Bihejvioristički pristup neizvjesnosti

Kavelj, Danica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Danica Kavelj

BIHEJVIORISTIČKI PRISTUP NEIZVJESNOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, veljača 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Središnju ulogu u ovom radu čini matematički model donošenja odluka u neizvjesnosti potkrijepljen bihejviorističkim pristupom. Bihejvioralni temelji nam daju popis uvjeta, izravno navedenih u smislu vidljivih preferencija, koji vrijede ako i samo ako model odlučivanja vrijedi. Oni nam daju značenje kvantitativnih modela odlučivanja i njihovih subjektivnih parametara, kao što su subjektivne vjerojatnosti ili korisnosti. Pokazuju kako potvrditi ili odbaciti modele odlučivanja te daju uvjete koji opravdavaju ili odbacuju modele. Bihejvioralni temelji, drugim riječima, daju unutarnju čvrstoću matematičkog modela odlučivanja.

U prvom poglavlju navodimo osnovne koncepte odlučivanja pod neizvjesnošću, uvodimo osnovne definicije i svojstva preferencija te sve to zajedno sažimamo u Strukturnu pretpostavku koja će se koristiti kroz cijeli rad. U drugom poglavlju, *Očekivana korisnost*, navodimo dva modela donošenja odluka a to su maksimiziranje očekivane vrijednosti te maksimiziranje očekivane korisnosti. Kao pomoćni alat u tim modelima pod neizvjesnošću je određivanje subjektivnih vjerojatnosti koje karakteriziraju donositelja odluke. Uočeno je da se maksimizacija očekivane vrijednosti ne smije uvijek koristiti jer se mnoge odluke u našem životu odnose na nekvantitativne modele pa se očekivana vrijednost ne može niti definirati. Također, važne odluke tiču se i velikih udjela pa maksimiziranje očekivane vrijednosti nije razumno. Stoga se razvija teorija očekivane korisnosti koja nas upućuje na to da ljudi ishode ne promatraju kroz njihove ”prave” vrijednosti već kroz korisnost tih istih ishoda. Velik broj istraživanja, kao što je Allaisov paradoks, pokazao je da se pojedinci u uvjetima neizvjesnosti nužno ne ponašanju u skladu s teorijom očekivane korisnosti što dovodi do razvoja novih, alternativnih modela odlučivanja. U trećem poglavlju, *Korisnost ovisna o rangu*, stoga uvodimo korisnost ovisnu o rangu koja korisnost uzima kao ljestvicu koja opisuje osjećaje generirane primanjem novca. Eksperimenti su također pokazali da donositelj odluke različito reagira na različito oblikovane formulacije istog problema, odnosno različito doživljava gubitak u odnosu na dobitak. Također, donositelj odluke često precjenjuje male vjerojatnosti i podcjenjuje velike vjerojatnosti, dakle deformira vjerojatnost. O tome će biti riječi u četvrtom poglavlju, *Prospektna teorija*, gdje uvodimo najprihvaćeniji alternativni model odlučivanja koji su uveli Kahnemann i Tversky, a to je prospektna teorija.

Donositelj odluke trebao bi pažljivo odabrati koji model odlučivanja može koristiti prilikom donošenja odluke, te ako ne postoji prikladan model stvoriti novi.

Poglavlje 1

Osnovni koncepti neizvjesnosti

Ovo poglavlje uvodi općenite oznake i pojmove za donošenje odluka pod neizvjesnošću. Da ih lakše razumijemo navodimo primjer.

Primjer 1.0.1. *Zamislite da ste ulični prodavač te morate odlučiti koja dobra ćete sutra prodati. Dobra mogu biti sladoled, hrenovke, novine i ostalo. Profit prodaje ovisi o vremenskim prilikama te može biti negativan jer dobra koja nisu prodana predstavljaju gubitak. Iako vremenski uvjeti čine kontinuum mogućnosti, radi jednostavnosti, ograničiti ćemo se na tri mogućnosti: ili neće biti kiše (*s_1*) ili će biti malo kiše (*s_2*) ili će kišiti cijeli dan (*s_3*). Nismo sigurni hoće li se dogoditi* s_1, s_2 *ili* s_3. *Tablica 1.1 prikazuje, u kunama, dobit koja može proizaći iz vaše odluke u ovisnosti o vremenu sutra. Pretpostavimo da ponuda sladoleda ne utječe na dobit ostvarenu prodajom hrenovki i obrnuto u najdonjem retku tablice.*

	s_1	s_2	s_3
s (sladoled)	400	100	-400
h (hot dog)	-400	100	400
$\emptyset$	0	0	0
$s + h$ (oboje)	0	200	0

Tablica 1.1: Dobit koja proizlazi iz odluke ovisne o vremenskim uvjetima.

Skup stanja. Neizvjesnost modeliramo na *skupu stanja* S, tj. skupu svih mogućih stanja svijeta koja određuju posljedice našeg djelovanja. Sva stanja svijeta se međusobno isključuju te čine particiju skupa S. Moguće je samo jedno stanje $s \in S$. Neizvjesno je koje stanje će se dogoditi te donositelj odluke nema utjecaj na to. U navedenom primjeru neizvjesnost se odnosi na sutrašnje vrijeme i skup stanja je $S = \{s_1, s_2, s_3\}$. Stanja ponekad nazivamo i stanjima prirode.

Neka je $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ skup stanja. Podskupove skupa stanja, $E \subseteq S$, nazivamo *događaji*. Dakle, događaj je skup mogućih (budućih) scenarija. Uz ovakvu definiciju događaja imamo da su unija, presjek i komplement događaja također događaji. Prazan skup $\emptyset$ je također događaj kao i cijeli skup S. Događaje koji sadrže samo jedno stanje, $E_j = \{S_j\}$ za $j = 1, ..., n$, nazivamo *elementarni događaji*. Elementarni događaji čine particiju skupa stanja, stoga skup stanja $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ možemo pisati i kao $S = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$.

Pretpostavljamo da su ishodi našeg djelovanja novčani iznosi, odnosno baviti ćemo se financijskim rizicima. Sada je skup posljedica skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Ishode označavamo grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, ...$ ili rimskim slovima s indeksima $x_1, x_2, x_3, ...$.

Prospekt. *Prospekt* je niz uređenih parova $x = ((E_1, x_1), (E_2, x_2), ..., (E_n, x_n))$ donoseći ishod x_1 pod događajem E_1,..., donoseći x_n pod E_n. Prospekte često označavamo s $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$. Skup prospekata nad particijom elementarnih događaja $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ označavati ćemo s $\mathcal{P}$. U našem primjeru prospekti definiraju profit (koji može biti i negativan) uvjetovan vremenskim uvjetima. Na primjer, prospekt za opciju sladoleda je $s = (s_1 : 400, s_2 : 100, s_3 : -400)$.

Neka je $(E_1 : \alpha, E_2 : \alpha, E_3 : \alpha, E_4 : \beta, E_5 : \beta, ..., E_n : \beta)$ prospekt i neka je $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$. Tada je $E^c = E_4 \cup ... \cup E_n$ i vrijedi $(E_1 : \alpha, E_2 : \alpha, E_3 : \alpha, E_4 : \beta, E_5 : \beta, ..., E_n : \beta) = (E : \alpha, E^c : \beta)$. Tada takav prospekt često pišemo kao $\alpha_E\beta$.

Prospekt koji donosi isti ishod za svako stanje naziva se *konstantan prospekt*. Za konstantni prospekt nema neizvjesnosti oko ishoda te ga često označavamo samo kao ishod.

Prospekti defiirani na istom skupu stanja mogu se zbrajati. Neka su $x = (x_1 : E_1, x_2 : E_2, ..., x_n : E_n)$ i $y = (y_1 : E_1, y_2 : E_2, ..., y_n : E_n)$ tada je njihov zboj definiran kao prospekt $x + y = (x_1 + y_1 : E_1, x_2 + y_2 : E_2, ..., x_n + y_n : E_n)$.

Relacija preferencije. Bez obzira na odluku koju ćemo donijeti, razmišljamo o tome koji je prospekt za nas povoljniji. Preferencije među prospektima izražavamo preko binarne relacije. Relaciju preferencije donositelja odluke na skupu prospekata označavamo s $\succeq$. $x \succeq y$ znači da preferiramo prospekt x u odnosu na y, odnosno iz skupa $\{x,y\}$ biramo x. Koristimo sljedeće oznake za preferencije:

- stroga preferencija: $x \succ y$ ako $x \succeq y$ i ne $y \succeq x$,
- indiferencija/ekvivalencija: $x \sim y$ ako $x \succeq y$ i $y \succeq x$,
- obrnuta preferencija: $x \preceq y$ ako $y \succeq x$,
- stroga obrnuta preferencija: $x \prec y$ ako $y \succ x$.

Navodimo i neke zahtjeve preferencije:

- netrivijalnost: $x \succ y$ za neke prospekte x i y,
- refleksivnost: $x \sim x$ za sve prospekte x,
- slaba monotonost: ako vrijedi $x(s) \geq y(s)$ za sve $s \in S$, tada je $x \succeq y$,
- jaka monotonost: ako vrijedi $x(s) > y(s)$ za sve $s \in S$, tada je $x \succ y$.

Funkcija vrijednosti. Funkcija vrijednosti $V : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ reprezentira relaciju preferencije ako V procijenjuje prospekte u skladu s preferencijama, tj.

$$V(x) \geq V(y) \text{ ako i samo ako } x \succeq y \tag{1.1}$$

Ekvivalent sigurnosti. Ako donositelj odluke zamisli svoju odluku kao igru između njega i prirode, zna da on kontrolira svoje odluke (akcije), a priroda kontrolira stanja svijeta. Za svaku odluku priroda će odabrati neko stanje svijeta koje je slučajnog karaktera. Kao svaka igra i ova zahtjeva cijenu za ulazak u igru koju zovemo *ekvivalent sigurnosti*. To je ono što je donositelj odluke, prema vlastitoj procijeni, spreman uložiti za ulazak u igru. Stoga, ekvivalent sigurnosti prospekta x je konstantni prospekt α takav da je $\alpha \sim x$. Pišemo $CE(x) = \alpha$.

Očekivani dobitak u toj igri umanjen za cijenu ulaznice je vaša očekivana zarada ili premija rizika. Ako je premija rizika pozitivna, donositelj odluke nije sklon riziku jer je spreman platiti manju cijenu za ulazak u igru od očekivane dobiti, igra na sigurno. Kažemo da ima averziju prema riziku. U suprotnom je sklon riziku ako je premija rizika negativna ili neutralan prema riziku ako je premija rizika jednaka nuli.

Navodimo strukturnu pretpostavku koja sažima pretpostavke za odlučivanje pod neizvjesnosti.

Strukturna pretpostavka. S je konačan ili beskonačan skup stanja. Prospekti preslikavaju S u $\mathbb{R}$ poprimajući konačno mnogo vrijednosti. Neka $\succeq$ je relacija preferencije na skupu svih prospekata. Zahtjevana je i nedegeneriranost: postoje događaj E i prospekti α i β takvi da $\alpha_E\alpha \succ \alpha_E\beta \succ \beta_E\beta$.

Poglavlje 2

Očekivana korisnost

Odlučivanje je u odsutnosti bilo kakve informacije o stanjima svijeta. Nešto određeniji pristup je da donositelj odluke pretpostavlja vjerojatnosti stanja svijeta. Te vjerojatnosti su parametri koji karakteriziraju donositelja odluke i označavaju promatračev stupanj uvjerenja da će se dogoditi određeno stanje. Što je veće njegovo uvjerenje, veća je i vjerojatnost.

