Računanje vrijednosti opcija pomoću metode konačnih elemenata

Maceković, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:008029

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Kristina Maceković

RAČUNANJE VRIJEDNOSTI OPCIJA POMOĆU METODE KONAČNIH ELEMENATA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc. dr. sc. Tina Bosner

Zagreb, travanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Posvećujem ovaj rad svojim roditeljima. Hvala vam na nepresušnoj ljubavi, strpljenju i potpori.
Zahvaljujem mentorici na pomoći i strpljenju.

Sadržaj

Sadržaj **iv**

Uvod **1**

1 Opcije **2**
1.1 Osnovni pojmovi 2
1.2 Funkcija isplate 3
1.3 A priori ograde 6
1.4 Ovisnosti opcije o tržišnim parametrima 8
1.5 Geometrija opcija 8
1.6 Krivulja ranog izvršenja 10
1.7 Model financijskog tržišta 13

2 Metode konačnih elemenata **16**
2.1 Težinski reziduali 17
2.2 Princip težinskih reziduala 19
2.3 Primjeri ψ_j 21
2.4 Primjeri baznih funkcija φ_i 22
2.5 Galerkin metoda sa "krović" funkcijama 23

3 Primjena na standardne opcije **30**

4 Problem prepreke **33**
4.1 Problem prepreke 33
4.2 Linearna komplementarnost za američke put opcije 34
4.3 Računanje vrijednosti američkih opcija 36
4.4 Varijacijska forma problema prepreke 37
4.5 Američke opcije 38
4.6 Analiza problema linearne komplementarnosti 42
4.7 Algoritam za računanje američkih opcija 44

5 Primjena na egzotičnu call opciju **48**

6 Procjene grešaka **51**
6.1 Jaka i slaba rješenja 51
6.2 Aproksimacija na konačnodimenzionalnim potprostorima 53
6.3 Céa-ina lema 54

7 Numerički rezultati **58**

A SOR (Successive Overrelaxation) metoda **83**

B MATLAB kod **86**
B.1 Pomoćna funkcija za call opcije: 86
B.2 Pomoćna funkcija za put opcije: 86
B.3 Glavni kod za put opcije: 87
B.4 Glavni kod za call opcije: 90

Bibliografija **95**

Uvod

Ovaj rad se bavi određivanjem vrijednosti europskih i američkih call i put opcija uz kratki pregled istoga za egzotične opcije. Ključno sučelje za rješavanje ovog problema čini Black–Scholes–Merton-ov model tržišta koji povezuje cijenu imovine na koju se opcija odnosi i cijenu same opcije. Centralni dio modela je Black–Scholes-ova parcijalna diferencijalna (ne)jednadžba čijim rješavanjem dobivamo vrijednost opcije. Za rješavanje problema koristimo se numeričkim metodama, točnije metodama konačnih elemenata. U prvom poglavlju su opisani osnovni pojmovi vezani uz opcije te je predstavljen problem i model kojim ga modeliramo. U drugom poglavlju su razrađene metode konačnih elemenata, dok je u trećem poglavlju dana primjena na standardne opcije. U četvrtom poglavlju se upoznajemo sa problemom prepreke te ga zatim koristimo za računanje vrijednosti američkih opcija. U petom poglavlju ukratko iscrtavamo primjenu na egzotične opcije. U šestom poglavlju se bavimo procjenom grešaka. U zadnjem, sedmom poglavlju je pokazana implementacija razrađenog algoritma te nekoliko numeričkih rezultata sa grafovima. U prvom dodatku je dan kratak pregled SOR metode rješavanja sustava jednadžbi, dok je u drugom dodatku priložen MATLAB kod implementacije algoritma za vrednovanje američkih opcija.

Poglavlje 1

Opcije

1.1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju definirat ćemo što su opcije, osnovni pojmovi vezani uz njihovo promatranje te centralne probleme polja.

Opcija je pravo (ne i obveza) kupovine ili prodaje neke rizične imovine po unaprijed određenoj cijeni tijekom (ili na kraju) određenog perioda. Na određen način, kupovinom opcije polažemo okladu na fluktuacije vrijednosti (pad ili rast cijene) **predmetne imovine** (eng. *underlying asset*). Predmetna imovina je najčešće jedna ili paket dionica, no to mogu biti i dionički indeksi (npr. CROBEX, Dow Jones Industrial Average itd.), valute ili pak razne sirovine i robe. Budući da vrijednost opcije ovisi o vrijednosti predmetne imovine, opcije i druge slične financijske instrumente (budućnosnice, swapovi i sl.) nazivamo **izvedenicama**. Opcija je ugovor između dvije stranke o trgovanju imovinom u unaprijed određeno buduće vrijeme. Jedna stranka je **pisac** opcije, koji određuje uvjete i prodaje ugovor. Druga strana je **kupac** ili **vlasnik** opcije koji kupuje opciju od pisca po tržišnoj cijeni koju nazivamo **premija**. Centralni problem proučavanja izvedenica je: kako odrediti "poštenu" premiju. Na vlasniku opcije ostaje odluka što će (i kada) učiniti sa pravom koje mu daje opcija. Njegova odluka ovisit će o stanju na tržištu i vrsti same opcije. Postoje razne vrste opcija, a u ovom radu ćemo se koncentrirati na **standardne opcije**, često zvane "obične vanilija" opcije (eng. *plain vanilla options*).

Opcije imaju određen životni vijek. **Datum dospijeća** (eng. *maturity date*) T određuje taj rok trajanja. U trenutku T pravo vlasnika opcije istječe i opcija postaje bezvrijedna za sva kasnija vremena ($t > T$). Postoje dvije osnovne vrste opcija: **call** opcija daje kupcu pravo na *kupovinu* imovine po unaprijed dogovorenoj cijeni K do

datuma T. S druge strane, **put** opcija daje kupcu pravo na *prodaju* imovine po unaprijed dogovorenoj cijeni K do datuma T. Unaprijed dogovorenu cijenu ugovora K nazivamo **cijenom izvršenja** (eng. *strike price*, *exercise price*). Mogućnosti vlasnika opcije u trenutku t su:

- prodati opciju po trenutnoj tržišnoj cijeni (u $t < T$)
- zadržati opciju bez ikakve akcije
- izvršiti, tj. iskoristiti opciju ($t \leq T$)
- pustiti opciju da postane bezvrijedna ($t \geq T$)

S druge strane, pisac opcije ima *obvezu* isporučiti ili kupiti predmetnu imovinu po cijeni K ukoliko vlasnik opcije odluči iskoristiti opciju. Rizici su za pisca i vlasnika opcije različiti. Pisac prima premiju kada je netko kupi, čime se kompenziraju potencijalne obveze za pisca.

Standardne opcije možemo obzirom na dopušteno vrijeme izvršenja podijeliti na **europske** i **američke**. Europske opcije se mogu izvršiti tek u trenutku T, dok se američke mogu izvršiti u bilo kojem trenutku do T, uključujući T. Opcije na dionice su većinom američkog tipa.

Sa V ćemo označavati **vrijednost opcije**. V ovisi o cijeni dionice (udjela), tj. **vrijednosti predmetne imovine**, što ćemo označavati sa S (predstavlja engleski naziv za dionice - *stocks*, koje su najčešća predmetna imovina). Varijacije vrijednosti imovine S kroz vrijeme ćemo označavati sa S_t ili $S(t)$. Vrijednost opcije ovisi i o preostalom vremenu do dospijeća $T-t$, tj. o vremenu t. Ovisnost vrijednosti opcije o vrijednosti predmetne imovine i vremenu označavat ćemo sa $V(S,t)$. Dakle, problem će biti izračunati pravu vrijednost V opcije za $t < T$.

1.2 Funkcija isplate

Vrijednost V bit će jednostavno izračunati za $t = T$, što ćemo sada pokazati za europsku call i put opciju (iz perspektive vlasnika).

U trenutku $t = T$ vlasnik call opcije bit će suočen sa vrijednošću $S = S_T$ predmetne imovine. U ovom trenutku on ima dvije mogućnosti kojima može dobiti imovinu: kupiti je direktno na tržištu (što ga košta S) ili izvršavanjem call opcije (košta K). Vlasnik će izabrati ono što ga manje košta. Stoga će vlasnik iskoristiti call opciju

samo kada je $S > K$. Tako prodajom imovine u istom trenutku za S može ostvariti profit $S - K$ po dionici. U ovom scenariju vrijednost opcije je $V = S - K$. Ukoliko je $S < K$, vlasnik neće iskoristiti opciju (jer imovinu može kupiti jeftinije na tržištu) i opcija će biti bezvrijedna, tj. $V = 0$. Zaključujemo da je vrijednost call opcije na datum dospijeća T dana sa:

$$V(S_T, T) = \begin{cases} 0, & \text{ako } S_T \leq K \\ S_T - K, & \text{ako } S_T > K \end{cases}. \tag{1.1}$$

Slijedi da je

$$V(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{1.2}$$

Za sve moguće cijene $S_t > 0$, $\max\{S_t - K, 0\}$ je funkcija od S_t za $0 \leq t \leq T$ (tzv. **funkcija isplate**). Uz $f^+ := \max\{f, 0\}$ kompaktniji zapis postaje $(S_t - K)^+$. Prema ovome slijedi da će vrijednost u T biti:

$$V(S_T, T) = (S_T - K)^+ . \tag{1.3}$$

S druge strane, za europsku *put* opciju će njezino iskorištavanje imati smisla samo ako je $S < K$. Analogno će vrijednost $V(S, T)$ put opcije u vrijeme dospijeća T biti dana sa:

$$V(S_T, T) = \begin{cases} K - S_T, & \text{ako } S_T < K \\ 0, & \text{ako } S_T \geq K \end{cases}, \tag{1.4}$$

tj.

$$V(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\} \tag{1.5}$$

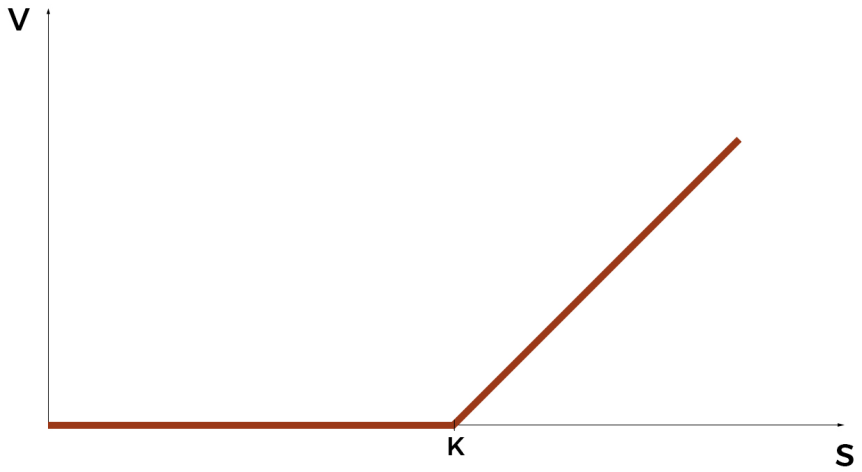
ili

$$V(S_T, T) = (K - S_T)^+ . \tag{1.6}$$

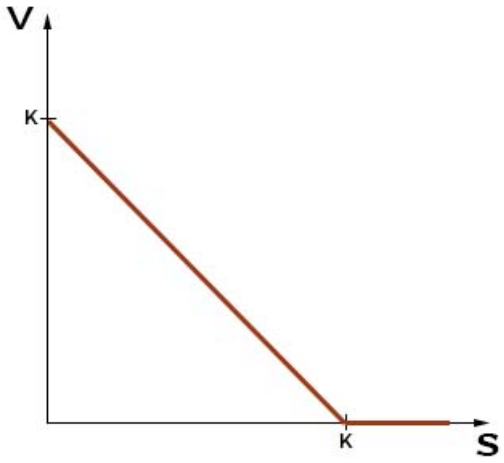
Na slikama 1.1 i 1.2 prikazane su vrijednosti call i put opcija.

Krivulje isplate na slikama 1.1 i 1.2 pokazuju vrijednosti opcija iz perspektive vlasnika opcije. Uočimo da nije prikazan profit. Kako bismo prikazali profit, od već prikazanih vrijednosti moramo oduzeti inicijalni trošak opcije (cijena po kojoj je kupljena u $t = t_0$). Inicijalni trošak se sastoji od premije i transakcijskih troškova. Budući da se ove komponente cijene plaćaju unaprijed, diskontiramo ih stopom $e^{r(T-t_0)}$, pri ćemu je r neprekidna složena kamatna stopa. Oduzimanjem dobivamo graf na slici 1.3, na kojem vidimo da za određene S ostvarujemo gubitak.

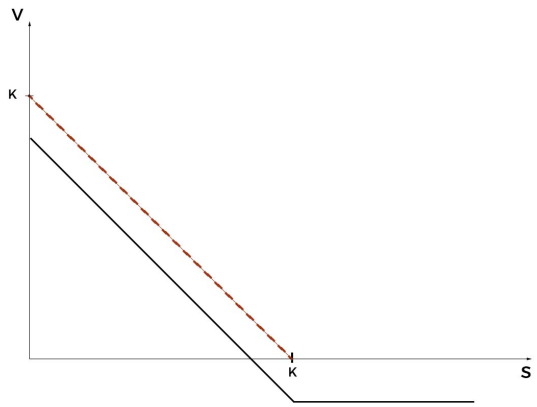
Sve gornje tvrdnje vrijede i za američke opcije za bilo koji $t \leq T$.



Slika 1.1: Funkcija isplate call opcije sa cijenom izvršenja K



Slika 1.2: Funkcija isplate put opcije sa cijenom izvršenja K



Slika 1.3: Krivulja profita put opcije sa cijenom izvršenja K

Preostaje komentirati perspektivu prodavača (pisca) opcije (za njega kažemo da je u *short* poziciji). Sa slika 1.1, 1.2 i 1.3 možemo uočiti da je maksimalan gubitak vlasnika (kupca, za kojeg kažemo da je u *long* poziciji opcije) ograničen inicijalnim troškom. S druge strane, situacija za prodavača je obrnuta: njegove krivulje isplate dobivamo refleksijom krivulje vlasnika obzirom na S-os, iz čega se vidi da je njegov dobitak (gubitak) obrnut od onog za vlasnika. Na primjer, refleksijom krivulje 1.1 za call opciju možemo uočiti potencijalno beskonačan gubitak short pozicije. Dakle, stoji na piscu opcije da moguće gubitke kompenzira zadovoljavajućom strategijom koja će ga zaštititi od rizika.

1.3 A priori ograde

Bez obzira na vrstu opcije i stanje na tržištu, vrijednost V opcije zadovoljavat će neke *a priori* granice. Te granice slijede iz pretpostavke nepostojanja arbitraže (tj. principa nearbitraže), stoga ćemo ukratko reći što pod time mislimo.

1.3.1 Princip nearbitraže

Pretpostavimo sada da radimo sa forward ugovorom. *Forward* ugovor je ugovor između dvije stranke o kupnji ili prodaji određene imovine u točno određenom trenutku T u budućnosti po točno određenoj cijeni K (koja se ugovara unaprijed, u trenutku nastanka ugovora). Početna vrijednost forward ugovora je 0, budući da u početku nisu uključene premije niti se novac razmijenjuje sve do datuma dospijeća. S_t

je cijena imovine kojom se trguje ugovorom u trenucima $0 \leq t \leq T$, te pretpostavimo jednu kamatnu stopu r za posuđivanje bezrizičnog novca u $0 \leq t \leq T$.

Princip nearbitraže nam govori da forward cijena mora biti jednaka $K = S_0 e^{rT}$. Pritom pretpostavljamo da imovina ne proizvodi neki profit (kao dividende) te da ne košta ništa do trenutka $t = T$. Pokažimo kako dolazi do principa. U $t = 0$ se pitamo koja je "poštena" cijena ugovora.

Pretpostavimo prvo da je $K > S_0 e^{rT}$ te da na tržištu nema arbitraže. *Arbitraža* je postupak istodobne kupnje i prodaje imovine s namjerom ostvarivanja profita proizašlog iz razlike u cijenama na 2 ili više tržišta. Naša arbitražna strategija u ovom slučaju bi bila: u $t = 0$ posudimo iznos S_0 po kamatnoj stopi r, kupimo imovinu po toj cijeni te sklopimo forward ugovor o prodaji te imovine u $t = T$ po cijeni K. U $t = T$, arbitražer ispoštuje ugovor prodajom imovine po K, te vrati posuđeni novac kojim je kupio imovinu (to je sada ukamaćeni iznos $S_0 e^{rT}$). Zbog pretpostavke je sada arbitražer ostvario bezrizičan profit iznosa $K - S_0 e^{rT} > 0$. No ovo se kosi s pretpostavkom da ne postoji arbitraža. Zaključujemo $K - S_0 e^{rT} \leq 0$.

Pretpostavimo sada obratno, tj. $K < S_0 e^{rT}$. U ovom slučaju bi vlasnik imovine prodao istu, dobiveni iznos uložio po kamatnoj stopi r na vrijeme T te sklopio forward ugovor o ponovnoj kupnji imovine u T po cijeni K. Na kraju bi ostvario bezrizičan profit $S_o e^{rT} - K > 0$. No i ovo se kosi sa nepostojanjem arbitraže, pa zaključujemo da je $S_o e^{rT} - K \leq 0$, tj. $K = S_0 e^{rT}$.

1.3.2 Ograde

Iz gornjega sada slijedi da vrijede npr. granice za američku put i call opciju:

$$V_P^{Am} \geq (K - S)^+, \quad V_C^{Am} \geq (S - K)^+ \tag{1.7}$$

za sve S, t (inače bismo mogli ostvariti bezrizičan profit posuđivanjem iznosa $S + V$). Za europsku opciju vrijedi $V_P^{Eur} \leq K e^{-r(T-t)}$. Intuitivno mozemo vidjeti da će vrijednost američke opcije uvijek biti veća od europske budući da sadrži izvršenje u T, ali i u svim trenucima prije toga. Dakle, vrijedi:

$$V^{Am} \geq V^{Eur}. \tag{1.8}$$

Uz prepostavku neisplaćivanja dividendi, vrijednosti put i call europske opcije povezane su sa tzv. *put-call paritetom*:

$$S + V_P^{Eur} - V_C^{Eur} = K e^{-r(T-t)}. \tag{1.9}$$

Dane granice i put-call paritet nam uz prepostavku o neisplaćivanju dividendi daju:

$$S_t - Ke^{-r(T-t)} \leq V_C^{Eur}(S_t, t), \tag{1.10}$$

$$Ke^{-r(T-t)} - S_t \leq V_P^{Eur}(S_t, t). \tag{1.11}$$

1.4 Ovisnosti opcije o tržišnim parametrima

Iz svojstava opcija možemo zaključiti da investitor kupuje put opcije kada očekuje da će cijena imovine pasti, a call opciju kada očekuje porast cijene. Ovakav mehanizam često generira špekulaciju na tržištu. Iz ovih razloga jedna od najvažnijih primjena opcija je tzv. *hedging* (u doslovnom smislu ograđivanje od rizika). Vrijednost $V(S,t)$ ovisi i o drugim faktorima. Ovisnost o K i T je očita, a ovisi i o kamatnoj stopi r, volatilnosti σ cijene S_t te o dividendama ukoliko imamo imovinu koja ih isplaćuje. Simbol r je bezrizična kamatna stopa koja se primijenjuje na investicije koje se smatraju nerizičnima, dok σ možemo definirati kao standardnu devijaciju fluktuacija u cijeni S_t podijeljenu radi skaliranja sa korijenom opaženog vremena. Što su veće fluktuacije (a time i σ), teže je predvidjeti buduću vrijednost imovine. Stoga je volatilnost standarna mjera rizika. Ovisnost V o σ je veoma osjetljiva. Ponekad pišemo $V(S,t;T,K,r,\sigma)$ kako bismo naglasili ovisnost o tržišnim parametrima.

Vrijeme mjerimo u godinama, pa i r i σ^2 gledamo po godini. Npr. $r = 0.05$ znači kamatna stopa od 5%, a $\sigma = 0.2$ volatilnost 20%. Vrijeme koje je nama od interesa je $t_0 \leq t \leq T$. Pritom t_0 možemo smatrati datumom kada je opcija izdana, a t simbolom za "danas" ("today"). Nadalje ćemo ipak koristiti $t_0 = 0$ kao "danas". Tada je $0 \leq t \leq T$ vrijeme preostalo do isteka opcije. Cijena S_t je stohastički proces. U stvarnosti r i σ variraju kroz vrijeme. Radi jednostavnosti ih na $0 \leq t \leq T$ smatramo konstantnima. Konačno, pretpostavljamo da sve varijable variraju u $\mathbb{R}$ (po volji dijeljive i mogu neprekidno varirati).

Referencu važnih oznaka vidimo u tablici 1.1.

1.5 Geometrija opcija

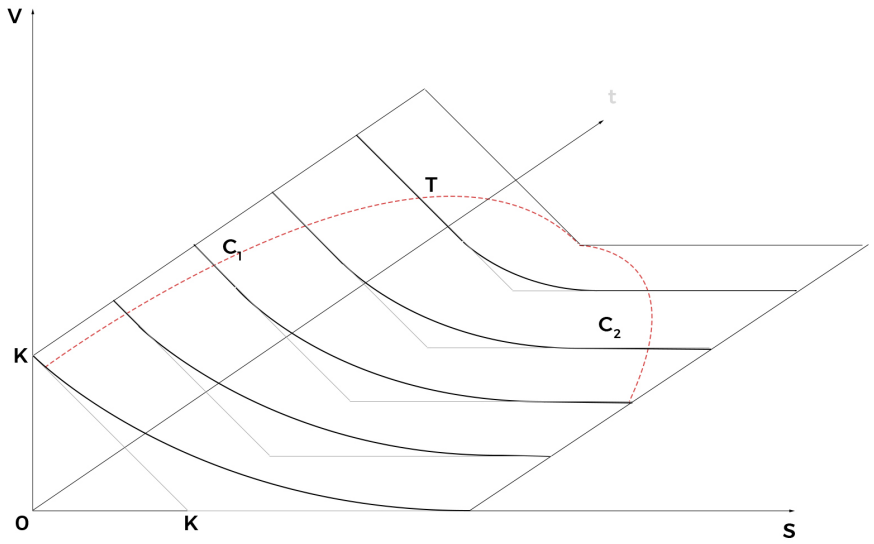
Naš je cilj izračunati $V(S,t)$ za fiksirane vrijednosti K, T, r, σ. Vrijednosti $V(S,t)$ pak možemo interpretirati kao dio površine nad podskupom (S,t)-ravnine definiranog sa $S > 0,\ 0 \leq t \leq T$. Skicu površine vidimo na slici 1.4. Uočimo krivulje koje se dobivaju presjecanjem te površine opcije (eng. *option surface*) ravninama za određene t (npr. $t = 0, 0.2, \ldots, T$). Za $t = T$ jasno vidimo funkciju isplate $(K - S)^+$ sa slike

t	trenutno vrijeme, $0 \leq t \leq T$
T	vrijeme dozrijevanja opcije (kada ističe)
$r > 0$	bezrizična neprekidna kamatna stopa
S, S_t	trenutna cijena po udjelu dionice, tj. imovine
σ	godišnja volatilnost
K	cijena izvršenja po udjelu
$V(S,t)$	vrijednost opcije u t pri cijeni imovine S

Tablica 1.1: Važne oznake

1.4. Pomicanjem ove krivulje isplate za sve $0 \leq t \leq T$ stvara se nova površina koja se sastoji od dva dijela $V = 0$ (za $S \geq K$) i $V = K - S$ (za $S < K$). Ta površina isplate $(K - S)^+$ je donja granica površini opcije, $V(S,t) \geq (K - S)^+$. Slika 1.4 pokazuje dvije krivulje C_1 i C_2 na površini. C_1 je *krivulja ranog izvršenja* jer na dijelu sa $V(S,t) = K - S$ držanje opcije nije optimalno. Objasnimo ukratko krivulju C_2. Na prostoru između ove dvije krivulje je površina opcije iznad površine isplate, tj. $V(S,t) \geq (K-S)^+$. Izvan tog područja se površine podudaraju. Ovo je strogo iznad C_1, gdje je $V(S,t) = K - S$, i vrijedi aproksimativno za S iza C_2, gdje je $V(S,t) \approx 0$ ili $V(S,t) < \epsilon$, za malen $\epsilon > 0$. Točnu poziciju C_1 i C_2 ne znamo, već ih dobivamo računanjem $V(S,t)$. Od posebnog interesa je krivulja $V(S,0)$, tj. vrijednost opcije danas, koju možemo vidjeti na slici 1.4 za $t = 0$ kao vanjski rub površine opcije.

Zaključno
Uveli smo opciju sa sljedećim značajkama: ovisi o jednoj imovini, isplata joj je $(K - S)^+$ ili $(S - K)^+$, gdje je S vrijednost imovine u tom trenutku. Ovo je tzv. *vanilija* opcija, dok sve ostale vrste zovemo *egzotičnim* opcijama. Kakva egzotična opcija može biti? Npr. može ovisiti o više imovina, isplata može biti drugačija ili opcija može ovisiti o putu (tj. V ne ovisi više samo o vrijednosti imovine u tom trenutku, već i u svim trenucima $0 \leq t \leq T$). Primjer opcije koja ovisi o putu je tzv. *azijska* opcija. Njezina isplata ovisi o srednjoj vrijednosti imovine u svim trenucima do isteka valjanosti. Primjer je i tzv. *opcija s barijerom* kojoj vrijednost ovisi o tome dostigne li cijena S_t određenu barijeru u vijeku trajanja.



