Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Valentina Joha

Konformni modeli hiperboličke ravnine

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, studeni 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Majci

Sadržaj

1 Uvod

Kroz povijest mnogi matematičari neuspješno su dokazivali Euklidov peti postulat. Prvi koji je utvrdio u čemu je problem bio je Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.). Pokušavao je izvesti peti postulat koristeći ostale postulate i aksiome i postao je uvjeren da je on neovisan o njima. Počeo se pitati kako bi izgledala geometrija u kojoj bi kroz zadanu točku sa zadanim pravcem postojalo više od jedne paralele. Gauss je o svojim rezultatima komunicirao s matematičarom Farkasem Bolyaijem (1775.-1856.). Bolyai je imao nekoliko neuspjelih pokušaja dokazivanja petog postulata. Podučavao je svog sina Jánosa, ali mu je savjetovao da se ne bavi ovim problemom. No, János se ipak bavi ovim problemom te 1823. godine piše ocu: *Otkrio sam stvari tako divne da sam zaprepašten... Iz ničega sam stvorio novi svijet.* Izvukao je posljedice koje bi slijedile iz pretpostavke da kroz zadanu točku možemo povući više paralela sa zadanim pravcem. No on sam još nije dokazao postojanje nove geometrije već pokazao ideju da je to moguće.

Matematičar Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792.-1856.) je krenuo od iste pretpostavke kao Bolyai te dobio niz teorema nove geometrije. Godine 1840. objavio je knjigu u kojoj detaljno objašnjava principe neeuklidske geometrije. Danas geometriju ovog tipa nazivamo hiperboličkom geometrijom koja je ujedno i tema ovog diplomskog rada.

U drugom poglavlju uvodimo model hiperboličke ravnine koji ćemo koristiti u većem dijelu diplomskog rada, model gornje poluravnine $\mathbb{H}$. U njemu ćemo definirati pravce te paralelnost i okomitost.

U trećem poglavlju određujemo grupu transformacija od $\mathbb{H}$ koje hiperboličke pravce preslikaju u hiperboličke pravce. Uvodimo pojam Riemannove sfere $\overline{\mathbb{C}}$ te pručavamo njenu topologiju. Navodimo važne homeomorfizme za izgradnju Möbiusovih transformacija. Proučavat ćemo svojstva grupe Möbiusovih transformacija te njenu povezanost s grupom homeomorfizama od $\overline{\mathbb{C}}$. U ovom poglavlju definiramo i opću Möbiusovu grupu te njena svojstva. Važan dio ovog poglavlja je proučavanje konformnosti elemenata opće Möbiusove grupe te otkrivanje grupe transformacija koje čuvaju $\mathbb{H}$.

U četvrtom poglavlju koristit ćemo kompleksnu analizu i sve do sada učinjeno da bi na prirodan način uveli metriku u hiperboličku ravninu. Na početku poglavlja definiramo krivulje te glatke i po dijelovima glatke puteve te računanje nihovih duljina. Nakon toga razvijamo alat za mjerenje hiperboličke duljine te nam je za to potrebna grupa Möbisuovih transformacija koje čuvaju $\mathbb{H}$. Proučavamo duljinu luka koja je invarijantna pod djelovanjem te grupe. Otkrivamo eksplicitne formule za računanje hiperboličke duljine i udaljenosti. Na kraju ovog poglavlja proučavamo još neka metrička svojstva hiperboličke ravnine

U petom poglavlju reći ćemo nešto o još nekim ravninskim modelima: Poincaréovom disku i općem modelu hiperboličke ravnine izgrađenom s pomoću kompleksne analize.

2 Model hiperboličke ravnine

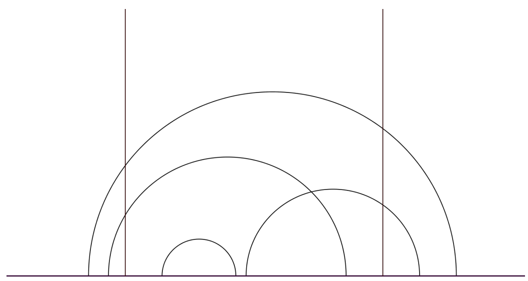
Započet ćemo s opisivanjem modela hiperboličke ravnine te kako u njemu prikazujemo osnovne geometrijske objekte kao što su točke i pravci.

Model s kojim ćemo započeti je model *gornje poluravnine*. To je dvodimenzionalni model za koji nam je potrebna kompleksna ravnina $\mathbb{C}$. Definiran je kao:

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}.$$

Prije definiranja hiperboličkih pravaca prisjetimo se jednadžbe pravca i kružnice u euklidskoj ravnini. Implicitna jednadžba pravca je $ax+by+c=0$, a jednadžba kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$. Za ovaj model koristimo kompleksnu ravninu. Kompleksan broj z zapisujemo kao $z=x+iy$, gdje je x realni dio, a y imaginarni dio. Realne i imaginarne dijelove kompleksnih brojeva možemo izračunati koristeći formule $Re(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z}), Im(z)=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})$. Jednadžba pravca u kompleksnim kordinatama je $\frac{1}{2}(a-ib)z+\frac{1}{2}(a+bi)\overline{z}+c=0$, a jednadžba kružnice polumjera r sa središtem u z_0 je $|z-z_0|=r$. Primijetimo da se obje jednadžbe mogu zapisati u obliku $\alpha z\overline{z}+\beta z+\overline{\beta}\overline{z}+\gamma=0$ za $\alpha,\gamma \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$.

Definicija 2.1. *Dvije su vrste hiperboličkih pravaca. Jedni su presjek $\mathbb{H}$ s euklidskim pravcima u $\mathbb{C}$ okomitima na realnu os. Drugi su presjek $\mathbb{H}$ s euklidskim kružnicama kojima je centar na realnoj osi.*



Slika 1: Nekoliko pravaca u $\mathbb{H}$.

Propozicija 2.2. *Za svake dvije točke A i B u $\mathbb{H}$ postoji jedinstven hiperbolički pravac l koji prolazi tim točkama.*

Dokaz. Dokažimo najprije postojanje. Neka su A i B dvije točke u $\mathbb{H}$. Postoje dva slučaja: 1. $Re(A)=Re(B)$, 2. $Re(A)\neq Re(B)$.

Promotrimo prvi slučaj. Neka je L euklidski pravac zadan jednadžbom $L=\{z\in\mathbb{C}\mid Re(z)=Re(A)\}$. Taj je pravac okomit na realnu os te prolazi točkama A i B. Hiperbolički pravac $l = \mathbb{H} \cap L$ je traženi pravac točkama A i B.

Promotrimo sada drugi slučaj. Euklidski pravac koji prolazi točkama A i B nije okomit na realnu os pa moramo konstruirati drugu vrstu pravaca, tj. euklidsku kružnicu koja prolazi točkama A i B te joj je centar na realnoj osi. Označimo s $\overline{AB}$ euklidsku dužinu kojoj su A i B krajnje točke. Neka je k simetrala te dužine. Svaka euklidska kružnica koja prolazi točkama A i B ima središte na simetrali p. Realna os i simetrala p se sijeku u jedinstvenoj točki C. Neka je k euklidska kružnica s centrom u C i raijusom $|C - A|$. Kružnica prolazi točkom A i C pripada simetrali pa imamo $|C - A| = |C - B|$. Zato kružnica prolazi i točkom B. Traženi hiperbolički pravac je $l = \mathbb{H} \cap k$.

Preostaje još dokazati jedinstvenost. U prvom slučaju hiperbolički pravac povezuje točke jednakih realnih dijelova. Postoji jedinstveni euklidski pravac koji prolazi dvjema različitim točkama te je time određen jedinstven hiperbolički pravac. Ne postoji euklidska kružnica koja bi prolazila tim točkama te imala središte na realnoj osi.

U drugom slučaju hiperbolički pravac povezuje točke različitih realnih dijelova. Euklidski pravac tim točkama nije okomit na realnu os te je traženi hiperbolički pravac dio euklidske kružnice sa središtem na realnoj osi. Ta kružnica je jedinstvena i zato je traženi hiperbolički pravac jedinstven. $\square$

Prva velika razlika koju ćemo uočiti između euklidske i hiperboličke geometrije tiče se paralelnih pravaca. Znamo da su dva pravca u euklidskoj ravnini paralelna ako i samo ako se ne sijeku. Prisjetimo se Euklidovog petog aksioma: za zadani pravac i točku koja ne pripada tom pravcu postoji jedinstven pravac tom točkom paralelan sa zadanim pravcem. Recimo nešto o paralelama u hiperboličkoj ravnini.

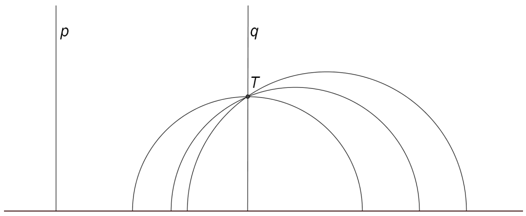
Definicija 2.3. *Dva pravca u hiperboličkoj ravnini su paralelni ako se ne sijeku.*

Teorem 2.4. *Neka je p hiperbolički pravac i T točka u $\mathbb{H}$ koja ne pripada pravcu p. Postoji beskonačno mnogo pravaca točkom T koji su paralelni s p.*

Dokaz. Dva su slučaja koja je potrebno dokazati: 1. p je hiperbolički pravac koji spaja točke jednakih realnih dijelova, 2. p je hiperbolički pravac koji spaja točke različitih realnih dijelova.