2.1 Očekivana vrijednost

Definicija 2.1.1. *Neka je $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ prospekt sa n stanja svijeta. Definiramo očekivanu vrijednost prospekta $EV : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:*

$$EV(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{2.1}$$

gdje je $p_j = \mathbb{P}(E_j)$ za $j = 1, ..., n$.

Sada, jedan od kriterija odabira najboljeg prospekta može biti maksimizacija očekivane vrijednosti prospekta na skupu prospekata:

$$max_{x \in \mathcal{P}} EV(x) \tag{2.2}$$

Vjerojatnosti se određuju na sljedeći način:
Za događaj ili stanje svijeta E tražimo broj $0 \leq p \leq 1$ tako da $p \sim 1_E 0$, tj. $p = 1\mathbb{P}(E) + 0(1 - \mathbb{P}(E)) = \mathbb{P}(E)$.

Uvodimo pojam arbitraže.

Definicija 2.1.2. *Neka su $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ i $y = (E_1 : y_1, ..., E_n : y_n)$ prospekti takvi da je $x^j \geq y^j$ za svaki $j \in \{1, ..., n\}$. Ako vrijedi da je*

$$\sum_{j=1}^{n} x^j(s) < \sum_{j=1}^{n} y^j(s) \tag{2.3}$$

za svaki $s \in S$ tada to svojstvo nazivamo mogućnost arbitraže.

Arbitraža na financijskom tržištu znači da se može kombinirati niz prospekata na takav način da se uvijek ostvari zarada. U praksi, arbitražne mogućnosti nestaju unutar sekunde jer ih odmah iskorištavaju najveći i najbrži sudionici na tržištu, tj. investicijske banke koje koriste automatizirane računalne programe.

Aditivnost. Uvodimo svojstvo aditivnosti. Kažemo da relacija preferencije zadovoljava *aditivnost* ako vrijedi $x \succ y \Rightarrow x + z \succ y + z$ za sve prospekte x, y, z.

Aditivnost je razumna za umjerene iznose novca. Dodatni račun od z na vašem bankovnom računu ne mijenja vašu situaciju ako su ishodi od z umjereni. To neće, dakle, utjecati na skonost između x i y. Velike količine novca mogu utjecati na naš način življenja pa stoga, aditivnost ne mora biti zadovoljena. Sljedeću analizu ograničavamo na domenu umjerenih iznosa tako da aditivnost bude prihvatljiva.

Prije nego li navedemo teorem koji nam daje bihejvioralne temelje, navesti ćemo dvije leme koje su nam potrebne za dokaz teorema.

Lema 2.1.3. *Ekvivalent sigurnosti je aditivan, tj. $CE(x + y) = CE(x) + CE(y)$*

Dokaz. Po definiciji ekvivalenta sigurnosti vrijedi:

$$\begin{aligned} x &\sim CE(x) \\ y &\sim CE(y) \\ CE(x+y) &\sim x + y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zamjenom svih navedenih indiferencija u 2.4 s $\leq$ i njihovim zbrajanjem dobivamo

$$x + y + CE(x + y) \leq CE(x) + CE(y) + x + y \tag{2.5}$$

odnosno,

$$CE(x + y) \leq CE(x) + CE(y) \tag{2.6}$$

Analogno, zamijenom istih indiferencija s $\geq$ i njihovim zbrajanjem dobivamo

$$CE(x + y) \geq CE(x) + CE(y) \tag{2.7}$$

Dobiveno nam zajedno daje tvrdnju koju smo trebali pokazati. □

Lema 2.1.4. *Za svaki događaj E i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi $CE(\lambda_E 0) = \lambda\mathbb{P}(E)$*

Dokaz. **Prvi slučaj**: $\lambda = 0$ slijedi direktno.
Drugi slučaj: $\lambda = k$, k je prirodan broj. Uzastopnom primjenom leme 2.1.3 imamo:

$$\begin{aligned} CE(k_E 0) &= CE(1_E 0 + ... + 1_E 0) \\ &= CE(1_E 0) + ... + CE(1_E 0) \\ &= kCE(1_E 0) \\ &= k\mathbb{P}(E) \end{aligned} \tag{2.8}$$

za sve $k \in \mathbb{N}$.
Treći slučaj: λ je pozitivni racionalni broj, tj. $\lambda = \frac{m}{k}$ za $k, m \in \mathbb{N}$.
Zbog drugog slučaja vrijedi $m\mathbb{P}(E) = CE(m_E 0)$ pa imamo:

$$\begin{aligned} m\mathbb{P}(E) &= CE(m_E 0) \\ &= CE\left(\left(\frac{m}{k}\right)_E 0 + ... + \left(\frac{m}{k}\right)_E 0\right) \\ &= CE\left(\left(\frac{m}{k}\right)_E 0\right) + ... + CE\left(\left(\frac{m}{k}\right)_E 0\right) \\ &= kCE\left(\left(\frac{m}{k}\right)_E 0\right) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Treća jednakost slijedi iz aditivnosti ekvivalenta sigurnosti. Dijeleći dobiveno s k dobivamo da vrijedi $CE((\frac{m}{k})_E 0) = \mathbb{P}(E)m\frac{1}{k}$.
Četvrti slučaj: λ je negativan i racionalan, dakle, $\lambda = -\frac{m}{k}$ za $k, m \in \mathbb{N}$
Slijedi iz trećeg slučaja i jednakosti $CE(-(\frac{m}{k})_E 0) = -CE((\frac{m}{k})_E 0)$. Tu jednakost dobivamo primjenom aditivnosti od CE: $0 = CE((\frac{m}{k})_E 0 - (\frac{m}{k})_E 0) = CE((\frac{m}{k})_E 0) + CE(-(\frac{m}{k})_E 0)$.
Peti slučaj: λ je iracionalan broj.
$\mathbb{P}(E)$ može biti 0 ili pozitivan. Zbog monotonosti za sve racionalne brijeve l i h takve da je $l < \lambda < h$ vrijedi

$$l_E 0 \leq \lambda_E 0 \leq h_E 0 \tag{2.10}$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(E)l = CE(l_E 0) \leq CE(\lambda_E 0) \leq CE(h_E 0) = \mathbb{P}(E)h \tag{2.11}$$

$\mathbb{P}(E)\lambda$ je jedini realni broj $CE(\lambda_E 0)$ koji zadovoljava ove nejednakosti za sve racionalne brojeve l, h takve da je $l < \lambda < h$. Dakle, $\mathbb{P}(E)\lambda = CE(\lambda_E 0)$ čime je dokazana tvrdnja. □

Navodimo de Finettijev teorem koji daje bihejvioralne temelje subjektivnih vjerojatnosti i očekivane korisnosti isljučujući mogućnost arbitraže.

Teorem 2.1.5. *Neka vrijedi Strukturna pretpostavka na stranici 5. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Očekivana vrijednost reprezentira relaciju preferencije.

(ii) Preferencijska relacija $\succeq$ je slabi uređaj, za svaki prospekt postoji ekvivalent sigurnosti i mogućnost arbitraže je isključena.

(iii) Preferencijska relacija $\succeq$ je slabi uređaj, za svaki prospekt postoji ekvivalent sigurnosti, te $\succeq$ zadovoljava monotonost i aditivnost.

Dokaz. Prvo dokazujemo $(iii) \Rightarrow (ii)$.To ćemo dokazati tako da pokažemo da tranzitivnost, monotonost i aditivnost relacije preferencije isključuju postojanje arbitraže. Pretpostavimo da je $\succeq$ tranzitivna, monotona i aditivna te neka je $x^j \succeq y^j$ za sve $j = 1, ..., m$ i neka postoji arbitraža. $x^j \succeq y^j$ zajedno s aditivnosti implicira $x^j + \sum_{i \neq j} y^i \succeq y^j + \sum_{i \neq j} y^i$. Iz aditivnosti slijedi:

$$y^1 + y^2 + ... + y^m \preceq x^1 + y^2 + ... + y^m \preceq ... \preceq x^1 + x^2 + ... + x^m \tag{2.12}$$

odnosno

$$\sum_{j=1}^{m} x^j \succeq \sum_{j=1}^{m} y^j \tag{2.13}$$

što nam daje kontradikciju na postojanje arbitraže. Dakle, $(iii) \Rightarrow (ii)$.
Sada pokazujemo obrat, tj. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Obrat ćemo pokazati ako pokažemo da nepostojanje arbitraže podrazumijeva aditivnost i monotonost. Pretpostavimo da ne vrijedi monotonost, odnosno $x(s) > y(s)$, za svaki $s \in S$, ali nije $x \succ y$, tj. $x \preceq y$. Znamo da $x \preceq y$ implicira $x(s) \leq y(s)$, za svaki $s \in S$, što nam daje arbitražu ($m = 1$, $x^1 = x$ i $y^1 = y$). Dakle, dobili smo kontradikciju s pretpostavkom što znači da $x(s) > y(s)$, za svaki $s \in S$ implicira $x \succ y$. Dakle, vrijedi monotonost. Prema lemi 2.1.3 ekvivalent sigurnosti je aditivan, a po definiciji ekvivalenta sigurnosti vrijedi

$$\begin{aligned} x &\sim CE(x) \\ y &\sim CE(y) \\ x + y &\sim CE(x + y) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Pretpostavimo da $x \succeq y$. Tada

$$CE(x) \geq CE(y) \Rightarrow CE(x) + CE(z) \geq CE(y) + CE(z) \tag{2.15}$$

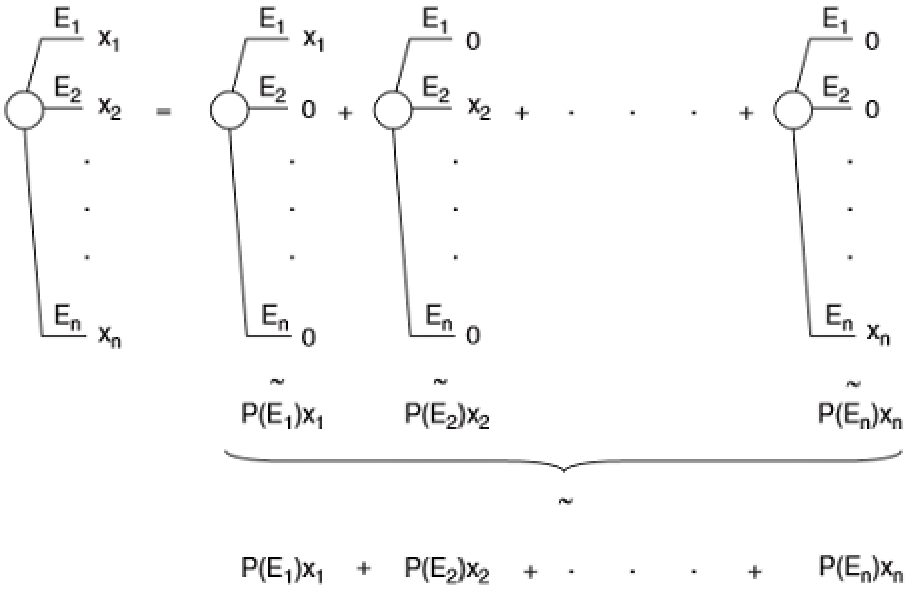
Zbog aditivnosti ekvivalenta sigurnosti i 2.15 vrijedi $CE(x + z) \geq CE(y + z)$ iz čega zbog definicije ekvivalenta sigurnosti slijedi $x + z \succeq y + z$. Dakle, aditivnost vrijedi.