Slika 1.4: Skica vrijednosti $V(S,t)$ američke put opcije

1.6 Krivulja ranog izvršenja

Zbog pretpostavke nepostojanja arbitraže, vrijednost američke opcije (za razliku od europske) mora biti veća ili jednaka isplati. Stoga vrijede nejednakosti

$$V_P^{Am}(S,t) \geq (K-S)^+ \text{ za sve } (S,t), \tag{1.12}$$
$$V_C^{Am}(S,t) \geq (S-K)^+ \text{ za sve } (S,t). \tag{1.13}$$

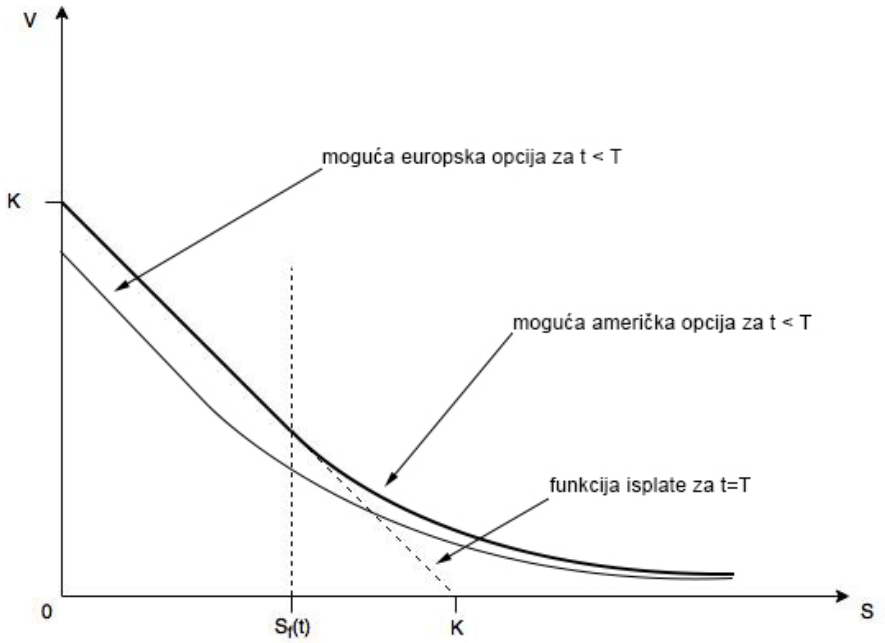
Shemu ovog rezultata za put opciju vidimo na slici 1.5. Vrijednost europskih i američkih opcija u rubnim uvjetima je dana sa

$$V_C(0,t) = 0,$$
$$V_P(S,t) = 0, \text{ za } S \to \infty.$$

Za europske opcije vrijedi:

$$V_C(S,t) = S - Ke^{-r(T-t)}, \text{ za } S \to \infty,$$
$$V_P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} - S, \text{ za } S \approx 0.$$

Objasnimo pojam $S_f(t)$ sa slike 1.5 na primjeru američke put opcije. Uzmimo u obzir (lijevi) dio krivulje $V_P(S,t)$ za mali $S > 0$ i $t < T$. Bez mogućnosti ranog izvršenja



Slika 1.5: Skica vrijednosti $V(S,t)$ američke put opcije za $t < T$

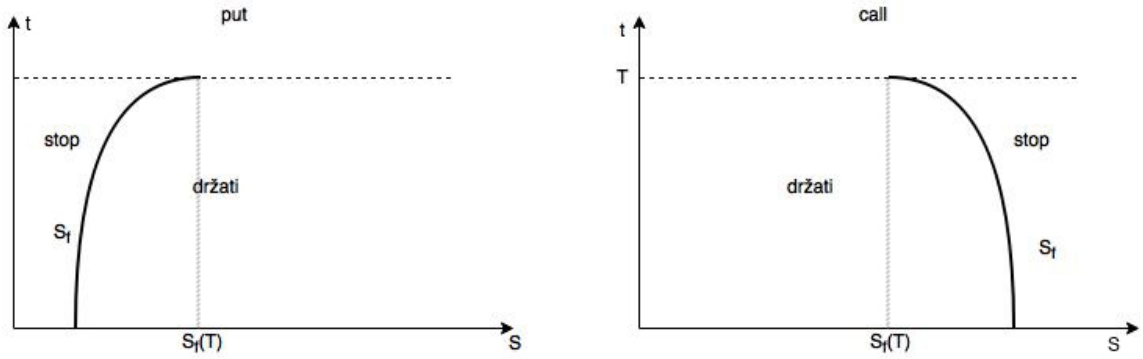
nejednakost $V_P(S,t) < K - S$ vrijedi za $r > 0$ i dovoljno male S. S druge strane, iz nejednakosti (1.12) mora vrijediti $V_P(S,t) \equiv K - S$ za američku put opciju, barem za male S. Za srednje vrijednosti S zamislimo da prilazimo sa desne strane krivulje, tj. tamo gdje je $V_P^{Am}(S,t) > (K-S)^+$. Iz neprekidnosti i monotonosti krivulje slijedi da krivulja V_P^{Am} "udari" u funkciju isplate u nekom S_f, $0 < S_f < K$. Tu točku kontakta definiramo sa

$$V_P^{Am}(S,t) > (K-S)^+ \text{ za } S > S_f, \tag{1.14}$$

$$V_P^{Am}(S,t) = K - S \text{ za } S \leq S_f. \tag{1.15}$$

Za $S < S_f$ je V_P^{Am} jednaka linearnoj isplati te ništa nije potrebno računati. Krivulja $V_P^{Am}(S,t)$ za svaki t doseže svoju lijevu granicu u $S_f(t)$.

Ova situacija vrijedi za sve $t < T$ i točka dodira S_f ovisi o t, tj. $S_f = S_f(t)$. Za sve $0 \leq t < T$, točke dodira $S_f(t)$ tvore krivulju na (S,t)-traci. Krivulja S_f je zapravo granica koja odvaja područje gdje je vrijednost opcije strogo veća od isplate od područja gdje je vrijednost jednaka isplati. Na slici 1.6 vidimo skice krivulje S_f za call i put opciju. A priori lokacija krivulje S_f nije poznata. Iz ovog razloga problem



Slika 1.6: Kontinuacijska regija ("držati") i regija zaustavljanja za američke opcije

računanja $V_P^{Am}(S,t)$ za $S > S_f(t)$ zovemo *problem slobodnih granica*, a krivulju $S_f(t)$ *slobodnom granicom.*

Za američke call opcije do kontakta dolazi samo ako imovina isplaćuje dividendu, $\delta \neq 0$, što vidimo iz

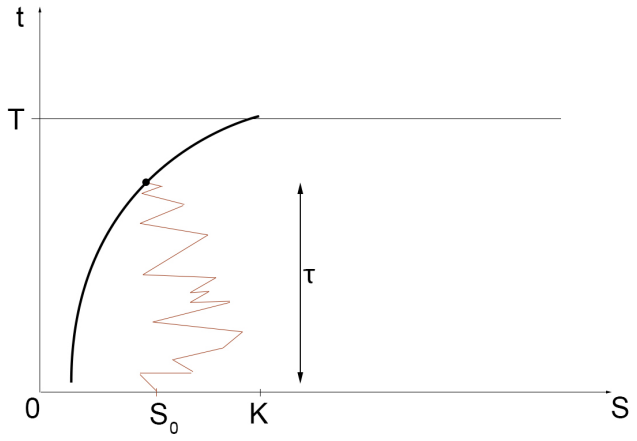
$$V_C^{Am} \geq V_C^{Eur} \geq S - Ke^{-r(T-t)} > S - K \text{ za } \delta = 0,\ r > 0,\ t < T.$$

Nejednakost $V_C^{Am} > S-K$ za $\delta = 0$ znači da se ne isplati rano izvršavanje. Američke i europske call opcije na imovinu koja ne isplaćuje dividendu su jednake: $V_C^{Am} = V_C^{Eur}$.

Notacija $S_f(t)$ za slobodnu granicu je motivirana rješavanjem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, no glavno značenje krivulje S_f je ekonomskog karaktera. Slobodna granica S_f je **krivulja ranog izvršenja**. Trenutak t_s u kojem S_t dosegne krivulju ranog izvršenja je optimalno vrijeme zaustavljanja, vidljivo na slici 1.7. Pojasnimo ovo pobliže za put opciju (za call opciju sa $\delta \neq 0$ argument je analogan).

U slučaju $S > S_f$, rano izvršenje izaziva trenutni gubitak zbog toga što (1.14) implicira $K < V + S$. Prema tome, vlasnik opcije ju ne izvršava kada je $S > S_f$ (zbog toga ovo područje nazivamo **kontinuacijska regija**—"držati" na slici 1.6).

Sa druge strane krivulje S_f, gdje je $V = K-S$, svaki pomak u S je praćen pomakom V. U ovom području je jedini način zarade taj da izvršimo opciju i investiramo dobiveno (K) po bezrizičnoj kamatnoj stopi r na preostalo vrijeme $T-t$. Profit će tada biti $Ke^{r(T-t)} - K$. Profit će biti veći što je $T-t$ veći, pa će vlasnik izvršiti



Slika 1.7: Optimalno vrijeme zaustavljanja τ za standardnu put opciju

opciju čim se dosegne $V \equiv K - S$. Stoga je S_f krivulja ranog izvršenja, a područje $S \leq S_f$ zovemo **područje zaustavljanja**. Profit naravno ovisi i o r te stoga vlasnik mora pratiti stanje na tržištu[1].

Krivulje $S_f(t)$ su neprekidno diferencijabilne u t i monotono nerastuće/neopadajuće. Ograde za S_f kada $t \to T$ $(t < T, \delta > 0)$ su:

$$put: \quad \lim_{t \to T^-} S_f(t) = \min\left(K, \frac{r}{\delta}K\right),$$
$$call: \quad \lim_{t \to T^-} S_f(t) = \max\left(K, \frac{r}{\delta}K\right).$$

1.7 Model financijskog tržišta

U konačnici je tržište to koje odlučuje koja je vrijednost opcije. Kako bismo mogli (pokušati) izračunati približnu vrijednost opcije, tržište moramo opisati matematičkim modelom. Model nam služi kao aproksimacija i idealizacija kompleksne stvarnosti samog tržišta. Model kojeg su razvili Black, Merton i Scholes se dokazao kao pouzdan i široko prihvaćen. U ovom dijelu uvodimo neke osnovne elemente modela tržišta.

[1] Više o ekonomskom obrazloženju u [4]

Naš cilj je izračunati $V(S,t)$. Ideja vodilja je definirati površine opcije $V(S,t)$ nad skupom $S > 0$, $0 \leq t \leq T$ kao rješenja pogodnih jednadžbi. Tada se računanje V svodi na riješavanje tih jednadžbi. Određene pretpostavke nam dozvoljavaju da karakteriziramo funkcije vrijednosti $V(S,t)$ kao rješenja određenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (ili nejednadžbi). Model je reprezentiran poznatom Black–Scholes-ovom jednadžbom iz 1973.:

Definicija 1. *(Black–Scholes-ova jednadžba)*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1.16}$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednadžba za funkciju vrijednosti $V(S,t)$ opcije. Svakako moramo vidjeti koje su sve pretpostavke koje vode ovoj jednadžbi.

Pretpostavke 1. *(Black–Merton–Scholes-ov model tržišta)*

1. ***Ne postoji mogućnost za arbitražu.***

2. ***Tržište je besprijekorno.***
   Ovo znači da nema transakcijskih troškova (poreza ili naknada), kamatne stope za posuđivanje i pozajmljivanje su jednake, sve strane imaju trenutan pristup informacijama i sve obveznice i krediti su dostupni u bilo koje vrijeme i u bilo kojoj količini. Posljedica je da su sve varijable savršeno djeljive, tj. mogu poprimiti bilo koji realan broj. Nadalje, pojedinačno trgovanje ne utječe na cijenu.

3. ***Cijena imovine slijedi geometrijsko Brownovo gibanje.***
   Pretpostavljamo da je relativna promjena cijene (povrat) dS/S u periodu dt sastavljena od determinističkog drifta μdt i stohastičkih fluktuacija oblika σdW_t.

   Model (1)**.** (Geometrijsko Brownovo gibanje)

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1.17}$$

Ovo je stohastička diferencijalna jednadžba, linearna u $X_t = S_t$ i $a(S_t, t) = \mu S_t$ je stopa drifta sa očekivanom stopom povrata μ, $b(S_t, t) = \sigma S_t$, σ je volatilnost.

4. *r* ***i*** *σ* ***su konstantni za*** *$0 \leq t \leq T$****. Dividende se ne isplaćuju za taj period. Opcija je europska.***

Funkcija vrijednosti nije u potpunosti definirana samo zahtjevom da rješava Black–Scholes-ovu jednadžbu za sve S i t iz domene. Uz to, mora zadovoljavati i terminalne i rubne uvjete. Terminalni uvjet za $t = T$ je $V(S, T) = \Psi(S)$, gdje je Ψ funkcija isplate (1.3) ili (1.6) ovisno o tipu opcije. Granice domene $S > 0$, $0 \leq t \leq T$ su definirane sa $S = 0$ i $S \to \infty$. U tim granicama $V(S, t)$ mora zadovoljavati rubne uvjete. Npr. europska call opcija mora zadovoljavati

$$V(0, t) = 0; \qquad V(S, t) \to S - Ke^{-r(T-t)} \text{ za } S \to \infty.$$

Ovo je jedan primjer definiranja funkcije vrijednosti $V(S, t)$. Primijetimo da je Black–Scholes-ova PDJ linearna u V, dok nelinearnost dolazi od isplate; funkcije $\Psi(S) = (K - S)^+$, $\Psi(S) = (S - K)^+$ su konveksne. Ukoliko relaksiramo pretpostavku besprijekornosti tržišta, PDJ više nije linearna. Za Black–Scholes-ovu PDJ u općenitom obliku ne postoje analitička rješenja te se rješenje računa numerički (pogotovo za američke opcije). U sljedećem poglavlju koristimo jedan takav pristup za računanje vrijednosti američkih opcija.

Poglavlje 2

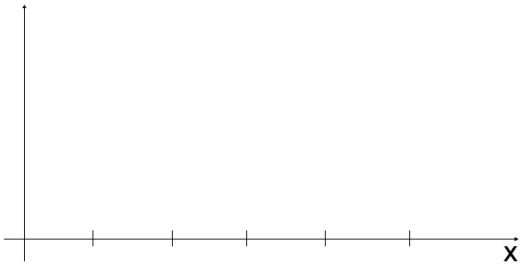
Metode konačnih elemenata

U ovom poglavlju počinjemo se baviti središnjom temom ovoga rada, a to su *metode konačnih elemenata* (eng. *Finite element methods*). Druge metode koje bi se mogle koristiti pri ovoj tematici su *metode konačnih razlika* (eng. *finite-difference methods*). Njih doduše nije preporučljivo koristiti iz razloga koji će uskoro biti navedeni. Dobre strane ovih metoda su:

- imaju ekvidistantne mreže
- lako ih je razumijeti
- jednostavno ih je implementirati

S druge strane, njihova loša strana je to što su njihove mreže uniformne i pravokutne pa stoga i nedovoljno fleksibilne u puno situacija (npr. rješenja sa "strmim" gradijentima trebaju lokalno finiju mrežu kako bi podijeljene razlike bile dobra aproksimacija za diferencijale, dok s druge strane manje strmi gradijenti mogu biti modelirani i na "grubljoj" mreži).

Rješenja za ove probleme su metode konačnih elemenata. To su metode rješavanja običnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (dalje PDJ) koje su dovoljno fleksibilne za gore navedene probleme. Konačni element (eng. *finite element*) označava matematičke pojmove kao npr. interval i funkcija definirana na njemu. Postoje i druga imena, tj. inačice ovih metoda pod nazivima *varijacijske metode, težinski reziduali ili Galerkinove metode*. Sama imena nam daju ideju o principima kojima se dolazi do željenih jednadžbi (postoji par različitih načina za dolazak do konačnih elemenata, a sve su usko povezane). Fleksibilnost metoda konačnih elemenata je korisna ne samo za aproksimaciju funkcija, već i domena koje nisu pravokutne, što će biti ponajviše korisno u višedimenzionalnim slučajevima. Stoga će poboljšanje korištenjem metoda



Slika 2.1: Diskretizacija x-osi

konačnih elemenata u slučaju jednodimenzionalnih standardnih opcija obzirom na ostale metode biti gotovo nezamjetno. S druge strane, kada imamo opcije u ovisnosti o više predmetnih imovina (tj. sa složenijim domenama), metode konačnih elemenata će biti preporučljive za korištenje.

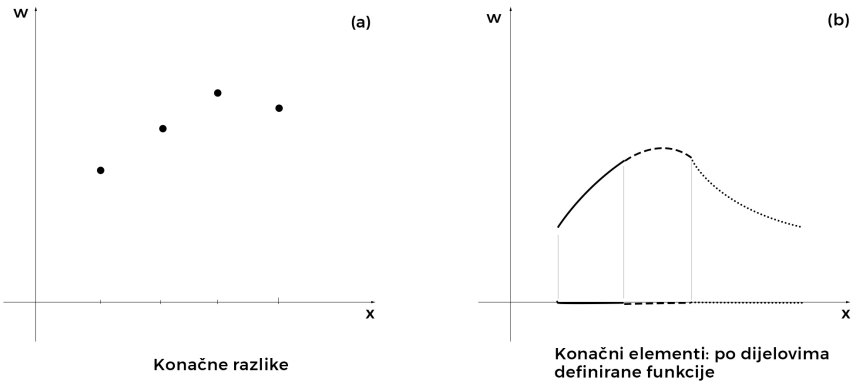
Dok je područje proučavanja metoda konačnih elemenata općenito veoma veliko, mi se u ovom radu koncentriramo na kratak pregled par osnovnih metoda i ideja utkanih u sam pristup (tako će u 2. poglavlju biti dan upravo taj pregled). Isto to ćemo zatim primijeniti u 3. poglavlju na računanje standardnih opcija, dok ćemo u 5. poglavlju analogan pristup primijeniti na egzotičnu opciju sa 2 predmetne imovine. Na kraju rada, u 6. poglavlju će biti dana kratka rasprava o procjenama grešaka. Vrijedi napomenuti da će većina ideja biti pokazana u jednodimenzionalnom slučaju, ali se one lako prenose na više dimenzija.

2.1 Težinski reziduali

Princip težinskih reziduala usko je povezan sa metodama konačnih elemenata te se stoga mnogi principi na kojima se temelje metode konačnih elemenata mogu interpretirati kao težinski reziduali. Oni nam govore kako možemo provesti diskretizaciju i definirati aproksimaciju. Najjednostavniji takav slučaj bio bi onaj prikazan na slici 2.1, koja pokazuje diskretizaciju x-osi.

Uočimo da diskretizaciju možemo opisati na 2 načina:

- pomoću točaka x_i diskretne mreže,
- pomoću skupa podintervala.

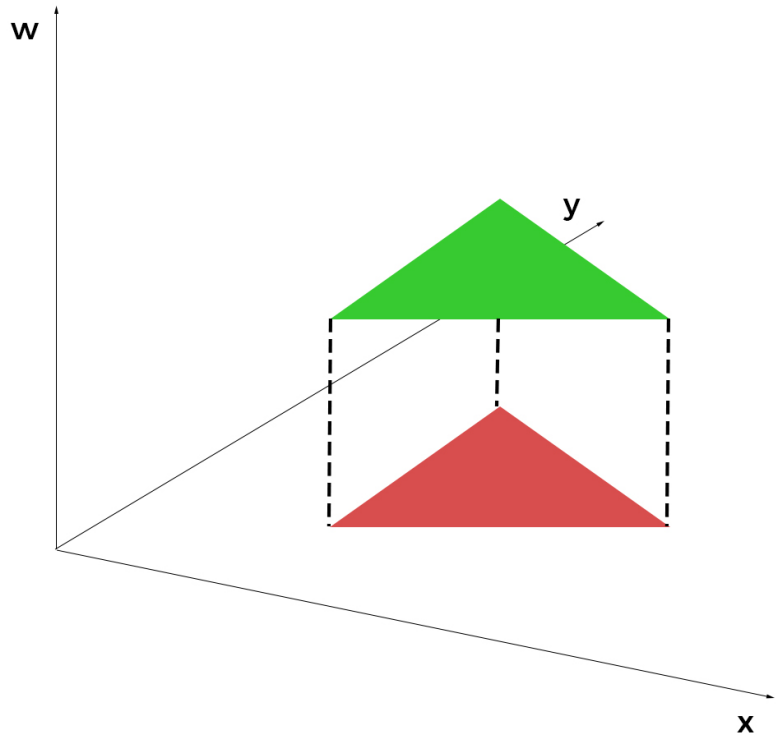


Slika 2.2: Dvije vrste aproksimacije u jednodimenzionalnom slučaju

Ova 2 načina vode različitim pristupima za konstrukciju aproksimacije w. Ovo ilustriramo u jednodimenzionalnom slučaju, prikazanom na slici 2.2. Koja je razlika između ove dvije aproksimacije? Apoksimacija bazirana na *konačnim razlikama* je definirana u točkama mreže te se primarno sastoji od *diskretnih točaka*. *Konačni elementi* su definirani na poddomenama (na slici su to intervali) sa po dijelovima definiranim funkcijama koje predstavljaju globalnu aproksimaciju w. Općenito možemo reći da je konačan element *uređen par* poddomene i odgovarajuće funkcije koja je definirana na njoj (najčešće je to polinom). U slučaju konačnih razlika, dalje se interpolacijom mogu dobiti po dijelovima neprekidne funkcije iz diskretnih točaka.

Na slici 2.3 možemo vidjeti jednostavan konačan element u dvije dimenzije baziran na trokutu u (x, y)-ravnini. Konačan element je sastavljen od poddomene trokuta i na njemu definirane linearne funkcije. Čak i vrlo nepravilne domene možemo particionirati trokutima.

Za nastavak dalje valja napomenuti da pristupi korišteni u metodama konačnih elemenata koriste integrale, koji zahtijevaju manju glatkoću funkcije, što pomaže u praksi i pridonosi fleksibilnosti samih metoda. Konačni elementi temeljeni na polinomima pomažu u računanju samih integrala.



Slika 2.3: Jednostavan dvodimenzionalni konačni element baziran na trokutu

2.2 Princip težinskih reziduala

Princip objašnjavamo na slučaju jednostavne diferencijalne jednadžbe:

$$Lu = f, \tag{2.1}$$

gdje je L linearni diferencijalni operator. Primjeri su:

$$Lu := -u'' \quad \text{za } u(x), \tag{2.2}$$
$$Lu := -u_{xx} - u_{yy} \quad \text{za } u(x, y). \tag{2.3}$$

Rješenja u diferencijalne jednadžbe proučavamo na domeni $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Prvo particioniramo domenu u konačno mnogo poddomena $\mathcal{D}_k$ (točnije, aproksimiramo je što bolje konačnim brojem poddomena):

$$\Omega \approx \bigcup_k \mathcal{D}_k = \mathcal{D}. \tag{2.4}$$

Svi rubovi trebaju biti uključeni i aproksimacije rješenja u se računaju na zatvaraču $\overline{\mathcal{D}}$. Pretpostavljamo da je particija disjunktna do na rubove $\mathcal{D}_k$, tj. $\mathrm{Int}\mathcal{D}_j \cap \mathrm{Int}D_k = \{\emptyset\}$ za $j \neq k$. Tako su npr. u jednodimenzionalnom slučaju ($n = 1$) $\mathcal{D}_k$ podintervali cijelog $\mathcal{D}$. U dvodimenzionalnom slučaju bi pak to mogla biti npr. particija na trokute.

Prvi korak koji moramo poduzeti kako bismo došli do aproksimacije w za rješenje u, je prikaz u bazi:

$$w \coloneqq \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i. \tag{2.5}$$

Pritom su recimo u slučaju jedne nezavisne varijable x, $c_i \in \mathbb{R}$ konstantni *koeficijenti*, a φ_i *funkcije* od x. Funkcije φ_i zovemo **bazne** funkcije. Obično su $\varphi_1, ..., \varphi_N$ dane, dok se slobodni parametri $c_1, ..., c_N$ moraju odrediti tako da je $w \approx u$.

Jedna strategija za određivanje c_i se bazira na rezidualnoj funkciji definiranoj sa:

$$R \coloneqq Lw - f. \tag{2.6}$$

Ovdje tražimo w tako da je R "malen". Budući da su φ_i zadane, tada imamo N uvjeta (jednadžbi) kojima trebamo odrediti nepoznanice $c_1, .., c_N$. Kako bismo to postigli, ponderiramo rezidual uvođenjem N **težinskih (test)** funkcija $\psi_1, ..., \psi_N$ i zahtijevamo sljedeće:

$$\int_{\mathcal{D}} R\, \psi_j \, dx = 0 \quad \text{za} \quad j = 1, ..., N. \tag{2.7}$$

Ovaj zahtjev zapravo znači da želimo da je rezidual ortogonalan na skup težinskih funkcija ψ_j. Član dx simbolizira integriranje obzirom na $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$; kasnije ćemo tu notaciju često izostaviti. Iz svega do sad navedenoga slijedi da je sustav jednadžbi (2.7) za problem (2.1) sustav N jednadžbi:

$$\int_{\mathcal{D}} L\, w\, \psi_j = \int_{\mathcal{D}} f\, \psi_j \quad \text{za} \quad j = 1, ..., N. \tag{2.8}$$

Često ovo pišemo kao skalarne produkte:

$$\langle Lw, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle, \tag{2.9}$$

koji su definirani kao odgovarajući integrali u (2.8). Za L linearan će to implicirati:

$$\int Lw\psi_j = \int \left(\sum_i c_i L\varphi_i \right) \psi_j = \sum_i c_i \int L\varphi_i \psi_j. \tag{2.10}$$

Sada možemo definirati:

$$a_{ij} \coloneqq \int L\varphi_i \psi_j. \tag{2.11}$$

Ovi integrali će definirati matricu A. Izrazi $r_j \coloneqq \int f\psi_j$ će predstavljati vektor r, a koeficijenti c_j vektor $(c_1, ..., c_N)^T$. Sada sustav možemo zapisati matrično kao:

$$Ac = r. \tag{2.12}$$

Ovime smo dali kratak pregled i zapis problema, ali ostaju nam otvorena pitanja:

1. Kako se nositi sa rubnim uvjetima?
2. Kako odabrati baze φ_i?
3. Kako odabrati test funkcije ψ_j?

Sloboda odabira φ_i i ψ_j dovodi do konstrukcije nekoliko različitih metoda. Za sada pretpostavljamo da su te funkcije po potrebi diferencijabilne i integrabilne.