U prvom slučaju p je sadržan u euklidskom pravcu okomitom na realnu os. Točka T ne pripada p. Tada možemo konstruirati euklidski pravac q koji je paralelan s p te prolazi točkom T. Pravac q nema zajedničkih točaka s p te je okomit na realnu os. Presjek pravca q s $\mathbb{H}$ je hiperbolički pravac paralelan s p. Ti pravci nemaju zajedničkih točaka.

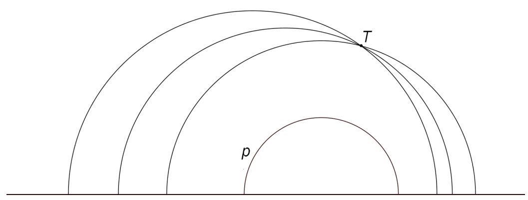
Za konstrukciju drugog paralelenog pravca točkom T izaberimo točku X na realnoj osi koja je između pravaca p i q. Možemo konstruirati euklidsku kružnicu točkama X i T sa središtem na realnoj osi. Kružnica i pravac p nemaju zajedničkih točaka. Presjek kružnice s $\mathbb{H}$ je hiperbolički pravac koji spaja točke različitih realnih dijelova. Točke X i T imaju različite realne dijelove. Točku X smo mogli izabrati na beskonačno mnogo načina te smo mogli konstruirati beskonačno mnogo euklidskih kružnica. To daje beskonačno mnogo pravaca točkom T koji su paralelni s p. Ilustraciju ovog slučaja možemo vidjeti na slici 2.



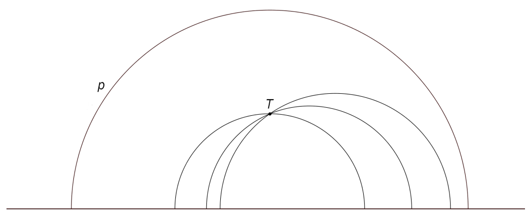
Slika 2: Nekoliko paralelnih pravaca s p u $\mathbb{H}$, prvi slučaj.

U drugom slučaju pravac p spaja točke različitih realnih dijelova. Pravac p je sadržan u euklidskoj kružnici sa središtem na realnoj osi. Označimo tu kružnicu s k. Konstruirajmo kružnicu k_1 koncentričnu s k kojoj pripada točka T. Ove kružnice nemaju zajedničkih točaka. Presjek kružnice k_1 s $\mathbb{H}$ je hiperbolički pravac paralelan s p.

Za konstrukciju drugog paralelnog pravca točkom T izaberimo točku X na realnoj osi koja je između p i k_1. Možemo konstruirati euklidsku kružnicu k_2 točkama X i T sa središtem na realnoj osi. Kružnice k i k_2 nemaju zajedničkih točaka. Hiperbolički pravac koji je presjek k_2 s $\mathbb{H}$ je paralelan s p. Konstruirali smo još jedan pravac paralelan s p. Točku X mogli smo izabrati na beskonačno mnogo načina te smo mogli konstrirati beskonačno mnogo euklidskih kružnica. To daje beskonačno mnogo pravaca točkom T koji su paralelni s p. Ilustracije ovog slučaja možemo vidjeti na slikama 3 i 4, ovisno je li točka T unutar ili izvan kružnice k. $\square$



Slika 3: Nekoliko paralelnih pravaca s p u $\mathbb{H}$, drugi slučaj (T izvan k).

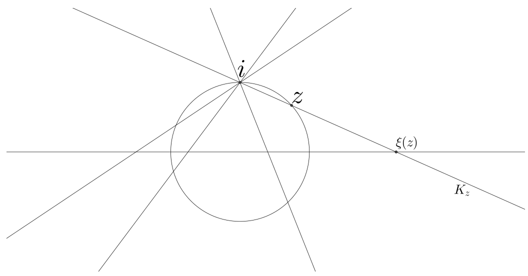


Slika 4: Nekoliko paralelnih pravaca s p u $\mathbb{H}$, drugi slučaj (T unutar k).

3 Opća Möbiusova grupa

Da bismo odredili grupu transformacija od $\mathbb{H}$ koje hiperboličke pravce preslikavaju u hiperboličke pravce, moramo proširiti znanje o hiperboličkim pravcima. Ujedinit ćemo dvije naizgled različite vrste pravaca. Prisjetimo se, to su pravci koji su sadržani u euklidskim pravcima i pravci sadržani u euklidskim kružnicama. Primijetit ćemo da euklidske kružnice možemo dobiti od euklidskih pravaca dodavanjem jedne točke.

Neka je $\mathbb{S}^1$ jedinična kružnica u $\mathbb{C}$, promotrimo funkciju $\xi : \mathbb{S}^1/\{i\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiranu na sljedeći način. Neka je z točka u $\mathbb{S}^1/\{i\}$, neka je K_z euklidski pravac koji prolazi točkama i i z. Funkcija je određena pravilom $\xi(z) = \mathbb{R} \cap K_z$. Ova funkcija je dobro definirana zato što je presjek $\mathbb{R}$ i K_z jedinstvena točka i $Im(z) \neq 1$. Funkcija ξ naziva se *stereografska projekcija*.



Slika 5: Stereografska projekcija.

Primijetimo da funkcija ξ bijektivno preslikava $\mathbb{S}^1$ bez jedne točke na realnu os. Možemo razmišljati o konstrukciji euklidske kružnice počevši od euklidskog pravca i dodavanja jedne točke. Dodavanjem jedne točke u $\mathbb{C}$ dobivamo konstrukciju koja se u kompleksnoj analizi naziva *Riemannova sfera* $\overline{\mathbb{C}}$.

Riemannova sfera je unija $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ i točke koja nije sadržana u $\mathbb{C}$. Tu točku označavamo s ∞. Proučavanje osnovnih svojstava $\overline{\mathbb{C}}$ započet ćemo definiranjem što znači da je podskup od $\overline{\mathbb{C}}$ otvoren.

Skup X je otvoren u $\mathbb{C}$ ako za svaki $z \in X$ postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $U_\varepsilon(z) \subset X$ pri čemu je $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} | |w - z| < \varepsilon\}$ otvoreni euklidski disk radijusa ε s centrom u z. Skup $X \subseteq \mathbb{C}$ je zatvoren ako je njegov komplement u $\mathbb{C}$ otvoren.

Propozicija 3.1. $\mathbb{H}$ *je otvoren u* $\mathbb{C}$.

Dokaz. Neka je z proizvoljno odabrana točka u $\mathbb{H}$. Euklidska udaljenost točke z od $\mathbb{R}$ jednaka je $\mathrm{Im}(z)$. Možemo izabrati ε takav da je $Im(z) > \varepsilon > 0$. Tada je $U_\varepsilon(z)$ sadržan u $\mathbb{H}$. $\square$

Da bi definiciju otvorenog skupa proširili na $\overline{\mathbb{C}}$ trebamo definirati što je $U_\varepsilon(z)$ za svaku točku z iz $\overline{\mathbb{C}}$ i neki $\varepsilon > 0$. Sve osim jedne točke iz $\overline{\mathbb{C}}$ su u $\mathbb{C}$. Za svaki z iz $\mathbb{C}$ definirali smo $U_\varepsilon(z) = \{w \in \mathbb{C} | |w - z| < \varepsilon\}$. Preostaje samo definirati $U_\varepsilon(\infty)$. Definirajmo ga na sljedeći način: $U_\varepsilon(\infty) = \{w \in \mathbb{C} | |w| > \varepsilon\} \cup \{\infty\}$.

Definicija 3.2. *Skup X je otvoren u $\overline{\mathbb{C}}$ ako za svaku točku x iz X postoji neki $\varepsilon > 0$ tako da je $U_\varepsilon(x) \subset X$.*

Neposredna posljedica definicije je: ako je skup otvoren u $\mathbb{C}$, onda je otvoren i u $\overline{\mathbb{C}}$. Unija otvorenih skupova je otvoren skup.

Definicija 3.3. *Skup X je zatvoren u $\overline{\mathbb{C}}$ ako je njegov komplement $\overline{\mathbb{C}}/X$ otvoren u $\overline{\mathbb{C}}$.*

Promotrimo primjer: jedinična kružnica $\mathbb{S}^1$ je zatvorena u $\overline{\mathbb{C}}$ zato što je njen komplement otvoren, tj. $\overline{\mathbb{C}}/S^1 = U_1(0) \cup U_1(\infty)$.

Konvergencija u $\overline{\mathbb{C}}$ je analogna konvergenciji u $\mathbb{C}$. Niz točaka (z_n) u $\overline{\mathbb{C}}$ konvergira točki z iz $\overline{\mathbb{C}}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji N tako da za svaki $n > N$ je $z_n \in U_\varepsilon(z)$. Na primjer, niz $z_n = \frac{1}{n^2}$ konvergira ka 0 u $\overline{\mathbb{C}}$, a niz $z_n = 2n$ kovergira ka ∞ u $\overline{\mathbb{C}}$.

Definirali smo što znači da je skup otvoren u $\overline{\mathbb{C}}$. Možemo definirati *zatvarač* skupa. Neka je X podskup od $\overline{\mathbb{C}}$, zatvarač $\overline{X}$ skupa X u $\overline{\mathbb{C}}$ je $\overline{X} = \{z \in \overline{\mathbb{C}} | U_\varepsilon(z) \cap X \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0\}$. Napomenimo, svaka točka iz X je i u $\overline{X}$ zato što $\{z\} \subset U_\varepsilon(z) \cap X$ za svaki $\varepsilon > 0$. No, mogu postojati točke koje su u $\overline{X}$, a nisu u X. Na primjer, ako je $X \subset \overline{\mathbb{C}}$ i (x_n) niz točaka u X koji konvergira točki x iz $\overline{\mathbb{C}}$, tada je x nužno točka iz $\overline{X}$.

