
$$f(x_0) + m(x - x_0) \le f(x) \quad \forall x \in I,$$

zove se *subderivacija* od f u x_0. Geometrijski, subderivacija od f u x_0 nam daje nagibe svih potpornih pravaca od f u točki x_0.



Slika 1.4: Potporni pravci

Iz definicije je jasno da je subderivacija uvijek konveksan skup. Subderivacija konveksne funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ u rubnoj točki intervala I može biti prazan skup. Primjerice, funkcija $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$, je neprekidna i konveksna, ali nema potpornih pravaca u rubnim točkama $x_0 = -1$ i $x_0 = 1$ (slika 1.5).



Slika 1.5: Funkcija $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$

Sljedeći rezultat pokazuje da konveksne funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ su jedine funkcije koje u svim točkama otvorenog intervala $\langle a, b\rangle$ imaju subderivaciju.

Teorem 1.3.5. *$f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako je $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija i $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Odaberimo $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$. Tada, prema teoremu 1.2.9, za $x > x_0$ vrijedi,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'_+(x_0) \geq m,$$

dok za $x < x_0$ vrijedi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_-(x_0) \leq m.$$

U oba slučaja, $f(x) - f(x_0) \geq m(x - x_0)$; to jest, $f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0)$ pa $m \in \partial f(x_0)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ u svakoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Neka su $x, y \in \langle a, b\rangle$. Ako je $x_0 = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0, 1]$, neka je $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ potporni pravac od f u x_0. Tada je

$$f(x_0) = A(x_0) = \lambda A(x) + (1 - \lambda)A(y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

pa je funkcija f konveksna. □

Korolar 1.3.6. *Ako je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda je $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ za svaki $x_0 \in \langle a, b\rangle$.*

Dokaz. Jasno je iz dokaza prethodnog teorema da je $[f'_-(x_0), f'_+(x_0)] \subseteq \partial f(x_0)$ za svaki $x_0 \in \langle a, b\rangle$.

Obrnuto, neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Uzmimo $m \in \partial f(x_0)$. Tada je $f(x_0) + m(x - x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$. Odavde slijedi da je

$$m \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x > x_0,$$

pa je

$$m \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0).$$

Također,

$$m \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall x < x_0,$$

pa je

$$m \geq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0).$$

Prema tome, $m \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, čime je tvrdnja dokazana. □

Iako sljedeći rezultat nije karakterizacija konveksne funkcije, uvrstit ćemo ga u ovu točku zbog njegove direktne veze s prethodnim teoremom.

Korolar 1.3.7. *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada je f derivabilna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako i samo ako je potporni pravac od f u x_0 jedinstven. U ovom slučaju, $\partial f(x_0) = \{f'(x_0)\}$, odnosno potporni pravac je tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.*

Dokaz. Potporni pravac od f u točki x_0 je jedinstven ako i samo ako je skup $\partial f(x_0)$ jednočlan što je, prema korolaru 1.3.6, ekvivalentno tome da je $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ odnosno da je f derivabilna u točki x_0. Tada je $\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0] = \{f'(x_0)\}$ pa je potporni pravac tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$. □

Prisjetimo se da je $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *globalni minimum* funkcije $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ ako vrijedi

$$f(x_0) \leq f(x)$$

za sve $x \in \langle a, b\rangle$. Slabiji uvjet je da nejednakost vrijedi za sve x u nekoj (dovoljno maloj) okolini od x_0. U tom slučaju imamo *lokalni minimum*. Globalni minimum je ujedno i lokalni minimum, ali obrat ne vrijedi općenito. Za konveksne funkcije vrijedi i obrat.

Korolar 1.3.8. *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$. Sljedeće tri tvrdnje su međusobno ekvivalentne.*

(i) *x_0 je lokalni minimum od f.*

(ii) *x_0 je globalni mnimum od f.*

(iii) $0 \in \partial f(x_0)$.

Dokaz. Pretpostavimo da tvrdnja (*iii*) vrijedi. Tada imamo

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0) = f(x_0)$$

za sve $x \in \langle a, b\rangle$, pri čemu je $m = 0$. To znači da je x_0 globalni minimum, pa tvrdnja (*ii*) vrijedi. Kako je spomenuto ranije, tvrdnja (*ii*) povlači tvrdnju (*i*).

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (*i*). Tada postoji pozitivan broj ε takav da je

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ za sve } x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \tag{1.30}$$

Ako je $f'_+(x_0) < 0$, možemo pronaći broj z, $x_0 < z < x_0 + \varepsilon$, takav da vrijedi

$$\frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} < 0.$$

Međutim, tada je $f(z) < f(x_0)$ što je u kontradikciji s (1.30). Stoga, $f'_+(x_0) \geq 0$. Slično možemo dokazati da je $f'_-(x_0) \leq 0$. Prema korolaru 1.3.6 vrijedi $0 \in \partial f(x_0)$ čime je dokazana tvrdnja (*iii*). □

1.4 Operacije s konveksnim funkcijama

U prethodnoj točki smo pokazali nekoliko načina na koje možemo provjeriti je li neka funkcija konveksna. Često, konveksne funkcije možemo prepoznati tako da uočimo da su izgrađene od nekih poznatih konveksnih funkcija. Uzmimo na primjer funkciju $f(x) = 3|x^3| + 2e^{|x|}$. Pomoću sljedeća dva teorema lako se pokaže da je ova funkcija konveksna.