2.3 Primjeri ψ_j

1. **Galerkin/Bubnov–Galerkin-ova metoda:**
   Stavimo $\psi_j \coloneqq \varphi_j$. Iz ovoga slijedi da je $a_{ij} = \int L\varphi_i\varphi_j$.
2. **Kolokacija:**
   Stavimo da je $\psi_j \coloneqq \delta(x - x_j)$. Ovdje je δ Diracova funkcija, definirana tako da zadovoljava:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{za } x = 0 \\ 0 & \text{za } x \neq 0 \end{cases}$$

i $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$. Ona u $\mathbb{R}^1$ zadovoljava: $\int f\delta(x - x_j)dx = f(x_j)$. Kao posljedicu imamo:

$$\int Lw\psi_j = Lw(x_j),$$
$$\int f\psi_j = f(x_j).$$

Dakle, dobili smo sistem $Lw(x_j) = f(x_j)$, što znači da evaluiramo diferencijalnu jednadžbu u odabranim točkama x_j.

3. **Najmanji kvadrati:**
Stavimo $\psi_j \coloneqq \frac{\partial R}{\partial c_j}$. Ime metode proizlazi iz nužnog uvjeta za minimiziranje $\int R(c_1, \ldots, c_N)^2$, a to je poništavanje gradijenta:

$$\int_{\mathcal{D}} R\frac{\partial R}{\partial c_j} = 0 \text{ za sve } j.$$

2.4 Primjeri baznih funkcija φ_i

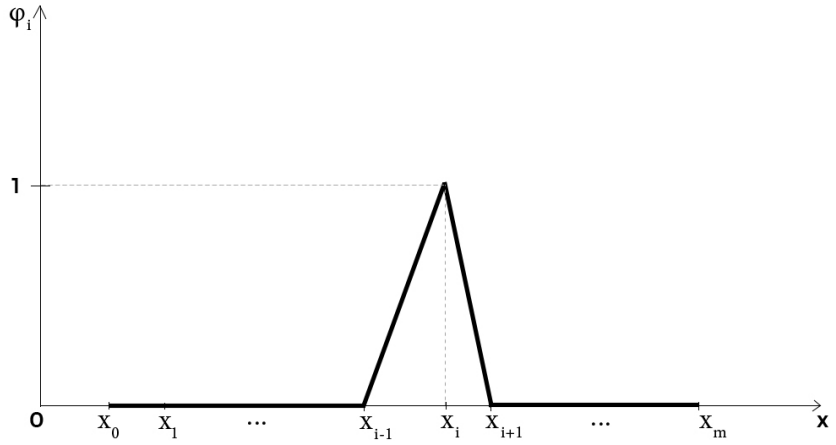
Reći ćemo da je bazna funkcija dobra ukoliko zadovoljava 2 uvjeta:

1. Rezultirajuće metode moraju biti *točne*
2. Implementacija mora biti *efikasna*

Pojmom *točnosti* metode bavit ćemo se tek kasnije, dok se *efikasnosti* dotičemo sada. Efikasnost metode je usko vezana uz popunjenost matrice, tj. njezinu rijetku popunjenost (eng. *sparseness*) matrice (rijetko popunjena matrica je ona koja ima velik broj nul-elemenata). Kada je naša matrica A linearnih jednadžbi rijetko popunjena, tada se sustav može efikasno riješiti i kada je matrica velikih dimenzija. Kako bismo pak postigli rijetku popunjenost matrice, zahtijevamo da je $\varphi_i \equiv 0$ na većini poddomena $\mathcal{D}_k$. Slika 2.4 pokazuje takav primjer za jednodimenzionalni slučaj $n = 1$. Ovo je tzv. "krović" funkcija. To je jedan od najjednostavnijih primjera vezanih uz konačne elemente. Ona je po dijelovima linearna funkcija te svaka funkcija φ_i ima nosač koji se sastoji od samo 2 podintervala. Jedna od posljedica je:

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi_i\varphi_j = 0 \text{ za } |i - j| > 1, \tag{2.13}$$

te analogno za $\int_{\mathcal{D}} \varphi_i'\varphi_j'$.



Slika 2.4: "Krović" funkcija: jednostavan izbor konačnih elemenata

Nešto složenije bazne funkcije možemo konstruirati pomoću po dijelovima polinomima višeg stupnja. Tim putem dobivamo funkcije $\mathcal{C}^1$ ili $\mathcal{C}^2$ glatkoće.

Pozabavimo se nakratko već navedenim primjerom:

$$Lu = -u'' \text{ gdje su } u, \varphi, \psi \in \{u : u(0) = u(1) = 0\}.$$

Parcijalnim integriranjem dobivamo:

$$\int_0^1 \varphi''\psi = \underbrace{(\varphi'\psi)\Big|_0^1}_{=0 \text{ zbog } \psi(0)=\psi(1)=0} - \int_0^1 \varphi'\psi' = \int_0^1 \varphi\psi''.$$

Ove integrale razlikujemo po različitim zahtjevima glatkoće na φ i ψ te postoji li integral uopće. Prema tome odabiremo integral koji najbolje odgovara metodi i glatkoći rješenja. Npr. za Galerkinovu metodu će elementi a_{ij} biti oblika $-\int_0^1 \varphi_i'\varphi_j'$.

2.5 Galerkin metoda sa "krović" funkcijama

Držimo se sada jednodimenzionalnog slučaja, tj. $x \in \mathbb{R}$.

2.5.1 Krović funkcije

U ovom dijelu opisat ćemo metodu konačnih elemenata sa jednostavnim krović funkcijama. *Krović funkcije* definiramo kao:

Definicija 2 (Krović funkcije)**.** *Neka su* $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, $x_i \in \mathbb{R}$ *za* $i = 0, \ldots, m$. *Za* $1 \leq i \leq m-1$ *definiramo:*

$$\varphi_i(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_i}{x_i - x_{i-1}} & , \text{ za } x_{i-1} \leq x < x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & , \text{ za } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}.$$

Za $i = 0, m$ *definiramo:*

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & , \text{ za } x_0 \leq x < x_1 \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases},$$

$$\varphi_m(x) := \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} & , \text{ za } x_{m-1} \leq x \leq x_m \\ 0 & , \text{ inače} \end{cases}.$$

Funkciju φ_i smo vidjeli na slici 2.4, dok rubne slučajeve možemo vidjeti na slikama 2.5 i 2.6.

Ovih $m+1$ funkcija ima sljedeća svojstva:

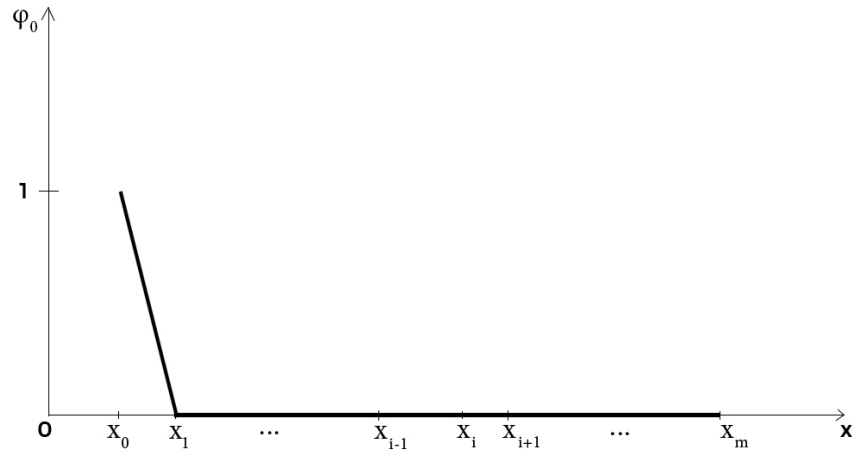
Svojstva 1 (Krović funkcije)**.**

(a) $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ *čine bazu prostora po dijelovima linearnih funkcija:*

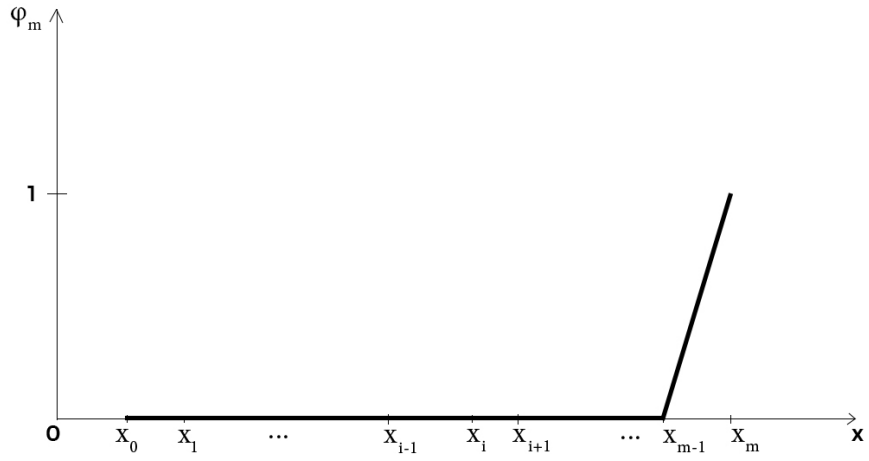
$$\{g \in \mathcal{C}^0[x_0, x_m] : g \text{ linearna funkcija na } \mathcal{D}_k := [x_k, x_{k+1}] \text{ za sve } k = 0, \ldots, m-1 \},$$

tj. za svaki v *iz tog prostora postoje jedinstveni koeficijenti* $c_0, \ldots, c_m$ *tako da je* $v = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i$.

(b) Na $\mathcal{D}_k$ *su samo* φ_k *i* $\varphi_{k+1} \neq 0$ *različito od 0. Slijedi da je* $\varphi_i \varphi_k = 0$ *za* $|i-k| > 1$.



Slika 2.5: Rubna krović funkcija φ_0



Slika 2.6: Rubna krović funkcija φ_m

(c) *Jednostavnu aproksimaciju integrala* $\int_{x_0}^{x_m} f\varphi_j dx$ *(koja neće utjecati na red greške) možemo izračunati kao:*

- *Zamijenimo* f *sa interpolirajućom funkcijom* $f_p \coloneqq \sum_{i=0}^{m} f_i\varphi_i$*, gdje je* $f_i \coloneqq f(x_i)$
- *Za svaki* j *izračunamo aproksimirajući integral:*

$$I_j \coloneqq \int_{x_0}^{x_m} f_p\varphi_j dx = \int_{x_0}^{x_m} \sum_{i=0}^{m} f_i\varphi_i\varphi_j dx = \sum_{i=0}^{m} f_i \int_{x_0}^{x_m} \varphi_i\varphi_j dx.$$

Možemo definirati: $b_{ij} \coloneqq \int_{x_0}^{x_m} \varphi_i\varphi_j dx$*. Ovi integrali čine simetričnu matricu* B*, a* f_i *vektor* f*. Ako sve integrale* I_j $(0 \leq j \leq m)$ *stavimo u vektor, tada sve integrale možemo zapisati kao* Bf*.*

(d) $(m+1)\times(m+1)$*-matrica* $B \coloneqq (b_{ij})$ *se može dobiti uklapanjem* 2×2*-matrice vezane za* $\mathcal{D}_k$*. Te matrice su oni integrali koji se računaju samo nad poddomenom* $\mathcal{D}_k$*. Za svaku* $\mathcal{D}_k$ *(u našem jednodimenzionalnom slučaju) točno su 4 integrala* $\int \varphi_i\varphi_j dx$*,* $i, j \in \{k, k+1\}$ *različita od 0. Oni se mogu urediti u* 2×2*-matricu:*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{bmatrix} \varphi_k^2 & \varphi_k\varphi_{k+1} \\ \varphi_{k+1}\varphi_k & \varphi_{k+1}^2 \end{bmatrix} dx.$$

(Integral matrice shvaćamo kao integriranje po elementima.) Ovo su integrali na $\mathcal{D}_k$*, gdje je integrand produkt dvaju faktora:* $\dfrac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k}$ *i* $\dfrac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}$*. Rezultat je*

$$\frac{1}{(x_{k+1}-x_k)^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{bmatrix} (x_{k+1}-x)^2 & (x_{k+1}-x)(x-x_k) \\ (x-x_k)(x_{k+1}-x) & (x-x_k)^2 \end{bmatrix} dx.$$

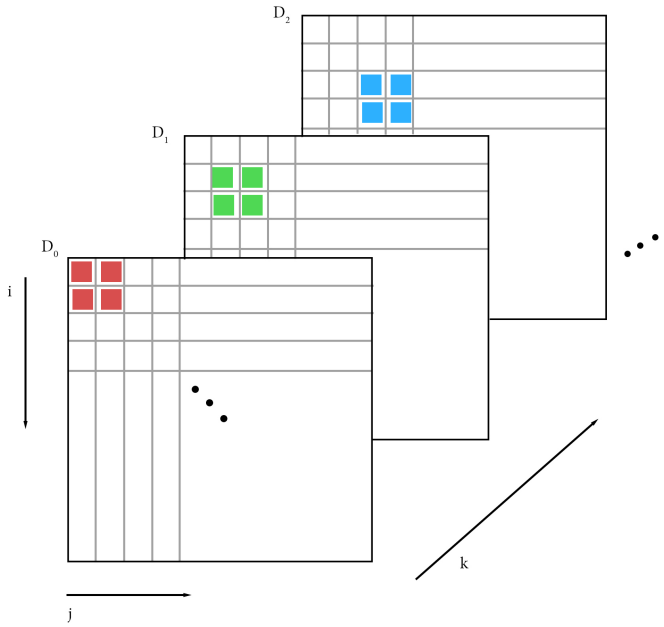
Definiramo $h_k \coloneqq x_{k+1} - x_k$ *te integracijom dobijemo* ***elementarnu matricu mase*** *(eng. element-mass matrix):*

$$\frac{1}{6} h_k \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(e) *Analogno, integriranjem* $\varphi_i'\varphi_j'$ *dobivamo:*

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{bmatrix} \varphi_k'^2 & \varphi_k'\varphi_{k+1}' \\ \varphi_{k+1}'\varphi_k' & \varphi_{k+1}'^2 \end{bmatrix} dx = \frac{1}{h_k^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \begin{bmatrix} (-1)^2 & (-1)1 \\ 1(-1) & 1^2 \end{bmatrix} dx = \frac{1}{h_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovo pak zovemo ***elementarnom matricom krutosti*** *(eng. element-stiffness matrix). Njih koristimo kako bismo sastavili matricu* A*.*



Slika 2.7: Uklapanje u jednodimenzionalnom slučaju

2.5.2 Uklapanje matrica

Sljedeći zadatak koji se nameće je kako sastaviti matrice A i B. To radimo tako da prolazimo po svim k i računamo sve relevantne integrale na $\mathcal{D}_k$. Zbog toga razdijelimo integrale na sljedeći način:

$$\int_{x_0}^{x_m} = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\mathcal{D}_k}$$

kako bismo konstruirali $(m+1) \times (m+1)$-matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ *aditivno* od manjih matrica. Za jednodimenzionalan slučaj krović funkcija sa podintervalima $\mathcal{D}_k = \{x : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$, manje matrice su dimenzije 2×2. Isto vidimo na slici 2.7. U ovom slučaju su samo integrali $\varphi_i' \varphi_j'$ i $\varphi_i \varphi_j$ različiti od 0 za $i, j \in \mathcal{I}_k := \{k, k+1\}$. $\mathcal{I}_k$ je skup indeksa baznih funkcija koje su različite od 0 na $\mathcal{D}_k$. *Algoritam uklapanja* provodi petlju nad indeksima podintervala $k = 0, \ldots, m-1$ i distribuira 2×2 matrice aditivno na pozicije $(i, j) \in \mathcal{I}_k$.

Prije početka sastavljanja, matrice A i B inicijaliziramo nulama. Za $k = 0, \ldots, m-1$ kao matricu A dobivamo $(m+1) \times (m+1)$-matricu:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h_0} & -\frac{1}{h_0} & 0 & \ldots & \\ -\frac{1}{h_0} & \frac{1}{h_0}+\frac{1}{h_1} & -\frac{1}{h_1} & 0 & \ldots \\ 0 & -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & 0 \quad \ldots \\ \vdots & 0 & -\frac{1}{h_2} & \ldots & \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Matricu B uklapamo na analogan način. U jednodimenzionalnom slučaju i za krović funkcije su matrice tridijagonalne. Za ekvidistantnu mrežu uz $h = h_k$, matrica A posebno postaje:

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \ldots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

dok je B oblika:

$$B = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \ldots & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \ldots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

2.5.3 Jednostavna primjena

Postupak demonstriramo na rubnom problemu:

$$Lu \coloneqq -u'' = f(x) \;\text{ uz }\; u(x_0) = u(x_m) = 0. \tag{2.17}$$

Prema Galerkinovom pristupu, supstituiramo $w \coloneqq \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i$ u diferencijalnu jednadžbu. Prema (2.8) dobivamo:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \int_{x_0}^{x_m} L\varphi_i \varphi_j dx = \int_{x_0}^{x_m} f \varphi_j dx.$$

Na lijevoj strani parcijalno integriramo, a na desnoj iskoristimo Svojstvo 1(c). Rezultat je sustav jednadžbi:

$$\sum_{i=0}^{m} c_i \underbrace{\int_{x_0}^{x_m} \varphi_i' \varphi_j' \, dx}_{a_{ij}} = \sum_{i=0}^{m} f_i \underbrace{\int_{x_0}^{x_m} \varphi_i \varphi_j \, dx}_{b_{ij}}, \; j = 0, \ldots, m. \tag{2.18}$$

Ovo možemo zapisati:

$$Ac = Bf. \tag{2.19}$$

Budući da je $A(1, 1, \ldots, 1)^T = 0$, matrica A iz (2.15) je singularna. To je posljedica nepostojanja jedinstvenog rješenja sustava (2.19). Možemo uočiti da je to konzistentno sa diferencijalnom jednadžbom $-u'' = f$: ako je $u(x)$ rješenje, tada je to isto i $u(x) + \alpha$, za proizvoljan α. Jedinstveno rješenje ćemo dobiti tek kada zadovoljimo rubne uvjete; rješenje u problema mora biti fiksirano sa barem jednim rubnim uvjetom. U našem slučaju iz rubnih uvjeta u (2.17) možemo dobiti $c_0 = c_m = 0$. Ovo pak možemo unijeti u sustav jednadžbi tako da A postane regularna bez gubitka simetrije. Za $c_0 = 0$ zamijenimo prvu jednadžbu sustava (2.19) sa $(1, 0, \ldots, 0)^T c = 0$. Dodavanjem prve jednadžbe drugoj dobivamo 0 u prvom stupcu matrice A. Analogno realiziramo $c_m = 0$ u zadnjem retku i stupcu matrice A. Sada nam preostaje samo unutarnji dio matrice A veličine $(m-1) \times (m-1)$. Matrica B je pak dimenzija $(m-1) \times (m+1)$. Konačno (u slučaju ekvidistantne mreže) sustav jednadžbi je:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 2 & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{m-2} \\ c_{m-1} \end{bmatrix} = \frac{h^2}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & & & & 0 \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & & & & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Iako smo u ovom primjeru uzeli ekvidistantnu mrežu radi jasnijeg izlaganja, naša primjena bavit će se ne-ekvidistantnim mrežama. U slučaju nehomogenih rubnih uvjeta, unaprijed su zadane vrijednosti c_0 i c_m.

Poglavlje 3

Primjena na standardne opcije

Iako se puna prednost metoda konačnih elemenata (zbog njihove fleksibilnosti) može vidjeti tek u višedimenzionalnim slučajevima, tj. kada opcija ima više predmetnih imovina, u ovom dijelu se prvo upoznajemo sa jednodimenzionalnom primjenom na standardnim europskim opcijama.

Kao što smo napomenuli u prvom poglavlju, vrijednost europske opcije sa jednom predmetnom imovinom računamo pomoću Black–Scholes-ove jednadžbe. Prvo ćemo ukratko pokazati pristup pomoću konačnih elemenata.

Princip konačnih elemenata primjenjujemo na transformirani oblik početne Black–Scholes-ove jednadžbe $y_\tau = y_{xx}$ (koji postižemo transformacijama navedenima u (4.2)). Rješenje jednadžbe aproksimiramo pomoću proširenja (2.5) na:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i(\tau)\varphi_i(x) + \varphi_0(x,\tau). \tag{3.1}$$

Pritom je φ_0 unaprijed konstruirana tako da zadovoljava rubne uvjete i ako je to moguće, početni uvjet. Dakle, φ_0 nam je poznata, dok $\sum_{i=1}^{N} w_i(\tau)\varphi_i(x)$ ne reflektira nehomogene Dirichletove rubne uvjete. Za bazne funkcije $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ uzimamo krović funkcije, sa kojima dobivamo i diskretizaciju x-osi. Time dobivamo da je $N = m-1, x_0 = x_{min}, x_m = x_{max}$. Funkcije $w_1, \ldots, w_{m-1}$ su nepoznate. Izračunamo li derivacije (3.1) te uvrstimo u $y_\tau = y_{xx}$, dobivamo oblik Galerkinovog pristupa:

$$\int_{x_0}^{x_m} \left[\sum_{i=1}^{m-1} \dot{w}_i\varphi_i + \dot{\varphi}_0\right]\varphi_j \, dx = \int_{x_0}^{x_m} \left[\sum_{i=1}^{m-1} w_i\varphi_i'' + \varphi_0''\right]\varphi_j \, dx \quad \text{za} \quad j = 1, \ldots, m-1. \tag{3.2}$$

Pritom smo točkom označili deriviranje obzirom na τ, a crticom obzirom na x. Sada grupiramo članove koji su uz derivacije φ_0 kako bismo dobili vektore $a(\tau), b(\tau)$:

$$a(\tau) \coloneqq \begin{bmatrix} \int \varphi_0''(x,\tau)\varphi_1(x)dx \\ \vdots \\ \int \varphi_0''(x,\tau)\varphi_{m-1}(x)dx \end{bmatrix}, b(\tau) \coloneqq \begin{bmatrix} \int \dot{\varphi}_0(x,\tau)\varphi_1(x)dx \\ \vdots \\ \int \dot{\varphi}_0(x,\tau)\varphi_{m-1}(x)dx \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Koristeći $(m-1)\times(m-1)$-matrice A i B iz (4.21) (uz $h = \Delta x$) te parcijalnom integracijom dobivamo:

$$B\dot{w} + b = -Aw - a. \tag{3.4}$$

Rješenje ovog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi bit će vektor funkcija $w(\tau) \coloneqq (w_1, \ldots, w_{m-1})^T$. Početni uvjeti za $\tau = 0$ su dani sa (3.1). Pretpostavimo da je početni uvjet oblika $y(x,0) = \alpha(x)$; tada je:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i(0)\varphi_i(x) + \varphi_0(x,0) = \alpha(x). \tag{3.5}$$

Specijalno za $x = x_j$ suma se reducira na $w_j(0)\cdot 1$, čime dobivamo: $w_j(0) = \alpha(x_j) - \varphi_0(x_j,0)$. Definirajmo $w^{(\nu)} \coloneqq w(t_\nu)$. Primjenom trapezne formule

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{h}{2}(f(Q_n,t_n) + f(Q_{n+1},t_{n+1}))$$

na problem

$$MQ' + KQ = F(t)$$

(u našem slučaju je to (3.4)) dobivamo metodu Crank–Nicolson-ovog tipa:

$$(B + \frac{\Delta\tau}{2}A)w^{(\nu+1)} = (B - \frac{\Delta\tau}{2}A)w^{(\nu)} - \frac{\Delta\tau}{2}(a^{(\nu)} + a^{(\nu+1)} + b^{(\nu)} + b^{(\nu+1)}). \tag{3.6}$$

Pritom je

$$M = B,\ Q = w,\ K = A,\ F(t) = -a - b.$$

Funkciju f dobivamo iz problema na sljedeći način:

$$Q' = \underbrace{-M^{-1}KQ + M^{-1}F(t)}_{f(Q,t)\coloneqq}.$$

Za metodu konačnih elemenata za A i B vrijedi:

$$A = O\Big(\frac{1}{\Delta x}\Big), B = O(\Delta x).$$

Zbog separacije x i τ smo u mogućnosti promatrati redove zasebno. Odavde pak vidimo red $O(\Delta\tau^2)$ Crank–Nicolson-ove metode u (3.6). Preostaje vidjeti red konvergencije obzirom na diskretizaciju u x. Zbog separacije varijabli je to dovoljno napraviti samo u jednodimenzionalnom slučaju, što će biti pokazano u poglavlju o ocjenama greške.

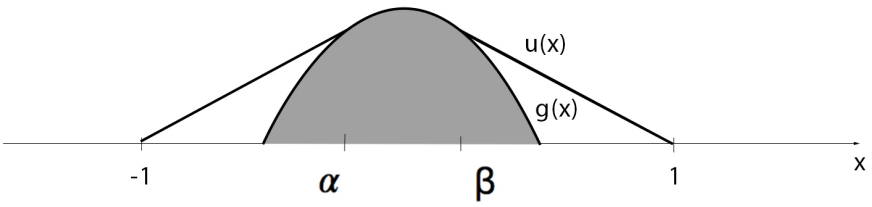
Poglavlje 4

Problem prepreke

Kako bismo se mogli baviti američkim opcijama, prvo trebamo promotriti jednostavan problem prepreke.

4.1 Problem prepreke

Pretpostavljamo funkciju "prepreku" $g(x)$, recimo takvu da je $g(x) > 0$ za $\alpha < x < \beta$, $g \in \mathcal{C}^2$, $g'' < 0$ i $g(-1) < 0, g(1) < 0$ (slika 4.1). Preko prepreke "razvučemo" funkciju u minimalne duljine kao elastičnu vrpcu. Između $x = \alpha$ i $x = \beta$ krivulja u prijanja uz rub prepreke. U točkama α i β krivulja dotiče tangencijalno prepreku.Vrijednosti α i β su u početku nepoznati. Ovaj problem prepreke je jednostavan problem slobodnih granica (rubova). Cilj nam je preformulirati problem tako da slobodne granice nisu eksplicitno vidljive u svrhu efikasnosti.