Pokazali smo $(ii) \Rightarrow (iii)$ što zajedno s $(iii) \Rightarrow (ii)$ daje da su tvrdnje (ii) i (iii) ekvivalentne. Još nam preostaje pokazati ekvivalenciju između (i) i (ii) ili (i) i (iii). Pokazujemo $(i) \Leftrightarrow (iii)$.

Prvo pokazujemo $(i) \Rightarrow (iii)$. Pokazati ćemo da je $\geq$ slabi uređaj ako postoji očekivana vrijednost (EV) koja reprezentira preferenciju, odnosno, $EV(x) \geq EV(y) \Leftrightarrow x \geq y$. Da bismo pokazali tranzitivnost pretpostavimo $x \geq y$ i $y \geq z$. Kako EV reprezentira preferenciju slijedi

$$\begin{aligned} EV(x) &\geq EV(y) \\ EV(y) &\geq EV(z) \end{aligned} \tag{2.16}$$

što implicira $EV(x) \geq EV(z)$, tj. slijedi $x \geq z$. Dakle, vrijedi tranzitivnost. Da bismo pokazali potpunost promatramo prospekte x i y. Imamo $EV(x) \geq EV(y)$ i/ili $EV(y) \geq EV(x)$, odnosno $x \geq y$ i/ili $y \geq x$. Dakle, relacija preferencije je potpuna što zajedno s tranzitivnosti daje da je relacija preferencije slabi uređaj. Ekvivalent sigurnosti prospekta x je njegova očekivana vrijednost. Monotonost slijedi neposredno. Neka su x, y i z prospekti takvi da je $x \geq y$. Znamo da je $x \sim CE(x)$, $y \sim CE(y)$ i $z \sim CE(z)$. Iz toga slijedi da je $CE(x) \geq CE(y)$. Zbog aditivnosti od CE vrijedi $CE(x) + CE(z) \geq CE(y) + CE(z)$ što nam daje $x + z \geq y + z$, tj. vrijedi aditivnost relacije preferencije čime je pokazano $(i) \Rightarrow (iii)$.
Sada pokazujemo $(iii) \Rightarrow (i)$. Slika 2.1 pokazuje glavni korak dokaza. Ako vrijede mono-



Slika 2.1: Izvođenje očekivane vrijednosti.

tonost, slabi uređaj i ako za svaki prospekt x postoji $CE(x)$, tada CE reprezentira relaciju preferencije:

Znamo da je $x \sim (CE(x), ..., CE(x))$ i $y \sim (CE(y), ..., CE(y))$. Tada

$$\begin{aligned} x \geq y &\Leftrightarrow (CE(x), ..., CE(x)) \geq (CE(y), ..., CE(y)) \\ &\Leftrightarrow CE(x) \geq CE(y) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Definiramo $\mathbb{P}(E) = CE(1_E 0)$ za sve događaje E. $\mathbb{P}$ je vjerojatnost jer:

$$\begin{gathered} \mathbb{P}(S) = 1 \\ \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \\ \mathbb{P}(E) \geq 0 \\ \mathbb{P}(A \cup B) = CE(1_{A \cup B} 0) = (aditivnost) = CE(1_A 0) + CE(1_B 0) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) \end{gathered} \tag{2.18}$$

gdje su A i B disjunktni. Dakle, slika pokazuje da je ekvivalent sigurnosti općenitog prospekta njegova očekivana vrijednost koja reprezentira relaciju preferencije. Čime smo pokazali $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Izjava (i) teorema tvrdi da postoje subjektivne vjerojatnosti takve da se očekivanja u odnosu na njih mogu uzeti kako bi se prilagodile sklonosti. Može se pretpostaviti da bi mnoge različite mjere vjerojatnosti mogle poslužiti ovoj svrsi, međutim to nije tako i vjerojatnosti su jedinstvene, što slijedi iz načina odabira vjerojatnosti. Za teoriju individualnog izbora teorem implicira da ako se preferencijski uvjeti u (ii) i (iii) smatraju poželjnim, tada se neizvjesnost mora moći izraziti u smislu subjektivnih vjerojatnosti. Ovaj teorem pokazuje kako načini ponašanja mogu uvjeriti ljude da koriste određene kvantitativne modele odlučivanja. Nije jasno zašto izjava (i) dovodi do pametnog ponašanja dok izjave (ii) i (iii) pokazuju zašto se to može učiniti.

2.2 Očekivana korisnost

Mnoge odluke odnose se na kvalitativne modele poput zdravstvenih stanja. Tada se očekivana vrijednost ne može koristiti jer se ne može definirati. Također, važne odluke u životu tiču se velikih udjela pa maksimiziranje očekivane vrijednosti neće biti razumno. Navodimo Perogradski paradoks kao primjer u kojem očekivanu vrijednost nije razumno koristiti.

Petrogradski paradoks. Simetrični novčić baca se dok se ne pojavi glava. Ako se glava pojavi u n-tom bacanju, slijedi isplata od 2^n kuna. Problem: koliko ste spremni platiti za ulazak u igru?

Vjerojatnost pojave glave u n-tom bacanju je $\frac{1}{2^n}$, pa je očekivana vrijednost isplate jednaka

$$EV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^n = \infty$$

Ta vrijednost bi bila cijena za ulazak u igru. Paradoks je u tome što mnogi ne žele platiti ulazak u igru "beskonačno" velikim iznosom. Bernoully je "riješio" paradoks uvođenjem korisnosti novca te pretpostavkom da povećanje korisnosti dobitka u svakoj sljedećoj isplati (marginalna korisnost) opada. Njegova sugestija je bila dakle da umijesto iznosa 2^n u računu očekivane vrijednosti koristi korisnost definiranu sa $u(x) = ln(x + c)$, za neki $c \in \mathbb{R}$. Prema tome očekivana vrijednost je

$$EV = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(2^n + c)}{2^n} < \infty$$

Dokaz. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(2^n+c)}{2^n}$ će konvergirati ako postoji N takav da za svaki $n \geq N$ vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{ln(2^{n+1} + c)}{2^{n+1}}}{\frac{ln(2^n + c)}{2^n}} \right| < 1$$

Računamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{ln(2^{n+1} + c)}{2^{n+1}}}{\frac{ln(2^n + c)}{2^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{ln(2^{n+1} + c)}{2ln2^n + c} \right| = \frac{1}{2} < 1$$

Dakle, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(2^n+c)}{2^n} < \infty$. □

Na temelju Petrogradskog paradoksa zaključio je da model s očekivanom vrijednosti nije mnogo koristan.

Okrećemo se teoriji očekivane korisnosti.

Definicija 2.2.1. *Pretpostavimo da postoji rastuća funkcija korisnosti $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja reprezentira korisnosti ishoda. Za prospekt $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ definiramo očekivanu korisnost prospekta $EU : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:*

$$EU(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j u(x_j)$$

gdje je $p_j = \mathbb{P}(E_j)$ za $j = 1, ..., n$.

Sada očekivana korisnost reprezentira preferencije donositelja odluke te, analogno kao kada imamo očekivanu vrijednost, najbolji prospekt odabiremo maksimizacijom očekivane korisnosti na skupu prospekata:

$$max_{x\in\mathcal{P}} EU(x)$$

U ovom modelu osim vjerojatnosti, funkcija korisnosti je također subjektivni parametar koji karakterizira donositelja odluke.

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ i prospekt x koristiti ćemo oznaku $\alpha_E x$ za prospekt koji donosi α ako se dogodi događaj E i donosi ishode od x ako se dogodi E^c. Na primjer, ako je $x = (E_1 : 10, E_2 : 12, E_3 : 8)$, tada je prospekt $15_{E_1}x$ dan sa $(E_1 : 15, E_2 : 12, E_3 : 8)$. Specijalan slučaj je $\alpha_E\beta$ kada je β konstantan prospekt. Za $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ i općeniti događaj E imamo $\alpha_E x = (E : \alpha, E_1 \setminus E : x_1, ..., E_n \setminus E : x_n)$ pa slijedi da je:

$$EU(\alpha_E x) = \mathbb{P}(E)u(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(x_j) \tag{2.19}$$

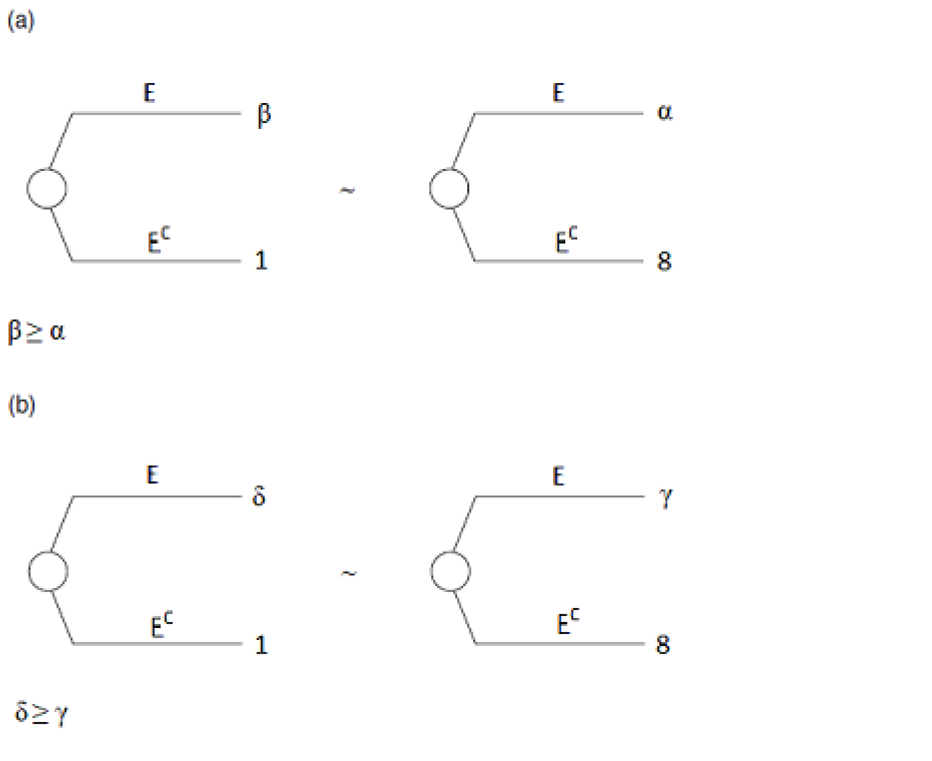
Događaj E je *nul događaj* ako $\alpha_E x \sim \beta_E x$ za sve prospekte x i ishode α i β različite od 0. *Ne-nul događaj* je događaj koji nije nul događaj. Ishodi nul događaja mogu se ignorirati za određivanje preferencija prospekta. Da bismo izbjegli trivijalnosti pretpostavljamo da postoje dva ne-nul događaja.