Teorem 1.4.1. *Ako su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije i $\alpha \geq 0$, tada su $f + g$ i αf konveksne funkcije na I.*

Dokaz. Dokaz ide direktno. Naime, za $x, y \in I$ i $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &\leq [\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)] + [\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)]\\ &= \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y),\end{aligned}$$

čime smo pokazali da je $f + g$ konveksna funkcija na I. Nadalje, množeći nejednakost

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

nenegativnim brojem α dobivamo

$$\alpha f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \alpha\lambda f(x) + \alpha(1-\lambda)f(y),$$

odnosno

$$(\alpha f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(\alpha f)(x) + (1-\lambda)(\alpha f)(y)$$

pa je stoga funkcija αf također konveksna. □

Teorem 1.4.2. *Neka su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : J \to \mathbb{R}$, gdje je $\operatorname{Im} f \subseteq J$. Ako su f i g konveksne i g je rastuća, tada je kompozicija $g \circ f$ konveksna na I.*

Dokaz. Za $x, y \in I$ i $\lambda \in [0, 1]$ imamo

$$\begin{aligned}g[f(\lambda x + (1-\lambda)y)] &\leq g[\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)]\\ &\leq \lambda g[f(x)] + (1-\lambda)g[f(y)].\end{aligned}$$

□

Teorem 1.4.3. *Ako su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ obje nenegativne, rastuće (padajuće) konveksne funkcije, tada je $h(x) = f(x)g(x)$ također nenegativna, rastuća (padajuća) i konveksna funkcija.*

Dokaz. Od navedenih triju svojstava samo je konveksnost netrivijalna. Za $x, y \in I$, $x < y$, vrijedi

$$[f(x) - f(y)][g(y) - g(x)] \leq 0$$

odakle slijedi

$$f(x)g(y) + f(y)g(x) \leq f(x)g(x) + f(y)g(y).$$

Neka su $\alpha > 0$ i $\beta > 0$ pri čemu je $\alpha + \beta = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y)g(\alpha x + \beta y) &\leq [\alpha f(x) + \beta f(y)][\alpha g(x) + \beta g(y)] \\ &= \alpha^2 f(x)g(x) + \alpha\beta[f(x)g(y) + f(y)g(x)] + \beta^2 f(y)g(y) \\ &\leq \alpha^2 f(x)g(x) + \alpha\beta[f(x)g(x) + f(y)g(y)] + \beta^2 f(y)g(y) \\ &= \alpha f(x)g(x) + \beta f(y)g(y), \end{aligned}$$

čime je teorem dokazan. □

Teorem 1.4.4. *Neka je $f_\alpha : I \to \mathbb{R}$ proizvoljna familija konveksnih funkcija i neka je $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$. Ako je $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ neprazan skup, tada je J interval i f je konveksna na J.*

Dokaz. Ako je $\lambda \in [0, 1]$ i $x, y \in J$, tada je

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \sup_\alpha f_\alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \sup_\alpha [\lambda f_\alpha(x) + (1 - \lambda) f_\alpha(y)] \\ &\leq \lambda \sup_\alpha f_\alpha(x) + (1 - \lambda) \sup_\alpha f_\alpha(y) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) < \infty. \end{aligned}$$

To istodobno pokazuje da je J interval (s obzirom da sadrži sve točke između bilo koje dvije točke) i da je f konveksna na intervalu J. □

Teorem 1.4.5. *Neka je $f_n : I \to \mathbb{R}$ niz konveksnih funkcija te neka je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in I$. Tada je funkcija*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in I,$$

konveksna. Štoviše, konvergencija je uniformna na bilo kojem zatvorenom podintervalu od I^0.

Dokaz. Ako je $\lambda \in [0, 1]$, $x, y \in I$, tada je

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\lambda f_n(x) + (1 - \lambda) f_n(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \end{aligned}$$

odakle slijedi da je f konveksna funkcija.

Neka su $a < c < b$ bilo koje tri točke iz I^0 i neka je $\alpha = \sup_n f_n(a)$, $\gamma = \inf_n f_n(c)$, $\beta = \sup_n f_n(b)$. Nadalje, neka su L_1, L_2 i L_3 tri afine funkcije koje zadovoljavaju sljedeće:

- $L_1(a) = \alpha, \quad L_1(b) = \beta$
- $L_2(c) = \gamma, \quad L_2(b) = \beta$
- $L_3(a) = \alpha, \quad L_3(c) = \gamma.$

Pokazat ćemo da je niz $\{f_n\}$ uniformno omeđen afinim funkcijama.

Ako je $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ bilo koja točka iz $[a, b]$, tada za proizvoljan n imamo

$$f_n(x) \leq \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b) \leq \lambda L_1(a) + (1-\lambda) L_1(b) = L_1(x).$$

S druge strane, ako je x bilo koja točka iz $[a, c]$ možemo napisati da je $c = \lambda x + (1-\lambda)b$ gdje je $\lambda \in \langle 0, 1]$. Tada je $x = c/\lambda + [(\lambda - 1)/\lambda]b$ i vrijedi

$$L_2(c) \leq f_n(c) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(b) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) L_2(b)$$

iz čega zaključujemo da je

$$f_n(x) \geq \frac{1}{\lambda} L_2(c) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} L_2(b) = L_2(x).$$

Slično pokazujemo da je $f_n(x) \geq L_3(x)$ za svaki $x \in [c, b]$.

Prema teoremu 1.2.3 postoji K takav da je

$$|f_n(y) - f_n(x)| \leq K|y - x|, \quad \forall x \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pritom, jasno je iz dokaza teorema 1.2.3 da je K neovisan o n, s obzirom da je za svaki n pripadni K dobiven kao funkcija gornje i donje granice za f_n koje su neovisne o n; tj. nejednakost vrijedi za sve n kao i za sve $x, y \in [a, b]$. Odaberimo konačan podskup E od $[a, b]$ takav da je svaka točka iz $[a, b]$ unutar udaljenosti $\frac{\varepsilon}{3K}$ od barem jedne točke iz E, pri čemu je ε proizvoljan pozitivan broj. Kako je E konačan, postoji N za koji $m, n \geq N$ implicira

$$|f_n(z) - f_m(z)| = |f_n(z) - f(z) + f(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f(z) - f_m(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

za sve $z \in E$. Stoga, ako je $x \in [a, b]$, tada postoji $z \in E$ takav da je $|z - x| < \frac{\varepsilon}{3K}$, pa za $m, n \geq N$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(x)| \\ &\leq K|x - z| + \varepsilon/3 + K|z - x| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ovo je, međutim, Cauchyjev uvjet za uniformnu konvergenciju niza (f_n) na $[a, b]$, pa stoga (f_n) uniformno konvergira na $[a, b]$. $\square$

Reći ćemo da je f *log-konveksna* funkcija na intervalu I ako je f pozitivna i ako je $\ln f$ konveksna na I. Tada za sve $x, y \in I$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$ vrijedi

$$\ln(f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \ln f(x) + \beta \ln f(y) = \ln\left(f^{\alpha}(x) f^{\beta}(y)\right)$$

što je ekvivalentno s

$$f(\alpha x + \beta y) \leq f^{\alpha}(x) f^{\beta}(y).$$

Prema tome, f je log-konveksna funkcija ako je pozitivna i zadovoljava uvjet

$$f(\alpha x + \beta y) \leq f^{\alpha}(x) f^{\beta}(y)$$

za sve $x, y \in I$, $\alpha > 0, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Kako je $f(x) = e^{\ln f(x)}$, iz teorema 1.4.2 slijedi da je log-konveksna funkcija ujedno i konveksna.