Slika 4.1: Funkcija $u(x)$ preko prepreke $g(x)$

Zahtijevamo da je $u \in \mathcal{C}^1[-1,1]$ te da vrijedi:

$$\begin{aligned} u'' &= 0 \quad \text{za} \quad -1 < x < \alpha \text{ (tada } u > g), \\ u &= g \quad \text{za} \quad \alpha < x < \beta \text{ (tada } u'' = g'' < 0), \\ u'' &= 0 \quad \text{za} \quad \beta < x < 1 \text{ (tada } u > g). \end{aligned}$$

Ovime smo dobili slučajeve:

$$\begin{aligned} &\text{ako je } u > g, \text{ tada je } u'' = 0, \\ &\text{ako je } u = g, \text{ tada je } u'' < 0. \end{aligned}$$

Sada možemo ove slučajeve povezati s američkim opcijama, tj. dobivamo sljedeće slučajeve:

$$\text{ako je } V > \mathit{isplata}, \text{ tada vrijedi Black–Scholes-ova jednadžba } \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) = 0,$$

$$\text{ako je } V = \mathit{isplata}, \text{ tada vrijedi Black–Scholes-ova nejednadžba } \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_{BS}(V) < 0,$$

gdje je

$$\mathcal{L}_{BS}(V) := \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-\delta) S \frac{\partial V}{\partial S} - rV.$$

Povlačenjem ove poveznice dobili smo motivaciju za rješavanje problema prepreke. Zapišimo sada problem na sljedeći način:

$$\begin{cases} \text{tražimo funkciju } u \text{ takvu da vrijedi:} \\ u''(u-g) = 0,\ -u'' \geq 0,\ u - g \geq 0, \\ u(-1) = u(1) = 0,\ u \in \mathcal{C}^1[-1,1] \end{cases} . \tag{4.1}$$

Ovako formuliran problem nazivamo *problem linearne komplementarnosti*. Uočimo da se slobodni rubni uvjeti u $x = \alpha$ i $x = \beta$ ne spominju eksplicitno. Ovo nam je jako korisno budući da su nam α i β nepoznati. Kada (i ako) izračunamo rješenje ovako formuliranog problema, moći ćemo iz rješenja iščitati α i β. Sljedeći je korak pronaći numeričku metodu za rješavanje problema linearne komplementarnosti.

4.2 Linearna komplementarnost za američke put opcije

Izvedimo problem linearne komplementarnosti za američke opcije. Ograničimo se na opcije bez dividendi (dakle $\delta = 0$). Pomoću transformacija

$$
\begin{aligned}
&S = Ke^x,\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2},\ q \coloneqq \frac{2r}{\sigma^2},\ q_\delta \coloneqq \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2},\\
&V(S,t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) =: v(x,\tau),\\
&v(x,\tau) =: K\ e^{-\frac{1}{2}(q_\delta - 1)x - (\frac{1}{4}(q_\delta-1)^2 + q)\tau}\ y(x,\tau)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

dobivamo jednadžbu ekvivalentnu Black–Scholes-ovoj

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{uz} \quad V_P^{Am} > (K-S)^+,$$

za $y(x,\tau)$ sa $\tau \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Iz dodatne relacije za rubni uvjet iz (1.7)

$$V_P^{Am} > (K-S)^+ = K \max\{1 - e^x, 0\}$$

dobivamo:

$$
\begin{aligned}
y(x,\tau) &\geq e^{\frac{1}{2}(q-1)x + (\frac{1}{4}(q+1)^2)\tau} \max\{1-e^x, 0\}\\
&= e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{(1-e^x)e^{\frac{1}{2}(q-1)x}, 0\}\\
&= e^{\frac{1}{4}(q+1)^2\tau} \max\{(e^{\frac{1}{2}(q-1)x} - e^{\frac{1}{2}(q+1)x}, 0\}\\
&=: g(x,\tau).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Početni uvjet sada možemo zapisati $y(x,0) = g(x,0)$. Sve zajedno, zahtijevamo

$$y_\tau = y_{xx},$$

kao i

$$y(x,0) = g(x,0),$$

te

$$y(x,\tau) \geq g(x,\tau),$$

uz rubne uvjete te da je $y \in \mathcal{C}^1$ po x. Za $x \to \infty$ je $g(x,\tau) = 0$, pa $y(x,\tau) \to 0$ kada $x \to \infty$ možemo zapisati kao:

$$y(x,\tau) = g(x,\tau) \text{ za } x \to \infty.$$

Isto vrijedi i za $x \to -\infty$. U praksi se rubni uvjeti zapravo formuliraju za neke x_{min} i x_{max}.

Zaključno, američku put opciju formuliramo kao problem linearne komplementarnosti:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial y}{\partial \tau} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(y-g) = 0, \\ \dfrac{\partial y}{\partial \tau} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0, \quad y - g \geq 0, \\ y(x,0) = g(x,0), \quad y(x_{min},\tau) = g(x_{min},\tau), \\ y(x_{max},\tau) = g(x_{max},\tau), \quad y \in \mathcal{C}^1 \text{ po } x \end{cases}.$$

4.3 Računanje vrijednosti američkih opcija

Okupljamo rezultate prethodnog dijela u sljedećem problemu. Pritom pretpostavljamo $r > 0$ za put, a $\delta > 0$ za call opciju; inače se opcija ne bi razlikovala od europske.

Problem 1. *(Problem linearne komplementarnosti)*

$$q = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad q_\delta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2}$$

$$put: \quad g(x,\tau) := e^{\frac{\tau}{4}((q_\delta-1)^2+4q)} max\left\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)}, 0\right\}$$

$$call: \quad g(x,\tau) := e^{\frac{\tau}{4}((q_\delta-1)^2+4q)} max\left\{e^{\frac{x}{2}(q_\delta+1)} - e^{\frac{x}{2}(q_\delta-1)}, 0\right\}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\Big(y-g\Big) = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0, \quad y - g \geq 0$$

$$y(x,0) = g(x,0), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x,\tau) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x,\tau)$$

4.4 Varijacijska forma problema prepreke

Pretpostavimo da nam je sada funkcija prepreke $g(x,\tau)$. Problem prepreke možemo zapisati kao varijacijsku nejednakost. Funkciju u možemo karakterizirati uspoređujući je sa funkcijama v iz skupa $\mathcal{K}$ dozvoljenih funkcija:

$$\mathcal{K} \coloneqq \{v \in \mathcal{C}^0[-1,1] : v(-1) = v(1) = 0, v(x) \geq g(x) \text{ za } -1 \leq x \leq 1, \\ v \text{ je po dijelovima klase } \mathcal{C}^1\}.$$

Uočimo da je $u \in \mathcal{K}$. Za $v \in \mathcal{K}$ vrijedi $v - g \geq 0$ te uz $-u'' \geq 0$ iz (4.1) vrijedi $-u''(v-g) \geq 0$. Slijedi da za sve $v \in \mathcal{K}$ mora vrijediti:

$$\int_{-1}^{1} -u''(v-g)dx \geq 0.$$

Pomoću (4.1) imamo:

$$\int_{-1}^{1} -u''(u-g)dx = 0.$$

Oduzimanjem dobivamo:

$$\int_{-1}^{1} -u''(v-u)dx \geq 0, \text{ za bilo koji } v \in \mathcal{K}.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\underbrace{[-u'(v-u)]\Big|_{-1}^{1}}_{=0 \text{ zbog } u(-1)=v(-1)=0 \text{ i } u(1)=v(1)=0} + \int_{-1}^{1} u'(v-u)'dx \geq 0.$$

Sakupljamo dobiveno u sljedeći rezultat. Ako je u rješenje problema (4.1), tada vrijedi:

$$\int_{-1}^{1} u'(v-u)'dx \geq 0, \text{ za sve } v \in \mathcal{K}. \tag{4.4}$$

Budući da v varira u skupu $\mathcal{K}$, nejednakost kao gornja se naziva *varijacijska nejednakost*. Karakterizacija (4.4) nam dopušta da konstruiramo aproksimaciju w: umjesto u, tražimo $w \in \mathcal{K}$ takvu da zadovoljava (4.4) za sve $v \in \mathcal{K}$, tj.

$$\int_{-1}^{1} w'(v-w)'dx \geq 0.$$

4.5 Američke opcije

Budući da problem prepreke možemo zapisati u varijacijskom obliku, a problem izračuna vrijednosti američkih opcija je problem prepreke (tj. problem linearne komplementarnosti), problem izračuna vrijednosti američke opcije možemo zapisati kao varijacijski problem. U ovom slučaju klasa dozvoljenih funkcija je definirana sa:

$$\mathcal{K} \coloneqq \{v \in \mathcal{C}^0 : \frac{\partial v}{\partial x} \text{ po dijelovima } \mathcal{C}^0,\ v(x,\tau) \geq g(x,\tau) \text{ za sve } x,\tau,$$
$$v(x,0) = g(x,0),\ v(x_{max},\tau) = g(x_{max},\tau),\ v(x_{min},\tau) = g(x_{min},\tau)\}. \tag{4.5}$$

Pretpostavimo sada da je $v \in \mathcal{K}$ te y egzaktno rješenje Problema 1. Rješenje parcijalne diferencijalne nejednadžbe y je klase $\mathcal{C}^2$ na kontinuacijskom području i $y \in \mathcal{K}$. Iz

$$v \geq g, \quad \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \geq 0$$

slijedi

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)(v-g)dx \geq 0.$$

Iz komplementarnosti slijedi:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)(y-g)dx = 0.$$

Oduzimanjem dobivamo

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)(v-y)dx \geq 0.$$

Parcijalnom integracijom dobivamo sljedeće:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}(v-y) + \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx - \frac{\partial y}{\partial x}(v-y)\Big|_{x_{min}}^{x_{max}} \geq 0.$$

Desni dio nestaje jer je $v = y$ u x_{min} i x_{max}. Konačni rezultat je:

$$I(y;v) \coloneqq \int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}(v-y) + \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right) dx \geq 0 \text{ za sve } v \in \mathcal{K}. \tag{4.6}$$

U posebnom slučaju kada je $v = y$ integral poprima minimalnu vrijednost $\min_{v\in\mathcal{K}} I(y;v) = I(y;y) = 0$. Nama značajno pitanje je: drži li se nejednakost (4.6) za $\hat{y} \in \mathcal{K}$ koji nije klase $\mathcal{C}^2$? (Američka opcija je klase $\mathcal{C}^2$, osim na krivulji ranog izvršenja.) Cilj nam je stoga konstruirati neki $\hat{y} \in \mathcal{K}$ takav da je $I(\hat{y};v) \geq 0$ za sve $v \in \mathcal{K}$ te je $\inf_{v\in\mathcal{K}} I(\hat{y};v) = 0$. Ovakva formulacija se naziva *slaba verzija*, jer ne koristi $\hat{y} \in \mathcal{C}^2$. Analogno tome, rješenja ovog problema (koja su globalno neprekidna, ali po dijelovima klase $\mathcal{C}^1$) nazivamo *slaba rješenja*. Originalna PDJ zahtijeva $y \in \mathcal{C}^2$. Takva rješenja ćemo zvati *jaka* ili *klasična* rješenja.

Sada pristupamo (4.6) pomoću metoda konačnih elemenata. Pretpostavimo aproksimacije za $\hat{y}$ i v oblika

$$\begin{aligned} &\sum_i w_i(\tau)\varphi_i(x) \text{ za } \hat{y}, \\ &\sum_i v_i(\tau)\varphi_i(x) \text{ za } v. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ovakav oblik pretpostavlja separaciju nezavisnih varijabli τ i x. Kao posljedica, ista x-mreža se primijenjuje za sve τ, što za posljedicu ima pravokutnu mrežu u (x,τ)-ravnini. Ovisnost o vremenu je uključena u funkcije w_i i v_i. Budući da bazne funkcije φ_i predstavljaju x_i-mrežu, provodimo semidiskretizaciju. Ubacivanjem (4.7) u (4.6) dobivamo:

$$\begin{aligned} &\int \left\{ \left(\sum_i \frac{dw_i}{d\tau}\varphi_i \right) \left(\sum_j (v_j - w_j)\varphi_j \right) + \left(\sum_i w_i\varphi_i' \right) \left(\sum_j (v_j - w_j)\varphi_j' \right) \right\} dx \\ &\quad = \sum_i \sum_j \frac{dw_i}{d\tau}(v_j - w_j) \int \varphi_i\varphi_j dx + \sum_i \sum_j w_i(v_j - w_j) \int \varphi_i'\varphi_j' dx \geq 0. \end{aligned}$$

Vektorska notacija (s matricama A i B iz (4.21) za krović funkcije i ekvidistantne čvorove):

$$\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^T B(v - w) + w^T A(v - w) \geq 0$$

ili

$$(v - w)^T \left(B\frac{dw}{d\tau} + Aw \right) \geq 0,$$

zbog simetričnosti matrica A i B. Drugi korak je diskretizirati vrijeme. U tu svrhu definiramo vektore

$$w^{(\nu)} \coloneqq w(\tau_\nu),\ v^{(\nu)} \coloneqq v(\tau_\nu).$$

Nakon aproksimiranja $\frac{dw}{d\tau}$ podijeljenim diferencama i θ-usrednjenja dolazimo do nejednakosti

$$\left(v^{(\nu+1)} - w^{(\nu+1)}\right)^T \left(B\frac{1}{\Delta\tau}(w^{(\nu+1)} - w^{(\nu)}) + \theta A w^{(\nu+1)} + (1-\theta)Aw^{(\nu)}\right) \geq 0, \quad (4.8)$$

za sve ν. Za $\theta = \frac{1}{2}$ je ovo metoda tipa Crank–Nicolson. Uređivanjem prethodnog izraza dobivamo:

$$\left(v^{(\nu+1)} - w^{(\nu+1)}\right)^T \left((B + \Delta\tau\theta A)w^{(\nu+1)} + (\Delta\tau(1-\theta)A - B)w^{(\nu)}\right) \geq 0.$$

Ako uvedemo zamjene:

$$r \coloneqq (B - \Delta\tau(1-\theta)A)w^{(\nu)}, \quad (4.9)$$

$$C \coloneqq B + \Delta\tau\theta A, \quad (4.10)$$

nejednakost je sada ekvivalentna sljedećoj:

$$\left(v^{(\nu+1)} - w^{(\nu+1)}\right)^T \left(Cw^{(\nu+1)} - r\right) \geq 0. \quad (4.11)$$

Ovo je u potpunosti diskretizirana verzija $I(\hat{y}; v) \geq 0$.

Dodatni uvjeti: $\hat{y}(x,\tau) \geq g(x,\tau)$ nam daje:

$$\sum w_i(\tau)\varphi_i(x) \geq g(x,\tau).$$

Za funkcije φ_i (sa svojstvom $\varphi_i(x_i) = 1$ i $\varphi_i(x_j) = 0$ za $j \neq i$, kao što su krović funkcije) i $x = x_j$ ovo implicira $w_j(\tau) \geq g(x_j,\tau)$. Sa $\tau = \tau_\nu$ imamo

$$w^{(\nu)} \geq g^{(\nu)},$$
$$v^{(\nu)} \geq g^{(\nu)}.$$

Dakle, za svaku vremensku razinu ν moramo pronaći rješenje koje zadovoljava (4.11) i dodatni uvjet $w^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)}$ za sve $v^{(\nu+1)} \geq g^{(\nu+1)}$. Ovaj postupak konačnih elemenata za američke opcije prikazujemo u sljedećem algoritmu:

Algoritam 1.
$\theta := \frac{1}{2}$.
Izračunaj $w^{(0)}$.
Za $\nu = 1, \ldots, \nu_{max}$*:*
Izračunaj $r = (B - \Delta\tau(1-\theta)A)w^{(\nu-1)}$ *i* $g = g^{(\nu)}$
Konstruiraj w *takav da za sve* $v \geq g$

$$(v-w)^T(Cw-r) \geq 0,\ w \geq g$$

Postavi $w^\nu := w$

Posebno naglasimo glavni dio, a to je konstruirati w takav da je

Za sve $v \geq g$:

$$(v-w)^T(Cw-r) \geq 0,\ w \geq g \tag{4.12}$$

Ovaj zadatak možemo reformulirati. U tom slučaju sljedeće vrijedi za w:

$$\begin{aligned} Cw - r \geq 0,\ w \geq g \\ (Cw-r)^T(w-g) = 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Teorem 1. *(ekvivalencija)*
Rješenje problema (4.12) je ekvivalentno rješenju problema (4.13).

Dokaz.

(a) (4.13) $\Rightarrow$ (4.12):
Neka w rješava (4.13). Tada je $w \geq g$ te

$$(v-w)^T(Cw-r) = (v-g)^T \underbrace{(Cw-r)}_{\geq 0} - \underbrace{(w-g)^T(Cw-r)}_{=0}.$$

Slijedi da je

$$(v - w)^T(Cw - r) \geq 0$$

za sve $v \geq g$.

(b) (4.12) $\Rightarrow$ (4.13)
Neka w rješava (4.12). Tada je $w \geq g$ te

$$v^T(Cw - r) \geq w^T(Cw - r) \text{ za sve } v \in \mathcal{K}.$$

Pretpostavimo da je k-ta komponenta $Cw - r$ negativna te napravimo v_k proizvoljno velikim. Tada lijeva strana postaje proizvoljno mala, što je kontradikcija. Dakle $Cw - r \geq 0$. Sada je:

$$w \geq g \Rightarrow (w - g)^T(Cw - r) \geq 0.$$

Stavimo $v = g$ u (4.12). Tada vrijedi

$$(w - g)^T(Cw - r) \leq 0,$$

zbog čega mora biti

$$(w - g)^T(Cw - r) = 0.$$

□

4.6 Analiza problema linearne komplementarnosti

Za svaki trenutak ν u Algoritmu 1 moramo riješiti problem linearne komplementarnosti. Prije samog numeričkog rješenja, analizirajmo problem. Neka je sada r općeniti vektor, a C simetrična pozitivno definitna matrica. Problem transformiramo na sljedeći način:

$$x \coloneqq w - g, \tag{4.14}$$
$$y \coloneqq Cw - r. \tag{4.15}$$

Tada je problem pronalaska rješenja w za problem ekvivalentan sljedećem problemu:

Problem 2. *(Cryer)*

Pronađi vektore x i y takve da za $q \coloneqq r - Cg$ vrijedi
$Cx - y = q$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^T y = 0$.

Kako bismo dokazali da ovaj problem ima jedinstveno rješenje, pokazujemo njegovu ekvivalenciju sa problemom minimizacije.

Lema 1. *Problem 2 je ekvivalentan minimizacijskom problemu* $\min\limits_{x \geq 0} G(x)$ *gdje je*

$$G(x) \coloneqq \frac{1}{2}(x^T C x) - q^T x$$

i C simetrična i pozitivno definitna matrica.

Dokaz. $G_x = Cx - q$, $G_{xx} = C$ i C je simetrična pozitivno definitna matrica. Stoga je Hesseova matrica G_{xx} simetrična i pozitivno definitna. G je tada striktno konveksna te ima jedinstven minimum na svakom konveksnom skupu u $\mathbb{R}^n$ (npr. na $x \geq 0$). *Kuhn–Tucker-ov* teorem[1] minimizira G uz $H_i(x) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Ovaj teorem nam kaže da je vektor x_0 (minimum) ekvivalentan egzistenciji Lagrangeovog multiplikatora $y \geq 0$ takvog da je

$$\nabla G(x_0) + \left(\frac{\partial H(x_0)}{\partial x} \right)^T y = 0, \; y^T H(x_0) = 0.$$

Skup $x \geq 0$ navodi na definiciju $H(x) \coloneqq -x$. Stoga je Kuhn–Tucker-ov uvjet $Cx - q + (-I)^T y = 0$, $y^T x = 0$, čime smo dobili uvjet u Problemu 2. □

Iz ove leme možemo izvući iterativan postupak, tj. algoritam baziran na SOR metodi (više o njoj u Dodatku A). Budući da problem nije standardnog $Cx = r$ oblika, morat ćemo napraviti modifikaciju metode. Iteraciju SOR metode za $Cx = q = r - Cg$ pišemo po komponentama kao iteraciju vektora korekcije $x^{(k)} - x^{(k-1)}$:

$$r_i^{(k)} \coloneqq q_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} x_j^{(k)} - c_{ii} x_i^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j^{(k-1)}, \tag{4.16}$$

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega_R \frac{r_i^{(k)}}{c_{ii}}. \tag{4.17}$$

Pritom je k broj iteracije, $n = m - 1$ te je u slučajevima $i = 1$, $i = m - 1$ jedna od suma u (4.16) je trivijalna. Faktor relaksacije ω_R je odabran na način da poboljšava konvergenciju. "Projekcijska" SOR metoda počinje od vektora $x^{(0)} \geq 0$ te je identična SOR metodi do na modifikaciju na (4.17) za $x_i^{(k)} \geq 0$.

[1] Više o njemu u [6] i [8]

Algoritam 2. *(PSOR, Projekcijska SOR metoda)*

vanjska petlja: $k = 1, 2, \ldots$
unutarnja petlja: $i = 1, \ldots, m-1$

$$r_i^{(k)} \text{ kao u (4.16)}, \tag{4.18}$$

$$x_i^{(k)} = max\left\{0, x_i^{(k-1)} + \omega_R \frac{r_i^{(k)}}{c_{ii}}\right\}, \tag{4.19}$$

$$y_i^{(k)} = -r_i^{(k)} + c_{ii}\left(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right). \tag{4.20}$$

Ova metoda rješava Problem 2 iterativno po komponentama uz $x^{(k)} \geq 0$. Lako pomoću (4.19) pređemo sa $x \geq 0$ na $w \geq g$. Dokaz konvergencije Algoritma 2 je baziran na Lemi 1 (niz definiran u algoritmu minimizira G). Skica dokaza bila bi sljedeća:

- Za $0 < \omega_R < 2$ je niz $G(x^{(k)})$ monotono opadajuć
- Pokažemo $x^{(k+1)} - x^{(k)} \to 0$ za $k \to \infty$
- Limes postoji jer je $x^{(k)}$ u kompaktnom skupu $\{x \mid G(x) \leq G(x^{(0)})\}$
- Vektor r konvergira prema $-y$
- Pretpostavka $r \geq 0$ i $r^T \neq 0$ vodi do kontradikcije sa $x^{(k+1)} - x^{(k)} \to 0$.

Gornja teorija nam daje da je dovoljno riješiti Problem 2; $Cw \geq r$ sigurno vrijedi.

4.7 Algoritam za računanje američkih opcija

Dosad naučeno primijenjujemo na računanje vrijednosti američkih opcija, što objedinjujemo u Algoritmu 3. Vektorski zapis problema koji rješavamo je

$$Cw^{(\nu+1)} \geq r^{(\nu)},$$

gdje je matrica C definirana kao:

$$C := B + \Delta\tau\theta A.$$

Pritom su $(m-1)\times(m-1)$ matrice A i B, matrice krutosti i mase, dane sa:

$$A = \frac{1}{\Delta x}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 2 & -1 \\ \vdots & \vdots & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{\Delta x}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 4 & 1 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 4 \end{bmatrix}, \tag{4.21}$$

gdje je $\Delta x := \dfrac{x_m - x_0}{m}$ korak ekvidistantne mreže (prethodno oznaka h). Sada je vektor r duljine $m-1$ dan sa:

$$r^{(\nu)} = (B - \Delta\tau(1-\theta)A)w^{(\nu)}.$$

Neka su sada $\alpha := \dfrac{2}{3}\Delta x$, $\beta := \dfrac{\Delta\tau\theta}{\Delta x}$, $\gamma := \dfrac{\Delta\tau(1-\theta)}{\Delta x}$. Matrica C je sada:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha+2\beta & \frac{\alpha}{4}-\beta & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha}{4}-\beta & \alpha+2\beta & \frac{\alpha}{4}-\beta & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\alpha}{4}-\beta & \alpha+2\beta & \frac{\alpha}{4}-\beta & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \alpha+2\beta & \frac{\alpha}{4}-\beta \\ \vdots & \vdots & & \frac{\alpha}{4}-\beta & \alpha+2\beta \end{bmatrix},$$

a $B - \Delta\tau(1-\theta)A$ je dana sa:

$$\begin{bmatrix} \alpha-2\gamma & \frac{\alpha}{4}+\gamma & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\alpha}{4}+\gamma & \alpha-2\gamma & \frac{\alpha}{4}+\gamma & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\alpha}{4}+\gamma & \alpha-2\gamma & \frac{\alpha}{4}+\gamma & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \alpha-2\gamma & \frac{\alpha}{4}+\gamma \\ \vdots & \vdots & & \frac{\alpha}{4}+\gamma & \alpha-2\gamma \end{bmatrix}.$$

Algoritam 3. *(Glavni algoritam)*

Inicijaliziramo funkciju $g(x,\tau)$ *kao u Problemu 1.*
Odaberemo θ *(Za Crank–Nicolson biramo* $\theta = \frac{1}{2}$*).*
PSOR:
  Izaberemo $1 \leq w_R < 2$ *(npr.* $\omega_R = 1$*)*
  Fiksiramo ogradu greške ϵ *(npr.* $\epsilon = 10^{-5}$*)*
Fiksiramo diskretizaciju odabirom x_{min}*,* x_{min}*,* m*,* ν_{max}
(npr. $x_{min} = -5$*,* $x_{min} = 5$*,* $m = \nu_{max} = 100$*).*
Izračunamo
  $\Delta x \coloneqq (x_{max} - x_{min})/m$
  $\Delta\tau \coloneqq \frac{1}{2}\sigma^2 T/\nu_{max}$
  $x_i \coloneqq x_{min} + i\Delta x$ *za* $i = 0,\ldots,m$
Inicijaliziramo vektor w *sa* $g^{(0)} = (g(x_1,0),\ldots,g(x_{m-1},0))$.
τ-petlja
  za $\nu = 0,1,\ldots,\nu_{max}-1$*:*
    $\tau_\nu \coloneqq \nu\Delta\tau$
    $r_i \coloneqq (\frac{\alpha}{4}+\gamma)w_{i-1} + (\alpha-2\gamma)w_i + (\frac{\alpha}{4}+\gamma)w_{i+1}$ *za* $2 \leq i \leq m-2$
    $r_1 \coloneqq (\alpha-2\gamma)w_1 + (\frac{\alpha}{4}+\gamma)w_2$
    $r_{m-1} \coloneqq (\frac{\alpha}{4}+\gamma)w_{m-2} + (\alpha-2\gamma)w_{m-1}$
    Rješenje problema linearne komplementarnosti pomoću PSOR metode:
      Postavimo po komponentama $v = max(w, g^{(\nu+1)})$.
      PSOR-petlja
        Za $k = 1,2,\ldots$*:*
          dok je $\left\|v^{novi} - v\right\|_2 > \epsilon$*:*
            za $i = 1,2,\ldots,m-1$*:*
              $\rho \coloneqq (r_i - (\frac{\alpha}{4}-\beta)(v_{i-1}^{novi} + v_{i+1}))/(\alpha+2\beta)$
              ($v_0^{novi} = v_m = 0$ *)*
              $v_i^{novi} = max\{g_{i,\nu+1}, v_i + \omega_R(\rho - v_i)\}$
            $v \coloneqq v^{neq}$ *(nakon testa konvergencije)*
    $w^{(\nu+1)} = w = v$

Europske opcije Uz neke modifikacije, moguće je prethodni algoritam iskoristiti za računanje europskih opcija. Liniju $v_i^{novi} = max\{g_{i,\nu+1}, v_i + \omega_R(\rho - v_i)\}$ zamijenimo sa $v_i^{novi} = v_i + \omega_R(\rho - v_i)$. Time dobivamo standardnu SOR metodu za rješenje $Cw = r$ (bez uvjeta $w \geq g$). Ukoliko uredimo i rubne uvjete, dobiveni algoritam možemo primijeniti na europske opcije.