Definicija 3.4. *Kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ je ili euklidska kružnica u $\mathbb{C}$ ili je unija euklidskog pravca u $\mathbb{C}$ s $\{\infty\}$.*

Dodajemo točku ∞ na $\mathbb{C}$ da bismo dobili $\overline{\mathbb{C}}$. To je točka koju trebamo dodati svakom euklidskom pravcu da bismo dobili kružnicu. Za euklidski pravac p u $\mathbb{C}$ je $\overline{p} = p \cup \{\infty\}$ kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ koja sadrži p. Na primjer, *proširena realna os* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ koja sadrži realnu os $\mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$.

Sada znamo da su svi hiperbolički pravci u $\mathbb{H}$ presjek kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ s $\mathbb{H}$. Možemo započeti s određivanjem transformacija u $\mathbb{H}$ koje hiperboličke pravce preslikavaju u hiperboličke pravce. Najprije ćemo otkriti grupu homeomorfizama od $\overline{\mathbb{C}}$ koji preslikavaju kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ u kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$.

Definicija 3.5. *Funkcija $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ je homeomorfizam ako je f bijekcija i obje f i f^{-1} su neprekidne.*

Definicija 3.6. *Funkcija* $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *je neprekidna u točki* $z \in \overline{\mathbb{C}}$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za* $w \in U_\delta(z)$ *slijedi* $f(w) \in U_\varepsilon(f(z))$. *Funkcija* $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *je neprekidna ako je neprekidna u svakoj točki* $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Posvetimo nekoliko riječi oznakama. Grupa svih homeomorfizama od $\overline{\mathbb{C}}$ označava se $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$. Neka je $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ podskup koji sadrži homeomorfizme od $\overline{\mathbb{C}}$ koji preslikavaju kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ u kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$.

Možemo odmah uočiti da je identiteta element od $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$. Komponiranjem dvaju homeomorfizma iz $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ ponovo dobivamo homeomorfizam koji je element iz $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$. No u ovom trenutku ne možemo zaključiti da je i ovo grupa jer ne znamo pripada li invez elementa iz $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$ skupu $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$. Napomenimo samo da postoji mnogo homeomorfizama od $\overline{\mathbb{C}}$ koji nisu elemeti od $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$.

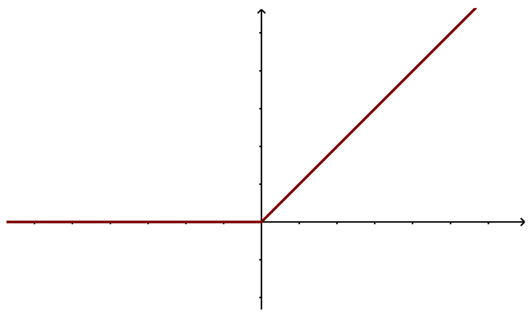
Promotrimo funkciju $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definiranu na sljedeći način:

$$f(z) = \begin{cases} z, & Re(z) \leq 0 \\ z + iRe(z), & Re(z) \geq 0 \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

Vidimo da je ova funkcija neprekidna zato što je unija neprekidnih funkcija koje se podudaraju na proširenoj imaginarnoj osi. Da bi pokazali da je f bijekcija te da je njoj inverzna funkcija f^{-1} također neprekidna, dat ćemo eksplicitan izraz za f^{-1}:

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} z, & Re(z) \leq 0 \\ z - iRe(z), & Re(z) \geq 0 \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$$

Funkcija f je homeomorfizam, tj. $f \in \mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$. Slika od $\overline{\mathbb{R}}$ nije kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$, nego "prelomljeni pravac" prikazan na slici 6. Zato funkcija f nije element skupa $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$.



Slika 6: Slika od $\overline{\mathbb{R}}$ po funkciji f

Propozicija 3.7. *Funkcija f iz* $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ *definirana s $f(z) = az + b$ za $z \in \mathbb{C}$ i $f(\infty) = \infty$, gdje su $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, je element od* $\mathrm{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Dokaz. Svaka kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$ može se opisati kao skup točaka koje su rješenje jednadžbe $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$, pri čemu su $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ i $\beta \in \mathbb{C}$. U slučaju kada je $\alpha = 0$ radi se o jednadžbi pravca, a za $\alpha \neq 0$ o euklidskoj kružnici.

Pokazat ćemo da ako z zadovoljava jednadžbu kružnice, tada i $w = az + b$ također zadovoljava jednadžbu tog oblika. Iz $w = az + b$ je $z = \frac{1}{a}(w - b)$. Supstituiranjem u jednadžbu $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ dobivamo jednadžbu $\alpha' w\overline{w} + \beta' w + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$ za $\alpha' = \frac{\alpha}{a\overline{a}}$, $\beta' = \frac{\beta}{a} - \overline{b}$ i $\gamma' = \alpha\frac{b\overline{b}}{a\overline{a}} - \beta b + \overline{\beta b} + \gamma$. Vidimo da su $\alpha', \gamma' \in \mathbb{R}$ i $\beta' \in \mathbb{C}$. Nadalje, $\alpha' = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$, pa f preslikava euklidske kružnice u euklidske kružnice, a euklidske pravce u euklidske pravce.

□

Geometrijski gledano funkcija f je kompozicija rotacije, homotetije i translacije. Ako zapišemo a u polarnom obliku tada je $a = re^{i\varphi}$. Tada je množenje s a rotacija oko ishodišta za kut φ i homotetija za faktor r. Dodavanje b je translacija.

Propozicija 3.8. *Za J element iz* $\mathrm{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$ *definiran s $J(z) = \frac{1}{z}$ za $z \in \mathbb{C}/\{0\}$, $J(0) = \infty$ i $J(\infty) = 0$ je element od $Homeo^C(\overline{\mathbb{C}})$.*

Dokaz. Za dokazivanje ove propozicije koristit ćemo ideju iz dokaza prethodne propozicije. Kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$ dana je jednadžbom $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Uvedmo supstituciju $w = \frac{1}{z}$. Iz toga slijedi $z = \frac{1}{w}$. Sada imamo: $\alpha\frac{1}{w}\overline{\frac{1}{w}} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta}\overline{\frac{1}{w}} + \gamma = 0$. Pomnožimo jednadžbu s $w\overline{w}$.

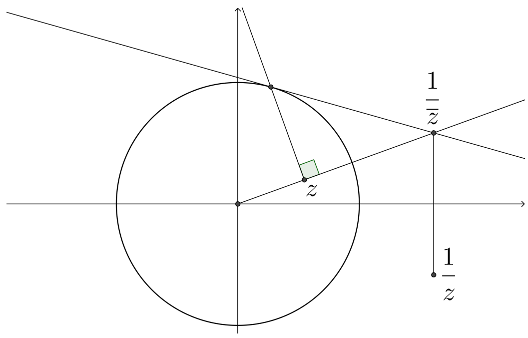
Dobivena je jednadžba $\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma w\overline{w} = 0$. Znamo da su α i γ realni brojevi, a vidimo da su koeficijenti uz w i $\overline{w}$ kompleksno konjugiran par. Dobivena jednadžba je također jednadžba kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$. □

Geometrijski gledano funkcija J je kompozicija inverzije obzirom na jediničnu kružnicu i simetrije obzirom na realnu os. Konstrukciju točke $J(z)$ vidimo na slikama 7 i 8 ovisno nalazi li se točka z unutar ili izvan kružnice.

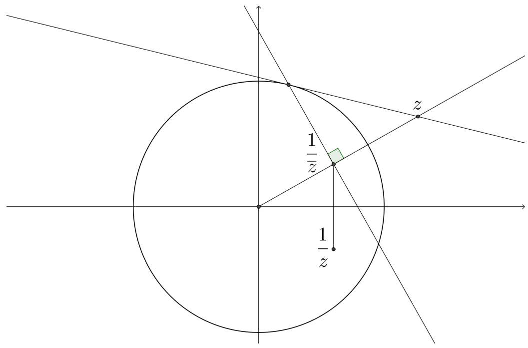
3.1 Möbiusove transformacije

Znamo da je kompozicija homeomorfizama homeomorfizam. Komponiranjem prethodna dva primjera dobit ćemo važan homeomorfizam za ovo poglavlje. Pogledajmo definiciju.

Definicija 3.9. *Möbiusova transformacija je funkcija $m : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ definirana s $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i $ad - bc \neq 0$. Označimo s* $\mathrm{Möb}^+$ *skup svih Möbiusovih transformacija.*



Slika 7: Konstrukcija $J(z)$ za z unutar kružnice.



Slika 8: Konstrukcija $J(z)$ za z izvan kružnice.

Prije nego što krenemo s daljnjom analizom Möbiusovih transformacija, reći ćemo nešto o aritmetici u $\overline{\mathbb{C}}$. Za neki $a \neq 0$, po neprekidnosti možemo odrediti da je vrijednost izraza $\frac{a}{0}$ jednaka ∞. Stavljamo da je $\frac{a}{0} = \lim_{w \to 0} \frac{a}{w}$. Za $a \neq 0$, $\frac{a}{w}$ je različit od nule, uzimajući u obzir modul $|\frac{a}{w}|$, vidimo da je $\lim_{w \to 0} \frac{a}{w} = \infty$ u $\overline{\mathbb{C}}$. Napomenimo da ne možemo odrediti vrijednosti izraza $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. Pogledajmo kako izgleda slika od ∞ po neprekidnosti:

$$m(\infty) = \lim_{z \to \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \to \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Vrijednost $m(\infty)$ je dobro definirana jer a i c ne mogu istovremeno biti jednaki nuli zato što iz definicije Möbiusovih transformacija znamo da vrijedi $ad - bc \neq 0$. Promotrimo još ovo, možemo dobiti $m(\infty) = \infty$ ako i samo ako je $c = 0$. Promotrimo još i sliku 0, $m(0) = \frac{b}{d}$. Možemo dobiti $m(0) = 0$ ako i samo ako je $b = 0$.