Teorem 1.4.6. *Klasa log-konveksnih funkcija na intervalu I je zatvorena s obzirom na zbrajanje, množenje i računanje limesa pod pretpostavkom da limes postoji i da je pozitivan.*

Dokaz. Zatvorenost s obzirom na množenje i računanje limesa slijedi iz identiteta:

$$\ln(fg) = \ln f + \ln g, \quad \ln(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty}(\ln f_n)$$

i teorema 1.4.1 i 1.4.5. Zatvorenost za zbrajanje je malo kompliciranija za dokazati.

Neka su $a, b, c, d, \alpha, \beta$ pozitivni brojevi pri čemu vrijedi $\alpha + \beta = 1$. Tada s obzirom da je funkcija $x \mapsto e^x$ konveksna, imamo

$$a^{\alpha} b^{\beta} = e^{\alpha \ln a + \beta \ln b} \leq \alpha e^{\ln a} + \beta e^{\ln b} = \alpha a + \beta b.$$

Stoga,

$$\begin{aligned} \frac{a^{\alpha} b^{\beta} + c^{\alpha} d^{\beta}}{(a+c)^{\alpha}(b+d)^{\beta}} &= \left(\frac{a}{a+c}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{b+d}\right)^{\beta} + \left(\frac{c}{a+c}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{b+d}\right)^{\beta} \\ &\leq \alpha\frac{a}{a+c} + \beta\frac{b}{b+d} + \alpha\frac{c}{a+c} + \beta\frac{d}{b+d}) \\ &= \alpha + \beta = 1. \end{aligned}$$

Dokazali smo da je

$$a^{\alpha} b^{\beta} + c^{\alpha} d^{\beta} \leq (a+c)^{\alpha}(b+d)^{\beta}. \tag{1.31}$$

Sada odaberimo $x, y \in I$ i uzmimo prvo ekvivalentnu formulaciju log-konveksnosti, a zatim nejednakost (1.31) da bismo dobili

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) + g(\alpha x + \beta y) &\leq f^{\alpha}(x) f^{\beta}(y) + g^{\alpha}(x) g^{\beta}(y) \\ &\leq [f(x) + g(x)]^{\alpha}[f(y) + g(y)]^{\beta}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $f + g$ log-konveksna funkcija, što smo i trebali pokazati. $\square$

Poglavlje 2

Klasične nejednakosti za konveksne funkcije

2.1 Jensenova nejednakost

Jensenova nejednakost je svojevrsna generalizacija nejednakosti kojom smo definirali konveksnu funkciju te nekih drugih, manje ili više poznatih nejednakosti. Nazvana je po danskom matematičaru Johanu Ludwigu Jensenu (1859.–1925.) koji ju je dokazao i upravo po ovoj nejednakosti je najpoznatiji. Iz Jensenove nejednakosti proizlaze mnoge poznate nejednakosti kao što su nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine, Čebiševljeva nejednakost, Cauchy–Schwarz–Buniakowskyjeva nejednakost itd.

Teorem 2.1.1 (Jensenova nejednakost)**.** *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ i $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ takvi da vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Tada je*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{2.1}$$

Ako je f strogo konveksna funkcija i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$, tada jednakost u u (2.1) *vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

Baza matematičke indukcije: Za $n = 1$ nejednakost očito vrijedi.

Pretpostavka matematičke indukcije: Pretpostavimo da nejednakost vrijedi za n točaka intervala I.

Korak matematičke indukcije: Pokažimo da nejednakost vrijedi i za $n + 1$ točaka iz I. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ takvi da vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Barem jedan od $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ mora biti manji od 1 (inače je nejednakost trivijalna). Bez smanjenja općenitosti, neka je $\lambda_{n+1} < 1$ i $u =$

$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n$. Imamo

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1$$

te također vrijedi

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1-\lambda_{n+1})u + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

Sada, s obzirom da je f konveksna funkcija imamo

$$f((1-\lambda_{n+1})u + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(u) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}),$$

a prema pretpostavci matematičke indukcije vrijedi

$$f(u) \leq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}f(x_n).$$

Stoga, kombinacijom gornje dvije nejednakosti dobivamo

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Dakle, zaključujemo da nejednakost vrijedi za $n+1$ točaka pa, prema teoremu matematičke indukcije, vrijedi za svaki pozitivan broj n.

Pretpostavimo sada da je funkcija f strogo konveksna. Ako je $x_1 = \cdots = x_n$, tada je jasno da u (2.1) vrijedi jednakost. Obratno, pretpostavimo da za strogo konveksnu funkciju f u (2.1) vrijedi stroga jednakost. Dokazat ćemo matematičkom indukcijom da je tada $x_1 = \cdots = x_n$. Za $n = 1$ tvrdnja je očita. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za bilo kojih $k \leq n$ točaka intervala I. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$ i neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da vrijedi $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Neka je

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \tag{2.2}$$

Kao i u prvom dijelu dokaza, označimo $u = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}x_n$. Tada je, zbog konveksnosti funkcije f i relacije (2.2),

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}) &= f((1-\lambda_{n+1})u + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1})f(u) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}),
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$f((1-\lambda_{n+1})u + \lambda_{n+1}x_{n+1}) = (1-\lambda_{n+1})f(u) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Stoga prema pretpostavci indukcije vrijedi $u = x_{n+1}$. Također,

$$(1 - \lambda_{n+1}) f(u) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

tj.

$$f(u) = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n),$$

odnosno

$$f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n),$$

pa ponovo prema pretpostavci indukcije imamo $x_1 = \cdots = x_n$. Tada je

$$u = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 = x_1.$$

Prema tome, $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1}$, čime je tvrdnja dokazana. □

Napomena:

1. Ako su $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, tada Jensenova nejednakost (2.1) postaje

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{2.3}$$

2. Ako je f konkavna funkcija, tada nejednakosti (2.1) i (2.3) imaju sljedeće oblike:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

i

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1 + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Primjer 2.1.2. *Ako su $a, b, c > 0$, tada je*

$$a^a \cdot b^b \cdot c^c \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^{a+b+c},$$

pri čemu se postiže jednakost ako i samo ako je $a = b = c$.