Neprekidnost relacije preferencije. Uvodimo svojstvo *neprekidnosti relacije preferencije*. Relacija preferencije je neprekidna ako za svaku particiju $(E_1, ...E_n)$ od S relacija preferencije zadovoljava obični Euklidov uvjet neprekidnosti:
Skupovi $\{(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \geq (y_1, ..., y_n)\}$ i $\{(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n)\}$ su zatvoreni neprazni podskupovi od $\mathbb{R}^n$ za svaki $(y_1, ..., y_n)$. Presjek tih dvaju skupova sadrži indiferentne skupove, $\{(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \geq (y_1, ..., y_n)\} \cap \{(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) \leq (y_1, ..., y_n)\} = \{(x_1, ..., x_n) : (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)\}$.

Promotrimo sliku 2.2. Neka je $\{E, E^C\}$ particija skupa stanja S. Promotrimo indiferencije $\beta_E 1 \sim \alpha_E 8$ i $\delta_E 1 \sim \gamma_E 8$. U obje indiferencije donje grane na slici pružaju argument u korist desnog prospekta jer donosi 8 umjesto 1, uvjetno na E^c. Za sada, $8 \leftarrow 1$ je jezična kratica od "primanje ishoda 8 umjesto 1". Gornje grane u oba prospekta pružaju argument u korist lijevog prospekta, tj. $\beta \leftarrow \alpha$ i $\delta \leftarrow \gamma$. U svakom slučaju indiferencije sugeriraju sljedeću interpretaciju: $\beta \leftarrow \alpha$ uvjetno na događaju E je izjednačeno s $8 \leftarrow 1$ uvjetno na E^c, te $\delta \leftarrow \gamma$ uvjetno na događaju E je izjednačeno s $8 \leftarrow 1$ uvjetno na E^c. Ovje dvije interpretacije zajedno sugeriraju da $\delta \leftarrow \gamma$ može činiti točno istu stvar kao i $\beta \leftarrow \alpha$, odnosno, $\beta \leftarrow \alpha$ je jednako dobro poboljšanje kao $\delta \leftarrow \gamma$. Pišemo: $\beta \leftarrow \alpha \sim^t \delta \leftarrow \gamma$. Sada možemo definirati t-indiferenciju.

Definicija 2.2.2. *Pišemo $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ kad god možemo naći prospekte x i y te nenul-događaj E tako da vrijede indiferencije $\alpha_E x \sim \beta_E y$ i $\gamma_E x \sim \delta_E y$. Relaciju $\sim^t$ zovemo t-indiferencija.*

Lema 2.2.3. *Relacija t-indiferencije zadovoljava prirodne uvjete simetrije, pa slijedi da je ekvivalentno: $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$, $\gamma \leftarrow \delta \sim^t \alpha \leftarrow \beta$, $\beta \leftarrow \alpha \sim^t \delta \leftarrow \gamma$ i $\delta \leftarrow \gamma \sim^t \beta \leftarrow \alpha$.*



Slika 2.2: t-indiferencije

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$. Tada po defniciji t-indiferencije postoje nenul-događaj E i prospekti x i y takvi da je $\alpha_E x \sim \beta_E y$ i $\gamma_E x \sim \delta_E y$. Tada, očito, vrijedi $\gamma_E x \sim \delta_E y$ i $\alpha_E x \sim \beta_E y$, što implicira $\gamma \leftarrow \delta \sim^t \alpha \leftarrow \beta$. Zbog simetričnosti od $\sim$ i $\alpha_E x \sim \beta_E y$ i $\gamma_E x \sim \delta_E y$, imamo $\beta_E y \sim \alpha_E x$ i $\delta_E y \sim \gamma_E x$, što nam daje $\beta \leftarrow \alpha \sim^t \delta \leftarrow \gamma$. Također, vrijedi $\delta_E y \sim \gamma_E x$ i $\beta_E y \sim \alpha_E x$, što implicira $\delta \leftarrow \gamma \sim^t \beta \leftarrow \alpha$. Pokazali smo da prva relacija implicira ostale tri relacije. Analogno se pokaže da svaka od preostalih relacija implicira ostale tri. □

Lema 2.2.4. *Ako EU reprezentira relaciju preferencije, tada vrijedi sljedeće:*

$$\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta \Rightarrow u(\alpha) - u(\beta) = u(\gamma) - u(\delta)$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$. Tada $\alpha_E x \sim \beta_E y$ i $\gamma_E x \sim \delta_E y$ za neke prospekte $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$, $y = (E_1 : y_1, ..., E_n : y_n)$ i nenul-događaj E. Tada zbog pretpostavke imamo $EU(\alpha_E x) = EU(\beta_E y)$ i $EU(\gamma_E x) = EU(\delta_E y)$, odnosno:

$$\mathbb{P}(E)u(\alpha) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(x_j) = \mathbb{P}(E)u(\beta) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(y_j) \tag{2.20}$$

$$\mathbb{P}(E)u(\gamma) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(x_j) = \mathbb{P}(E)u(\delta) + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(y_j) \tag{2.21}$$

Iz (2.20) imamo

$$\mathbb{P}(E)[u(\alpha) - u(\beta)] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(y_j) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(x_j) \tag{2.22}$$

i iz (2.21) imamo

$$\mathbb{P}(E)[u(\gamma) - u(\delta)] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(y_j) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j \setminus E)u(x_j) \tag{2.23}$$

Kako su desne strane jednake, slijedi da su i lijeve strane jednake, tj. $\mathbb{P}(E)[u(\alpha) - u(\beta)] = \mathbb{P}(E)[u(\gamma) - u(\delta)]$. E je nenul-događaj, odnosno $\mathbb{P}(E) > 0$, pa dijeljenjem s $\mathbb{P}(E)$ slijedi tvrdnja. □

Za općenite preferencije, koje ne moraju biti reprezentirane s EU, moguće je da istodobno vrijedi $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ i $\alpha' \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ za $\alpha' \neq \alpha$. Tada postoje prospekti x, y i nenul-događaj E takvi da $\alpha_E x \sim \beta_E y$ i $\gamma_E x \sim \delta_E y$, te postoje prospekti f, g i nenul-događaj F takvi da $\alpha'_F f \sim \beta_F g$ i $\gamma_F f \sim \delta_F f$. Ako se pojavi ovakav fenomen, to znači da postoje nedosljednosti. Uvodimo svojstvo konzistentnosti razmijene koji aludira na očuvanje preferencija.

Definicija 2.2.5. *Konzistentnost razmijene vrijedi ako poboljšanje ishoda u bilo kojoj t-indiferenciji narušava tu indiferenciju, tj.* $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ *i* $\alpha' \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ *implicira* $\alpha' = \alpha$.

Navodimo teorem koji daje bihejvioralne temelje za očekivanu korisnost pod neizvjesnosti.

Teorem 2.2.6. *Neka vrijedi Strukturna pretpostavka na stranici 5. Sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalente:*

(i) Očekivana korisnost reprezentira relaciju preferencije.

(ii) Preferencijska relacija, $\succeq$, zadovoljava slabi uređaj, monotonost, neprekidnost i konzistentnost razmijene.

Dokaz. Prvo dokazujemo $(i) \Rightarrow (ii)$.
Pretpostavimo da očekivana korisnost reprezentira relaciju preferencije. Neka je $x \succeq y$ i

$y \succeq z$ za neke prospekte x, y, z. Tada je $EU(x) \geq EU(y)$ i $EU(y) \geq EU(z)$ što nam daje $EU(x) \geq EU(z)$, odnosno $x \succeq z$, što dokazuje tranzitivnost relacije preferencije. Nadalje, neka su x i y neki prospekti. Tada je $EU(x) \geq EU(y)$ i/ili $EU(x) \leq EU(y)$, odnosno $x \succeq y$ i/ili $x \preceq y$, što dokazuje potpunost relacije preferencije. Dakle, $\succeq$ je slabi uređaj.
Sada ćemo pokazati monotonost. Neka su $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ i $y = (E_1 : y_1, ..., E_n : y_n)$ takvi da je $x(s) \geq y(s)$ za svako stanje $s \in S$. Tada je $x_j \geq y_j$ za svaki $j = 1, ..., n$. Kako funkcija korisnosti rastuća funkcija na skupu prospekata vrijedi $u(x_j) \geq u(y_j)$. Sada imamo

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(y_j)$$

odnosno $EU(x) \geq EU(y)$ što nam daje $x \succeq y$. Dakle, vrijedi slaba monotonost. Svojstvo jake monotonosti dokazujemo analogno.
Prospekte na skupu stanja S promatramo kao uređene n-torke realnih brojeva pa nam je topologija na skupu prospekata ekvivalent topologiji na skupu $\mathbb{R}^n$. Neprekidnost relacije preferencije slijedi direktno iz neprekidnosti funkcije korisnosti, tj. za svaki prospekt y skupovi

$$\begin{aligned} \{x : x \succeq y\} &= \{x : \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(x_j) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(y_j)\} \\ \{x : x \preceq y\} &= \{x : \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(E_j)u(y_j)\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

su neprazni zatvoreni podskupovi skupa prospekata. Za dokazati implikaciju $(i) \rightarrow (ii)$ još nam preostaje pokazati da vrijedi konzistentnost razmijene. Pretpostavimo da vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta \\ \alpha' \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta \end{aligned} \tag{2.25}$$

Tada zbog leme2.2.4 i $\alpha \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ slijedi da je

$$u(\alpha) - u(\beta) = u(\gamma) - u(\delta) \tag{2.26}$$

odnosno $u(\alpha) = u(\gamma) - u(\delta) + u(\beta)$ te iz iste leme i $\alpha' \leftarrow \beta \sim^t \gamma \leftarrow \delta$ slijedi da je

$$u(\alpha') - u(\beta) = u(\gamma) - u(\delta) \tag{2.27}$$

odnosno $u(\alpha') = u(\gamma) - u(\delta) + u(\beta)$. Stoga imamo $u(\alpha) = u(\alpha')$, što nam daje $\alpha' = \alpha$, tj. vrijedi konzistentnost razmijene. Time smo dokazali implikaciju $(i) \rightarrow (ii)$.
Sada pokazujemo $(ii) \Rightarrow (i)$.

Pretpostavimo da preferencijska relacija, $\geq$, zadovoljava slabi uređaj, monotonost, neprekidnost i konzistentnost razmijene.
Prvo pretpostavimo da su svi događaji nul događaji. Pokazati ćemo da se tada ishodi nul događaja mogu ingorirati za donošenje preferencija, tj. $x \sim y$ za sve x i y. Neka su $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ i $y = (E_1 : y_1, ..., E_n : y_n)$ neki prospekti. Pretpostavljamo suprotnu tvrdnju, odnosno da vrijedi $x \succ y$ ili $x \prec y$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $x \succ y$, tj.

$$(E_1 : x_1, ..., E_n : x_n) \succ (E_1 : y_1, ..., E_n : y_n)$$

Kako su svi događaji nul događaji, tada je i E_1 nul događaj pa po definiciji nul događaja vrijedi da je $(E_1 : x_1, ..., E_n : x_n) \sim (E_1 : y_1, ..., E_n : x_n)$. Dalje koristeći da su nul događaji redom $E_1, E_2, .., E_n$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
x \sim &(E_1 : x_1, E_2 : x_2, ..., E_n : x_n)\\
\sim &(E_1 : y_1, E_2 : x_2, ..., E_n : x_n)\\
\sim &(E_1 : y_1, E_2 : y_2, ..., E_n : x_n)\\
&\vdots\\
\sim &(E_1 : y_1, E_2 : y_2, ..., E_n : y_n) \sim y
\end{aligned} \tag{2.28}$$

što nam daje kontradikciju s pretpostavkom da je $x \succ y$. Dakle, $x \sim y$ za sve x i y. Funkcija korisnosti tada mora biti konstantna jer bi inače $u(x) > u(y) \Rightarrow x \succ y$. Tada brojevi p_j mogu biti izabrani potpuno proizvoljno takvi da su nenegativni i u sumi daju 1. Tvrdnja za ovaj slučaj je pokazana jer

$$\begin{aligned}
EU(x) &= \sum_{j=1}^{n} p_j u(x_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j u\\
EU(y) &= \sum_{j=1}^{n} p_j u(y_j) = \sum_{j=1}^{n} p_j u
\end{aligned} \tag{2.29}$$

implicira $EU(x) = EU(y)$ za sve x i y.