Ekspicitni izraz za inverz Möbiusove transformacije je $m^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$. Komponiranjem dviju Möbiusovih transformacija ponovo dobivamo Möbiusovu transformaciju. Uz to postoji i Möbiusova transformacija koja je identiteta. Možemo zaključiti da je skup Möbiusovih transformacija grupa obzirom na komponiranje. Vratimo se na identitetu kao neutralan element ove grupe. Identiteta e je funkcija $e : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, $e(z) = z$. Očito su koeficijenti c i b jednaki 0, a koeficijenti a i d jednaki 1. Svaku Möbusovu transformaciju možemo zapisati kao kompoziciju homeomorfizama spomenutih u propozicijama 3.7 i 3.8.

Teorem 3.10. *Promotrimo Möbiusovu transformaciju*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *i* $ad - bc \neq 0$. *Ako je* $c = 0$, *tada je*

$$m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Ako je $c \neq 0$, *tada je* $m(z) = f(J(g(z)))$, *pri čemu je* $g(z) = c^2 z + cd$ *i* $f(z) = -(ad - bc)z + \frac{a}{c}$ *za* $z \in \mathbb{C}$ *i* $f(\infty) = \infty = g(\infty)$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti direktnim računanjem. Ako je $c = 0$ vidimo da se radi o zbrajanju razlomaka jednakih nazivnika te nemam što dokazivati.

Ako je $c \neq 0$ tada možemo razlomak proširiti pa dobivamo

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)c}{(cz+d)c} = \frac{acz+bc}{c^2z+cd}$$

Iskoristimo uvjet $ad - bc \neq 0$, sada dobivamo

$$m(z) = \frac{acz+bc}{c^2z+cd} = \frac{acz+ad-(ad-bc)}{c^2+cd} = -(ad-bc)\frac{1}{c^2z+cd} + \frac{a}{c} = f(J(g(z))).$$

$\square$

Ovaj teorem ima dvije neposredne posljedice. Prva, svaka Möbiusova transformacija je homeomorfizam od $\overline{\mathbb{C}}$ jer je kompozicija homeomorfizama iz propozicija 3.7 i 3.8. Vrijedi $\text{Möb}^+ \subset \text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$. Drugo, svaka Möbiusova transformacija preslikava kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ u kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$, jer je kompozicija funkcija koje imaju to svojstvo. Ujedinimo ova opažanja u sljedećem teoremu.

Teorem 3.11. $\text{Möb}^+ \subseteq \text{Homeo}^{\text{C}}(\overline{\mathbb{C}})$.

Napomenimo da uvjet $ad - bc \neq 0$ u definiciji Möbiusove transformacije nije suvišan. Promotrimo primjer funkcije $p : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ zadane s $p(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i $ad - bc = 0$. Uvjerimo se da ova funkcija nije homeomorfizam. Ako su svi koeficijenti jednaki nuli, tada funkcija p nije definirana. Uzmimo da jedan od koeficijenata nije jednak nuli, npr. $a \neq 0$ (dokaz je isti ako uzmemo da je različit od nule neki drugi koeficijent ili više njih). Proširimo razlomak s a, iskoristimo uvjet $ad - bc = 0$, tj. $ad = bc$ te sredimo izraz. Dobivamo

$$p(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(az+b)}{a(cz+d)} = \frac{a(az+b)}{acz+bc} = \frac{a(az+b)}{c(az+b)} = \frac{a}{c},$$

tj. funkcija p je konstantna funkcija. Pokazali smo da p ne može biti homeomorfizam jer nije bijekcija.

Fiksna točka preslikavanja je ona koju preslikavanje preslika u sebe samu. Fiksna točka Möbiusove transformacije m je točka $z \in \overline{\mathbb{C}}$ takva da je $m(z) = z$. Ranije smo spomenuli da $m(\infty) = \infty$ ako i samo ako je $c = 0$.

Ako je $c = 0$ tada je fiksna točka rješenje jednadžbe $\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$. Ako je $\frac{a}{d} = 1$ i $b \neq 0$ tada jednadžba nema rješenje u $\mathbb{C}$. Ako je $\frac{a}{d} \neq 1$ tada je $z = \frac{b}{d-a}$ jedinstveno rješenje u $\mathbb{C}$. Dakle, ako je $c = 0$ tada m ima jednu ili dvije fiksne točke.

Ako je $c \neq 0$ tada $m(\infty) \neq \infty$. Fiksna točka od m je rješenje jednadžbe $\frac{az+b}{cz+d} = z$ što se svodi na rješavanje kvadratne jednažbe $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. I u ovom slučaju m može imati jednu ili dvije fiksne točke. Ova analiza dovodi nas do sljedećeg važnog teorema.

Teorem 3.12. *Neka je m Möbiusova transformacija koja ima tri različite fiksne točke u $\overline{\mathbb{C}}$. Tada je m identiteta, tj. $m(z) = z$ za svaku točku z iz $\overline{\mathbb{C}}$.*

Jedno od osnovnih svojstava Möb^+ je *stroga tranzitivnost na trojkama*. To je svojstvo da za dane dvije trojke (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) različitih točaka u $\overline{\mathbb{C}}$, postoji jedinstveni element iz Möb^+ tako da je $m(z_1) = w_1, m(z_2) = w_2, m(z_3) = w_3$.

Prvo ćemo dokazatu jedinstvenost, a nakon toga ćemo konstruirati traženu Möbiusovu transformaciju. Dane su dvije trojke (z_1, z_2, z_3) i (w_1, w_2, w_3) različitih točaka u $\overline{\mathbb{C}}$. Pretpostavimo da su m i n dva elementa iz Möb^+ koji zadovoljavaju $m(z_1) = n(z_1) = w_1, m(z_2) = n(z_2) = w_2, m(z_3) = n(z_3) = w_3$. Möbiusova transformacija $m^{-1} \circ n$ ima tri različite fiksne točke z_1, z_2, z_3 pa je po teoremu 3.12 identiteta, tj. $m = n$.

Za dokaz postojanja Möbiusove transformacije dovoljno je pokazati da postoji Möbiusova transformacija koja zadovoljava $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$ i $m(z_3) = \infty$. Ako možemo konstruirati takav m, onda možemo konstruirati i

Möbiusovu transformaciju n koja zadovoljava $n(w_1) = 0, n(w_2) = 1$ i $n(w_3) = \infty$. Tada je $n^{-1} \circ m$ tražena transformacija koja preslikava (z_1, z_2, z_3) u (w_1, w_2, w_3).

Konstruirajmo Möbiusovu transformaciju m koja zadovoljava $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$ i $m(z_3) = \infty$. Promotrimo funkciju

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}.$$

Primjećujemo da doista vrijedi $m(z_1) = 0, m(z_2) = 1$ i $m(z_3) = \infty$. Kako su z_1, z_2 i z_3 različite točke također vrijedi $(z_2 - z_3)(-z_3)(z_2 - z_1) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0$. To je tražena Möbiusova transformacija. Na analogan način konstruiramo transformaciju n.

Djelovanje Möb$^+$ na skup trojki različitih točaka iz $\overline{\mathbb{C}}$ je primjer *djelovanja grupe.*

Definicija 3.13. *Grupa G djeluje na skup X ako je zadan homeomorfizam iz G u grupu $S(X)$ svih bijekcija sa X u X.*

Kažemo da grupa G djeluje *tranzitivno* na X ako za svaki par x i y elemenata iz X postoji element g iz G koji zadovoljava $g(x) = y$. Vezano uz to slijedi ova lema.

Lema 3.14. *Pretpostavimo da grupa G djeluje na skup X. Neka je A točka u X. Pretpostavimo da za svaku točku B iz X postoji element g iz G takav da je $g(B) = A$. Tada G djeluje tranzitivno na X.*

Dokaz. Po pretpostavci za svaki par $x, y \in X$ postoje $g, h \in G$ tako da je $g(x) = h(y) = A$. Tada je $(h^{-1}g)(x) = y$, pa vidimo da G djeluje tranzitivno. □

Promatrali smo djelovanje Möb$^+$ na trojke različitih točaka u $\overline{\mathbb{C}}$. Kažemo da grupa G djeluje *strogo tranzitivno* na skup X ako za svaki par x i y iz X postoji jedan i samo jedan element g iz G takav da je $g(x) = y$.

Teorem 3.15. *Möb$^+$ djeluje strogo tranzitivno na skup $\mathcal{T}$ trojki različitih točaka iz $\overline{\mathbb{C}}$.*

Ovaj teorem smo već ranije dokazali kod istraživanja tranzitivnih svojstava Möbiusovih transformacija.

Teorem 3.16. *Möb$^+$ djeluje tranzitivno na skup $\mathcal{C}$ kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Na početku napomenimo da tri različite točke u $\overline{\mathbb{C}}$ određuju jedinstvenu kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$. Neka je (z_1, z_2, z_3) trojka različitih točaka iz $\overline{\mathbb{C}}$. Ako ove točke u $\mathbb{C}$ nisu kolinearne, tada postoji jedinstvena euklidska kružnica koja prolazi svim trima točkama. Središte kružnice nalazi se u sjecištu simetrala bilo koje dvije dužine (tetive) kojima su krajnje točke neke od točaka z_k. Ako su sve tri točke u $\mathbb{C}$ kolinearne, tada postoji jedinstveni euklidski pravac koji prolazi svim trima točkama. Ako je jedna od z_k jednaka ∞, tada postoji jedinstveni euklidski pravac koji prolazi preostalim dvjema točkama i on sadrži točku ∞.