Rješenje. *Gornja nejednakost je ekvivalentna s*

$$\ln\left(a^a \cdot b^b \cdot c^c\right) \geq \ln\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^{a+b+c}$$

odnosno

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq (a+b+c) \ln \frac{a+b+c}{3}. \tag{2.4}$$

Neka je $f(x) = x \ln x$, $x \in \langle 0, \infty\rangle$. *Kako je* $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, *funkcija* f *je strogo konveksna na* $\langle 0, \infty\rangle$. *Prema* (2.3) *vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \leq \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c),$$

a to je upravo nejednakost (2.4). *Kako je* f *strogo konveksna funkcija, to se prema teoremu 2.1.1 jednakost u* (2.4) *postiže ako i samo ako je* $a = b = c$.

Primjer 2.1.3. *Neka su* a, b, c *duljine stranica trokuta, a* s *njegov poluopseg. Tada je*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq s. \tag{2.5}$$

Pritom se postiže jednakost u (2.5) *ako i samo ako je trokut jednakostraničan.*

Rješenje. *Promotrimo funkciju* $f(x) = \frac{x^2}{2s-x}$, $x \in \langle 0, 2s\rangle$. *Tada je* $f'(x) = \frac{4sx-x^2}{(2s-x)^2}$ *i* $f''(x) = \frac{8s^2}{(2s-x)^3}$, *pa je* $f''(x) > 0$ *za* $0 < x < 2s$. *Dakle,* f *je konveksna na intervalu* $\langle 0, 2s\rangle$. *Prema Jensenovoj nejednakosti vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c\right) \leq \frac{1}{3}f(a) + \frac{1}{3}f(b) + \frac{1}{3}f(c)$$

odnosno

$$\frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}{2s - \frac{a+b+c}{3}} \leq \frac{\frac{a^2}{2s-a} + \frac{b^2}{2s-b} + \frac{c^2}{2s-c}}{3}.$$

Sređivanjem gornje nejednakosti dobivamo

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq s.$$

Funkcija f *je strogo konveksna pa prema teoremu 2.1.1, jednakost u* (2.5) *vrijedi ako i samo ako je* $a = b = c$, *tj. za jednakostraničan trokut.*

Jensenova nejednakost ima mnoge primjene, što ćemo pokazati već u idućoj točki.

2.2 Nejednakosti između sredina

Prvi pojmovi o sredinama potječu vjerojatno još od Pitagorejaca. Oni su vjerojatno znali i za nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine dvaju pozitivnih brojeva a i b

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b), \quad a, b > 0, \tag{2.6}$$

koju je kasnije dokazao Euklid. Za početak definirajmo osnovne sredine za n pozitivnih brojeva.

Definicija 2.2.1. *Neka je $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dana n -torka pozitivnih brojeva. Tada je*

(i) aritmetička sredina $A_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$A_n(a) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n};$$

(ii) geometrijska sredina $G_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$G_n(a) = \sqrt{a_1 \cdots a_n};$$

(iii) harmonijska sredina $H_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}};$$

(iv) kvadratna sredina $K_n(a)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ definirana izrazom

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Slično se definiraju osnovne sredine s težinama.

Definicija 2.2.2. *Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $s = (s_1, \ldots, s_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva. Neka je $S = \sum_{i=1}^n s_i$.*

(i) Aritmetička sredina $A_n(a; s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$A_n(a; s) = \frac{s_1 a_1 + \cdots + s_n a_n}{S}.$$

(ii) Geometrijska sredina $G_n(a; s)$ brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$ definirana je izrazom

$$G_n(a; s) = (a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n})^{\frac{1}{S}}.$$

(iii) Harmonijska sredina $H_n(a;s)$ brojeva $a_1,\ldots,a_n$ s težinama $s_1,\ldots,s_n$ definirana je izrazom

$$H_n(a;s) = \frac{S}{\frac{s_1}{a_1}+\cdots+\frac{s_n}{a_n}}.$$

(iv) Kvadratna sredina $K_n(a;s)$ brojeva $a_1,\ldots,a_n$ s težinama $s_1,\ldots,s_n$ definirana je izrazom

$$K_n(a;s) = \sqrt{\frac{s_1a_1^2+\cdots+s_na_n^2}{S}}.$$

Teorem 2.2.3. *Neka su $a=(a_1,\ldots,a_n)$ i $s=(s_1,\ldots,s_n)$ dane n-torke pozitivnih realnih brojeva. Neka je $S=\sum_{i=1}^n s_i$. Tada vrijedi*

$$K_n(a;s) \geq A_n(a;s) \geq G_n(a;s) \geq H_n(a;s)$$

s jednakostima ako i samo ako je $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Dokaz. 1. Promotrimo funkciju $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2$. Kako je druga derivacija funkcije f_1, $f_1''(x)=2>0$ ona je strogo konveksna na čitavoj svojoj domeni, pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost

$$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ix_i\right)^2 \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ix_i^2.$$

Uzmemo li supstituciju $x_i=a_i$ za $i=1,\ldots,n$ dobivamo

$$A_n(a;s) = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ia_i \leq \sqrt{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ia_i^2} = K_n(a;s)$$

čime smo dokazali da prva nejednakost vrijedi.