Zaključno
Analizu za američke opcije završavamo pokazivanjem načina na koji se Algoritam 3 primijenjuje na konkretan financijski zadatak (formuliran varijablama $x_i, g_{i\nu}, w_i$, a ne financijskim varijablama). Za to nam je potrebno sučelje između stvarnog svijeta i svijeta u kojem je definiran algoritam. Sučelje je dano transformacijama (4.2). Prijelaz iz stvarnog zadatka u model algoritma izražavamo u sljedećem algoritmu.

Algoritam 4. *(Američke opcije)*

Input: *cijena izvršenja K, vrijeme do isteka T, spot cijena S_0, r, δ, σ*
Izvrši Algoritam 3 (τ-petlja staje u $\tau_{kraj} = \frac{1}{2}\sigma^2 T$).
Za $i = 1, \ldots, m-1$:
w_i *aproksimira* $y(x_i, \frac{1}{2}\sigma^2 T)$,
$S_i = Ke^{x_i}$
$V(S_i, 0) = Kw_i e^{-\frac{x_i}{2}(q_\delta - 1)} e^{-\tau_{kraj}(\frac{1}{4}(q_\delta-1)^2)+q}$
Test ranog za rano izvršenje: *Aproksimiramo $S_f(0)$:*
Odaberemo npr. $\epsilon^* = K \times 10^{-5}$
Za put opciju:
$i_f \coloneqq \max\{i : |V(S_i, 0) + S_i - K| < \epsilon^*\}$
$S_0 < S_{i_f}$*: stop (dostigli smo regiju zaustavljanja)!*
Za call opciju:
$i_f \coloneqq \min\{i : |K - S_i + V(S_i, 0)| < \epsilon^*\}$
$S_0 > S_{i_f}$*: stop!*

Algoritam evaluira podatke u krajnjoj vremenskoj razini τ_{kraj}, što odgovara trenutku $t = 0$. Analogno možemo izračunati za prethodne razine. Spajanjem lokacija S_{i_f} onda možemo dobiti aproksimaciju krivulje zaustavljanja $S_f(t)$ (ona će biti gruba aproksimacija funkcije).

Poglavlje 5

Primjena na egzotičnu call opciju

Kao primjer uzimamo egzotičnu call opciju europskog stila sa dvije imovine i dvije barijere sa isplatom

$$\Psi(S_1, S_2) = (S_1 + S_2 - K)^+$$

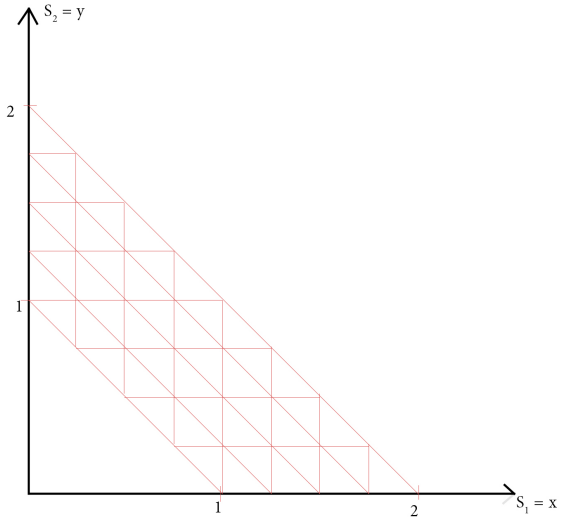
te $V(S_1, S_2, T) = \Psi(S_1, S_2)$. Pretpostavimo dvije *knock-out* barijere B_1 i B_2, *down-and-out* sa B_1 i *up-and-out* sa B_2. To znači da opcija prestaje postojati kada je $S_1 + S_2 < B_1$ ili $S_1 + S_2 > B_2$; u oba slučaja je tada $V = 0$. Matematički model u pozadini je Black–Scholes-ovo tržište. Odgovarajuća PDJ za funkciju $V(S_1, S_2, t)$ vrijednosti opcije je

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1^2} + rS_1 \frac{\partial V}{\partial S_1} - rV + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_2^2} + rS_2 \frac{\partial V}{\partial S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_1 \partial S_2} = 0. \tag{5.1}$$

Domena je omeđena dvjema linijama $S_1 + S_2 = B_1$ i $S_1 + S_2 = B_2$. To nam sugerira mrežu koja se sastoji od trokutastih elemenata $\mathcal{D}_k$. Jedna moguća takva mreža skicirana je na slici 5.1. Za primjer uzimamo parametre $K = 1, T = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.25, \rho = 0.7, r = 0.05, B_1 = 1, B_2 = 2$. Rubni uvjeti kada $S_1 \to 0$ i $S_2 \to 0$ su dani jednodimenzionalnom Black–Scholes-ovom jednadžbom, tj. jednostavno stavimo $S_1 = 0$ ili $S_2 = 0$ u (5.1). Stoga su rubni uvjeti za (5.1) zapravo vrijednosti opcija sa jednom imovinom i dvostrukom barijerom te se mogu dobiti formulom zatvorenog oblika.

Izvedimo Black–Scholes PDJ u slučaju bez divergencije, koja je ekvivalentna jednadžbi (5.1). Uzmimo varijable $x \coloneqq S_1, y \coloneqq S_2, \tau = T - t$ za nezavisne te $u(x, y, \tau)$ za zavisnu. Tada je PDJ za u

$$-\nabla \cdot (D(x, y)\nabla u) + b(x, y)\nabla u + ru = -\frac{\partial}{\partial \tau} u, \tag{5.2}$$



Slika 5.1: Diskretizacija domene $\mathcal{D}$ konačnim elementima na $\mathcal{D}_k$

gdje su

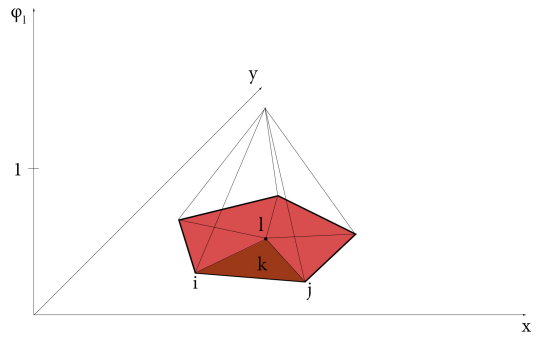
$$\begin{aligned} D(x,y) &:= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 x^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 xy \\ \rho\sigma_1\sigma_2 xy & \sigma_2^2 y^2 \end{bmatrix} \\ b(x,y) &:= -\begin{bmatrix} (r-\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2/2)x \\ (r-\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2/2)y \end{bmatrix} \\ \nabla &:= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Separiramo vrijeme τ i prostor (x, y) zamjenom u sa $\sum_i w_i(\tau)\varphi_i(x, y)$. Bazne funkcije φ_i su definirane na $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Galerkinovim pristupom stvaramo integrale nad $\mathcal{D}$:

$$\int \varphi_i \nabla \cdot D\nabla\varphi_j, \qquad \int \varphi_i b^T \nabla\varphi_j, \qquad \int \varphi_i r \varphi_j.$$

Za bazne funkcije odabiremo dvodimenzionalne analogone krović funkcijama (pogodne trokutastim elementima). Skica ovog slučaja dana je na slici 5.2.

U ovom dvodimenzionalnom slučaju su element-matrice dimenzija 3×3. Za svaki trokut k postoje 3 njegova vrha i, j, l. Stoga tablica koja pridružuje vrhove troku-



Slika 5.2: Dvodimenzionalna hat funkcija $\varphi_l(x, y)$ (0 izvan obojanog dijela)

tima sadrži $\mathcal{I}_k := \{i, j, l\}$. Prema tome, petlja kojom sastavljamo za svaku matricu distribuira 9 lokalnih integrala za svaki $\mathcal{D}_k$.

Poglavlje 6

Procjene grešaka

Numeričkim eksperimentima potvrđeno je da greške proizvedene metodama konačnih elemenata sa krović funkcijama definiranim u Definiciji 2 opadaju kvadratično obzirom na veličinu mreže. Dokaz je u ovom slučaju teži zbog toga što slaba rješenja zahtijevaju manju glatkoću. Za standardne opcije, separacija varijabli kao u (3.1) dopušta razmatranje samo jednodimenzionalnog slučaja. U ovom poglavlju objašnjavamo neke od osnovnih ideja o tome kako doći do procjena grešaka.

6.1 Jaka i slaba rješenja

Greške ćemo gledati na primjeru jednostavne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$-u'' = f(x) \text{ za } \alpha < x < \beta \tag{6.1}$$

sa homogenim Dirichlet rubnim uvjetima

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0. \tag{6.2}$$

Uočimo da je jednadžba oblika $Lu = f$, gdje je L linearni diferencijalni operator kao u (2.1). Prostor $\mathcal{D}$ na kojem su definirane funkcije u je za $n = 1$ oblika $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < \beta\}$. Za neprekidne f će rješenja jednadžbe zadovoljavati $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D})$. Kako bismo imali operativne rubne uvjete, u mora biti neprekidna na $\mathcal{D}$ uključujući i rub, tj. $\partial\mathcal{D}$. Dakle, zahtjev je $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{D}})$, $\overline{\mathcal{D}} \coloneqq \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Konačno, rješenja diferencijalnih jednadžbi drugog reda zahtijevaju

$$u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{D}}). \tag{6.3}$$

Prostor rješenja trebamo još suziti kako bi poštovao rubne uvjete.

Za funkcije u i v definiramo skalarni produkt:

$$\langle u, v\rangle \coloneqq \int_{\mathcal{D}} uv\, dx. \tag{6.4}$$

Rješenja u jednadžbe $Lu = f$ zadovoljavaju:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle f, v\rangle \;\text{ za sve } v. \tag{6.5}$$

Posebno za problem (6.1) parcijalnom integracijom dobijemo:

$$\langle Lu, v\rangle = -\int_\alpha^\beta u''v\, dx = -u'v\Big|_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta u'v'\, dx.$$

Preostali integral je bilinearna forma (linearna u svakom od argumenata). Definiramo:

$$b(u, v) \coloneqq \int_\alpha^\beta u'v'\, dx. \tag{6.6}$$

Formalno možemo zapisati:

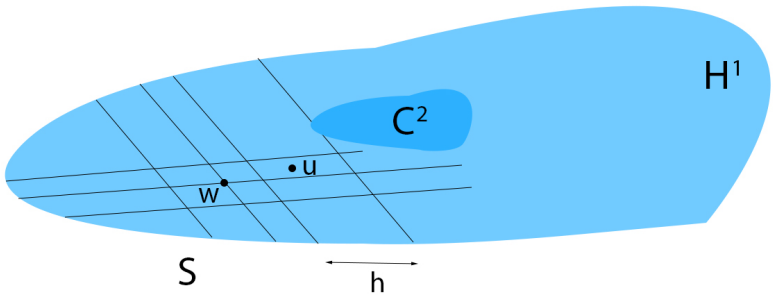
$$b(u, v) = \langle f, v\rangle, \tag{6.7}$$

pri čemu pretpostavljamo da v zadovoljava uvjete (6.2).

Sada se pitamo koji je *maksimalan prostor funkcija* takav da (6.7) vrijedi (tj. za koje u i v integrali postoje)? Odgovarajući prostor označavamo sa $\mathcal{H}^1$, dok verziju sa rubnim uvjetima sa $\mathcal{H}_0^1$. Prostor se naziva *prostor Soboljeva*. Sastoji se od funkcija koje su neprekidne na $\mathcal{D}$, po dijelovima diferencijabilne te zadovoljavaju rubne uvjete (6.2). Ovaj prostor funkcija odgovara klasi funkcija $\mathcal{K}$ iz (4.5). Pomoću $\mathcal{H}_0^1$ definiramo slabo rješenje jednadžbe $Lu = f$, pri čemu je L diferencijalni operator drugog reda i b odgovarajuća bilinearna forma.

Definicija 3 (Slaba rješenja)**.** *Funkciju $u \in \mathcal{H}_0^1$ zovemo slabo rješenje (jednadžbe $Lu = f$) ako $b(u, v) = \langle f, v\rangle$ vrijedi za sve $v \in \mathcal{H}_0^1$.*

Sama definicija nam sugerira zadatak: pronaći $u \in \mathcal{H}_0^1$ takav da je $b(u, v) = \langle f, v\rangle$ za sve $v \in \mathcal{H}_0^1$. Ovo nazivamo *varijacijskim problemom*. Primjer problema $Lu = f$ je (6.1) sa već definiranom odgovarajućom bilinearnom formom $b(u, v)$ te $\langle f, v\rangle$. Kako bi integrali postojali, moramo još zahtijevati $f \in \mathcal{L}^2$, gdje je $\mathcal{L}^2$ definiran kao u (6.9) uz $p = 2$. Tada $\langle f, v\rangle$ postoji zbog Cauchy–Schwartz-ove nejednakosti. Na sličan način pomoću Definicije 3 možemo doći do slabih rješenja i za druge probleme.



Slika 6.1: Aproksimacijski prostori

6.2 Aproksimacija na konačnodimenzionalnim potprostorima

Za izračun slabog rješenja u praksi, aproksimiramo beskonačnodimenzionalan $\mathcal{H}_0^1$ sa konačno-dimenzionalnim potprostorom $\mathcal{S}$ razapetim baznim funkcijama φ_i (od kojih su najjednostavnije krović funkcije). Krović funkcije $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ razapinju prostor po dijelovima linearnih funkcija iz Svojstva 1(a). Svaku po dijelovima linearnu funkciju možemo zapisati kao linearnu kombinaciju

$$v = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i.$$

Pritom su koeficijenti c_i jedinstveno određeni vrijednostima v u čvorovima: $c_i = v(x_i)$. Krović funkcije zovemo *linearnim elementima* budući da se sastoje od po dijelovima linearnih funkcija. Analogno možemo imati npr. *kvadratne* ili *kubične* elemente, tj. po dijelovima polinome drugog i trećeg stupnja. Prostore $\mathcal{S}$ zovemo *prostori konačnih elemenata*. Budući da funkcije iz $\mathcal{H}_0^1$ zadovoljavaju rubne uvjete, isto vrijedi i za potprostore. Konačnodimenzionalni potprostor prostora $\mathcal{H}_0^1$ definiramo sa (vidljiv na slici 6.1):

$$\mathcal{S}_0 := \{v = \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i : \varphi_i \in \mathcal{H}_0^1\}. \tag{6.8}$$

Svojstva prostora $\mathcal{S}$ su određena baznim funkcijama. Bazne funkcije sa malim nosačem pridonose rijetkim matricama. Što je m veći, $\mathcal{S}_0$ bolje aproksimira $\mathcal{H}_0^1$ budući da finija diskretizacija (manja poddomena $\mathcal{D}_k$) dopušta bolju aproksimaciju funkcija iz

$\mathcal{H}_0^1$ po dijelovima linearnih funkcija. Pomoću h ćemo označiti najveći dijametar $\mathcal{D}_k$ te proučavati grešku kada $h \to 0$, tj. $m \to \infty$.

Kao analogon Definiciji 3, diskretno slabo rješenje definiramo kao:

Problem 3. *Pronaći $w \in \mathcal{S}_0$ takav da je $b(w, v) = \langle f, v \rangle$ a sve $v \in \mathcal{S}_0$.*

Činjenicu da aproksimacija ovisi o finoći h naglašavamo pišući w_h. Prijelaz sa neprekidnog varijacijskog problema na diskretni ponekad nazivamo *Rayleigh–Ritz-ov princip.*

6.3 Céa-ina lema

Sada možemo tražiti grešku $u - w$ slabog rješenja u i diskretne aproksimacije w. Za $p > 0$ i $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ definiramo $\mathcal{L}^p$-prostor sa

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{D}) \coloneqq \Big\{ v : \int_{\mathcal{D}} \big|v(x)\big|^p \, dx < \infty \Big\}. \tag{6.9}$$

Na njemu za $p \geq 1$ definiramo normu:

$$\|v\|_p \coloneqq \Big(\int_{\mathcal{D}} \big|v(x)\big|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Udaljenost funkcija u općenitom prostoru Sobovljeva

$$\mathcal{H}^k(\mathcal{D}) \coloneqq \{ v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}) : \mathcal{D}^\alpha v \in \mathcal{L}^2(\mathcal{D}) \; za \; |\alpha| \leq k \}$$

mjerimo normom $\|\cdot\|_k$ definiranom kao:

$$\|v\|_k \coloneqq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathcal{D}} |D^\alpha v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pritom je $v \in \mathcal{H}_0^k$ te $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| \coloneqq \sum_{i=1}^n \alpha_i$, a parcijalnu derivaciju reda $|\alpha|$ definiramo:

$$D^\alpha v \coloneqq \frac{\partial^{\,|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} v(x_1, \ldots, x_n).$$

Posebno za $k = 1, n = 1, \mathcal{D} = (a, b)$ imamo:

$$\|v\|_1 \coloneqq \left(\int_a^b (v^2 + (v')^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pritom je u jednodimenzionalnom slučaju

$$\mathcal{H}_0^1(a,b) \coloneqq \{v \in \mathcal{H}^1(a,b) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

Prvo ćemo odrediti ograde za $\|u - w\|_1$.

Pretpostavke 2 (Neprekidna $\mathcal{H}^1$-eliptična bilinearna forma)**.**

(a) ***Neprekidnost:***
Postoji $\gamma_1 > 0$ *takav da je* $\left|b(u,v)\right| \leq \gamma_1 \|u\|_1 \|v\|_1$ *za sve* $u, v \in \mathcal{H}^1$*;*

(b) $\mathcal{H}^1$***-eliptičnost:***
Postoji $\gamma_2 > 0$ *takav da je* $b(v,v) \geq \gamma_2 \|v\|_1^2$ *za sve* $v \in \mathcal{H}^1$*.*

Pod ovim pretpostavkama po *Lax–Milgram-ovom teoremu*[1] postoji točno jedno (slabo) rješenje $u \in \mathcal{H}_0^1$ iz Definicije 3 i Problema 3. Budući da je $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{H}_0^1$,

$$b(u,v) = \langle f, v\rangle \text{ za sve } v \in \mathcal{S}_0.$$

Oduzimanjem od $b(w,v) = \langle f, v\rangle$ i korištenjem bilinearnosti imamo (**svojstvo projekcije greške**):

$$b(w-u, v) = 0 \text{ za sve } v \in \mathcal{S}_0. \tag{6.10}$$

Pretpostavke i svojstvo projekcije nam daju osnove za dobivanje ocjene greške, prikazano u lemi:

Lema 2 (Céa)**.** *Pretpostavimo da su zadovoljene Pretpostavke 2. Tada*

$$\|u - w\|_1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \inf_{v \in \mathcal{S}_0} \|u - v\|_1 . \tag{6.11}$$

Dokaz. Iz $v \in \mathcal{S}_0$ slijedi $\tilde{v} \coloneqq w - v \in \mathcal{S}_0$. Iskoristimo svojstvo projekcije te dobijemo

$$b(w-u, w-v) = 0 \text{ za sve } v \in \mathcal{S}_0.$$

Slijedi

$$b(w-u, w-u) = b(w-u, w-u) - b(w-u, w-v) = b(w-u, v-u).$$

Uz pretpostavke to znači

$$\gamma_2 \|w-u\|_1^2 \leq \left|b(w-u, w-u)\right| = \left|b(w-u, v-u)\right| \leq \gamma_1 \|w-u\|_1 \|v-u\|_1 ,$$

iz čega slijedi

$$\|w-u\|_1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \|v-u\|_1 .$$

Budući da ovo vrijedi za sve $v \in \mathcal{S}_0$, lema je dokazana. □

[1] Više o teoremu u [2] i [1]

Pitanje je možemo li primijeniti Céa-inu lemu na naš problem (6.1) i (6.2). Kako bismo to znali, trebamo provjeriti vrijede li pretpostavke. Prva pretpostavka slijedi iz Cauchy–Schwartz-ove nejednakosti uz norme

$$\|u\|_1 := \left(\int_\alpha^\beta (u^2 + (u')^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \|u\|_0 := \left(\int_\alpha^\beta u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

jer je

$$\left(\int_\alpha^\beta u'v' dx \right)^2 \leq \left(\int_\alpha^\beta u'^2 dx \right) \left(\int_\alpha^\beta v'^2 dx \right) \leq \|u\|_1^2 \|v\|_1^2 .$$

Druga pretpostavka proizlazi iz *Poincaré-ove* nejednakosti:

$$\int_\alpha^\beta v^2 dx \leq (\beta - \alpha)^2 \int_\alpha^\beta v'^2 dx.$$

Dodavanjem $\int_\alpha^\beta v'^2 dx$ objema stranama dobivamo:

$$\|v\|_1^2 \leq [(\beta - \alpha)^2 + 1] b(v, v),$$

iz čega smo dobili konstantu γ_2. Dakle, lema vrijedi za problem.

Sljedeće pitanje je: koliko malen infimum u (6.11) može biti (tj. koliko dobro $\mathcal{S}_0$ može aproksimirati $\mathcal{H}_0^1$) (slika 6.1). Pokazat ćemo da je za krović funkcije i već definiran $\mathcal{S}_0$, infimum reda $\mathcal{O}(h)$. Gornju granicu za infimum $\|u - v\|_1$ dobivamo odabirom određenog v kao interpolanta u_I funkcije u i korištenjem Leme 2:

$$\|u - w_h\|_1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \inf_{v \in \mathcal{S}_0} \|u - v\|_1 \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \|u - u_I\|_1 . \tag{6.12}$$

Ostaje odrediti ogradu grešaka interpolanta:

Lema 3 (Greška interpolanta)**.** *Za $u \in \mathcal{C}^2$ neka je u_I interpolant i h maksimalna udaljenost dvaju uzastopnih čvorova. Tada*

(a) $\max_x \left| u(x) - u_I(x) \right| \leq \frac{h^2}{8} max \left| u''(x) \right|$;

(b) $\max_x \left| u'(x) - u_I'(x) \right| \leq h \, max \left| u''(x) \right|$.

Pretpostavka $u \in \mathcal{C}^2$ se može oslabiti na $u'' \in \mathcal{L}^2$. Lema nam otkriva

$$\|u - u_I\|_1 = \mathcal{O}(h)$$

što zajedno sa (6.12) daje

$$\|u - w_h\|_1 = \mathcal{O}(h). \tag{6.13}$$

Prisjetimo se da smo do ovoga došli pod pretpostavkom neprekidne i $\mathcal{H}^1$-eliptičke bilinearne forme i krović funkcija φ_i. Red $\mathcal{O}(h)$ iz (6.13) je dominiran nepogodnim redom prve derivacije $\mathcal{O}(h)$ iz Leme 3(b). Taj red greške je različit od onog uočenog $\mathcal{O}(h^2)$ za aproksimaciju w_h (ne njezinu derivaciju!). Stoga greška (6.13) nije konačan rezultat. Greška kvadratnog reda se može dokazati pomoću Nitsche-ove ideje, koju ovdje ne navodimo. Konačan rezultat je

$$\|u - w_h\|_0 \leq Ch^2 \|u\|_2 \,, \text{ za konstantu } C. \tag{6.14}$$

U ovom dijelu smo se bavili slučajem diferencijalne jednadžbe drugog reda sa jednom nezavisnom varijablom x ($n = 1$) i fokusom na linearne elemente. Većina se rezultata može prenjeti i na diferencijalne jednadžbe višeg reda, višedimenzionalne domene ($n > 1$) te elemente višeg reda. Npr. ukoliko su elementi u $\mathcal{S}$ polinomi stupnja k i diferencijalna jednadžba reda $2l$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}^l$ te odgovarajuća bilinearna forma na $\mathcal{H}^l$ zadovoljava Pretpostavke 2 uz normu $\|\cdot\|_l$, tada vrijedi nejednakost

$$\|u - w_h\|_l \leq Ch^{k+1-l} \|u\|_{k+1} \,.$$

Poglavlje 7

Numerički rezultati

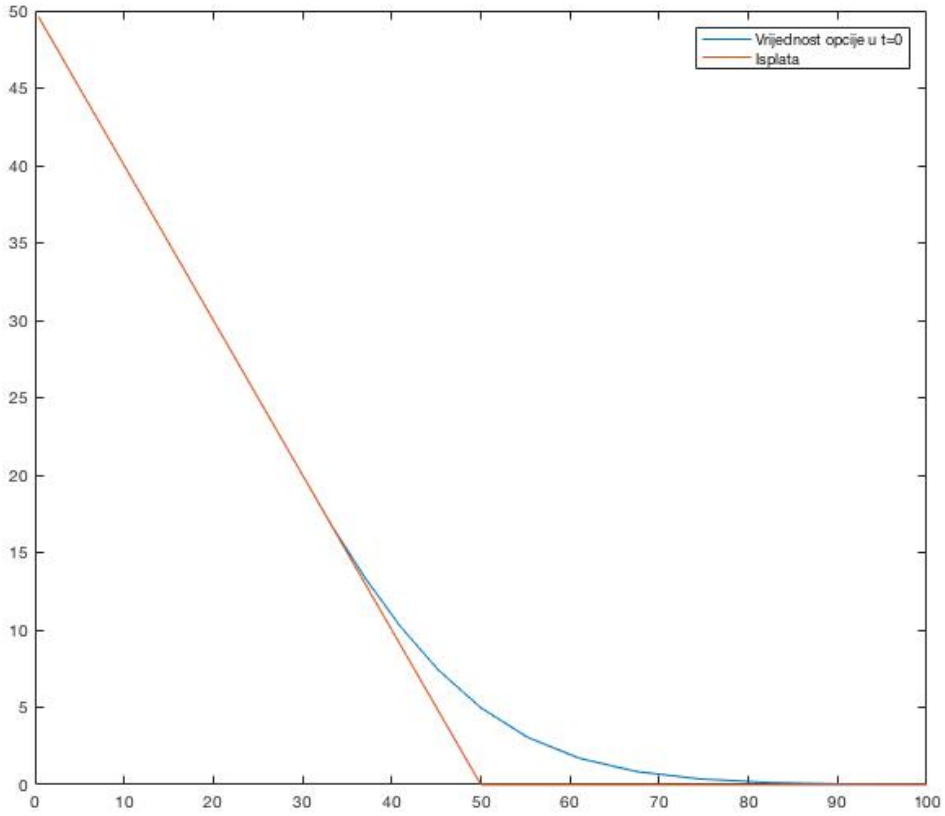
U sklopu rada implementiran je Algoritam 4 u programskom jeziku MATLAB. U ovom su poglavlju okupljeni rezultati primjene implementiranog programa na nekoliko primjera američkih put i call opcija. Kod implementacije dan je u Dodatku B.