Svaka trojka različitih točaka u $\overline{\mathbb{C}}$ određuje jedinstvenu kružnicu u $\overline{\mathbb{C}}$. No, obrat ove tvrdnje ne vrijedi. Ako je k kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$, postoji beskonačno mnogo trojki različitih točaka u $\overline{\mathbb{C}}$ koje određuju kružnicu k.

Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$. Izaberimo trojku različitih točaka na k_1 i trojku različitih točaka na k_2. Neka je m Möbiusova transformacija koja preslikava trojku različitih točaka koje određuju k_1 u trojku različitih točaka koje određuju k_2. Tada su $m(k_1)$ i k_2 dvije kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ te vrijedi $m(k_1) = k_2$ zato što je kružnica jedinstveno određena s tri točke. Möbiusova transformacija m preslikava kružnicu k_1 u kružnicu k_2. □

Definicija 3.17. *Disk D u $\overline{\mathbb{C}}$ je jedna od komponenti povezanosti komplementa kružnice k u $\overline{\mathbb{C}}$. Kažemo da je kružnica k rub diska D.*

Napomenimo da je svaki disk u $\overline{\mathbb{C}}$ određen jedinstvenom kružnicom, no svaka kružnica u $\overline{\mathbb{C}}$ određuje dva disjunktna diska u $\overline{\mathbb{C}}$. Model $\mathbb{H}$ je disk u $\overline{\mathbb{C}}$ određen kružnicom $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$.

Teorem 3.18. Möb^+ *djeluje tranzitivno na skup $\mathcal{D}$ diskova u $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz ovog teorema sličan je dokazu teorema 3.16 te ga ne ćemo ovdje raspisati. Detaljan dokaz može se naći u knjizi [1].

Definicija 3.19. *Dvije Möbiusove transformacije m_1 i m_2 su konjugirane ako postoji Möbiusova transformacija p takva da je $m_2 = p \circ m_1 \circ p^{-1}$.*

Geometrijski gledano konjugiranje predstavlja zamjenu koordinata u $\overline{\mathbb{C}}$.

Möbiusove transformacije usko su vezane uz 2×2 matrice. Pri komponiranju matrice nam pružaju veliku pomoć. Promotrimo sljedeće Möbiusove transformacije: $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ i $n(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ Sada, $(n \circ m)(z) = \frac{\alpha m(z)+\beta}{\gamma m(z)+\delta} = \frac{\alpha(\frac{az+b}{cz+d})+\beta}{\gamma(\frac{az+b}{cz+d})+\delta} = \frac{\alpha(az+b)+\beta(cz+d)}{\gamma(az+b)+\delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a+\beta c)z+\alpha b+\beta d}{(\gamma a+\delta c)z+\gamma b+\delta d}$

Promotrimo pažljivo koeficijente od m, n i $n \circ m$ te ih zapišimo u matrice.

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad N \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

Množenjem matrica koeficijenata od m i n dobivamo koeficijente matrice kompozicije. Osim veze komponiranja i množenja matrica zanimljivi su trag i determinanta matrice. Na sličan način možemo definirati determinantu i trag Möbiusovih transformacija. *Determinanta* Möbiusove transformacije $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ je $\det(m) = ad - bc$. Primijetimo odmah da determinanta Möbiusove transformacije nije dobro definirana vrijednost. Ako pomnožimo koeficijent od m s brojem koji nije 0, to neće utjecati na djelovanje transformacije m zato što je $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d}$ za sve $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i sve $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Kod determinante nailazimo na drugačiju situaciju. Determinanta od $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ je $\det(m) = ad - bc$, ali determinanta od $m'(z) = \frac{\alpha az+\alpha b}{\alpha cz+\alpha d}$ je $\det(m') = \alpha^2(ad - bc)$. Uvijek možemo izabrati α takav da množenjem koeficijenata od m determinanta bude jednaka 1. Napomenimo da možemo pomnožiti sve koeficijenti od m s -1 bez promjene determinante od m. Ovaj proces zvat ćemo *normalizacijom od m*.

Uz determinantu spomenuli smo i trag. Za definiranje traga od m zahtijevat ćemo da je m normalizirana. Sama definicija traga od m bit će nešto drugačija od nama poznate definicije traga matrice.

Definicija 3.20. *Trag Möbiuosove transformacije je funkcija* $\tau : \text{Möb}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ *definirana s* $\tau(m) = (a+d)^2$, *gdje je* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *normalizirana.*

Prisjetimo se opće i specijalne linearne grupe.

$$GL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\},$$

$$SL_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Vidimo da Möbiusova transformacija određuje mnogo matrica, tj. pridruživanje iz Möb^+ u $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ nije dobro definirano. Imamo drugi način za definirati funkciju koja će biti homomorfizam. Promotrimo funkciju $\mu : GL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow Möb^+$ definiranu s $\mu(M) = m$, gdje je $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ i $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

U teoremu 3.11 vidjeli smo da je Möb^+ sadržano u skupu $\text{Homeo}^C(\mathbb{C})$. Za nadogradnju Möb^+ u veću grupu promatrat ćemo jednostavan homeomorfizam od $\overline{\mathbb{C}}$ koji nije u Möb^+, nazivamo ga *kompleksno konjugiranje*. Kompleksno konjuguranje je funkcija $C(z) = \overline{z}$ za $z \in \mathbb{C}$ i $C(\infty) = \infty$.

Propozicija 3.21. *Kompleksno konjugiranje je element iz* $\text{Homeo}(\overline{\mathbb{C}})$.

Dokaz. Primijetimo odmah da je C sama sebi inverzna, tj. $C^{-1}(z) = C(z)$. Zato je C bijekcija. Trebamo još dokazati da je C neprekidna. Neprekidnost funkcije C proizlazi iz činjenice da za svaku točku $z \in \overline{\mathbb{C}}$ i svaki $\varepsilon > 0$, imamo $C(U_\varepsilon(z)) = U_\varepsilon(C(z))$. $\square$

Pokažimo sada da C nije element Möb^+. Prema definiciji funkcije C vidimo da ona točke iz $\overline{\mathbb{R}}$ preslika u njih same, tj. to su fiksne točke. Posebno su 0, 1 i ∞ fiksne točke. Primijetimo da C nije identiteta zato što npr. $C(2i) = -2i \neq 2i$. Prema teoremu 3.12. C ne može biti element od Möb^+.

Definicija 3.22. *Opća Möbiusova grupa* Möb *je grupa generirana s* Möb^+ *i* C*. Svaki (netrivijalni) element* p *iz* Möb *može se zapisati kako kompozicija*

$$p = C \circ m_k \circ ... \circ C \circ m_1$$

za neki $k \geq 1$*, gdje su svi* m_k *elementi iz* Möb^+*.*

Svojstva tranzitivnosti Möb^+ su naslijeđena od Möb. Dakle, Möb djeluje tranzitivno na skup $\mathcal{T}$ trojki različitih točaka, na skup $\mathcal{C}$ kružnica i na skup $\mathcal{D}$ diskova. Napomenimo da Möb ne djeluje strogo tranzitivno na trojke različitih točaka.

Propozicija 3.23. *Funkcija* $C : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *je element iz* $\text{Homeo}^{\text{C}}(\overline{\mathbb{C}})$.

Dokaz. Neka je k kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$ dana jednažbom $\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0$. Uvedimo supstituciju $w = C(z) = \overline{z}$ tj. $z = \overline{w}$. Tada w zadovoljava jednadžbu $\alpha\overline{w}w + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma = 0$. To je ponovo jednadžba kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$. $\square$

Geometrijski gledano, djelovanje funkcije C na $\overline{\mathbb{C}}$ je *zrcaljenje* obzirom na proširenu relnu os $\overline{\mathbb{R}}$. Sve točke na $\overline{\mathbb{R}}$ su fiksne točke za C. Svaka točka z iz $\overline{\mathbb{C}}/\overline{\mathbb{R}}$ ima svojstvo da je $\overline{\mathbb{R}}$ simetrala dužine kojoj su krajnje točke z i $C(z)$.

Kombinacijom propozicije 3.23 i teorema 3.11 dobivamo slijedeći teorem.

Teorem 3.24. $\text{Möb} \subseteq \text{Homeo}^C(\overline{\mathbb{C}})$.

Teorem 3.25. *Svaki element iz* Möb *ima oblik:*

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ili oblik

$$m(z) = \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d}$$

pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *i* $ad - bc \neq 0$.

Dokaz. Vidjeli smo da je proizvoljan element od Möb oblika $p = C \circ m_k \circ ... \circ C \circ m_1$, za neki $m_i \in$ Möb$^+$. Dovoljno je pokazati da je $C \circ m_i = m_i' \circ C$, za neke $m_i' \in$ Möb$^+$. Tada možemo zapisati p kao $p = m_k' \circ m_{k-1}' \circ ... \circ m_1' \circ C^k$, što je oblika (1) za parni k i oblika (2) za neparni k (jer je $C^2 = id$). Ako je $m_i(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tada vrijedi

$$(C \circ m_i)(z) = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \frac{\overline{az} + \overline{b}}{\overline{cz} + \overline{d}} = (m_i' \circ C)(z)$$

$$m_i'(z) = \frac{\overline{a}z + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}.$$

□

Propozicija 3.26. *Svaki element iz* Möb *može se zapisati kao kompozicija zrcaljenja obzirom na konačno mnogo kružnica iz* $\overline{\mathbb{C}}$.