2. Za funkciju $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=e^x$ vrijedi $f''(x)=e^x>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$, pa i za funkciju f_2 vrijedi da je strogo konveksna na čitavoj svojoj domeni. Uzmemo li supstituciju $x_i=\ln a_i$ za $i=1,\ldots,n$, tada Jensenova nejednakost glasi

$$e^{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_i\ln a_i} \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ie^{\ln a_i}. \tag{2.7}$$

Zbog svojstava logaritamske funkcije nejednakost (2.7) je ekvivalentna sljedećim nejednakostima

$$e^{\frac{1}{S}\sum_{i=1}^n \ln a_i^{s_i}} \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^n s_ia_i,$$

$$e^{\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{s_i}\right)^{\frac{1}{S}}} \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i a_i,$$

iz čega zaključujemo da vrijedi

$$G_n(a;s) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{s_i}\right)^{\frac{1}{S}} \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i a_i = A_n(a;s). \tag{2.8}$$

3. Ako u nejednakosti (2.8) brojeve $a_1, \ldots, a_n$ zamjenimo brojevima $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ dobivamo

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^{s_i}}\right)^{\frac{1}{S}} \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{a_i},$$

odakle se invertiranjem dobije nejednakost između geometrijske i harmonijske sredine brojeva $a_1, \ldots, a_n$ s težinama $s_1, \ldots, s_n$, tj.

$$H_n(a;s) = \frac{S}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_1}{a_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{s_i}\right)^{\frac{1}{S}} = G_n(a;s).$$

Prema teoremu 2.1.1, u sve tri nejednakosti vrijedi jednakost ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

□

Riješimo nekoliko primjera u kojima se koriste nejednakosti među sredinama.

Primjer 2.2.4. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!.$$

Rješenje. *Primjenom AG nejednakosti (nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine) imamo*

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} = \sqrt[n]{n!}.$$

Kako je $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, potenciranjem s n obiju strana gornje nejednakosti dobivamo

$$\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}\right)^n > n!$$

odnosno

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!,$$

a to smo i trebali dokazati.

Primjer 2.2.5. *Ako su α, β, γ kutovi trokuta, tada je*

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6. \tag{2.9}$$

U (2.9) *se postiže jednakost ako i samo ako je trokut jednakostraničan.*

Rješenje. *Prema nejednakosti izmedu harmonijske i aritmetičke sredine je*

$$\frac{3}{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}}} \leq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq \frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{2.10}$$

Funkcija $f(x) = \sin x$ je konkavna na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, pa prema Jensenovoj nejednakosti vrijedi

$$\sin\frac{\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3}.$$

Obzirom da su α, β i γ kutovi trokuta, to je $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, pa slijedi

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Stoga je

$$\frac{9}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6. \tag{2.11}$$

Iz (2.10) *i* (2.11) *slijedi nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi za*

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Iz toga slijedi da je

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2},$$

to jest

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

2.3 Youngova nejednakost

Britanski matematičar William H. Young je 1912. godine u članku [17] dokazao nejednakost koja danas nosi naziv upravo po njemu - Youngova nejednakost.

Teorem 2.3.1. *Neka su $a, b \geq 0$ i neka su $p, q \in \langle 1, \infty \rangle$ takvi da vrijedi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2.12}$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$.

Dokaz. Navedena nejednakost direktna je posljedica stroge konveksnosti eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Prema Jensenovoj nejednakosti vrijedi

$$ab = e^{\ln(ab)} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

za sve $a, b > 0$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a^p = b^q$.

Alternativni argument možemo dobiti promatranjem funkcije

$$F(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab, \quad a \geq 0,$$

gdje je $b \geq 0$ parametar. Tada je

$$F'(a) = a^{p-1} - b, \quad F''(a) = (p-1)a^{p-2}.$$

Kako je $F''(a) > 0$ za sve $a > 0$, to je F strogo konveksna funkcija na $\langle 0, \infty \rangle$. Funkcija F ima globalni minimum u $a = b^{\frac{1}{p-1}} = b^{\frac{q}{p}}$, što rezultira s $F(a) > F(b^{\frac{q}{p}}) = 0$ za svaki $a > 0$, $a \neq b^{\frac{q}{p}}$. Jednakost u (2.12) vrijedi ako i samo ako je $a = b^{\frac{q}{p}}$, tj. $a^p = b^q$. □

2.4 Cauchyjeva, Hölderova i Minkowskijeva nejednakost

Cauchyjeva nejednakost se u literaturi još može pronaći pod nazivima Cauchy–Schwarzova nejednakost ili Cauchy–Schwarz–Buniakovskyjeva nejednakost. Prvi ju je publicirao Cauchy 1821. godine u obliku sa sumama koji ćemo dokazati. Augustin-Louis Cauchy (1789.-1857.) bio je francuski matematičar. Radio je kao profesor matematike i astronomije u Parizu. Cauchy se smatra osnivačem teorije funkcija jedne kompleksne varijable, bio je jedan od prvih koji je zasnovao i ravijao infinitezimalni račun, postigao je konačnu formalizaciju diferencijalnog računa, a u algebri je dao značajan doprinos razvoju teorije grupa. Bio je vrlo plodan matematičar koji je napisao mnoga djela iz različitih područja matematike. Viktor Yakovlevich Buniakovsky je 1859. objavio rad u kojem je dokazao istu nejednakost s integralima, a koju je 1888. opet otkrio Hermann Amandus Schwarz.

Teorem 2.4.1 (Cauchyjeva nejednakost)**.** *Ako su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-torke realnih brojeva, onda vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{2.13}$$

Jednakost u (2.13) *vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne.*

Dokaz. Uočimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su brojevi $b_1, \ldots, b_n$ različiti od nule. Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, je strogo konveksna na čitavoj svojoj domeni, pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost

$$\left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^2 \leq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2,$$

gdje su $s_1, \ldots, s_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$ pozitivan realan broj. Množenjem gornje nejednakosti sa S^2 dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^2 \leq S\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^2.$$

Uvedimo supstituciju $x_i = \frac{a_i}{b_i}$, $s_i = b_i^2$ za $i = 1, \ldots, n$, pa imamo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Prema teoremu 2.1.1, jednakost u (2.13) vrijedi ako i samo ako je $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ tj. ako su nizovi a i b proporcionalni. □

Primjer 2.4.2. *Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratna funkcija s nenegativnim realnim koeficijentima. Tada za svaki pozitivni realni broj x vrijedi*

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \geq (f(1))^2.$$

Rješenje. *U rješenju ćemo korisiti Cauchyjevu nejednakost.*

$$\begin{aligned}
f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) &= (ax^2 + bx + c)\left(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\right) \\
&= \left(\left(\sqrt{a}x\right)^2 + \left(\sqrt{bx}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{\sqrt{a}}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2\right) \\
&\geq \left(\sqrt{a}x\frac{\sqrt{a}}{x} + \sqrt{bx}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}} + \sqrt{c}\sqrt{c}\right)^2 \\
&= (a + b + c)^2 = (f(1))^2.
\end{aligned}$$

Njemački matematičar Otto Hölder (1859.-1937.) rođen je u Stuttgartu, i studirao je na tehničkom fakultetu u Stuttgartu, a zatim od 1877. godine na sveučilištu u Berlinu. Hölder se bavio algebrom, teorijom funkcija, geometrijom te proučavanjem filozofskih pitanja. Doprinio je i razvoju teorije grupa. 1884. godine dokazao je da vrijedi sljedeće poopćenje Cauchyjeve nejednakosti.