U svim primjerima držane su iste postavke: $\omega_R = 1$, $\theta = \frac{1}{2}$ (Crank–Nicolson-ova metoda), $\epsilon = 10^{-5}$, $\epsilon^* = K * 10^{-5}$. Ostale vrijednosti su varirane i navedene u pojedinom primjeru.

Primjer 1: Američka put opcija sa vrijednostima $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = \frac{5}{12}$, $\delta = 0.1$, $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 100$, $m = 100$. Na slici 7.1 vidimo vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Na slici 7.2 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.3 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme ($0 \leq t \leq T$). Na njoj možemo zapaziti i aproksimaciju krivulje ranog izvršenja (narančasta isprekidana linija). Uočimo da se aproksimacija vrijednosti opcije približava isplati što smo bliže zadnjem trenutku. Slika 7.4 pobliže prikazuje aproksimiranu krivulju ranog izvršenja (točke u kojima aproksimacija vrijednosti opcije dotiče funkciju isplate).

Primjer 2: Američka put opcija sa vrijednostima $K = 50$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = \frac{5}{12}$, $\delta = 0.1$, $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 200 = m$. Na slici 7.5 vidimo vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Na slici 7.6 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.7 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme. Slika 7.8 prikazuje krivulju ranog izvršenja opcije.

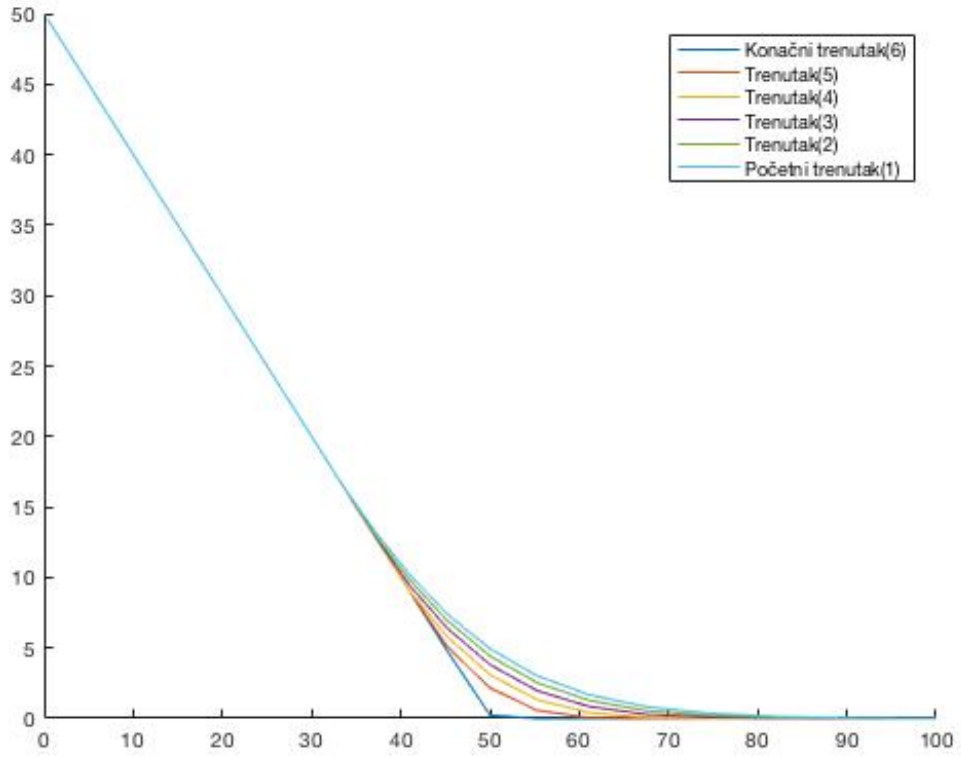
Primjer 3: Američka put opcija sa vrijednostima $K = 10$, $r = 0.06$, $\sigma = 0.3$, $T = 1$, $\delta = 0.1$, $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$, $\nu_{max} = 100$, $m = 200$. Na slici 7.9 vidimo



Slika 7.1: Primjer 1: Vrijednost američke put opcije u $t = 0$ i funkcija isplate

vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Na slici 7.10 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.11 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme. Slika 7.12 prikazuje krivulju ranog izvršenja opcije.

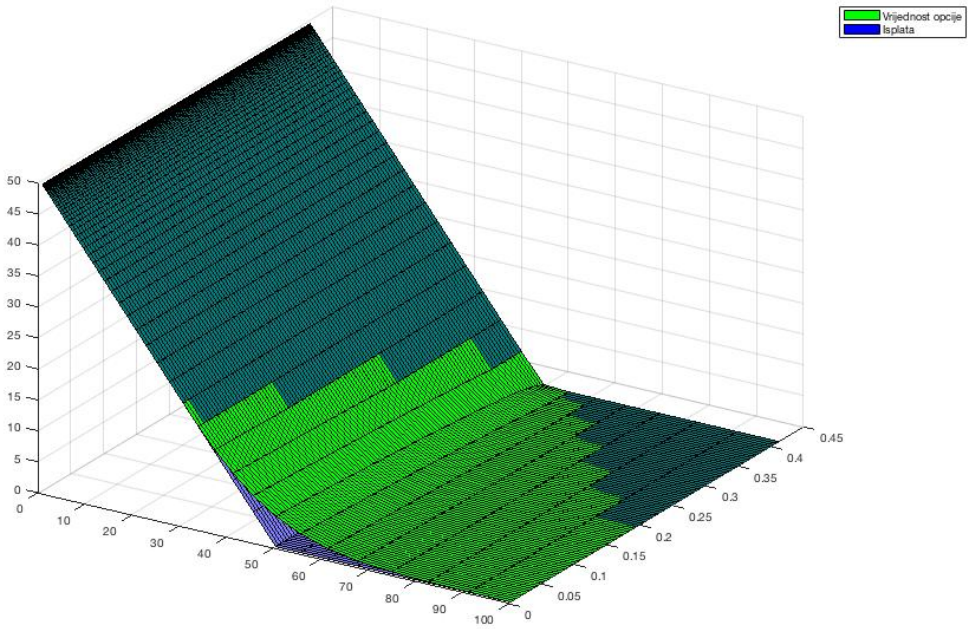
Primjer 4: Američka put opcija sa vrijednostima $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, $\delta = 0.2$, $x_{min} = -2$, $x_{max} = 2$, $\nu_{max} = 100$, $m = 200$. Na slici 7.13 vidimo vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Na slici 7.14 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.15 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme. Slika 7.16 prikazuje krivulju ranog izvršenja opcije.



Slika 7.2: Primjer 1: Vrijednost američke put opcije u raznim trenucima

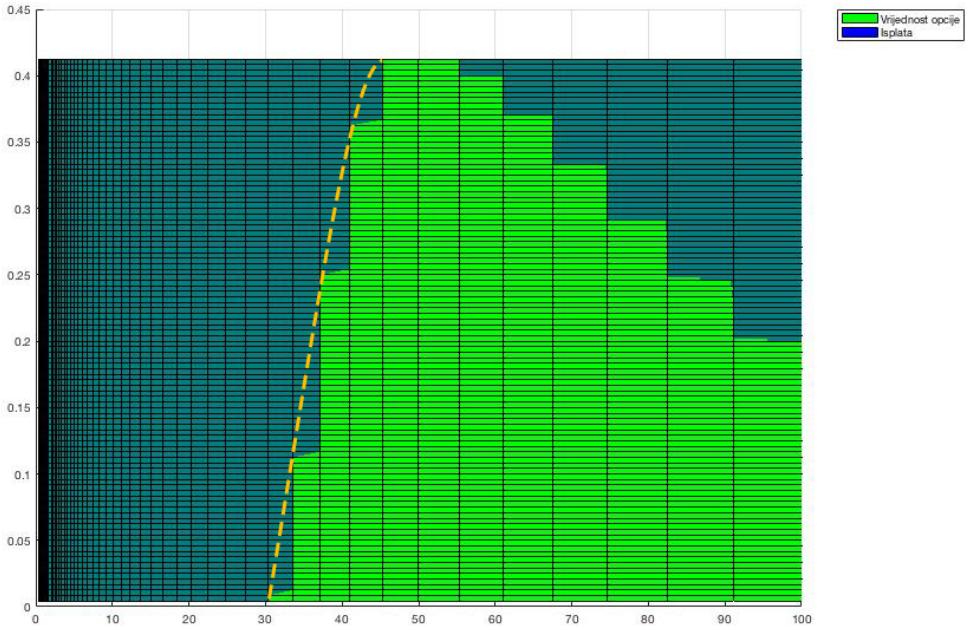
Primjer 5: Američka call opcija sa vrijednostima $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, $\delta = 0$, $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 100$, $m = 600$. Na slici 7.17 vidimo vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Budući da imovina ne isplaćuje dividendu, ne dolazi do kontakta između vrijednosti opcije i funkcije isplate. Isto možemo vidjeti i na slici 7.19, te na slici 7.20 krivulje ranog izvršenja, koja se sporo asimptotski približava vrijednosti 0. Na slici 7.18 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.19 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme. Slika 7.20 prikazuje krivulju ranog izvršenja opcije.

Primjer 6: Američka call opcija sa vrijednostima $K = 10$, $r = 0.25$, $\sigma = 0.6$, $T = 1$, $\delta = 0.2$, $x_{min} = -5$, $x_{max} = 5$, $\nu_{max} = 200$, $m = 600$. Na slici 7.21 vidimo vrijednost opcije u trenutku $t = 0$ uz funkciju isplate. Budući da imovina sada

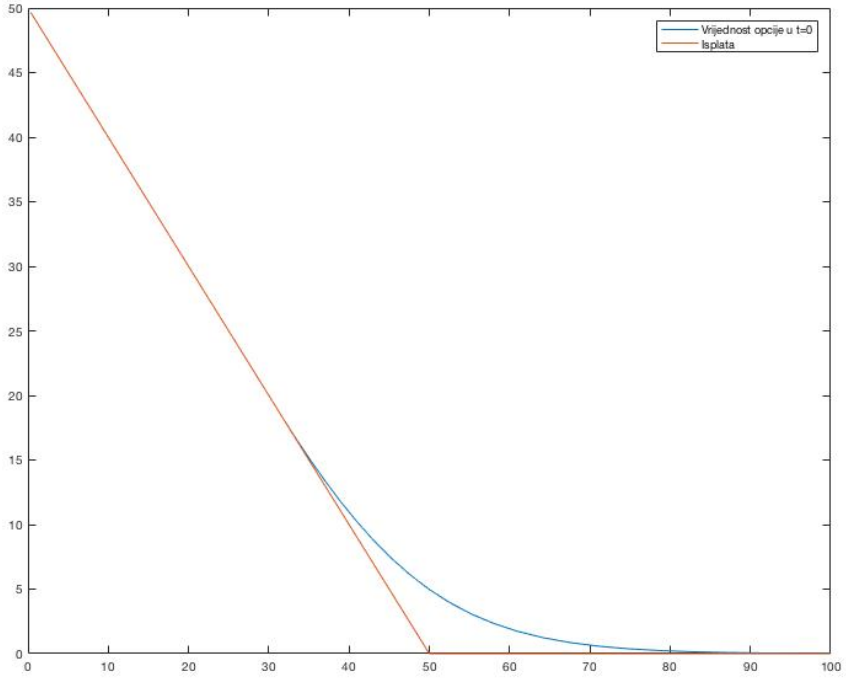


Slika 7.3: Primjer 1: Vrijednost američke put opcije i isplata kroz vrijeme

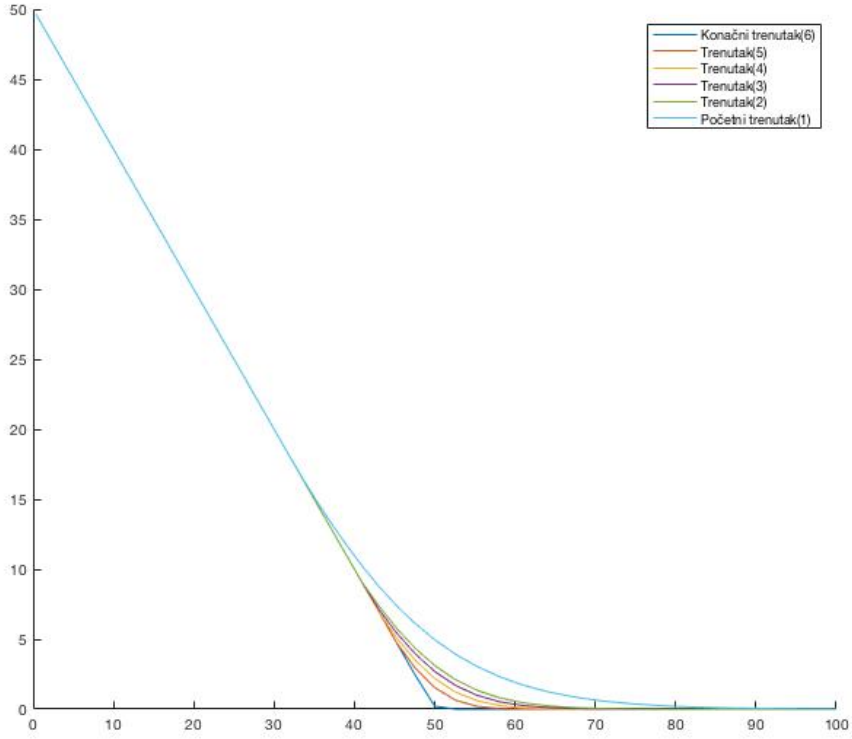
isplaćuje dividendu, dolazi do kontakta između vrijednosti opcije i funkcije isplate. Na slici 7.22 su prikazane vrijednosti opcije u raznim trenucima. Slika 7.23 prikazuje vrijednost opcije kroz vrijeme. Slika 7.24 pobliže prikazuje aproksimaciju krivulje ranog izvršenja opcije.



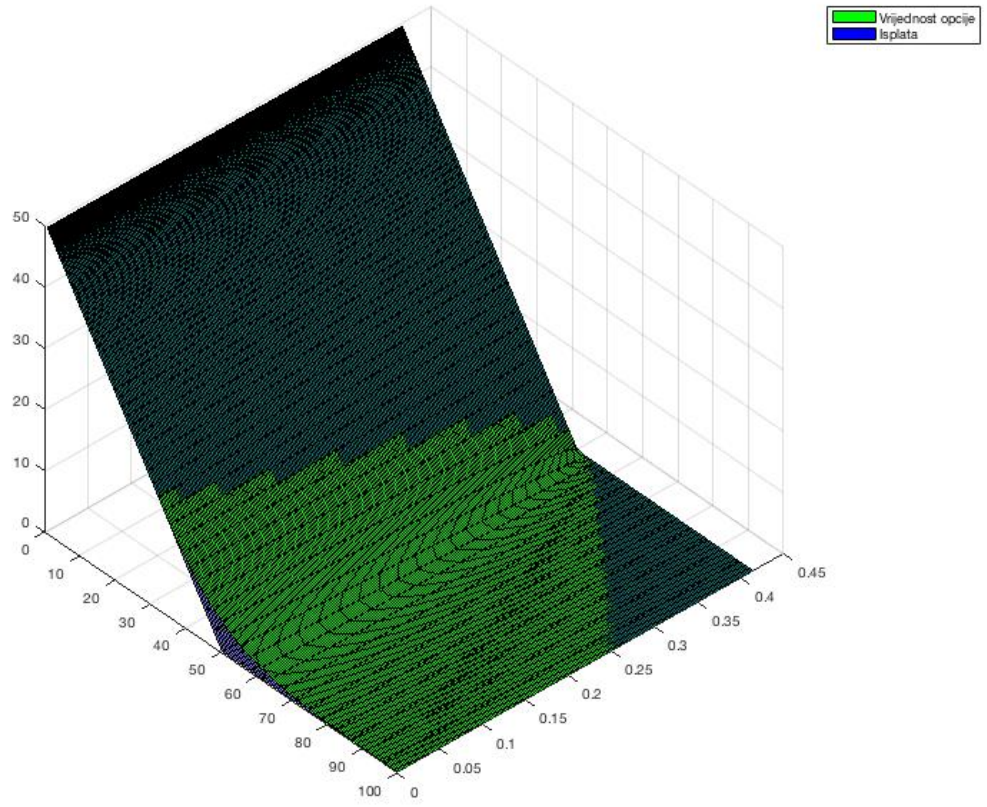
Slika 7.4: Primjer 1: Krivulja ranog izvršenja američke put opcije



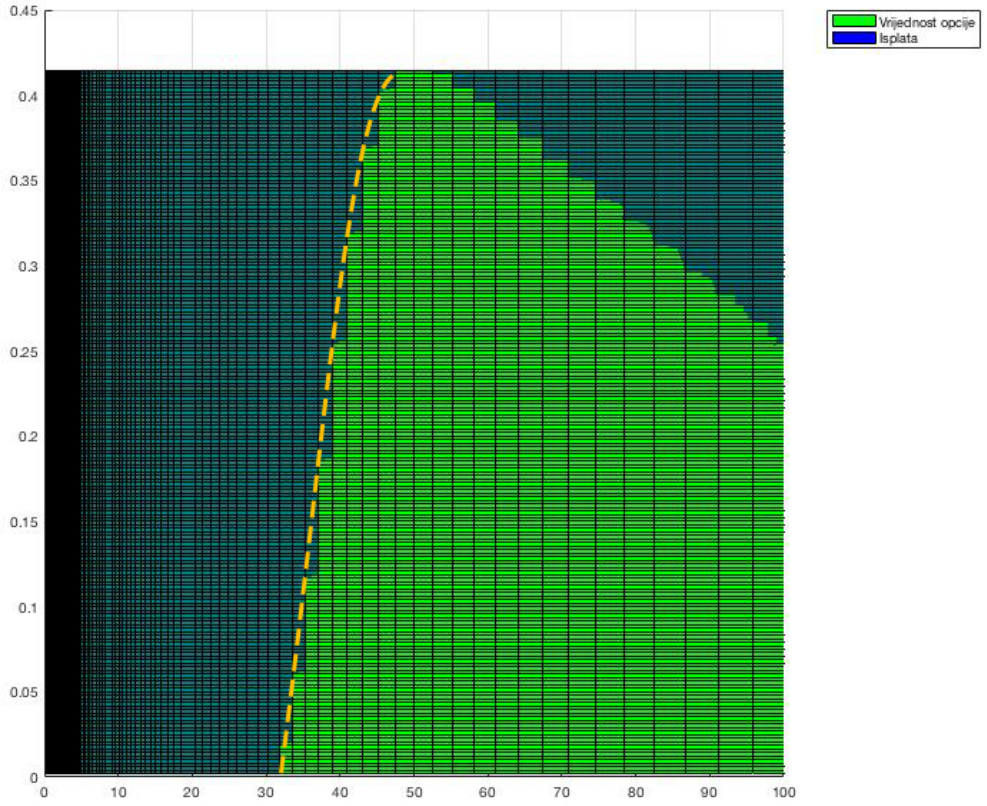
Slika 7.5: Primjer 2: Vrijednost američke put opcije u $t = 0$ i funkcija isplate



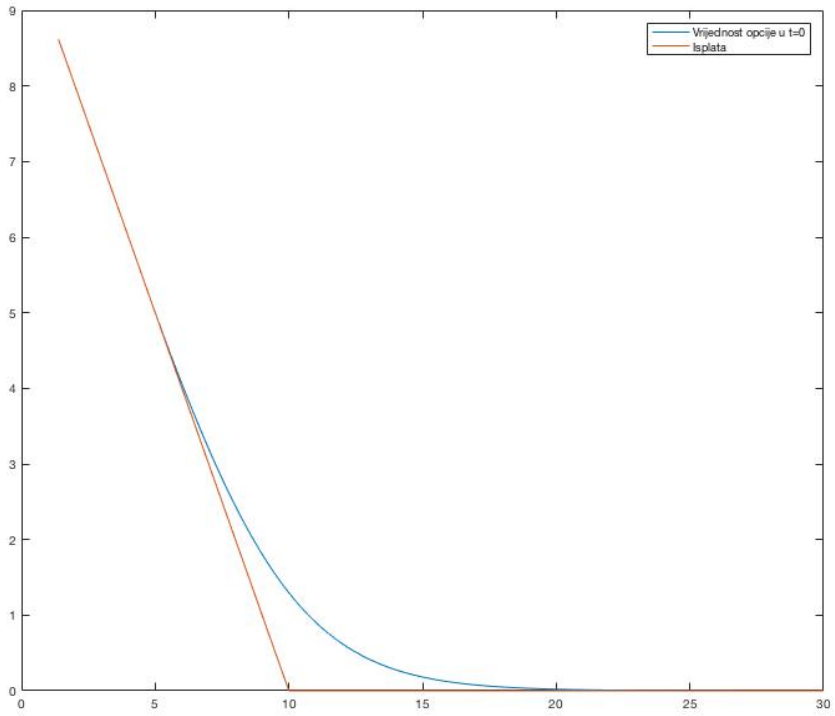
Slika 7.6: Primjer 2: Vrijednost američke put opcije u raznim trenucima



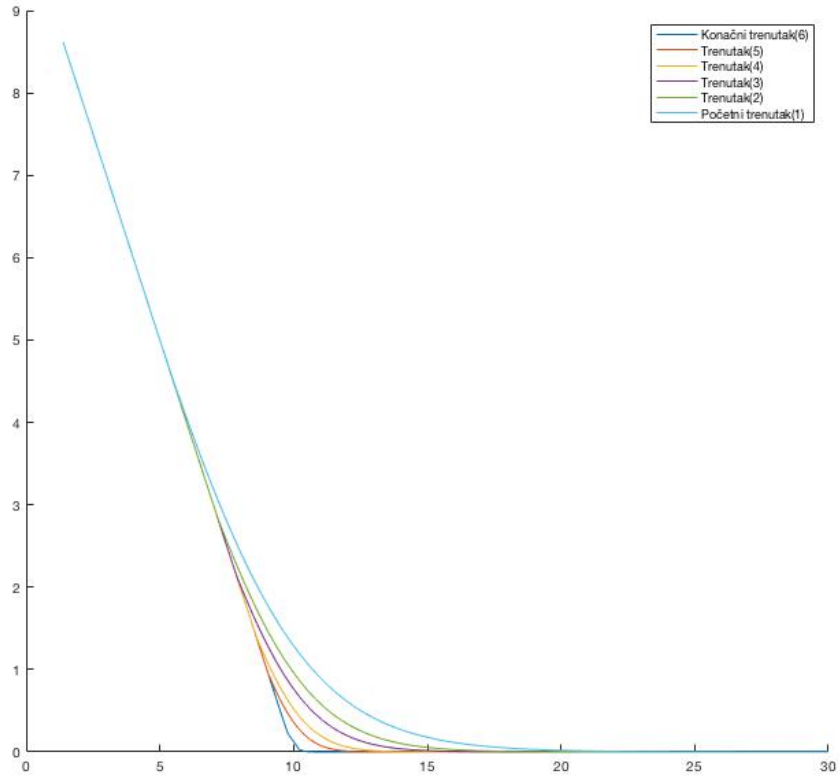
Slika 7.7: Primjer 2: Vrijednost američke put opcije i isplata kroz vrijeme



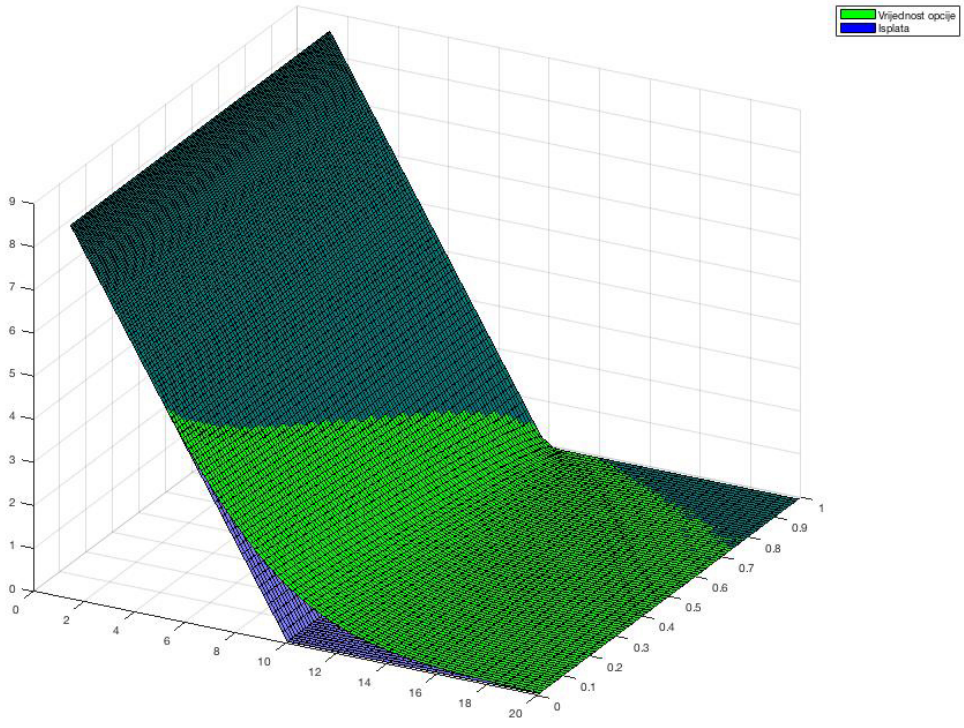
Slika 7.8: Primjer 2: Krivulja ranog izvršenja američke put opcije