Dokaz. Grupa Möb je generirana s Möb$^+$ i C, a Möb$^+$ je generirana s J i $f(z) = az + b$. Zapravo trebamo pokazati da propozicija vrijedi za svako od ovih preslikavanja.

Prema definiciji, C je zrcaljenje obzirom na $\overline{\mathbb{R}}$. Možemo J zapisati kao kompoziciju zrcaljenja (inverzije) $c(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ obzirom na jediničnu kružnicu i C. Preostaje još pokazati da se f može zapisati kao kompozicija zrcaljena obzirom na konačno mnogo kružnica.

Ranije smo vidjeli da je $f(z) = az + b$ kompozicija rotacije, homotetije i translacije. Prem propoziciji III.6.1.1. iz [4] svaka translacija je kompozicija dvaju zrcaljenja obzirom na pravce okomite na smjer translacije. Slično, prema teoremu III.1.3.5 iz [4] svaka rotacija je kompozicija dvaju zrcaljenja obzirom na pravce koji prolaze središtem rotacije.

Konačno, homotetiju s faktorom r možemo dobiti kao kompoziciju inverzije $h(z) = \frac{1}{\overline{z}}$ obzirom na jediničnu kružnicu i inverzije $g(z) = \frac{r}{\overline{z}}$ obzirom na kružnicu radijusa r. Kompozicija $(g \circ h)(z) = g(h(z)) = \frac{r}{\frac{1}{\overline{\overline{z}}}} = rz$ je homotetija s faktorom r. Prema definiciji 3.4 kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ su i pravci iz $\mathbb{C}$ u uniji s ∞. Pokazali smo da se svako od preslikavanja koje generiraju Möb može zapisati kao zrcaljenje obzirom na jednu ili dvije kružnice. Prema tome, svaki element iz Möb je kompozicija konačno mnogo zrcaljenja obzirom na kružnice. □

Vidjeli smo da su elementi iz Möb homemorfizmi od $\overline{\mathbb{C}}$ koji preslikavaju kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ u kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$. Ovo svojstvo karakterizira Möb.

Teorem 3.27. Möb = Homeo$^{\mathrm{C}}(\overline{\mathbb{C}})$.

Dokaz ovog teorema može se naći u knjizi [1].

3.2 Konformnost elemenata iz Möb i očuvanje $\mathbb{H}$

Opisat ćemo još jedno važno svojstvo gupe Möb.

Definicija 3.28. *Neka su C_1 i C_2 dvije glatke krivulje koje se sijeku u točki T. Definiramo kut $\angle(C_1, C_2)$ između C_1 i C_2 u točki T kao kut koji zatvaraju tangente u točki T na krivulje C_1 i C_2, mjereno od C_1 prema C_2.*

Dogovoreno je da je smjer kretanja u smjeru kazaljke na satu negativan, a smjer suprotan od kretanja kazaljke na satu pozitivan. Prema definiciji znamo da vrijedi: $\angle(C_2, C_1) = -\angle(C_1, C_2)$. Homeomorfizme od $\overline{\mathbb{C}}$ koji čuvaju apsolutnu vrijednost kuta između krivulja nazivamo *konformnima.*

Teorem 3.29. *Elementi iz* Möb *su komformni homeomorfizmi od* $\overline{\mathbb{C}}$.

Dokaz. Kut između dviju krivulja je, po definiciji, kut između tangenata. Trebamo dokazati da je $\angle(p_1, p_2)$ između p_1 i p_2 jednak kutu $\angle(m(p_1), m(p_2))$ između $m(p_1)$ i $m(p_2)$ pri čemu su p_1 i p_2 euklidski pravci u $\overline{\mathbb{C}}$.

Znamo da je Möb generirana transformacijama $f(z) = az + b$ za $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, $J(z) = \frac{1}{z}$ i $C(z) = \overline{z}$. Dovoljno je pokazati da je svaka od njih konformna.

Ranije smo pokazali da je f kompozicija translacije, rotacije i homotetije. Svako od tih preslikavanja je konformno pa je i njihova kompozicija konformna. Kompleksno konjugiranje je zrcaljenje obzirom na relnu os pa je i ono konformno.

Preostaje još pokazati da je i J konformno. U ovom slučaju euklidski pravac se ne mora preslikati u euklidski pravac već se može preslikati u euklidsku kružnicu u $\mathbb{C}$.

Pretpostavimo da se oba pravca p_1 i p_2 preslikaju u kružnice. U tom slučaju njihove jednadžbe su oblika $\beta_k z + \overline{\beta_k}\overline{z} + 1 = 0$. Pravci p_1 i p_2 ne prolaze ishodištem jer bi se inače preslikali sami u sebe, pa im je slobodni član različit od nule, te možemo s njim podijeliti jednadžbu i postići da bude 1.

Kružnice $J(p_1)$ i $J(p_2)$ sijeku se u ishodištu i u još jednoj točki $J(p_1 \cap p_2)$. Odredit ćemo kut tangenata na $J(p_1)$ i $J(p_2)$ u ishodištu (u drugoj točki je jednak). Kružnice $J(p_k)$ su rješenja jednadžbe $z\overline{z} + \overline{\beta_k} + \beta_k \overline{z} = 0$. To možemo zapisati kao $|z + \beta_k|^2 = |\beta_k|$. Dakle, $J(p_k)$ je euklidska kružnica s centrom $-\beta_k$ i euklidskim radijusom $|\beta_k|$. Nagib pravca je zadan formulom $s_k = \frac{Im(\beta_k)}{Re(\beta_k)}$. Neka je θ_k kut kojeg p_k zatvara s realnom osi $\mathbb{R}$, tada je $s_k = \tan(\theta_k)$. Tada tangenta na kružnicu $J(p_k)$ u nuli ima nagib $-\frac{Re(\beta_k)}{Im(\beta_k)} = -\tan(\theta_k) = \tan(-\theta_k)$ zato što je tangenta okomita na radijus kružnice. Dakle, kut koji zatvara $J(p_k)$ s $\mathbb{R}$ je $-\theta_k$. Kut između $J(p_1)$ i $J(p_2)$ je $\angle(J(p_1), J(p_2)) =$

$-\theta_2 - (-\theta_1) = -\angle(p_1, p_2)$. Vidimo da je preslikavanje J konformno. Slično se dokaže za slučajeve u kojima jedan od pravaca prolazi ishodištem.

$\square$

Svaki element iz Möb^+ čuva predznak kuta između p_1 i p_2 zato što je Möb^+ generirana s $J(z) = \frac{1}{z}$ i $f(z) = az + b$ za $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$. Svaki element iz Möb koji nije iz Möb^+ mijenja predznak kuta između p_1 i p_2.

Prisjetimo se da je naš uvod u Möbiusove transfomacije i opću Möbiusovu grupu bio otkrivanje transformacija gornje poluravnine $\mathbb{H}$ koje preslikavaju hiperboličke pravce u hiperboličke pravce. Promotrimo podgrupu od Möb koja čuva $\mathbb{H}$: $\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in Möb | m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$.

Teorem 3.30. *Svaki element iz* $\text{Möb}(\mathbb{H})$ *preslikava hiperboličke pravce iz* $\mathbb{H}$ *u hiperboličke pravce iz* $\mathbb{H}$.

Dokaz. Neposredna posljedica teorema 3.29 je da elementi iz $\text{Möb}(\mathbb{H})$ čuvaju kutove između kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$. Svi hiperbolički pravci u $\mathbb{H}$ su presjek $\mathbb{H}$ i kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$ okomitih na $\overline{\mathbb{R}}$ i svaki elemenet iz Möb preslikava kružnicu iz $\overline{\mathbb{C}}$ u kružnicu iz $\overline{\mathbb{C}}$. $\square$

Definirajmo podgrupu $\text{Möb}^+(\mathbb{H}) = \{m \in Möb^+ | m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$ kao podgrupu od Möb^+ sastavljenu od Möbiusovih transformacija koje čuvaju gornju poluravninu $\mathbb{H}$. U ovom trenutku nemamo eksplicitne izrazre za elemente iz $\text{Möb}(\mathbb{H})$ i $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$.

Disk $\mathbb{H}$ u $\overline{\mathbb{C}}$ je određen kružnicom $\overline{\mathbb{R}}$. Najprije ćemo odrediti ekspilictni izraz za elemente iz podgrupe $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) = \{m \in Möb | m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}$.

Prema teoremu 3.25 znamo kako izgleda svaki element iz Möb. Zanima nas uvjet na koeficijente a, b, c, i d da bi vrijedilo $m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. Uz to pretpostavimo da je m normaliziran, tj. $ad - bc = 1$. Znamo da je $C(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}$. U slučaju kada je m iz Möb oblika $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a z iz $\overline{\mathbb{R}}$, vrijedi $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{az+b}{cz+d}$ pa dva oblika od m iz teorema 3.25 možemo svesti na jedan: $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Zato što m preslikava $\overline{\mathbb{R}}$ u $\overline{\mathbb{R}}$, ove tri točke: $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, $m(\infty) = \frac{a}{c}$ i $m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$ leže u $\overline{\mathbb{R}}$.

Pretpostavimo da su $a, c \neq 0$. Tada možemo sve koeficijente od m pomnožiti s c. Posebno, imamo: $a = m(\infty) \cdot c$, $b = -m^{-1}(0) \cdot a = -m^{-1}(0) \cdot m(\infty) \cdot c$ i $d = -m^{-1}(\infty) \cdot c$. Sada možemo m zapisati kao: $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c}$.