Teorem 2.4.3 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka su* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva, i* p, q *dva realna broja različita od nule takva da je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Tada za* $p > 1$ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.14}$$

dok za $p < 1$ *vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su* a^p *i* b^q *proporcionalne n-torke.*

Dokaz. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $p \neq 0$, ima drugu derivaciju

$$f''(x) = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) x^{\frac{1}{p} - 2},$$

koja je za $p > 1$ negativna pa je tada f strogo konkavna, a za $p < 1$ pozitivna pa je tada f strogo konveksna. Prema tome, za $p > 1$ iz suprotne Jensenove nejednakosti slijedi

$$\left(\frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} s_i x_i^{\frac{1}{p}},$$

gdje su $s_1, \dots, s_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $S = \sum_{i=1}^{n} s_i$ pozitivan realan broj. Iskoristimo jednakost $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i pomnožimo prethodnu nejednakost sa S, pa imamo

$$\sum_{i=1}^{n} s_i x_i^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uvrstimo $x_i = \frac{a_i^p}{b_i^q}$ $s_i = b_i^q$ za $i = 1, \dots, n$, pa dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

što smo i trebali pokazati. Za $p < 1$ i $p \neq 0$ funkcija f je strogo konveksna, pa analogno slijedi suprotna nejednakost Hölderove nejednakosti.

Prema teoremu 2.1.1, za strogo konveksnu funkciju jednakost u Jensenovoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$, pa se stoga jednakost u (2.14) postiže ako i samo ako je $\frac{a_1^p}{b_1^q} = \cdots = \frac{a_n^p}{b_n^q}$, odnosno ako i samo ako su $a^p = (a_1^p, \ldots, a_n^p)$ i $b^q = (b_1^q, \ldots, b_n^q)$ proporcionalne n-torke. Isti zaključak vrijedi i za strogo konkavnu funkciju; jednakost u suprotnoj nejednakosti od (2.14) se postiže ako i samo ako su n-torke $a^p = (a_1^p, \ldots, a_n^p)$ i $b^q = (b_1^q, \ldots, b_n^q)$ proporcionalne. □

Napomena 2.4.4. *Uočimo da za $p > 1$ nejednakost* (2.14) *vrijedi i u slučaju n-torki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nenegativnih realnih brojeva.*

Korolar 2.4.5. *Neka su $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ n-torke realnih brojeva, i p, q dva realna broja različita od nule takva da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada za $p > 1$ vrijedi*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.15}$$

Dokaz. Iz nejednakosti trokuta i teorema 2.4.3 imamo

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Napomena 2.4.6. *Uočimo da je Cauchyjeva nejednakost* (2.13) *posebni slučaj nejednakosti* (2.15) *za $p = q = 2$.*

Primjer 2.4.7. *Ako su $a, b, c, x, y, z, n > 0$, i*

$$(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n,$$

onda vrijedi

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geq 1.$$

Rješenje. *Imamo*

$$a^n + b^n + c^n = \left(\frac{a^{n+1}}{x}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot x^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{b^{n+1}}{y}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot y^{\frac{n}{n+1}} + \left(\frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} \cdot z^{\frac{n}{n+1}}.$$

Koristeći Hölderovu nejednakost, pri čemu je $p = \frac{n+1}{n}$ i $q = \frac{p}{p-1} = n + 1$ dobivamo

$$a^n + b^n + c^n \leq \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^{\frac{n}{n+1}} (x^n + y^n + z^n)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Potenciranjem gornje nejednakosti s $n + 1$ *dobivamo*

$$(a^n + b^n + c^n)^{n+1} \leq \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^n (x^n + y^n + z^n).$$

Nadalje, jer je $(a^n + b^n + c^n)^{n+1} = x^n + y^n + z^n$ *imamo*

$$x^n + y^n + z^n \leq \left(\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z}\right)^n (x^n + y^n + z^n)$$

iz čega proizlazi

$$\frac{a^{n+1}}{x} + \frac{b^{n+1}}{y} + \frac{c^{n+1}}{z} \geq 1.$$

Hermann Minkowski (1864. - 1909.) je bio njemački matematičar koji je dao značajan doprinos novom pogledu na svemir i vrijeme te je postavio matematičke temelje teoriji relativnosti, no većinu svog vremena proveo je proučavajući kvadratne forme. Pokažimo još kako pomoću Jensenove nejednakosti možemo dokazati i Minkowskijevu nejednakost.

Teorem 2.4.8 (Minkowskijeva nejednakost)**.** *Neka su* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b = (b_1, \ldots, b_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva. Tada za* $p > 1$ *vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.16}$$

a za $p < 1$ *i* $p \neq 0$ *vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke.*

Dokaz. Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$, $p \neq 0$, te njenu drugu derivaciju

$$f''(x) = -\frac{p-1}{p} x^{\frac{1}{p}-2}\left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}.$$