Sada promatramo slučaj kada postoji točno jedan nenul-događaj i neka je to događaj E_i za neki $i \in \{1, ..., n\}$. Iz prethodnog slučaja znamo da ako su svi E_j, $j \neq i$, nul događaji tada se ti događaji mogu ignorirati za donošenje preferencija i možemo definirati vrijednosnu funkciju V_j na sljedeći način:
Za sve prospekte x i y tada vrijedi $x_{E_j}\alpha \sim y_{E_j}\alpha$. Tada je $V_j(x) = V_j(y)$ za sve prospekte x i y jer V_j reprezentira preferencije pa tada vrijednosnu funkciju V_j definiramo kao konstantnu,

npr. $V_j = 0$.
Kako imamo jedan nenul-događaj E_i, tada iz

$$\alpha_{E_i}x \succ \beta_{E_i}x \Leftrightarrow V_i(\alpha) > V_i(\beta)$$

vidimo da V_i mora biti nekonstantna.
Dakle, sada postoji neprekidna aditivna funkcija $V : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definirana sa $V(x) = \sum_{j=1}^{n} V_j(x_j)$ koja reprezentira preferencije. Štagod će funkcija korisnosti u biti, postoji neprekidna strogo rastuća transformacija φ takva da je $u = \varphi \circ V_i$. Dakle, u neće biti konstantna. Stoga, za svaki $j \neq i$, $p_j u$ mora biti konstanta pa p_j mora biti 0. Slijedi $p_i = 1$. Osim toga, bilo koja strogo rastuća transformacija u od V_i zajedno s $p_i = 1$ i $p_j = 0$ za $j \neq i$ daje aditivnu reprezentaciju $x \longmapsto \sum_{j=1}^{n} p_j u(x_k)$ za $\succeq$. Dakle, u ovom slučaju (i) vrijedi.

Za kraj promatramo slučaj kada postoje dva ili više nenul-događaja. Tada postoji rastuća aditivna funkcija $V : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ definirana sa $V(x) = \sum_{j=1}^{n} V_j(x_j)$ koja reprezentira preferencije. (Ova tvrdnja slijedi iz teorema 5.0.1iz Dodatka na stranici 35) Pretpostavimo da je događaj E_i nenul. Definiramo za sva stanja j, $V_j = \varphi_j \circ V_i$, gdje je φ_j neprekidna neopadajuća transformacija i pokazujemo da je φ_j afina. Ako su svi E_j nul događaji, tada je V_j konstantna pa je φ_j afina. Ako je $j = i$, tada je φ_j identiteta pa je također afina. Neka je sada E_j nenul-događaj takav da je $j \neq i$. Neka je $V_i(\varsigma)$ neki proizvoljan element od $V_i(\mathcal{P})$. Tada postoji otvoreni interval I oko $V_i(\varsigma)$ dovoljno mali tako da za sve $V_i(\alpha)$, $V_i(\beta)$ u I postoje prospekti x, y takvi da je:

$$V_i(\alpha) - V_i(\beta) = \sum_{k \neq i} [V_k(y_k) - V_k(x_k)] \tag{2.30}$$

Kako je φ_j neprekidna, možemo uzeti I dovoljno mali tako da za sve $V_i(\alpha)$, $V_i(\beta)$ u I postoje prospekti v i w takvi da je:

$$\varphi_j(V_i(\alpha)) - \varphi_j(V_i(\beta)) = V_j(\alpha) - V_j(\beta) = \sum_{k \neq j} [V_k(w_k) - V_k(v_k)] \tag{2.31}$$

Pretpostavimo da su $V_i(\alpha)$, $V_i(\beta)$ i $V_i(\gamma)$ u I takvi da:

$$V_i(\gamma) - V_i(\beta) = V_i(\beta) - V_i(\alpha) \tag{2.32}$$

Pokazujemo da:

$$\varphi_j(V_i(\gamma)) - \varphi_j(V_i(\beta)) = \varphi_j(V_i(\beta)) - \varphi_j(V_i(\alpha)) \tag{2.33}$$

Uzmimo x i y kao u (2.30) i zaključimo iz (2.32) da nije samo $\alpha_{E_i}x \sim \beta_{E_i}y$, nego i $\beta_{E_i}x \sim \gamma_{E_i}y$. Stoga je:

$$\beta \leftarrow \gamma \sim^t \alpha \leftarrow \beta \tag{2.34}$$

Sada uzimamo v i w kao u (2.31) i dobivamo $\alpha_{E_j}v \sim \beta_{E_j}w$. Tada $\alpha_{E_j}v \succeq \beta_{E_j}w$ i $\alpha_{E_j}v \prec \beta_{E_j}w$ ne mogu vrijediti jer bi dobili $\beta \leftarrow \gamma \prec \alpha \leftarrow \beta$ na E_j, što zajedno s (2.34) daje kontradikciju konzistentnosti razmjene. Analogno pokazujemo da $\gamma_{E_j}v \prec \beta_{E_j}w$ ne može biti. Dakle, dobivamo $\gamma_{E_j}v \sim \beta_{E_j}w$. Supstitucija aditivne reprezentacije daje

$$\varphi_j(V_i(\beta)) - \varphi_j(V_i(\gamma)) = V_j(\beta) - V_j(\gamma) = \sum_{k \neq j}[V_k(w_k) - V_k(v_k)] \tag{2.35}$$

(2.35) i (2.31) impliciraju (2.33). Dakle, na I, φ_j zadovoljava $\varphi_j(\frac{\sigma+\tau}{2}) = \frac{\varphi_j(\sigma)+\varphi_j(\tau)}{2}$, tj. φ je afina.
Stoga, postoje nenegativni $(\sigma)_{j=1}^n$ i realni $(\tau)_{j=1}^n$ takvi da je $V_j = \tau_j + \sigma_j V_i$ za sve j. Dakle, $u = V_i$ i $p_j = \frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^n \sigma_k}$ za svaki j. Sada smo dobili aditivne vrijednosne funkcije $(p_j u)_{j=1}^n$ koje reprezentiraju relaciju preferencije. Tvrdnja (i) je pokazana. □

2.3 Kršenja očekivane korisnosti

Teorija očekivane korisnosti i danas je tema mnogih kritika o samom matematičkom modelu te rasprava s filozofsko-psihološkom pozadinom. Kritike o modelu uglavnom se odnose na primjenjivost modela u praksi. Svaki model ima ograničenja u primjeni, te donositelj odluke to treba prepoznati i iskoristiti model koji smatra da je primjeniv ili stvoriti novi. Navodimo Allaisov paradoks koji pokazuje kako ljudi u svojim odlukama ne koriste uvijek očekivanu korisnost, što će dovesti do razvoja novih modela odlučivanja.

Allaisov paradoks. Allais je proveo eksperiment gdje ispitanicima nudi dvije igre na izbor. U prvoj igri se nude opcije A i B, a u drugoj opcije C i D. Neka je M je oznaka za milijun, te neka su iznosi u eurima.
Prva igra:
Opcija A: Siguran dobitak od 1M.
Opcija B: Igra u kojoj ima 10% šanse za dobitak 5M, 89% šanse za dobitak 1M i 1% šanse za dobitak 0.
Druga igra:
Opcija C: Igra u kojoj ima 11% šanse za dobitak 1M, 89% šanse za dobitak 0.
Opcija D: Igra u kojoj ima 10% šanse za dobitak 5M, 90% šanse za dobitak 0.
Rezultati eksperimenta pokazuju da većina ispitanika instiktivno daje preferencije A $\succ$ B i

D>C iako teorija tvrdi:

$$\begin{aligned} A > B &\Leftrightarrow EU(A) > EU(B) \\ &\Leftrightarrow 1u(1) > 0.1u(5) + 0.89u(1) + 0.01u(0) \\ &\Leftrightarrow (1 - 0.89)u(1) > 0.1u(5) + (0.9 - 0.89)u(0) \\ &\Leftrightarrow 0.11u(1) + 0.89u(0) > 0.1u(5) + 0.9u(0) \\ &\Leftrightarrow EU(C) > EU(D) \Leftrightarrow C > D \end{aligned} \tag{2.36}$$

odnosno, A > B ⇔ C>D.

Rezultati ispitivanja nisu prijetnja teoriji korisnosti jer ona nije deskriptivna već samo daje ponašanje donositelja odluke kojem treba težiti. Jedino objašnjenje ovakvih rezultata je da 'vrijednost' nagrade ovisi i o iznosu te nagrade i o vjerojatnosti koja ju prati. Tako je nagrada od 1M percipirana na potpuno drugačiji način u opciji A gdje se dobiva s vjerojatnošću 100% nego u opciji C gdje se vjerojatnost istog dobitka 11%.

Novija istraživanja pokazuju da kada su ljudi motivirani i kada imaju priliku ponoviti izbor, njihov izbor teži onom koji sugerira teorija očekivane korisnosti. Dakle, iskustvo ljude čini racionalnijima. U Alliasovom eksperimentu ispitanici se nisu susretali s takvim eksperimentima te njihova odluka može biti zasnovana na krivoj interpretaciji i nerazumijevanju pojma vjerojatnosti. U sljedećim poglavljima okrenuti ćemo se alternativnim modelima očekivane korisnosti koji proširuju područje primjene i ponašanja koja očekivana korisnost nije mogla obuhvatiti.

Poglavlje 3

Korisnost ovisna o rangu

Korisnost se može uzeti kao ljestvica koja opisuje osjećaje generirane primanjem novca što je navelo Davida Schmeidlera da razvije korisnost ovisnu o rangu.

3.1 Korisnost ovisna o rangu za rizik

Da bismo lakše definirali korisnost ovisnu o rangu za neizvjesnost prvo ju promatramo na posebnom slučaju kada su nam poznate vjerojatnosti stanja svijeta.

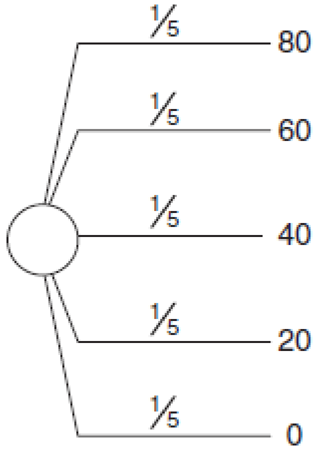
Definicija 3.1.1. *Za prospekt $x = (x_1 : E_1, ..., x_n : E_n)$ rang ishoda x_j, gdje je $j = 1, ..., n$, opisuje vjerojatnost da x donese ishod rangiran strogo bolje od x_j.*

Dakle, rangovi su vrijednosti od 0 do 1.