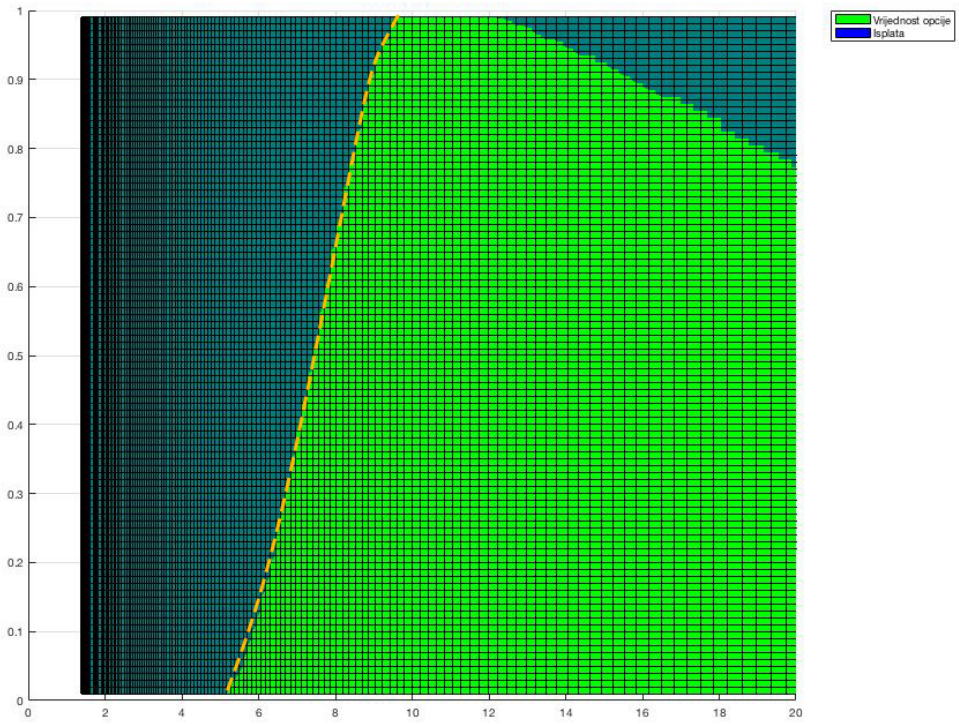
Slika 7.9: Primjer 3: Vrijednost američke put opcije u $t = 0$ i funkcija isplate



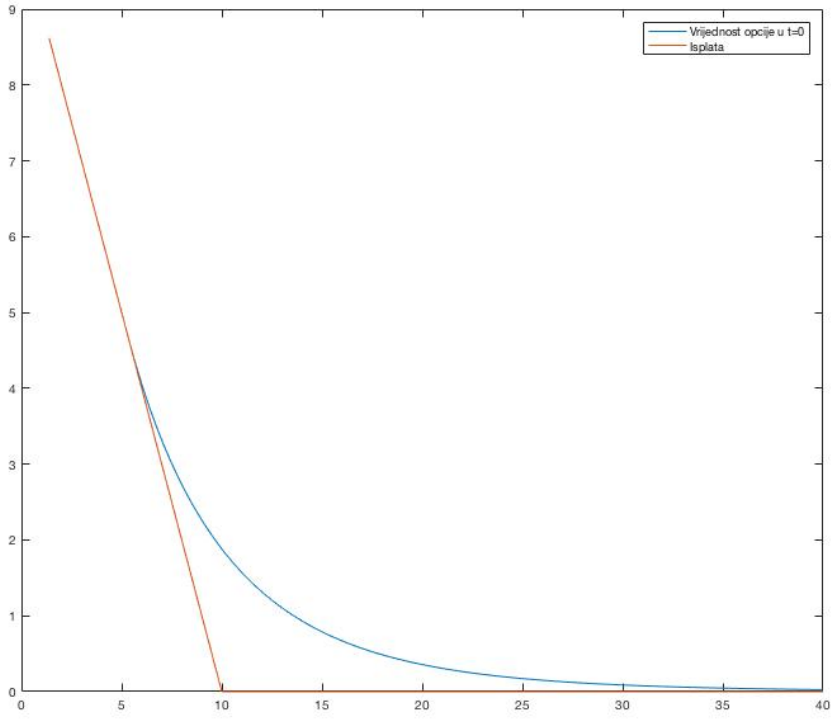
Slika 7.10: Primjer 3: Vrijednost američke put opcije u raznim trenucima



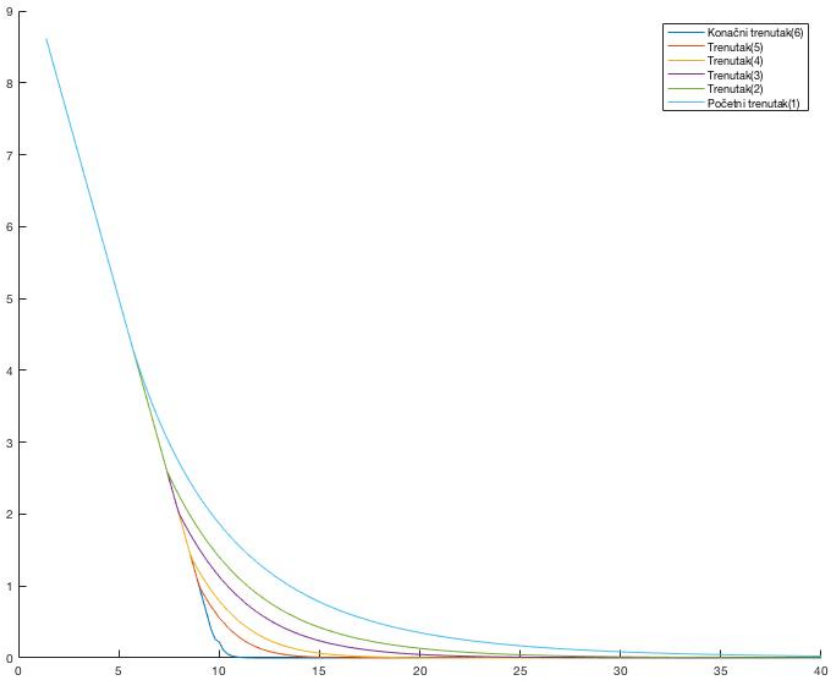
Slika 7.11: Primjer 3: Vrijednost američke put opcije i isplata kroz vrijeme



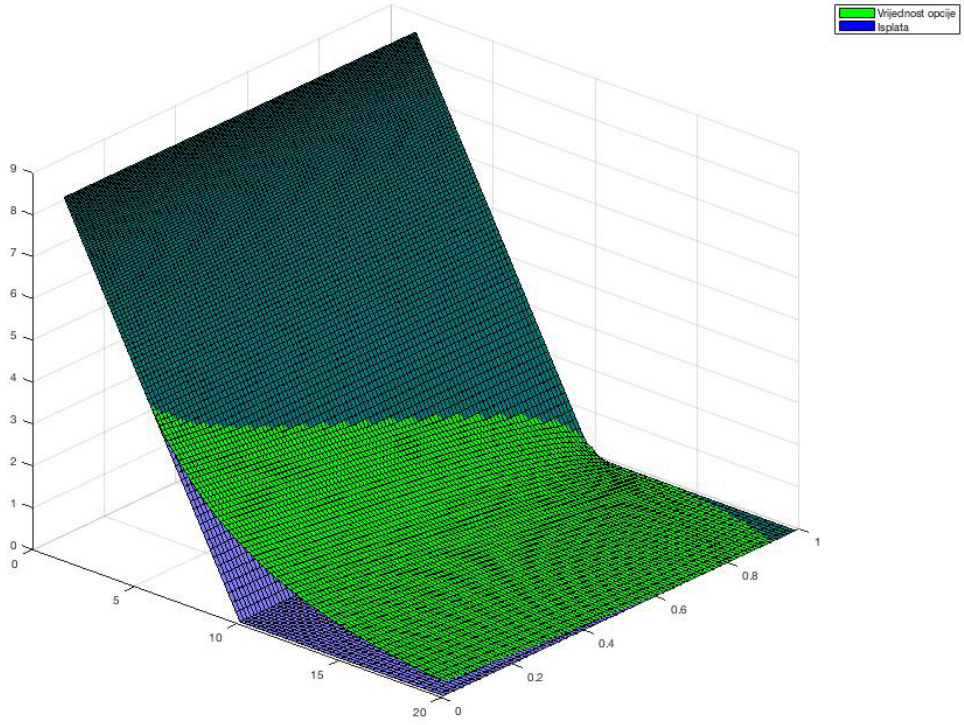
Slika 7.12: Primjer 3: Krivulja ranog izvršenja američke put opcije



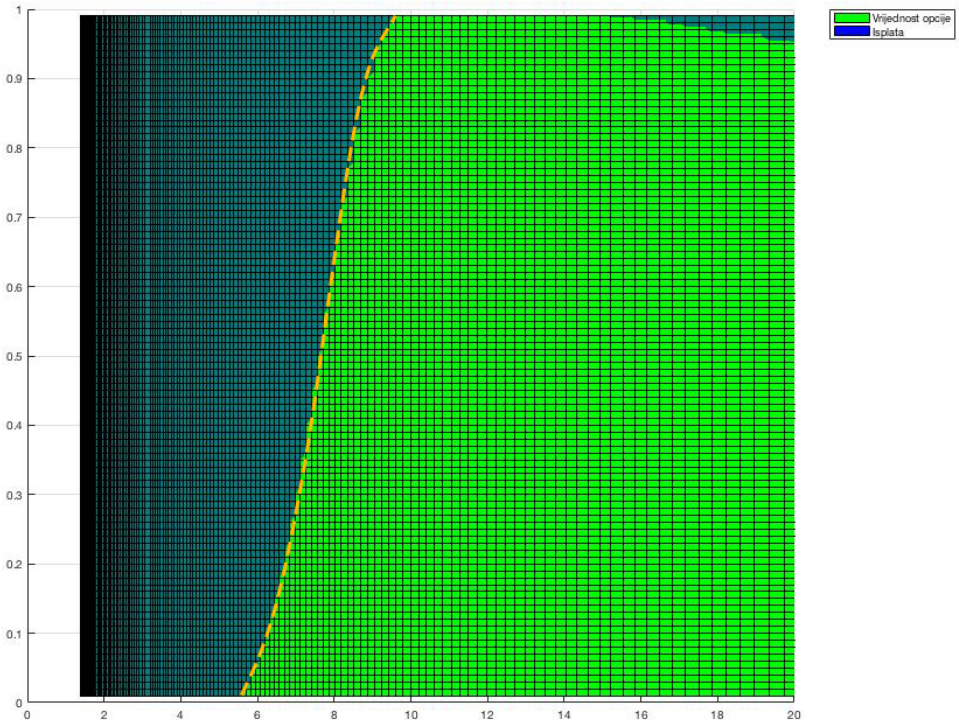
Slika 7.13: Primjer 4: Vrijednost američke put opcije u $t = 0$ i funkcija isplate



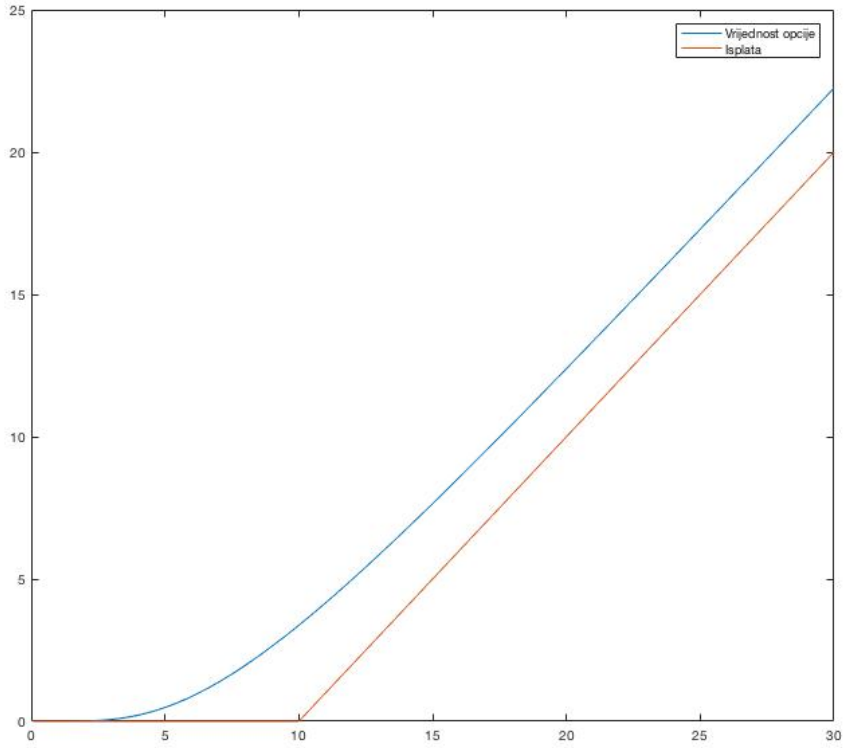
Slika 7.14: Primjer 4: Vrijednost američke put opcije u raznim trenucima



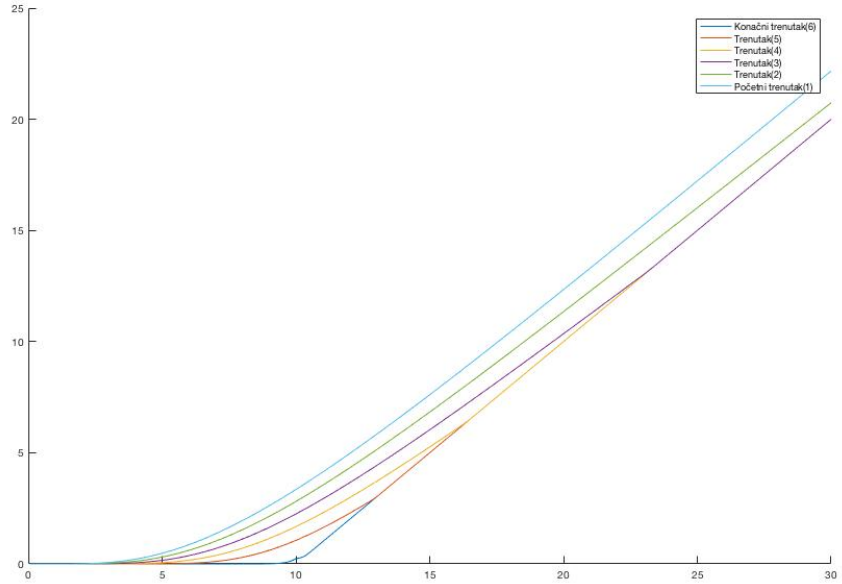
Slika 7.15: Primjer 4: Vrijednost američke put opcije i isplata kroz vrijeme



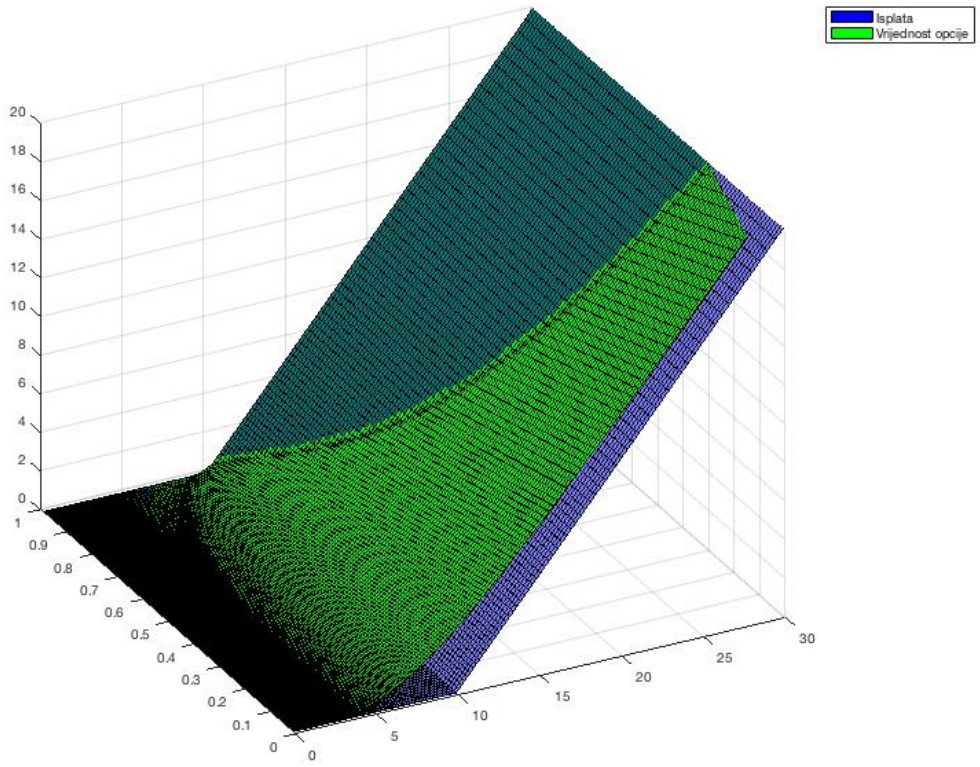
Slika 7.16: Primjer 4: Krivulja ranog izvršenja američke put opcije



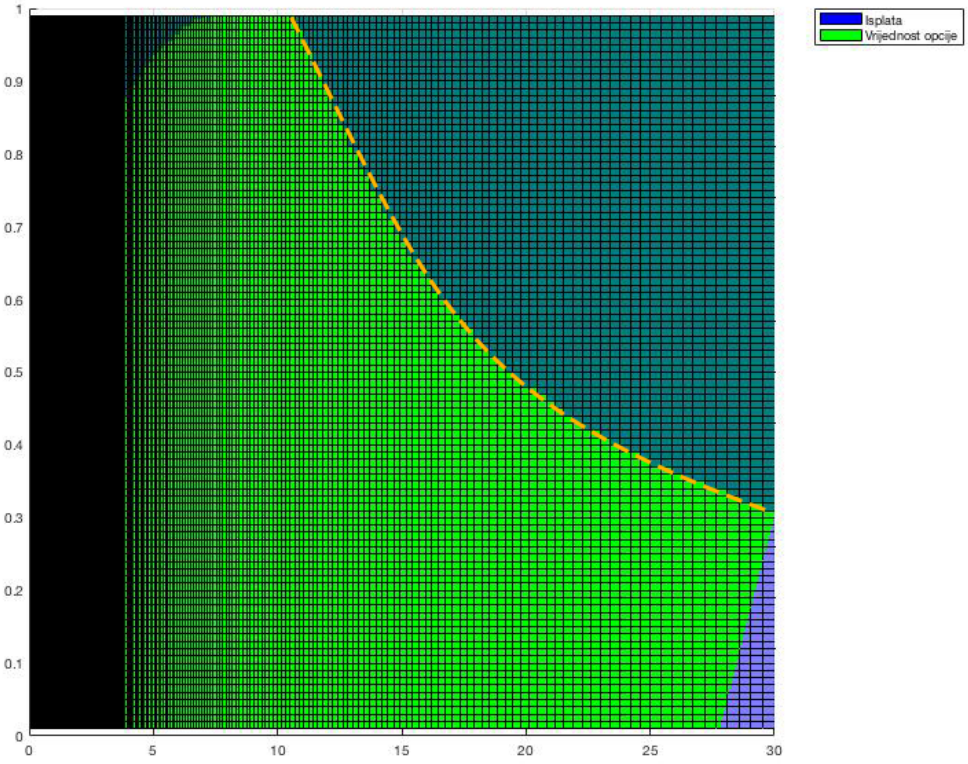
Slika 7.17: Primjer 5: Vrijednost američke call opcije u $t = 0$ i funkcija isplate



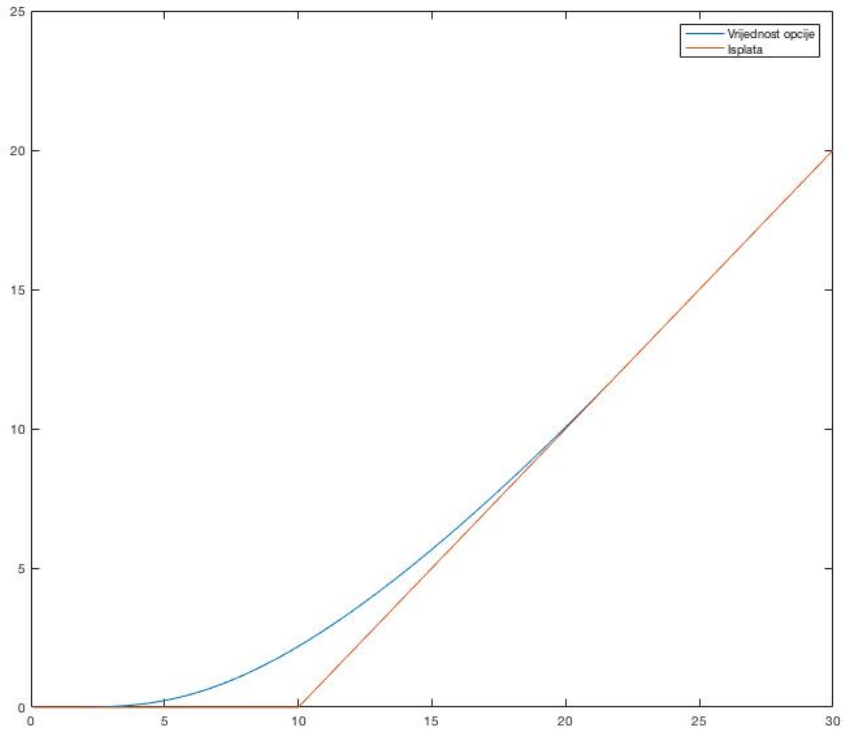
Slika 7.18: Primjer 5: Vrijednost američke call opcije u raznim trenucima



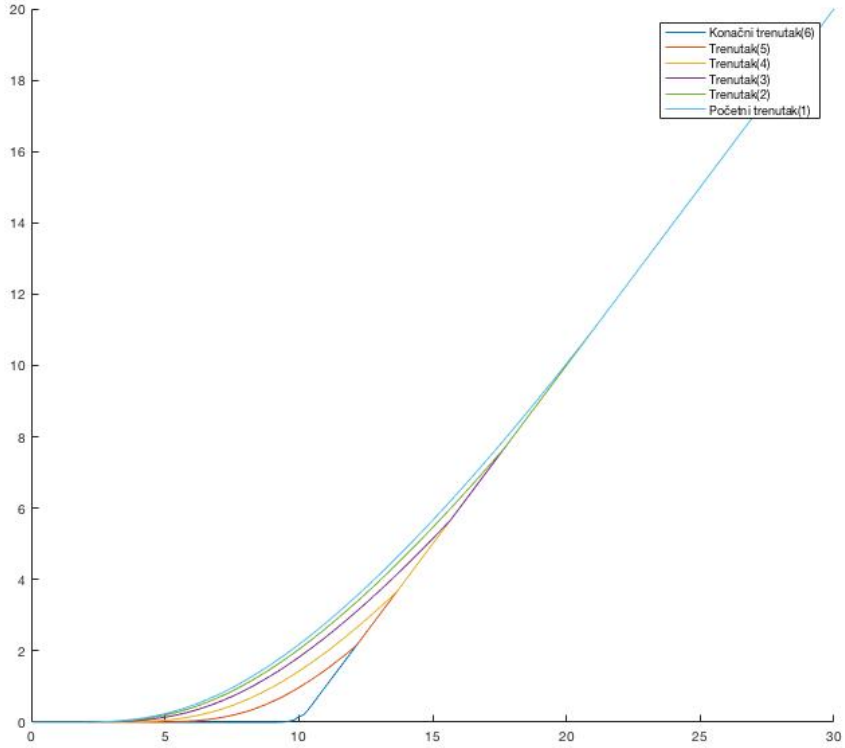
Slika 7.19: Primjer 5: Vrijednost američke call opcije i isplata kroz vrijeme



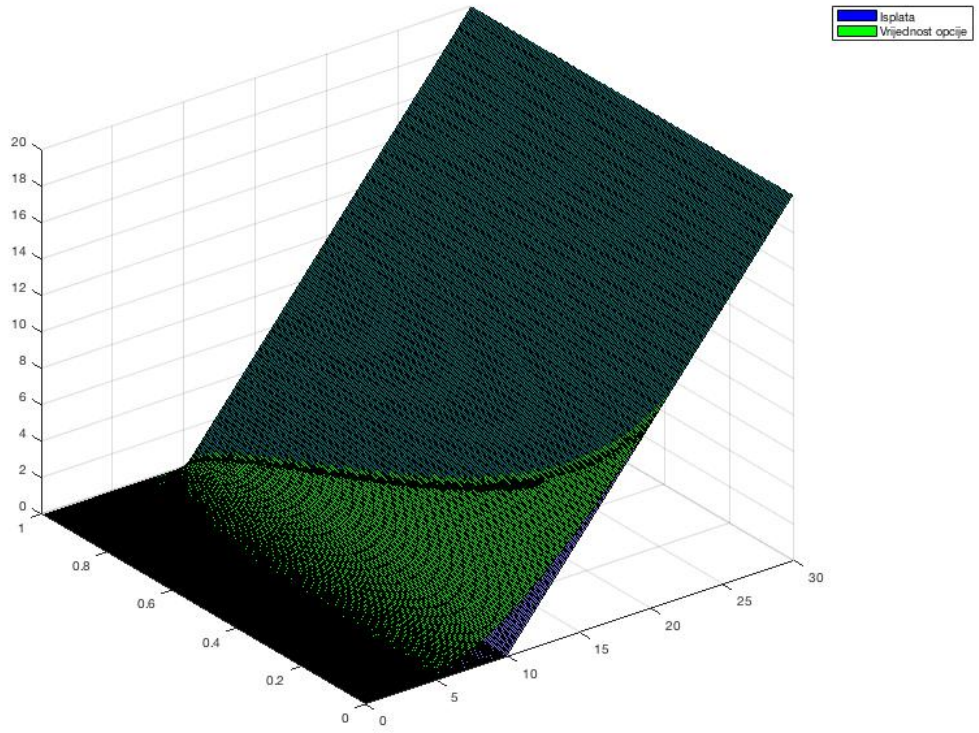
Slika 7.20: Primjer 5: Krivulja ranog izvršenja američke call opcije