Za $p > 1$ i $p < 0$ funkcija f je strogo konkavna jer je $f''(x) < 0$, pa primjenom suprotne Jensenove nejednakost imamo

$$\left(1 + \left(\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} s_i\left(1 + x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

odakle množenjem s S obiju strana gornje nejednakosti slijedi

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^{n} s_i\left(1 + x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

pri čemu su $s_1, \dots, s_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $S = \sum_{i=1}^n s_i$ pozitivan realan broj. Uvođenjem supstitucije $x_i = \frac{a_i^p}{b_i^p}$, $s_i = b_i^p$ za $i = 1, \dots, n$, i uvrštavanjem u prethodnu nejednakost imamo

$$\left(\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \geq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p,$$

odakle se potenciranjem s $\frac{1}{p}$ za $p > 1$ dobije nejednakost (2.16), a za $p < 0$ suprotna nejednakost od (2.16). Za $0 < p < 1$ funkcija f je stogo konveksna jer je tada $f''(x) > 0$, pa pomoću Jensenove nejednakosti analogno dobijemo suprotnu nejednakost od (2.16). Prema teoremu 2.1.1, u oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = \cdots = x_n$ odnosno ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke. □

Primjer 2.4.9 (Azijska pacifička matematička olimpijada, 2003). *Ako je $n > 1$ prirodan broj, te a, b, c duljine stranica trokuta opsega 1, onda vrijedi*

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}.$$

Rješenje. *S obzirom da su a, b, c stranice trokuta, znači da postoje pozitivni realni brojevi x, y, z takvi da vijedi*

$$a = y + z, \quad b = x + z, \quad c = x + y.$$

(Ovi brojevi se dobiju podjelom stranica trokuta točkama dodira upisane kružnice, v. sliku 2.1.)

Nadalje, kako je opseg trokuta jednak 1, tj. $a + b + c = 1$, vrijedi $x + y + z = \frac{1}{2}$. Koristeći Minkowskijevu nejednakost dobivamo

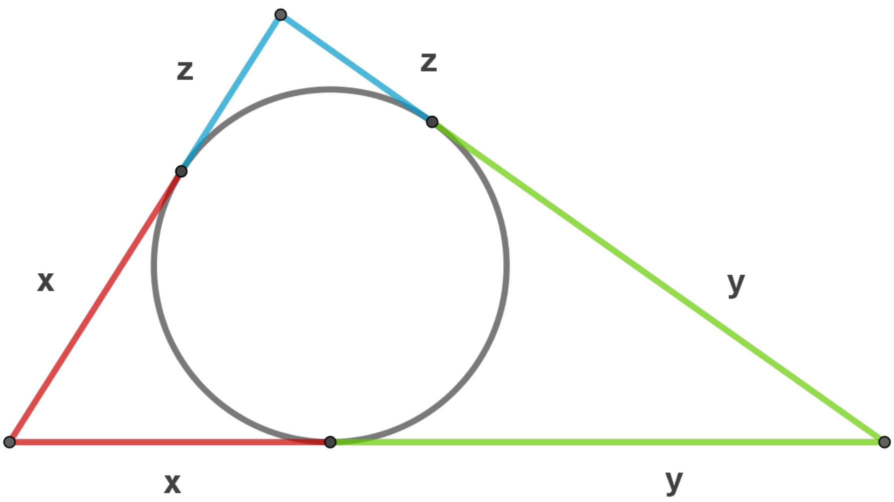
$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} = ((y+z)^n + (x+z)^n)^{\frac{1}{n}} \leq (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} + (2z^n)^{\frac{1}{n}} < c + \sqrt[n]{2}z.$$

Analogno dobivamo

$$(b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} < a + \sqrt[n]{2}x,$$
$$(c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < b + \sqrt[n]{2}y,$$

pa je

$$(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} + (b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} + (c^n + a^n)^{\frac{1}{n}} < a + b + c + \sqrt[n]{2}(x + y + z) = 1 + \frac{2^{\frac{1}{n}}}{2}.$$



Slika 2.1: Podjela stranica trokuta točkama dodira upisane kružnice

2.5 Hermite–Hadamardova nejednakost

Hermite–Hadamardova nejednakost je također jedna od poznatijih i važnijih nejednakosti, koja uz Jensenovu nejednakost pruža glavni oslonac u uspoređivanju matematičkih sredina. Ova dvostruka nejednakost, koja ima široku primjenu, a prvi ju je otkrio Charles Hermite 1881. godine, glasi

Teorem 2.5.1. *Ako je je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, onda je*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.17}$$

Taj teorem se poslije pripisivao Jacques Hadamardu koji nije bio upoznat s Hermiteovim rezultatom te se danas, kada se govori o (2.17), koriste oba imena.

Dokaz. Desnu stranu nejednakosti dobivamo integriranjem nejednakosti

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

koja govori da se graf funkcije f nalazi ispod tetive koja spaja krajnje točke grafa, $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b f(a)dx + \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)dx \\
&= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot \frac{(b-a)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a),
\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Lijevu stranu nejednakosti dokazujemo na sljedeći način. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{(a+b)/2} f(x)dx + \int_{(a+b)/2}^b f(x)dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

Za $t \in [0,1]$ imamo

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-t(b-a)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+t(b-a)}{2},$$

odakle zbog konveksnosti funkcije f slijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)$$

pa se integriranjem dobije

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right]dt.$$

Time smo dokazali lijevu stranu nejednakosti (2.17). □

Primjer 2.5.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\frac{2}{2n+1} \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right).$$

Rješenje. *Funkcija* $f(x) = \frac{1}{x+1}$ *je konveksna za* $x \in \langle -1, \infty\rangle$. *Primjenom nejednakosti* (2.17) *na segmentima* $[n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *dobije se*

$$f\left(\frac{n-1+n}{2}\right) \leq \frac{1}{n-(n-1)} \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq \frac{f(n-1)+f(n)}{2},$$

odnosno

$$\frac{2}{2n+1} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x+1}dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Osim toga, vrijedi

$$\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x+1}dx = \ln(x+1)\Big|_{n-1}^{n} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

čime je tvrdnja dokazana.

Primjer 2.5.3. *Za* $x, y \in \langle 0, \infty\rangle$, $x \neq y$, *vrijedi*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Rješenje. *Za konveksnu funkciju* $f(x) = e^x$*, iz Hermite–Hadamardove nejednakosti* (2.17) *dobivamo*

$$e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{e^b - e^a}{b-a} \leq \frac{e^a + e^b}{2},$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$. *Uvrstimo li* $a = \ln x$ *i* $b = \ln y$ *u prethodnu nejednakost, dobije se*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\log x - \log y} \leq \frac{x+y}{2}$$

što se i tvrdilo.