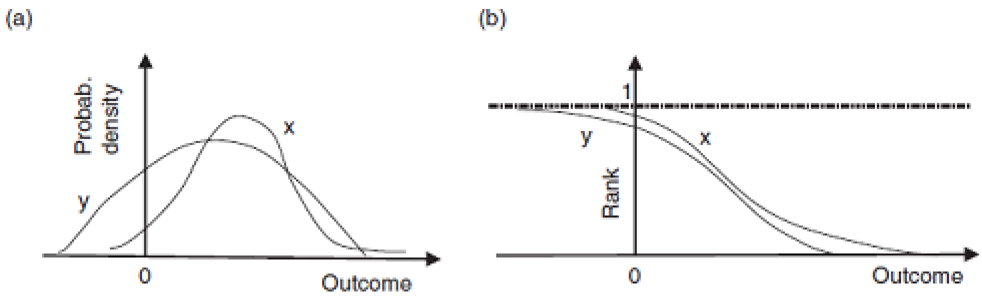
Za lakše razumijevanje promotrimo sliku 3.1. Na slici vidimo prospekt s pet ishoda rangirnih po veličini s jednakom vjerojatnošću. Vjerojatnost $\frac{3}{5}$ da ishod bude veći od 20 naziva se rang.

Slika 3.2 prikazuje kako rangiranje može biti korisno za procjenu prospekta, tj. kako je na slici (b) jasnija preferencija između prospekta x i y koji su rangirani za razliku od slike (a). Dakle, slika (b) opisuje iste prospekte kao slika (a), ali sada u ovisnosti o rangovima, tj. vjerojatnosti donošenja strogo boljeg ishoda.

Za sada se ograničavamo na postojanje jednog fiksnog prospekta $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ te pretpostavljamo da smo utvrdili potpuni rang njegovih ishoda. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ovaj rang odgovara indeksiranju, tj. $x_1 \geq .... \geq x_n$ gdje je $\mathbb{P}(E_j) = p_j$ za $j = 1, ..., n$. Dakle, za svaki j mi definiramo rang od x_j kao $p_{j-1} + ... + p_1$.



Slika 3.1: Prospekt s rangiranim ishodima



Slika 3.2: Korisnost rangiranja

To je vjerojatnost dobivanja ishoda koji je bolje rangiran. Pretpostavimo da postoji vjerojatnosna težinska funkcija $w : [0.1] \to [0, 1]$ koja je strogo rastuća i zadovoljava $w(0) = 0$ i $w(1) = 1$. Prije definicije korisnosti ovisne o rangu, definiramo *težinu odluke* ishoda x_j. Ona ovisi o dvijema vjerojatnostima a to su njegova vjerojatnost p_j te njegov rang $r_j = p_{j-1} + ... + p_1$. Općenito, rangirana vjerojatnost, označena p^r, je par p, r gdje je p vjerojatnost a r rang takvi da je $p \geq 0, r \geq 0$ i $p + r \leq 1$. Označavamo težinu odluke s $\pi(p^r)$ te ju definiramo sa: $\pi(p^r) = w(p + r) - w(r)$. Dakle, težina odluke je razlika težina dva ranga, ranga r i ranga $r + p$ sljedećeg rangiranog boljeg ishoda. Težina odluke je marginalni w-doprinos vjerotnosti ishoda na rang.

Definicija 3.1.2. *Pretpostavimo da postoji neprekidna strogo rastuća funkcija korisnosti*

$u : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ i vjerojatnosna težinska funkcija w. Neka je $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ prospekt s potpunim rangom $x_1 \geq .... \geq x_n$ gdje je $\mathbb{P}(E_j) = p_j$ za $j = 1, ..., n$. Tada definiramo korisnost ovisnu o rangu kao funkciju $RDU : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:

$$\begin{aligned} RDU(x) &= \sum_{j=1}^{n} \pi_j u(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi(p_j^{p_{j-1}+...+p_1}) u(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} [w(p_j + ... + p_1) - w(p_{j-1} + ... + p_1)] u(x_j) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Očekivana korisnost je specijalan slučaj korisnosti ovisne o rangu kada je w identiteta.

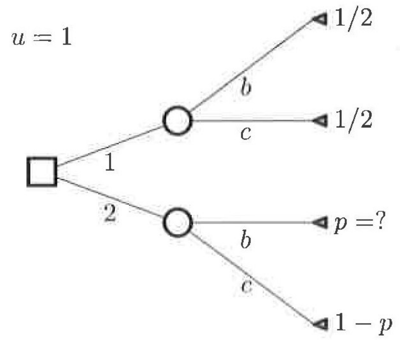
3.2 Ellsbergov paradoks

Ellsberg navodi eksperiment koji upućuje na to da se svaka neizvjesnost ne može prikazati pomoću vjerojatnosti.

Eksperiment s dvije urne. Pretpostavljamo da su nam dane dvije urne u kojima se nalazi po 100 loptica. Prva urna sadrži 50 bijelih i 50 crnih loptica, a u drugoj se nalaze bijele i crne loptice u nepoznatom omjeru. Ispitanik prvo izražava želju hoće li lopticu izvlačiti iz prve ili iz druge urne, a nakon toga se može kladiti na bijelu lopticu ili na crnu lopticu. U oba slučaja ispitanik osvaja 100kn ako pogodi boju i 0kn ako ne pogodi. Sve moguće posljedice izvlačenja su $S = \{b_1, b_2, c_1, c_2\}$ gdje je b_1 oznaka za izvučenu bijelu lopticu iz prve urne, b_2 za izvučenu bijelu lopticu iz druge urne i isto tako za crnu lopticu. Zadatak ispitanika je da uspostave relaciju preferencije među spomenutim okladama.

Eksperiment pokazuje da su, zasebno za svaku urnu, ispitanici indiferentni između bijele i crne loptice, odnosno, svejedno im je hoće li se kladiti na bijelu ili crnu lopticu. Ali, ako uspoređuju bijelu okladu na prvoj i bijelu okladu na drugoj urni, onda preferencije daju okladi na prvoj urni. Analogno i za crnu okladu. Dakle, ljudi preferiraju okladu s poznatim vjerojatnostima nasuprot okladi s nepoznatim vjerojatnostima. Ovakva averzija prema "nepoznatom" riziku dovodi do zaključka da je subjektivna vjerojatnost izbora bijele loptice iz prve urne veća od subjektivne vjerojatnosti izbora bijele loptice iz druge urne. Dakle, $0.5 = \mathbb{P}(b_1) > \mathbb{P}(b_2)$. Isto vrijedi i za crnu lopticu $0.5 = \mathbb{P}(c_1) > \mathbb{P}(c_2)$. Ovo nas navodi na apsurdan zaključak da je suma vjerojatnosti izbora bijele ili crne loptice iz druge urne manja od jedan: $1 > \mathbb{P}(b_2) + \mathbb{P}(c_2)$.

Računanje korisnosti također dovodi do kontradikcije s teorijom očekivane korisnosti. U stablu na slici 3.2 svaki put od korijena do terminalnog čvora predstavlja jedan od



Slika 3.3: Ellsbergov paradoks

mogućih ishoda eksperimenta te ih možemo identificirati s okladama. Prvi korak je izbor urne, a drugi korak je izbor boje. Nema razloga da korisnosti ishoda budu različite, pa neka je korisnost $u = 1$. Međutim, klađenju na boju iz prve urne dana je prednost u odnosu na klađenje na boju iz druge urne, tj.:

$$(\frac{1}{2} : b_1, \frac{1}{2} : c_1) \succ (p : b_2, (1-p) : c_2)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u > pu + (1-p)u \Leftrightarrow 1 > 1$$

bez obzira na p. Ovaj eksperiment također pokazuje da ljudi u svojim preferencijama ne poštuju aksiom nezavisnosti koji kaže da preferencije među prospektima x i y ovise samo o događajima na kojima se razlikuju.

3.3 Korisnost ovisna o rangu za neizvjesnost

Glavni fenomen koji neizvjesnost čini bogatijom od rizika je zavisnost o podrijetlu. Termin zavisnosti odnosi se na mehanizam koji generira neizvjesnost. Ellsbergov paradoks je pokazao prvi dobro poznati primjer ovog fenomena, s različitim podrtijelom generiranim različitim urnama iz kojih se izvlače loptice. Dakle, donositelj odluke doživljava različito izvore neizvjesnosti. Koristeći korisnost ovisnu o rangu ovaj fenomen može biti modeliran. Sada možemo proširiti korisnost ovisnu o rangu s rizika na neizvjesnost.

U prvom modelu ovog poglavlja pretpostavimo korisnost ovisnu o rangu s vjerojatnosnom sofisticiranosti: postoji vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na S, vjerojatnosna težinska funkcija w

i funkcija korisnosti u takva da maksimiziramo RDU kao u definiciji 3.1.2. Ovaj model je jedan korak složeniji od korisnosti ovisne o rangu za rizik jer vjerojatnosti mogu biti subjektivne. Neizvjesnost je bogatija i mnogo kompleksinja nego model koji je upravo opisan, što nam ilustrira Ellsbergov paradoks. Stoga ćemo morati razviti mnogo fundamentalnijih generalizacija modela od onih koje koristimo za rizik.

Za gereralizaciju modela, napustit ćemo vjerojatnosnu sofisticiranost i definirati korisnost ovisnu o rangu bez nje. Međutim, prvo ćemo ju razmotriti s vjerojatnosnom sofisticiranosti. Neka je dan prospekt $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$. Vjerojatnosna mjera je označena s $\mathbb{P}$ tako da je $\mathbb{P}(E_j) = p_j$ za $j = 1, ..., n$ i vjerojatnosna težinska funkcija je označena s w. Pretpostavimo potpuni rang, tj. $x1 \geq .... \geq xn$. Težina ishoda x_j je $\pi(p_j^{p_{j-1}+...+p_1}) = w(p_j + p_{j-1} + ... + p_1) - w(p_{j-1} + ... + p_1)$ gdje je E_j događaj pod vjerojatnosti p_j i $E_{j-1} \cup ... \cup E_1$ događaj pod vjerojatnosti $p_{j-1} + ... + p_1$. Tako, za ishod α prospekta $\alpha_E x$ s vjerojatnosti p i rangom r, događaj E ima vjerojatnost $\mathbb{P}(E) = p$ i, osim toga, događaj R pod rangom r je disjunktan od E.

Definiramo funkciju W na dogđaju E kao kompoziciju funkcija w i $\mathbb{P}$, t.j

$$W(E) = w(\mathbb{P}(E))$$

Težina odluke pod korisnošću ovisnom o rangu je

$$\pi(p^r) = w(\mathbb{P}(E \cup R)) - w(\mathbb{P}(R)) = W(E \cup R) - W(R)$$

Kako w može biti nelinearna, W ne mora biti aditivna i može biti $W(A \cup B) \neq W(A) + W(B)$ gdje $A \cap B = \emptyset$. Iako W ne mora biti aditivna s vjerojatnosti dijeli neka svojstva: $W(\emptyset) = 0$, $W(S) = 1$ i ako $A \subset B$, tada $W(A) \leq W(B)$. Funkciju W koja preslikava događaje u $[0, 1]$ i zadovoljava navedena svojstva zovemo težinska funkcija događaja. Sada izbacujemo pretpostavku vjerojatnosne sofisticiranosti. Korisnost ovisna o rangu proširena je na neizvjesnost bez vjerojatnosti za događaje, ali nameće navedena svojstva za težinsku funkciju događaja W ako nije moguća dekompozicija $W(\cdot) = w(\mathbb{P}(\cdot))$.