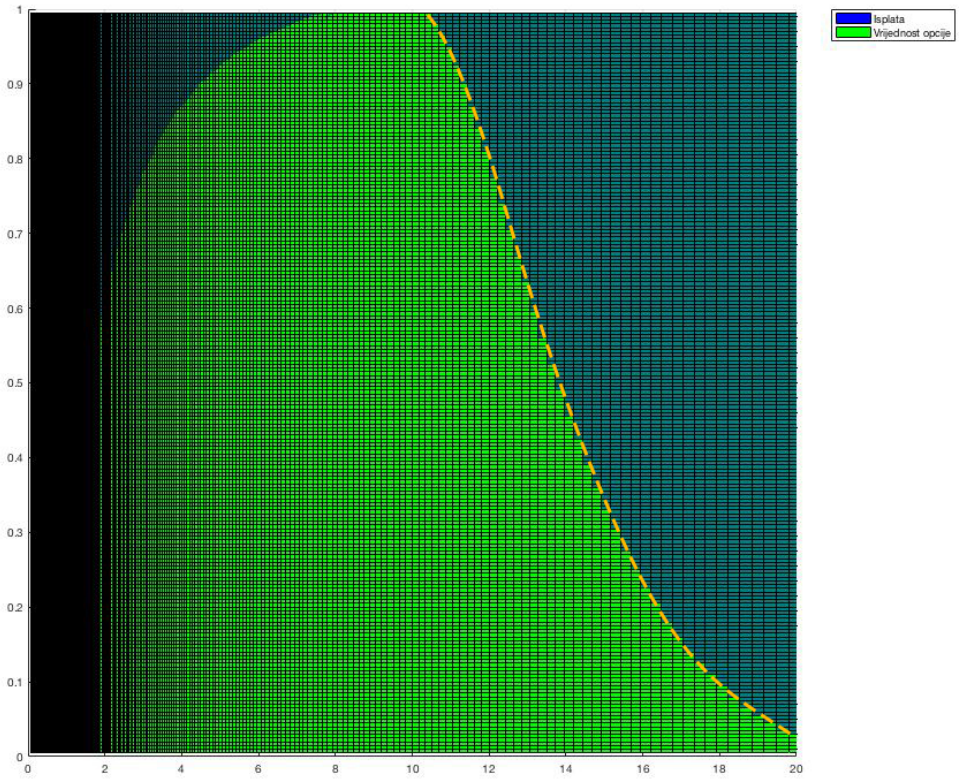
Slika 7.21: Primjer 6: Vrijednost američke call opcije u $t = 0$ i funkcija isplate



Slika 7.22: Primjer 6: Vrijednost američke call opcije u raznim trenucima



Slika 7.23: Primjer 6: Vrijednost američke call opcije i isplata kroz vrijeme



Slika 7.24: Primjer 6: Krivulja ranog izvršenja američke call opcije

Dodatak A

SOR (Successive Overrelaxation) metoda

Općenito o metodama za rješavanje $Ax = b$:
Riješavamo sustav $Ax = b$ u $\mathbb{R}^n$, koji možemo zapisati kao

$$Mx = (M - A)x + b,$$

gdje je M prikladna matrica. Za nesingularnu matricu M sustav je ekvivalentan jednadžbi

$$x = (I - M^{-1}A)x + M^{-1}b,$$

što vodi iteracijama

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(I - M^{-1}A)}_{B:=} x^{(k)} + M^{-1}b. \tag{A.1}$$

Iteraciju $x^{(k+1)}$ računamo rješavanjem sustava $Mx^{(k+1)} = (M - A)x^{(k)} + b$. Vrijedi

$$konvergencija \iff \rho(B) < 1,$$

gdje je $\rho(B)$ spektralni radijus matrice B. Za ovaj kriterij lako nalazimo dovoljan uvjet. Operatorska norma matrice

$$\|B\| = \max_{\|z\|=1} \|Bz\|$$

zadovoljava

$$\|B\| \geq \rho(B).$$

Stoga $\|B\| < 1$ implicira konvergenciju. Primijenimo li isto na matrične norme

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right|,$$

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right|,$$

dobivamo dovoljne uvjete za konvergenciju. Iteracija će konvergirati ukoliko vrijedi dovoljan uvjet

$$\sum_{j=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1 \text{ za } 1 \leq i \leq n$$

ili

$$\sum_{i=1}^{n} \left|b_{ij}\right| < 1 \text{ za } 1 \leq j \leq n.$$

Matricu M konstruiramo tako da (A.1) brzo konvergira, te da joj je struktura jednostavna za rješavanje. Jednostavne primjere dobivamo rastavljanjem A u oblik $A = D - L - U$, gdje je

D *dijagonalna matrica*
L *striktno donjetrokutasta matrica*
U *striktno gornjetrokutasta matrica.*

Jacobi: Odabiremo $M \coloneqq D$ što implicira $M - A = L + U$. Dobivamo iteraciju

$$Dx^{(k+1)} = (L + U)x^{(k)} + b.$$

Gauss-Seidel: Odabiremo $M \coloneqq D - L$ što implicira $M - A = U$. Dobivamo iteraciju

$$(D - L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b.$$

SOR: Dodajemo *relaksacijski parametar* ω_R kojeg zatim biramo na način da ubrza konvergenciju:

$$M \coloneqq \frac{1}{\omega_R} D - L \implies M - A = \Big(\frac{1}{\omega_R} - 1\Big) D + U,$$

$$\Big(\frac{1}{\omega_R} D - L\Big) x^{(k+1)} = \Big(\Big(\frac{1}{\omega_R} - 1\Big) D + U\Big) x^{(k)} + b.$$

SOR metodu možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{cases} B_R \coloneqq \Big(\frac{1}{\omega_R}D - L\Big)^{-1}\Big(\Big(\frac{1}{\omega_R} - 1\Big)D + U\Big) \\ x^{(k+1)} = B_R x^{(k)} + \Big(\frac{1}{\omega_R}D - L\Big)^{-1} b \end{cases}.$$

Gauss-Seidel-ovu metodu dobivamo kao poseban slučaj za $\omega_R = 1$.

Odabir ω_R: Vektori razlike $d^{(k+1)} \coloneqq x^{(k+1)} - x^{(k)}$ zadovoljavaju:

$$d^{(k+1)} = B_R d^{(k)}. \tag{A.2}$$

Ovo je metoda potencija za probleme svojstvenih vrijednosti. Stoga $d^{(k)}$ konvergiraju prema svojstvenom vektoru dominantne svojstvene vrijednosti $\rho(B_R)$. Ukoliko (A.2) konvergira, tada vrijedi

$$d^{(k+1)} = B_R d^{(k)} \approx \rho(B_R) d^{(k)}.$$

Tada je

$$\big|\rho(B_R)\big| \approx \frac{\big\|d^{(k+1)}\big\|}{\big\|d^{(k)}\big\|}$$

za proizvoljnu vektorsku normu.

Dodatak B

MATLAB kod

U dodatku prilažemo kod implementacija algoritama za vrednovanje američkih put i call opcija.

B.1 Pomoćna funkcija za call opcije:

```
function [out] = g_call(x,tau,q,q_delta)
  pom1= exp((tau/4)*((q_delta - 1)^2 + 4*q));
  pom2=max(exp((x/2)*( q_delta + 1)) - exp((x/2)*(q_delta -
      1)), 0);
  out=pom1*pom2;
end
```

B.2 Pomoćna funkcija za put opcije:

```
function [out] = g_put(x,tau,q,q_delta)
    pom1 = exp((tau/4)*((q_delta - 1)^2 + 4*q));
    pom2 = max(exp((x/2)*(q_delta - 1)) - exp((x/2)*( q_delta
        + 1)), 0);
    out = pom1*pom2;
end
```

B.3 Glavni kod za put opcije:

```
x_min = -5;
x_max = 5;
nu_max = 100;
m = 100;
sigma = 0.3;
T = 1;
r = 0.06;
theta = 0.5;
delta = 0.04;
omega_R = 1;
K = 10;
epsilon = 10^(-5);
epsilon_zvjezdica = K * 10^(-5);

q_delta = (2*(r-delta))/(sigma^2);
q = (2*r)/(sigma^2);
delta_x=(x_max - x_min)/m;
delta_tau = ((1/2)*(sigma^2)*T)/nu_max;
alpha = (2/3)*delta_x;
beta = (delta_tau*theta)/delta_x;
gama = (delta_tau*(1 - theta))/delta_x;

x=null(m+1);
for i=1:(m+1)
    x(i)=x_min+(i-1)*delta_x;
end

w_put=null(m-1);
for i=1:(m-1)
    w_put(i)= g_put(x(i+1),0,q,q_delta);
end

b_put=null(m-1);
v_put=null(m+1);
V_put=null(m-1);
S=null(m-1);
g_put_next = null(m-1);
```

```
38 w_put_matrica=zeros(m-1,nu_max-1);
39
40 for nu=0:(nu_max-1)
41     tau_nu = nu*delta_tau;
42     for i=1:(m-1)
43         g_put_next(i)=g_put(x(i),(nu+1)*delta_tau,q,q_delta);
44     end
45     b_put(1) = (alpha - 2*gama)*w_put(1) + (alpha/4 + gama)*
           w_put(2);
46     for i=2:(m-2)
47         b_put(i) = (alpha/4 + gama)*w_put(i-1) + (alpha - 2*
               gama)*w_put(i) + (alpha/4 + gama)*w_put(i+1);
48     end
49     b_put(m-1) = (alpha/4 + gama)*w_put(m-2) + (alpha - 2*
           gama)*w_put(m-1);
50
51     v_put(2:m)=max(w_put,g_put_next);
52
53     v_new_put=zeros(1,m+1);
54     v_put(m+1)=0;
55
56     while (norm(v_new_put - v_put) > epsilon)
57         pom=v_put;
58         for i=2:m
59             rho = (b_put(i-1) - (alpha/4 - beta)*(v_new_put(i
                   -1)+v_put(i+1)))/(alpha+2*beta);
60             v_new_put(i) = max(g_put(x(i),(nu+1)*delta_tau,q,
                   q_delta), v_put(i)+omega_R*(rho-v_put(i)));
61         end
62         v_put=v_new_put;
63         v_new_put=pom;
64     end
65     w_put_matrica(1:m-1,nu+1)=v_put(2:m);
66     w_put=v_put(2:m);
67 end
68
69 V_put_matrica=zeros(m-1,nu_max-1);
70 for i=1:(nu_max-1)
71     for j=1:(m-1)
```

```
72          V_put_matrica(j,i) = K * w_put_matrica(j,i) * exp((-x
               (j+1)/2)*(q_delta-1)) * exp(-((1/2)*(sigma^2)*T)
               *((1/4)*((q_delta-1)^2)+q));
73      end
74  end
75
76  for i=1:(m-1)
77      S(i)=K*exp(x(i+1));
78      V_put(i) = K * w_put(i) * exp((-x(i+1)/2)*(q_delta-1)) *
           exp(-((1/2)*(sigma^2)*T)*((1/4)*((q_delta-1)^2)+q));
79  end
80
81  isplata_put = V_put;
82  i_f_put=0;
83  for i=1:(m-1)
84      if ((abs(V_put(i)+S(i)-K)<epsilon_zvjezdica) && (i>
           i_f_put))
85          i_f_put=i;
86      end
87  end
88
89  for i=1:i_f_put
90      isplata_put(i)=K-S(i);
91  end
92
93  % POCETAK plot
94  figure(1);
95  plot(S, V_put)
96  xlim([0 30])
97  hold on
98  payoff = max(K - S, 0);
99  plot(S, payoff)
100 hold off
101 legend('Vrijednost opcije','Isplata')
102 % KRAJ plot
103
104 for i=1:(nu_max-1)
105     for j=1:(m-1)
106         V_put_matrica(j,i) = max(V_put_matrica(j,i),payoff(j));
```

```
107     end
108 end
109
110 % 3D plot start
111 series = 0:0.01:1;
112 series = series(2:100);
113 t = 1 - series;
114 [X,Y] = meshgrid(S,t);
115 Z = transpose(V_put_matrica(:,1:99));
116 pay = max(K - X, 0);
117 figure(2);
118 surf(X,Y,Z,'FaceColor','g')
119 hold on
120 surf(X,Y,pay,'FaceColor','b', 'FaceAlpha',.5)
121 hold off
122 xlim([0 30])
123 % 3D plot end
124
125 % START plot kroz razna razodblja
126 figure(3);
127 xlim([0 20])
128 hold on
129 plot(S, V_put_matrica(:,1))
130 plot(S, V_put_matrica(:,20))
131 plot(S, V_put_matrica(:,40))
132 plot(S, V_put_matrica(:,60))
133 plot(S, V_put_matrica(:,80))
134 plot(S, V_put_matrica(:,99))
135 hold off
136 % END plot kroz razna razodblja
```

B.4 Glavni kod za call opcije:

```
1 x_min = -5;
2 x_max = 5;
3 nu_max = 100;
4 m = 100;
5 sigma = 0.6;
```

```
 6 T = 1;
 7 r = 0.25;
 8 theta = 0.5;
 9 delta = 0.2;
10 omega_R = 1;
11 K = 10;
12 epsilon = 10^(-5);
13 epsilon_zvjezdica = K*(10^(-5));
14
15 q_delta = (2*(r-delta))/(sigma^2);
16 q = (2*r)/(sigma^2);
17 delta_x = (x_max - x_min)/m;
18 delta_tau = ((1/2)*(sigma^2)*T)/nu_max;
19 alpha = (2/3)*delta_x;
20 beta = (delta_tau*theta)/delta_x;
21 gama = (delta_tau*(1 - theta))/delta_x;
22
23 x=null(m+1);
24 for i=1:(m+1)
25     x(i)=x_min+(i-1)*delta_x;
26 end
27
28 w_call=null(m-1);
29 for i=1:(m-1)
30     w_call(i)=g_call(x(i+1),0,q,q_delta);
31 end
32
33 b_call=null(m-1);
34 v_call=null(m+1);
35 V_call=null(m-1);
36 S=null(m-1);
37 g_call_next = null(m-1);
38 w_call_matrica=zeros(m-1,nu_max-1);
39
40 for nu=0:(nu_max-1)
41     tau_nu = nu*delta_tau;
42     for i=1:(m-1)
43         g_call_next(i)=g_call(x(i),(nu+1)*delta_tau,q,q_delta
              );
```

```
44      end
45      b_call(1) = (alpha - 2*gama)*w_call(1) + (alpha/4 + gama)
           *w_call(2);
46      for i=2:(m-2)
47          b_call(i) = (alpha/4 + gama)*w_call(i-1) + (alpha -
               2*gama)*w_call(i) + (alpha/4 + gama)*w_call(i+1);
48      end
49      b_call(m-1) = (alpha/4 + gama)*w_call(m-2) + (alpha - 2*
           gama)*w_call(m-1);
50
51      v_call(2:m)=max(w_call, g_call_next);
52
53      v_new_call=zeros(1,m+1);
54
55      v_call(m+1)=0;
56
57      while (norm(v_new_call - v_call) > epsilon)
58          pom=v_call;
59          for i=2:m
60              rho = (b_call(i-1) - (alpha/4 - beta)*(v_new_call
                   (i-1)+v_call(i+1)))/(alpha+2*beta);
61              v_new_call(i) = max(g_call(x(i),(nu+1)*delta_tau,
                   q,q_delta), v_call(i)+omega_R*(rho-v_call(i)))
                   ;
62          end
63          v_call=v_new_call;
64          v_new_call=pom;
65      end
66      w_call_matrica(1:m-1,nu+1)=v_call(2:m);
67      w_call=v_call(2:m);
68  end
69
70  V_call_matrica=zeros(m-1,nu_max-1);
71  for i=1:(nu_max-1)
72      for j=1:(m-1)
73          V_call_matrica(j,i) = K * w_call_matrica(j,i) * exp
               ((-x(j+1)/2)*(q_delta-1)) * exp(-((1/2)*(sigma^2)*
               T)*((1/4)*((q_delta-1)^2)+q));
74      end
```

```
75 end
76
77 for i=1:(m-1)
78     S(i)=K*exp(x(i+1));
79     V_call(i) = K * w_call(i) * exp((-x(i+1)/2)*(q_delta-1))
          * exp(-((1/2)*(sigma^2)*T)*((1/4)*((q_delta-1)^2)+q));
80 end
81
82 isplata_call = V_call;
83 i_f_call=m-1;
84 for i=1:(m-1)
85     if ((abs(K-S(i)+V_call(i))<epsilon_zvjezdica) && (i<
          i_f_call))
86         i_f_call=i;
87     end
88 end
89
90 for i=i_f_call:(m-1)
91     isplata_call(i)=S(i)-K;
92 end
93
94 % START plot
95 figure(1);
96 plot(S, V_call)
97 xlim([0 30])
98 hold on
99 payoff = max(S - K, 0);
100 plot(S, payoff)
101 hold off
102 legend('Vrijednost opcije','Isplata')
103 % END plot
104
105 for i=1:(nu_max-1)
106     for j=1:(m-1)
107       V_call_matrica(j,i) = max(V_call_matrica(j,i),payoff(j));
108     end
109 end
110
111 % 3D plot start
```

```
112 series = 0:0.01:1;
113 series = series(2:100);
114 t = 1 - series;
115 [X,Y] = meshgrid(S,t);
116 Z = transpose(V_call_matrica(:,1:99));
117 pay = max(X - K, 0);
118 figure(2);
119 surf(X,Y,pay,'FaceColor','b', 'FaceAlpha',.5)
120 hold on
121 surf(X,Y,Z,'FaceColor','g')
122 hold off
123 xlim([0 30])
124 zlim([0 20])
125 % 3D plot end
126
127 % START plot kroz razna razodblja
128 figure(3);
129 xlim([0 30])
130 hold on
131 plot(S, V_call_matrica(:,1))
132 plot(S, V_call_matrica(:,20))
133 plot(S, V_call_matrica(:,40))
134 plot(S, V_call_matrica(:,60))
135 plot(S, V_call_matrica(:,80))
136 plot(S, V_call_matrica(:,99))
137 hold off
138 % END plot kroz razna razodblja
```

Bibliografija

[1] Susanne C. Brenner i L. Ridgway. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*, Springer, 2011.

[2] Philippe G. Ciarlet, *Handbook of numerical analysis*, sv. II, North-Holland, 1998.

[3] Colin W. Cryer, *The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Overrelaxation*, SIAM Journal on Control **9** (1971), br. 3, 385–392.

[4] John Hull i John Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Prentice Hall, 1997.

[5] R Seydel, *Tools for computational finance*, Springer, Berlin, 2009, ISBN 978-3-540-92928-4.

[6] Josef Stoer i Christoph Witzgall, *Convexity and optimization in finite dimensions*, Springer, 1970.

[7] J. Stoer i R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, (1993).

[8] Gilbert Strang, *Introduction to applied mathematics*, Wellesley-Cambridge, 2009.

[9] Tomas Szabo, *On the Discretization Time-Step in the Finite Element Theta-Method of the Discrete Heat Equation*, Numerical Analysis and Its Applications, 4th International Conference, NAA 2008, Lozenetz, Bulgaria, June 16-20, 2008. Revised Selected Papers, 2009, str. 564–571.

[10] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje 1 (skripta)*, 2008.

[11] ———, *Financijsko modeliranje 2 (skripta)*, 2008.

[12] M. Žanetić, *Određivanje vrijednosti američkih opcija*, Magistarska radnja, 2016.

Sažetak

Opcije su financijski ugovori čija vrijednost ovisi o vrijednosti imovine na koju se opcija odnosi (one su financijske *izvedenice*). Europska call (put) opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu kupiti (prodati) financijsku imovinu po cijeni izvršenja K na datum dospijeća T. Definicija američke opcije je analogna, uz razliku da se imovina može kupiti (prodati) u bilo kojem trenutku t do datuma dospijeća T. Egzotične opcije su sve one koje na bilo koji način odskaču od definicije standardnih opcija. Najčešće one ovise o jednoj (ili više) nestandarnoj financijskoj imovini, imaju tzv. knock-out barijere koje određuju isplatu, ovise o cijelom putu, a ne samo o završnom trenutku (npr. azijska opcija) i slično.

Centralni problem trgovanja opcijama je određivanje njihove cijene prilikom izdavanja i za njihova života. Postoje razni načini svladavanja ovog problema, većinom iz perspektive stohastičkog računa ili numeričkih metoda. Cilj ovog rada bio je predstaviti upravo jedan od numeričkih pristupa—pomoću metoda konačnih elemenata.

U prvom poglavlju su najprije uvedene osnovne definicije pojmova i varijabli koje se kasnije koriste. Definiramo što za nas znači vrijednost opcije, tj. koja je funkcija isplate. Iz pretpostavke o nepostojanju arbitraže na tržištu izvodimo *a priori* ograde za vrijednost opcije. Pritom zaključujemo da će vrijednost američke opcije uvijek biti veća ili jednaka europskoj. Iz relacije *put-call pariteta* dobivamo ograde za call i put opcije. Nakon toga uvodimo važne tržišne parametre te kako vrijednost opcije ovisi o njima. Ukratko prikazujemo i geometrijsku interpretaciju vrijednosti američke opcije. Na kraju poglavlja predstavljamo Black–Scholes–Merton-ov model financijskog tržišta: pretpostavke i Black–Scholes-ovu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu.

U drugom poglavlju se bavimo samim metodama konačnih elemenata. Prvo smo principom težinskih reziduala vidjeli kako provesti diskretizaciju i definirati aproksimaciju. Zatim navodimo najčešće primjere baznih i težinskih funkcija. Za rješavanje odabiremo Galerkinovu metodu u kojoj su težinske funkcije jednake baznima, za koje

biramo krović funkcije te provodimo primjer metoda konačnih elemenata s ovim pretpostavkama. Razrađenu metodu zatim primijenjujemo na standardne opcije u trećem poglavlju. Kako bismo isto primijenili na američke opcije, u četvrtom poglavlju se upoznajemo sa problemom prepreke. Njegovu alternativnu definiciju zovemo *problem linearne komplementarnosti* i tražimo njegovo numeričko rješenje. Problem zapisujemo u varijacijskom obliku te nastavljamo sa rješavanjem istoga. Nakon teoretskih rezultata, dobivamo problem koji zatim rješavamo metodama konačnih elemenata. Slijedi analiza problema na taj način i razvoj algoritama s primjenama na američke opcije. U petom poglavlju ukratko iscrtavamo primjenu na egzotične opcije, dok se u šestom poglavlju bavimo procjenama grešaka. Definiramo slaba i jaka rješenja te Céa-inom lemom dobivamo ocjenu greške. U zadnjem poglavlju su prikazani rezultati primjene MATLAB programa za vrednovanje američkih opcija.

Prvi dodatak služi kao dodatno štivo ili podsjetnik o numeričkoj metodi SOR. Drugi dodatak sadrži implementaciju algoritma vrednovanja američkih opcija u MATLAB-u.

Summary

Options are financial contracts whose value depends on the value of their underlying asset (they are financial *derivatives*). The European call (put) option is a contract which gives its owner the right, but not the obligation of buying (selling) the underlying asset on the exercise date T at an agreed-upon price K (the strike price). The definition for American options is analogous, except that the asset can be bought (sold) at any point in time t up until the exercise date T. Exotic options are those whose definition is different from standard options. Often they have (one or more) non-standard underlying assets, they have knock-out barriers which determine payoff, their value depends on the asset price in every point in time (Asian options), etc.

The main problem when trading options is determining their value (price) when they are issued and throughout their life. There are many ways to tackle this problem; mostly from the stochastic and numerical perspectives. The goal of this thesis was to cover one of the numerical approaches—using finite-element methods.

The first topic we cover in the first chapter are definitions of the terms and variables we use throughout the later chapters. We define what the options' value actually is (what the payoff function looks like). From the no-arbitrage condition we derive the *a priori* bounds for the options' value. We conclude the value of an American option is always going to be greater or equal than that of an European option. From the *call-put parity* we get the bounds for call and put options. After that, important market parameters are introduced and we discuss how the value of an option depends on them. We then show the geometrical interpretation of an American options' value. At the end of the chapter the Black–Scholes–Merton market model is introduced: its assumptions and the Black–Scholes partial differential equation.

The second chapter deals with finite-element methods in general. First we show how to conduct the discretisation and define the approximation using the weighted residuals principle. After that we list some of the most popular basis and weighting functions. We choose the Galerkin method, where the weighting functions are equal

to the basis functions, to solve the problem. For the basis functions we choose hat functions and then use this approach to use finite-element methods on an example. The resulting method is then applied to standard options in the third chapter. In order to use the method on American options, we familiarise ourselves with the obstacle problem in the fourth chapter. We try to find the numerical solution of the problems' alternative definition, the *linear complementarity problem*. We carry on the solving by introducing the variational form of the obstacle problem. After the theoretical results, we get a problem which we then solve using finite-element methods. Using this method we proceed by developing algorithms with applications to American options. In the fifth chapter we sketch out an application to exotic options. We reserve the sixth chapter for error estimates. Strong and weak solutions are defined and we get the error estimate using Céa's lemma. In the last chapter, we pick a few examples to showcase the usage of our MATLAB implementation of the algorithm for valuing American options.

The first appendix is provided as a supplement or a reminder on the SOR numerical method, while the second appendix contains the MATLAB implementation of the algorithm for valuing American options.

Životopis

Rođena sam 31. srpnja 1993. godine u Zagrebu. 2008. godine završavam Osnovnu školu Stenjevec kada upisujem V. gimnaziju prirodoslovno-matematičkog usmjerenja. Srednju školu sam završila 2012. te odlučujem upisati preddiplomski studij matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. 2015. godine završavam preddiplomski studij i upisujem diplomski studij Financijske i poslovne matematike na istom odsjeku. Tijekom studiranja skupljam iskustva u različitim sektorima odrađujući prakse i radeći u Vestigo d.o.o., Hrvatskoj agenciji za nadzor financijskih usluga i Privrednoj banci Zagreb.