Kako je m normaliziran, determinanta od m je 1. Promotrimo: $1 = ad - bc = c^2[-m(\infty)m^{-1}(\infty) + m(\infty)m^{-1}(0)] = c^2[m(\infty)(m^{-1}(0) - m^{-1}(\infty))]$.

Svi $m(\infty), m^{-1}(0)$ i $m^{-1}(\infty)$ su realni. Slijedi da je c ili realan ili čisto imaginaran i koeficijenti od m su ili svi realni ili svi čisto imaginarni.

U slučaju $a = 0$, koeficijent c mora biti različit od nule zato što vrijedi $ad - bc = 1$. Promotrimo točke $m(1) = \frac{b}{c+d}$ i $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$. Zapišimo d i b u ovisnosti od c, dobivamo: $d = -m^{-1}(\infty)c$ i $b = m(1)(c + d) = (m(1) - m^{-1}(\infty))c$. Slijedi, $1 = ad - bc = c^2(m(1) - m^{-1}(\infty))$. Ponovno su b, c i d ili svi realni ili svi čisto imaginarni.

U slučaju $c = 0$, koeficijenti a i d moraju biti različiti od nule. U ovom slučaju možemo pisati $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Promotrimo točke $m(0) = \frac{b}{d}$ i $m(1) = \frac{a+b}{d}$. Imamo: $b = m(0)d$ i $a = (m(1) - m(0))d$. Slijedi: $1 = ad - bc = (m(1) - m(0))d^2$. Ponovo dobivamo da su a, b i d ili svi realni ili svi čisto imaginarni. Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 3.31. *Svaki element iz* $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ *ima jedan od sljedećih oblika:*

1. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *i* $ad - bc = 1$,
2. $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *i* $ad - bc = 1$,
3. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d *čisto imaginarni i* $ad - bc = 1$,
4. $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, a, b, c, d *čisto imaginarni i* $ad - bc = 1$.

Sada možemo odrediti $\text{Möb}(\mathbb{H})$. Svaki element iz $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ čuva oba diska u $\overline{\mathbb{C}}$ određena s $\overline{\mathbb{R}}$ ili ih zamjenjuje. Da bi odredili te elemente, dovoljno je promatrati sliku jedne točke iz jednog od diskova, npr. točku i iz gornje poluravnine.

Posebo, element m iz $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ je element od $\text{Möb}(\mathbb{H})$ ako i samo ako je imaginarni dio od $m(i)$ pozitivan. Trebamo otkriti vrijednost od $\text{Im}(m(i))$ za svaki od četiri moguća oblika elemenata iz $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$.

Prema teoremu 3.31 imamo četiri slučaja za provjeriti:

1. m je oblika $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc = 1$. Imaginarni dio od $m(i)$ je dan s:

$$Im(m(i)) = Im\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = Im\left(\frac{(ai+b)(ci-d)}{(ci+d)(ci-d)}\right) = \frac{-(ad-bc)}{-(c^2+d^2)} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0.$$

U ovom slučaju m je u $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

2. m je oblika $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc = 1$. Imaginarni dio od $m(i)$ je dan s:

$$Im(m(i)) = Im\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = Im\left(\frac{(b-ai)(d+ci)}{(d-ci)(d+ci)}\right) = \frac{-(ad-bc)}{c^2+d^2} = \frac{-1}{c^2+d^2} < 0.$$

U ovom slučaju m nije u $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

3. $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d čisto imaginarni i $ad - bc = 1$. Koeficijente možemo zapisati kao $a = \alpha i, b = \beta i, c = \gamma i$ i $d = \delta i$ tada je $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$.

Imaginarni dio od $m(i)$ je dan s:

$$Im(m(i)) = Im\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = Im\left(\frac{-\alpha+\beta i}{-\gamma+\delta i}\right) = Im\left(\frac{(-\alpha+\beta i)(-\gamma-\delta i)}{(-\gamma+\delta i)(-\gamma-\delta i)}\right)$$

$$= \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{-1}{\gamma^2+\delta^2} < 0.$$

U ovom slučaju m nije u Möb($\mathbb{H}$).

4. $m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, a, b, c, d čisto imaginarni i $ad - bc = 1$. Koeficijente možemo zapsiati kao i u prethodnom slučaju. Imaginarni dio od $m(i)$ je dan s:

$$Im(m(i)) = Im\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = Im\left(\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}\right)$$

$$= Im\left(\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}\right) = \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{1}{\gamma^2+\delta^2} > 0.$$

U ovom slučaju m je u Möb($\mathbb{H}$). Objedinimo ovu analizu u slijedeći teorem.

Teorem 3.32. *Svaki element iz* Möb($\mathbb{H}$) *ima oblik*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc = 1$ ili

$$n(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$$

gdje su a, b, c, d čisto imaginarni i $ad - bc = 1$.

Posljedica teorema 3.32 je da svaki element iz Möb$^+$($\mathbb{H}$) ima oblik $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad-bc = 1$, zato što element kao $n(z)$ iz prethodnog teorema nisu u Möb$^+$($\mathbb{H}$).

4 Duljina krivulje i metrika u $\mathbb{H}$

Sada imamo grupu transformacija Möb($\mathbb{H}$) od $\mathbb{H}$ čiji elementi preslikavju hiperboličke pravce u hiperboličke pravce i čuvaju kut. S pomoću te grupe na prirodan način uvodimo metriku u $\mathbb{H}$, tako da duljina krivulje i udaljenost među točkama budu invarijantne obzirom na djelovanje Möb($\mathbb{H}$).

4.1 Krivulje i njihova duljina

Glatki put u ravnini $\mathbb{R}^2$ je funkcija $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ koja je neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna na $\langle a,b \rangle$ te je derivacija neprekidna. Točku $f(a)$ nazivamo početnom točkom puta, a točku $f(b)$ završnom točkom puta. Put koji je injekcija nazivamo *luk*. Zatvoren put je onaj kojemu je početna točka ujedno i završna točka.

Koristeći koordinate možemo pisati $f(t) = (x(t), y(t))$, gdje su $x(t)$ i $y(t)$ neprekidne na $[a,b]$ i diferencijabilne na $\langle a,b \rangle$ te je derivacija neprekidna. Slika funkcije f je *krivulja* u $\mathbb{R}^2$.

Možemo se pitati kako bi odredili duljinu krivulje. Najjednostavni način je da ju pokušamo aproksimirati poligonalnom linijom čiju duljinu znamo izračunati. Na primjer, odaberemo konačno mnogo točaka na krivulji. Susjedne točke spojimo dužinama. Za aproksimaciju duljine krivulje uzmemo duljinu te poligonalne linije. Ako uzmemo više točaka, linija će bolje aproksimirati krivulju. Uzimanje doatne točke možemo smatrati profinjenjem aproksimacije. Ako broj tih točaka teži u beskonačno, pri čemu razmak među točkama teži nuli, aproksimacije teži integralu koji smatramo duljinom krivulje. *Euklidska duljina* od f dana je integralom $||f|| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, gdje je $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ element duljine luka krivulje u $\mathbb{R}^2$.

Ako gledamo f kao put u $\mathbb{C}$ umjesto u $\mathbb{R}^2$ i zapisujemo $f(t) = x(t) + iy(t)$, tada imamo $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$ i $|f'(x)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Duljina puta f je $||f|| = \int_a^b |f'(t)| dt$. Ovdje ćemo uvesti novu oznaku za ovaj integral: $||f|| = \int_a^b |f'(t)| dt = \int_f |dz|$.

Bilo koji krivuljni integral može zapisati na ovaj način. Neka je $\rho : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. *Krivuljni integral* od ρ po putu $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ je integral $\int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt$.

Definicija 4.1. *Za gladak put $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, definiramo duljinu od f obzirom na funkciju ρ, u oznaci $||f||_\rho$ kao integral: $\int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)| dt$.*

Funkcija ρ rasteže element duljine luka $|dz|$. Na primjer, neka je $\rho(z) = \frac{1}{1+|z|^2}$. Promotrimo element duljine luka krivulje $\rho(z)|dz| = \frac{1}{1+|z|^2}|dz|$ u $\mathbb{C}$. Za $r > 0$, promotrimo funkciju $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ zadanu s $f(t) = re^{it}$. To je parametrizacija euklidske kružnice sa središtem u 0 i polumjerom r. Tada je $|f(t)| = r$ i $|f'(t)| = |ire^{it}| = r$. Duljina od f obzirom na ρ je

$$||f||_\rho = \int_f \frac{1}{1+|z|^2}|dz| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+|f(t)|^2}|f'(t)|dt = \frac{2\pi r}{1+r^2}.$$

Put $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ je *po dijelovima gladak put* ako je f neprekidna i ako postoje podintervali $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2], ..., [a_n, a_{n+1}]$ za $a = a_0$ i $b = a_{n+1}$ te je put f gladak put na svakom od podintervala $[a_k, a_{k+1}]$.

Propozicija 4.2. *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ po dijelovima gladak put. Neka je $[\alpha, \beta]$ interval u $\mathbb{R}$ i $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ surjektivna po dijelovima glatka funkcija takva da h' ne mijenja predznak. Tada je $||f \circ h||_\rho = ||f||_\rho$.*

Dokaz. Promatrat ćemo što se događa s duljinom po dijelovima glatkog puta $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ obzirom na ρ kada mijenjamo domenu od f. Neka je $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ surjektivna po dijelovima glatka funkcija. Konstruirajmo novu funkciju $g = f \circ h$. Pogledajmo kako su povezane $||f||_\rho$ i $||g||_\rho$. Duljina od f obzirom na ρ je integral $\int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt$. Duljina od g obzirom na ρ je integral $\int_g \rho(z)|dz| = \int_\alpha^\beta \rho(g(t))|g'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \rho(f \circ h)(t))|(f \circ h)'(t)|dt = \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t)))|f'(h(t))||h'(t)|dt$.