Pojam težinska funkcija događaja razlikuje W od vjetojanosno težinske funkcije w. U daljnjem tekstu za težinsku funkciju događaja koristit ćemo samo pojam težinska funkcija. Podskup težinskih funkcija W za koji dekompozicija $W(\cdot) = w(\mathbb{P}(\cdot))$ postoji tako da vjerojatnosna sofisticiranost vrijedi je mali podskup skupa svih težinskih funkcija. Postojanje takvih $\mathbb{P}$ i w je stoga izuzetak i kršenje vjerojatnosne sofisticiranosti će prevladavati.

Za prospekt $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ pretpostavimo da su ishodi potpuno rangirani, tj. $x_1 \geq .... \geq x_n$ i tada definiramo rang za svaki ishod kao događaj primanja ishoda rangiranog strogo bolje. $E_{j-1} \cup ... \cup E_1$ je rang od x_j i E_j. Općenito, za događaj E i njegov rang R, E^R je rangirani događaj ($E \cap R = \emptyset$). Za težinsku funkciju W i rangirani događaj E^R težina odluke $\pi(E^R)$ je definirana kao $W(E \cup R) - W(R)$. Gore spomenuti ishod x_j ima težinu odluke $W(E_j \cup ... \cup E_1) - W(E_{j-1} \cup ... \cup E_1)$.

Možemo definirati korisnost ovisnu o rangu za neizvjesnost.

Definicija 3.3.1. *Pretpostavimo da postoji neprekidna strogo rastuća funkcija korisnosti $u : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ i težinska funkcija W. Neka je $x = (E_1 : x_1, ..., E_n : x_n)$ prospekt s potpunim rangom $x1 \geq .... \geq xn$. Tada definiramo korisnost ovisnu o rangu kao funkciju $RDU : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:*

$$\begin{aligned} RDU(x) &= \sum_{j=1}^{n} \pi_j u(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \pi(E_j^{E_{j-1}+...+E_1}) u(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} [w(E_j + ... + E_1) - w(E_{j-1} + ... + E_1)] u(x_j) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sada su funkcija korisnosti u i težinska funkcija W subjektivni parametri koji karakteriziraju donositelja odluke. Ako nema zabune ponekad pišemo π_j ili $\pi(E_j)$ ili $\pi(x_j)$ rađe nego $\pi(E_j^{R_j})$ i to zovemo težina odluke događaja E_j ili ishoda x_j. Težina odluke ishoda x_j je marginalni W-udio od događaja E_j i ranga $E_{j-1} \cup ... \cup E_1$. Ishod α je rangiran bolje ako je njegov rang R mali. Najmanji rang je najbolji rang, dok je najveći rang je najlošji rang.

Uvodimo svojstvo rangirane konzistencije razmijene.

Za ishode α, β, γ i δ pišemo $\alpha \leftarrow \beta \sim^{rt} \gamma \leftarrow \delta$ kad god možemo naći prospekte x i y te nenul rangirani događaj E^R tako da vrijede indiferencije $\alpha_{E^R} x \sim \beta_{E^R} y$ i $\gamma_{E^R} x \sim \delta_{E^R} y$.

Definicija 3.3.2. *Rangirana konzistencija razmijene vrijedi ako poboljšanje ishoda u bilo kojoj $\sim^{rt}$ relaciji krši tu relaciju. Odnosno $\alpha \leftarrow \beta \sim^{rt} \gamma \leftarrow \delta$ i $\alpha' \leftarrow \beta \sim^{rt} \gamma \leftarrow \delta \Rightarrow \alpha' = \alpha$.*

Sada možemo navesti teorem bihejvioralnih uvjeta za korisnost ovisnu o rangu pod neizvjesnosti.

Teorem 3.3.3. *Neka vrijedi Strukturna pretpostavka na stranici 5. Sljedeće dvije tvrdnje su ekvivalente:*

(i) Korisnost ovisna o rangu reprezentira relaciju preferencije.

(ii) Preferencijska relacija, $\succeq$, zadovoljava slabi uređaj, monotonost, neprekidnost i rangiranu konzistentnost razmijene.

Dokaz ovog teorema sličan je dokazu teorema 2.2.6 pa ga nećemo navoditi u ovom radu.

Poglavlje 4

Prospektna teorija

Prospektna teorija generalizira korisnost ovisnu o rangu dodavanjem referentne ovisnosti sa stavovima rizika za gubitke različitim od onih za dobitke. Značajnost referentne točke proizlazi iz karakteristike da ljudi osjećaju averziju prema riziku u slučajevima kada ostvaruju dobit u odnosu na referentnu točku te da osjećaju sklonost prema riziku u slučajevima kada ostvaruju gubitak. U sljedećem potpoglavlju vidjeti ćemo eksperiment koji pokazuje sklonost donositelja odluke prema dobitku i nesklonost prema gubitku.

Prospektna teorija Kahnemana i Tverskog deskriptivna je po svojoj prirodi, a razlikuje se od teorije korisnosti u dva aspekta. Prva je taj da korisnost bogastva, ako ga gledamo u vremenu, ovisi o trenutačnom bogastvu i promjeni (dobitak/gubitak). Averzija prema gubitku ima za posljedicu da je korisnost konkavna za dobitke i konveksna za gubitke. Drugi aspekt je taj da donositelj odluke iskrivljeno percepira male vjerojatnosti (nemogući događaji) i velike vjerojatnosti (sigurni događaji). Korisnost ovisna o rangu objašnjava samo drugi aspekt, dok gubitak, kao takav za nju ne postoji.

4.1 Asimetrija korisnosti i deformacija vjerojatnosti

Tversky i Kahneman su nizom eksperimenata promatrali utjecaj oblikovanja problema na čovjekovo odlučivanje. Jedan od prvih eksperimenata bio je odabir strategije rješavanja zaraze globalnih razmjera uzrokovanih nepoznatim virusom za koju se smatra da će pokositi 600 ljudi. U pozitivno oblikovanom pitanju nudi se odabir strategije (a), u kojoj će se sigurno spasiti 200 ljudi, nasuprot strategiji (b), u kojoj postoji vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da će 600 ljudi preživjeti. U negativno oblikovanom pitanju nudi se strategija (c), u kojoj će 400 ljudi umrijeti, nasuprot strategiji (d), u kojoj postoji vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da nitko neće umrijeti. U prvom problemu ispitanici su dali prednost strategiji (a), iako je korisnost slučajne strategije (b) jednaka ekvivalentu sigurnosti ($\frac{1}{3} \cdot 600 = 200$), a u drugom problemu su dali prednost slučajnoj strategiji (d), iako je korisnost te slučajene strategije jednaka ekvivalentu sigurnosti ($\frac{2}{3} \cdot 600 = 400$). Rezultati takvih testitiranja su doveli Tverskog i Kahnemana do zaključka da je gubitak jače poražavajući nego što je ekvivalentni dobitak ugodan. Kod pozitivno oblikovanog rizika ljudi izbjegavaju rizik, ali su skloni negativno oblikovanom riziku.

Gliboa smatra da je asimetrija između gubitka i dobitka najvažnija ideja u prospektnoj teoriji. Navodimo primjer.

Problem 1. Dajem vam 1000 kn i nudim sljedeće opcije na izbor:
Opcija A Siguran dobitak od 500 kn.
Opcija B Dobitak od 1000 kn s vjerojatnosti 50% ili 0 kn s vjerojatnosti 50%.
Koju opciju preferirate?

Problem 2. Dajem vam 2000 kn i nudim sljedeće opcije na izbor:
Opcija A Siguran gubitak od 500 kn.
Opcija B Gubitak od 1000 kn s vjerojatnosti 50% ili 0 kn s vjerojatnosti 50%.
Koju opciju preferirate?

Mnogi odabiru opciju A u prvom problemu i opciju D u drugom problemu. Ovaj primjer naglašava efekt oblikovanja. Ako analiziramo oba problema, vidimo da u konačnosti nude isti ishod samo različito prikazan, u jednom slučaju kao dobitak a u drugom kao gubitak.Javlja se asimetrija funkcije korisnosti. Tversky i Kahneman predložili su sljedeću funkciju korisnosti:

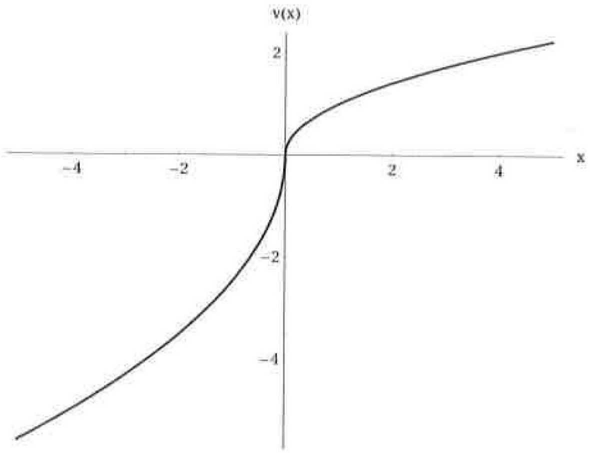
$$\upsilon(x) = \begin{cases} x^{\gamma} & : x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^{\theta} & : x < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

gdje su γ, λ, θ konstante. Eksponenti zadovoljavaju uvjete $0 < \gamma, \theta < 1$ i $\lambda > 1$. Konstantu λ nazivamo koeficijent averzije prema gubitku. Oni su procijenili $\gamma \simeq \theta \simeq 0.88$ i $\lambda \simeq 2.25$. Na slici 4.1 je dana asimetrija funkcije korisnosti za $\gamma = \theta = 0.5$ i $\lambda = 2.5$.

Eksperimentalne činjenice su da ljudi različito doživljavaju vjerojatnosti: precjenjuju male kao što je dobivanje na lotu ili avionske nesreće i podcjenjuju velike vjerojatnosti kao što je ta da pušenjem neće naštetiti zdravlju, te ignoriraju događaje vrlo male vjerojatnosti a događaje vrlo velike vjerojatnosti tretiraju kao sigurne. To dovodi do druge važne ideje u teoriji izglednosti, a to je deformacija vjerojatnosti. Ljudi reagiraju na vjerojatnost p kao da je to $f(p)$ za neku funkciju $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dakle, očekivanu korisnost $\sum_{j=1}^{n} p_j u(x_j)$ mijenjamo sa $\sum_{j=1}^{n} f(p_j)u(x_j)$. Jedna od takvih funkcija je Prelecova funkcija

$$f(p) = exp(-\beta(-lnp)^{\alpha}) \tag{4.2}$$

gdje je $0 \leq p \leq 1$, $\alpha > 0$ i$\beta > 0$. Graf joj je dan na slici 4.2 za vrijednosti $\beta = 1$ i $\alpha = 1.5$ crvenom linijom i za vrijednosti $\alpha = 0.66$ plavom linijom. Tversky i Kahneman

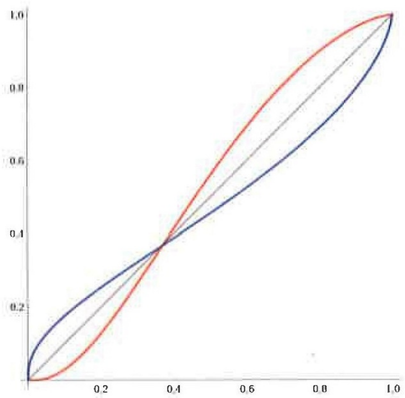


Slika 4.1: Asimetrija funkcije korisnosti

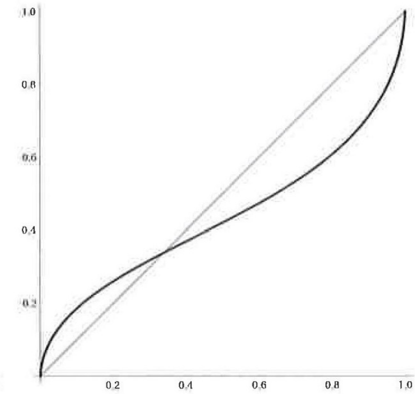
su predložili funkciju

$$f(p) = \frac{p^\gamma}{[p^\gamma + (1-p)^\gamma]^{1/\gamma}} \tag{4.3}$$

gdje je $0.5 \le \gamma < 1$. Svojstvo ove funkcije je da beskonačno precjenjuje male vjerojatnosti i beskonačno podcjenjuje velike vjerojatnosti. Isto vrijedi i za Prelecovu funkciju za $\alpha < 1$. Na slici 4.3 je prikazana Tversky-Kahnemanova deformacija vjerojatnosti za $\gamma = 0.61$.