Primjer 2.5.4. *Za* $a, b \in [0, \pi]$, $a \neq b$, *vrijedi*

$$\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \frac{\cos a - \cos b}{b-a} \leq \sin\frac{a+b}{2}.$$

Rješenje. Funkcija $f(x) = \sin x$ *je konkavna na* $[0, \pi]$ *pa za nju vrijedi suprotna nejednakost od* (2.17). *Dakle,*

$$\frac{\sin a + \sin b}{2} \leq \frac{\cos a - \cos b}{b-a} \leq \sin\frac{a+b}{2}$$

za sve $a, b \in [0, \pi]$, $a \neq b$.

Bibliografija

[1] I. Brnetić, *Nejednakosti na međunarodnim matematičkim olimpijadama*, Osječki matematički list **8** (2008), 5–18.

[2] G. Dahl, *An Introduction to Convexity*, University of Oslo, Centre of Mathematics for Applications, Oslo, Norway, 2010.

[3] S. R. Ghorpade i B. V. Limaye, *A Course in Multivariable Calculus and Analysis,* Springer, 2000.

[4] C. Hermite, *Sur deux limites d'une integrale definie,* Mathesis **3** (1883), p. 82.

[5] L. Höermander, *Notions of Convexity,* Modern Birkhäuser Classics, Boston, 2007.

[6] D. Hrimiuc, *Inequalities for convex functions (Part I)*, dostupno na <`https://www.math.ualberta.ca/pi/issue4/page20-24.pdf`> (ožujak 2018.).

[7] I. Ilišević, *Cauchy–Schwarz–Buniakowskyjeva nejednakost*, Math. Commun. **1** (1996), br. 2, 193–196.

[8] I. Ilišević, *Jensenova nejednakost,* Osječki matematički list **5** (2005), 9–19.

[9] J. L. W. V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. **30** (1906), 175–193.

[10] H. Lee, *Topics in Inequalities – Theorems and Techniques,* Korea Institute for Advanced Study, Seoul, 2007.

[11] C. P. Niculescu i L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach*, Springer, 2004.

[12] T. Popoviciu, *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (NS) **11B** (1965), 155–164.

[13] M. Ribičić Penava i K. Bošnjak, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list **16** (2016), 15–25.

[14] A. W. Roberts i D. E. Varberg, *Convex Functions*, Academic Press, Inc., New York, London, 1973.

[15] Z. F. Starc, *Nejednakost izmedu aritmetičke i geometrijske sredine*, Osječka matematička škola **4** (2004), 15–18.

[16] S. M. Stefanov, *Deriving Some Inequalities from a Property of Convex functions,* Department of Informatics, Neofit Rilski South-Western University, Blagoevgrad, Bulgaria, 1994.

[17] W. H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proc. R. Soc. Lond. A **87** (1912), 225–229.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada su konveksne funkcije realne varijable. U prvom poglavlju dana je definicija i opis osnovnih svojstava konveksnih funkcija, te su zatim razmotrena svojstva neprekidnosti i derivabilnosti. Iako definicija konveksne funkcije služi u korisne svrhe, često matematičari prepoznaju konveksne funkcije ili razmišljaju o njima na drugačiji način; na primjer integralnim prikazom, svojstvima derivacija, geometrijskim svojstvima grafa i slično. U prvom poglavlju također je dana karakterizacija konveksnih funkcija pomoću integrala, pomoću druge derivacije funkcije ukoliko postoji, te geometrijski pomoću potpornih pravaca. Na kraju prvog poglavlja opisane su osnovne operacije s konveksnim funkcijama.

U drugom poglavlju dana je veza konveksnih funkcija s klasičnim nejednakostima, poput Jensenove, koja je svojevrsna generalizacija nejednakosti kojom smo definirali konveksnu funkciju. Youngova, Cauchyjeva, Hölderova, Minkowskijeva te Hermite–Hadamardova nejednakosti su samo neke od poznatih nejednakosti koje su vezane za Jensenovu nejednakost i konveksne funkcije. Za svaku od navedenih nejednakosti dan je iskaz, dokaz, nekoliko riječi o matematičarima koji su ih dokazali i po kojima su nazvane, te primjeri primjene za svaku od njih. Također je dana veza Jensenove nejednakosti za konveksne funkcije s nejednakostima između sredina, kao npr. nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine koja je jedna od najpoznatijih algebarskih nejednakosti. Sve navedene nejednakosti imaju široku primjenu te upravo u tome leži njihova velika važnost ne samo za matematiku već i za druge znanosti.

Summary

The topic of this thesis are the convex functions of a real variable. In the first chapter, the definition and description of basic properties of convex functions are given, and then the continuity and derivability properties are considered. Although the definition of a convex function serves for useful purposes, mathematicians often recognize convex functions or think about them in a different way; for example through an integral representation, derivative properties, geometric properties of a graph, etc. In the first chapter, it is also given the characterization of convex functions by integral, using second derivative of the function if it exists, and geometrically by support lines. At the end of the first chapter, basic operations with convex functions are described.

In the second chapter, there is a connection of convex functions with classical inequalities, such as Jensen inequality, which is a kind of generalization of inequality by which we defined a convex function. Young, Cauchy, Hölder, Minkowski and Hermite–Hadamard inequalities are just some of the known inequalities that are related to Jensen's inequality and convex functions. For each of these inequalities there is definition, proof, a few words about mathematicians who proved them and by which they are named, and examples of application for each of them. Also, a connection between Jensen's inequality for convex functions with inequalities between means is given, such as inequality between arithmetic and geometric mean that is one of the most well-known algebraic inequalities. All of these inequalities have wide application, and it is precisely why they are very important not only in mathematics, but also in other sciences.

Životopis

Rođena sam 9. listopada 1987. u Kninu. Odrasla sam u Šibeniku gdje sam pohađala osnovnu i srednju školu. Godine 2010. upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, nastavnički smjer. Godine 2013. završavam preddiplomski studij kao prvostupnik edukacijske matematike, a nedugo nakon toga započinjem svoje radno iskustvo u marketingu jedne globalne kompanije gdje sam ostala raditi do završetka studija, odnosno do položenog zadnjeg ispita na diplomskom studiju. Nakon toga zapošljavam se u srednjoj školi Biograd na moru gdje i danas radim.