Slika 4.2: Prelecova funkcija



Slika 4.3: Tversky-Kahneman

4.2 Editiranje prospekta

Kahneman i Tversky u originalno formulaciji prospektne teorije sugeriraju da donostielj odluke editira prospekt i revidira ga na svoj način prije njegove evaluacije. Promatrajmo prospekt oblika $(p_1 : x_1, p_2 : x_2, p_3 : x_3, p_4 : x_4)$ koji označava da se ishod x_j događa s vjerojatnosti p_j. Donositelj odluke radi transformacije sljedećeg oblika:

- **Kombinacija:** pojednostavljivanje prospekta u kojem se kombiniraju isti ishodi. Npr. prospekt (0.2 : \$10, 0.2 : \$10) se na prirodan način reprezentira kao (0.4 : \$10).
- **Odvajanje:** odvajanje sigurnih ishoda iz prospekta. Npr. prospekt (0.5 : \$10, 0.5 : \$30) na prirodan način se reprezentira kao \$10 za sigurno i (0.5 : \$20).
- **Kraćenje:** donositelj odluke nastoji kratiti komponente ponude koje su zajedničke. Npr. izbor između prospekata (0.2 : \$10, 0.2 : \$30) i (0.2 : \$10, 0.5 : \$20) biti će prezentiran kao izbor između prospekata (0.2 : \$30) i (0.5 : \$20).
- **Zaokruživanje:** donositelj odluke ima tendenciju da zaokružuje neujednačene brojeve. Npr. donositelj odluke će prospekt (0.51 : \$99, 0.001 : \$5) će revidirati u prospekt (0.5 : \$100).
- **Dominacija:** donositelj odluke nastoji izbaciti opcije koje su dominirane nekom drugom opcijom. Npr. u izboru između prospekata (0.9 : \$50) i (0.3 : \$10, 0.5 : \$20, 0.1 : \$15) mnogi će odbaciti drugu opciju jer dobivanje \$50 s vjerojatnošću 90% je bolje od dobivanja \$20 s vjerojatnošću 30%, dobivanja \$20 s vjerojatnošću 50% i dobivanja \$15 s vjerojatnošću 10%.

4.3 Matematički model prospektne teorije

U ovom potpoglavlju proširiti ćemo model korisnosti ovisne o rangu na prospektnu teoriju. Znamo da ovaj model pokazuje različita svojstva za dobitke i gubitke. Fiksiramo ishod 0 kao referentni ishod koji omogućuje različite težine za dobitke od onih za gubitke. Dakle, pozitivni ishodi su dobitci, a negativni gubitci.

U prospektnoj teoriji za rizik sada postoje dvije vjerojatnosno težinske funkcije w^+ za dobitke i w^- za gubitke koje karakteriziraju donositelja odluke koje pokazuju slična svojstva. Promatramo prospekt $(E_1 : x_1, ..., E_n, x_n)$ gdje je $p_j = \mathbb{P}(E_j)$ za $j = 1, ..., n$. Pretpostavljamo potpuni rang:

$$x_1 \geq ... \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq ... \geq x_n \tag{4.4}$$

Definicija 4.3.1. *Pretpostavimo da postoji strogo rastuća funkcija korisnosti* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $u(0) = 0$*, te neka postoje dvije vjerojatnosno težinske funkcije* w^+ *za dobitke i* w^- *za gubitke. Neka je* $(E_1 : x_1, ..., E_n, x_n)$ *koji je potpuno rangiran* $x_1 \geq ... \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq ... \geq x_n$ *i neka su* $p_j = \mathbb{P}(E_j)$ *za* $j = 1, ..., n$*. Sada definiramo funckiju* $PT : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *sa:*

$$\begin{aligned} PT(x) = &\sum_{j=1}^{k} [w^+(p_j + ... + p_1) - w^+(p_{j-1} + ... + p_1)]u(x_j) \\ &+ \sum_{j=k+1}^{n} [w^-(p_j + ... + p_n) - w^-(p_{j+1} + ... + p_n)]u(x_j) \end{aligned} \tag{4.5}$$

U ovom modelu donositelj odluke maksimizira funkciju PT na skupu prospekata, tj.

$$max_{x \in \mathcal{P}} PT(x)$$

Funkcija korisnosti i vjerojatnosno težinske funkcije su subjektivni parametri koji karakteriziraju donositelja odluke.

U prospektnoj teoriji za neizvjesnost nepoznate su nam vjerojatnosti te tu pretpostavljamo da postoje dvije težinske funckije W^+ za dobitke i W^- za gubitke koje karakteriziraju donositelja odluke koje pokazuju slična svojstva. Za neizvjesnost definiramo:

Definicija 4.3.2. *Pretpostavimo da postoji strogo rastuća funkcija korisnosti* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takva da je* $u(0) = 0$*, te neka postoje dvije težinske funkcije* W^+ *za dobitke i* W^- *za gubitke. Neka je* $(E_1 : x_1, ..., E_n, x_n)$ *koji je potpuno rangiran* $x_1 \geq ... \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq ... \geq x_n$*.*

Sada definiramo funckiju $PT : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ sa:

$$\begin{aligned} PT(x) = &\sum_{j=1}^{k}[W^+(E_j \cup ... \cup E_1) - W^+(E_{j-1} \cup ... \cup E_1)]u(x_j) \\ &+ \sum_{j=k+1}^{n}[W^-(E_j \cup ... \cup E_n) - W^-(E_{j+1} \cup ... \cup E_n)]u(x_j) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Donositelj odluke maksimizira funkciju PT na skupu prospekata, tj.

$$max_{x \in \mathcal{P}} PT(x)$$

Funkcija korisnosti i težinske funkcije su subjektivni parametri koji karakteriziraju donositelja odluke.

Poglavlje 5

Dodatak

Teorem 5.0.1. *Neka vrijedi strukturna pretpostavka na stranici 5. Za binarnu relaciju preferencije $\succeq$ ekvivalentno je:*

(i) Postoji neprekidna aditivna reprezentacija relacije preferencije $\succeq$.

(ii) Preferencijska relacija $\succeq$ je neprekidna, slabi uređaj i zadovoljava konzistentnost razmijene.

Dokaz ove tvrdnje slijedi iz teorema III.6.6 čiji je dokaz dan u literaturi 3.

Bibliografija

[1] Wakker, P. P.: *Prospect theory for risk and ambiguity*, Cambridge University Press (2010)

[2] Čaklović, L.: *Teorija vrednovanja s naglaskom na metodu potencijala*, Naklada Slap (2014)

[3] Wakker, P. P.: *Additive representations of preferences: a new foundation of decision analysis*, Springer-science+business media (1989)

[4] Köbberling, V., Wakker, P. P.: *Preference foundations for nonexpected utility: A generalized and simplified technique*, Mathematics of Operations Research, Vol.28, No.3 (2003)

[5] Brajković, A., Radman Peša, A.: *Bihevioralne financije i teorija Crnog labuda*, Oeconomica Jadertina, No.1 (2015)

[6] Wakker, P. P.: *Bihevioralna ekonomija, neuroekonomija, neuromarketing*, JAHR, Vol.5, No.9 (2014)

Sažetak

Ukratko ovaj rad predstavlja matematičke modele donošenja odluka pod neizvjesnošću potkrijepljene bihejviorističkim pristupom. Bihejvioralni temelji daju značenje kvantitativnih modela odlučivanja i njihovih subjektivnih parametara. Drugim riječima, daju unutarnju čvrstoću matematičkom modelu.

U radu smo naveli razvoj donošenja odluka od očekivne korisnosti pa do prospektne teorije koja obuhvaća najviše karakteristika ljudskog ponašanja te je stoga primjenjivija u praksi. Teorija očekivane korisnosti razvila se nakon teorije očekivane vrijednosti kada je otkivena nemogućnost same definicije očekivane vrijednosti (nekvantitativni modeli) i nerazumno maksimiziranje modela velikih vrijednosti. Nakon pojave korisnosti ishoda i razvoja teorije očekivane korisnosti eksperimentima su utvrđena kršenja u kojima je pokazano da ljudi prilikom donošenja odluka uvijek ne maksimiziraju očekivanu korisnost. Zbog takvih kršenja razvijaju se alternativni modeli kao što su korisnost ovisna o rangu i prospektna teorija koje objašnjavaju načine donošenja odluka u takvim situacijama.

Međutim, rad na području bihejviorističkih temelja u odlučivanju te bihejviorističkih financija je tek započeo, te mnoge nedoumice u donošenju odluka se još uvijek istražuju.

Summary

This paper represents the mathematical models of making decisions under uncertainty and supported by behavior foundations. Behavioral foundations give meaning to quantitative decision models and their subjective parameters. In the other words, they are giving an internal strength to the mathematical model.

In this paper, we have suggested the development of decision-making from the expected utility to a prospect theory that embraces the greatest significance of human behavior and therefore is more applicable in practice. The theory of expected utility was developed after the theory of expected values, when the impossibility to define the expected values (non-quantitative models) and unreasonable maximizing models with large values were discovered. After the utility of the outcomes has appeared and the theory of expected utility was developed, experiments have shown violations in which it is shown that people do not maximize their expected utility when making decisions. Consequently, alternative models, such as rank-dependent utility and prospect theory that explain ways of making decisions in such situations, are being developed.

However, the field of behavioral foundations in decision-making and behavioral theory of finance is in its start so there are more doubts that are still being investigated.

Životopis

Rođena sam 14. ožujka 1993. godine u Splitu. Osnovnu školu pohađala sam u Lovreću, te upisala i završila prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Imotskom. Već tijekom osnovnoškolskog obrazovanja pokazivala sam interes prema matematici koji je utjecao na smjer mog daljnjeg obrazovanja. Nakon srednje škole, 2011. godine, upisala sam matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, te 2014. godine završila preddiplomski studij matematike, nastavnički smjer. Kroz studij počela sam razvijati interes za primjenu matematike u financijskom svijetu, te iste godine upisala sam diplomski studij financijske i poslovne matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Smatram da ovim radom, koji obilježava završetak mog akademskog obrazovanja, obrazovanje neće završiti, već će se nastaviti u smjeru primjena i nadopune znanja stečenih formalnim akadamskim obrazovanjem.