Ako je $h'(t) \geq 0$ za svaki t iz $[\alpha,\beta]$, onda je $|h'(t)| = h'(t)$. Uz to znamo da je $h(\alpha) = a$ i $h(\beta) = b$. Uvedimo supstituciju $s = h(t)$. Tada je duljina od g obzirom na ρ jednaka $||g||_\rho = \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t)))|f'(h(t))||h'(t)|dt = \int_a^b \rho(f(s))|f'(s)|ds = ||f||_\rho$.

Isto dobivamo i u slučaju $h'(t) \leq 0$ za svaki t iz $[\alpha, \beta]$. Tada je $|h'(t)| = -h'(t)$. Uz to znamo da je $h(\alpha) = b$ i $h(\beta) = a$. Uvedimo supstituciju $s = h(t)$. Tada je duljina g obzirom na ρ jednaka $||g||_\rho = \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t)))|f'(h(t))||h'(t)|dt = -\int_b^a \rho(f(s))|f'(s)|ds = ||f||_\rho$. □

Pokazali smo da ako $h'(t)$ ne mijenja predznak, tada je $||f \circ h||_\rho = ||f||_\rho$, pri čemu su f i h po dijelovima glatke. U tom slučaju $f \circ h$ nazivamo *reparametrizacijom* od f.

Napomenimo da vrijedi i više: $||f \circ h||_\rho \geq ||f||_\rho$ za svaku po dijelovima glatku surjekciju $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $f \circ h$ reparametrizacija od f, tj. kad h' ne mijenja predznak.

Definicija 4.3. *Parametrizacija podskupa X od $\mathbb{C}$ je po dijelovima gladak put $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ takav da je $X = f([a,b])$.*

Na primjer, po dijelovima gladak put $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dan s $g(t) = \cos(t) + i\sin(t)$ je parametrizacija jediničke kružnice $\mathbb{S}^1$ u $\mathbb{C}$.

Definicija 4.4. *Po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je jedostavan put ako je f injekcija. Neka je f parametrizacija skupa X iz $\mathbb{C}$. Ako je f jednostavan put, kažemo da je f jednostavna parametrizacija od X.*

Definicija 4.5. *Po dijelovima gladak put $f : [c, d] \to \mathbb{C}$ je skoro jednostavan put ako se može zapisati kao kompozicija $f = h \circ g$, gdje je $h : [a, b] \to \mathbb{C}$ jednostavan put i $g : [c, d] \to [a, b]$ je po dijelovima glatka funkcija sa svojstvom da $g'(t)$ ne mijenja predznak. Neka je f parametrizacija skupa X iz $\mathbb{C}$. Ako je f skoro jednostavan put, kažemo da je f skoro jednostavna parametrizacija skupa X.*

Ako razmišljamo o parametrizaciji skupa X kao šetnji duž X bez zaustavljanja, tada bi skoro jednostavna parametrizacija od X bila šetnja u kojoj je dozvoljeno zaustavljanje, ali nije dozvoljeno mijenjati smjer kretanja.

4.2 Hiperbolička duljina krivulje

Želimo razviti alat za mjerenje hiperboličke duljine i udaljenosti u $\mathbb{H}$. Vidjet ćemo da su hiperbolički pravci u $\mathbb{H}$ i transformacije u $\mathbb{H}$ koje preslikavaju hiperboličke pravce u hiperboličke pravce dovoljni za određivanje hiperboličke duljine. Da bismo mjerlili hiperboličku duljinu, moramo naći prikladan hiperbolički element duljine luka krivulje.

Neka je ρ neprekidna nenul funkcija na $\mathbb{H}$. Duljina po dijelovima glatkog puta $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ obzirom na ρ dana je integralom $||f||_\rho = \int_f f(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt$. Izraz *duljina je invariantna obzirom na djelovanje grupe* $\text{Möb}(\mathbb{H})$ znači da svaki po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ i svaki element γ iz $\text{Möb}(\mathbb{H})$ vrijedi $||f||_\rho = ||\gamma \circ f||_\rho$.

Pogledajmo koje uvijete moramo postaviti na ρ da bi to vrijedilo. Započet ćemo s tim da je γ element iz $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$. Proširivanjem $||f||_\rho$ i $||\gamma \circ f||_\rho$ dobivamo $||f||_\rho = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt$ i $||\gamma \circ f||_\rho = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt$, pa imamo $\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t))|(\gamma \circ f)'(t)|dt$. Može iskoristiti lančano pravilo pa je $\int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t))|\gamma'(f(t))||f'(t)|dt$ za svaki po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ i svaki element γ iz $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$.

Recimo nekoliko riječi o diferencijabilnosti elemenata iz Möb. Postoje dva načina za opisati derivabilnost elemenata iz Möb. Prvi način je korištenjem kompleksne analize. U tom slučaju element m iz Möb gledamo kao funkciju iz $\overline{\mathbb{C}}$ u $\overline{\mathbb{C}}$ i derivaciju $m'(z)$ po definiciji $m'(z) = \lim_{w \to z} \frac{m(w) - m(z)}{w - z}$ ako taj limes postoji. Korištenjem ove definicije te svim poznatim formulama za umnožak, kvocijent i lančanog pravila, derivacija elementa $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ iz $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$ (m normaliziran) je $m'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$.

Nepogodnost ove definicije derivacije je što ona nije definirana za elemente iz Möb koji nisu iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Derivacija od $C(z) = \overline{z}$ ne postoji pa $C(z)$ nije holomorfna.

Drugi način za definiranje derivacije elemenata iz Möb je korištenje diferencijalnog računa više varijabli. Ako z zapišemo kao $z = x + iy$, tada je $m(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ gdje su f i g funkcije realne varijable. Diferencijal od m je

$$Dm = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Kažemo da je m *diferencijabilna kao funkcija od* x *i* y. Holomorfnost povlači diferencijabilnost funkcija f i g, ali obrat ne vrijedi.

Teorem 4.6. *Kompleksna funkcija* $m = f + ig$ *derivabilna je u točki* $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ *ako i samo ako su funkcije* f *i* g*, kao realne funkcije dviju varijabli, diferencijabilne u točki* (x_0, y_0) *i zadovoljavaju* ***Cauchy-Riemannove uvjete****:*

$$\partial_x f(x_0, y_0) = \partial_y g(x_0, y_0)$$
$$\partial_y f(x_0, y_0) = -\partial_x g(x_0, y_0)$$

Dokaz ovog teorema može se naći u [5].

Vratimo se na započetu analizu. Uvjet na $\rho(z)$ možemo zapisati

$$\int_a^b (\rho(f(t)) - \rho((\gamma \circ f)(t))|\gamma'(f(t))|)|f'(t)|dt = 0$$

za svaki po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ i svaki γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Za svaki element γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$ stavimo $\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)|$. Sada uvjet na ρ postaje uvjet na μ_γ: $\int_f \mu_\gamma(z)|dz| = \int_a^b \mu_\gamma(f(t))|f'(t)|dt = 0$ za svaki po dijelovima gladak put f i svaki element γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Napomenimo da je ρ neprekidna, a γ holomorfna pa imamo da je μ_γ neprekidna za svaki element γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Za daljnju analizu bit će nam potrebna slijedeća lema.

Lema 4.7. *Neka je* D *otvoren podskup od* $\mathbb{C}$*,* $\mu : D \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija i neka vrijedi da je* $\int_f \mu(z)|dz| = 0$ *za svaki po dijelovima gladak put* $f : [a, b] \to D$*. Tada je* $\mu \equiv 0$*.*

Dokaz. Za dokazivanje ove leme koristit ćemo metodu svođenja na kontradikciju. Pretpostavimo da postoji točka $z \in D$ takva da je $\mu(z) \neq 0$. Možemo pretpostaviti da je $\mu(z) > 0$.

Pretpostavka da je μ neprekidna znači da za svaki $\varepsilon > 0$. postoji $\delta > 0$ takav da $U_\delta(z) \subset D$ i da $w \in U_\delta(z)$ povlači da je $\mu(w) \in U_\varepsilon(\mu(z))$, pri čemu je $U_\delta(z) = \{u \in \mathbb{C} | |u - z| < \delta\}$ i $U_\varepsilon(t) = \{s \in \mathbb{R} | |s - t| < \varepsilon\}$.

Uvrštavanjem $\varepsilon = \frac{1}{3}|\mu(z)|$, vidimo da postoji $\delta > 0$ takav da iz $w \in U_\delta(z)$ slijedi da je $\mu(w) \in U_\epsilon(\mu(z))$. Primjenom nejednakosti trokuta i $\mu(z) > 0$ slijedi da je $\mu(w) > 0$ za svaki $w \in U_\delta(z)$.

Izaberimo nekonstantan gladak put, na primjer $f : [0,1] \to U_\delta(z)$ zadan s $f(t) = z + \frac{1}{3}\delta t$.

Vidimo da je $\mu(f(t)) > 0$ za svaki $t \in [0,1]$, zato što je $f(t) \in U_\delta(z)$ za svaki $t \in [0,1]$. Iz toga slijedi da je $\int_f \mu(z)|dz| > 0$, što je kontradikcija. $\square$

Zahtijevamo da duljina bude invarijantna pod djelovanjem grupe Möb$^+(\mathbb{H})$ što povlači da je $\int_f \mu_\gamma(z)|dz| = 0$ za svaki po dijelovima gladak put f i svaki element γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Primjenom leme 4.7 na μ_γ imamo $\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = 0$ za svaki $z \in \mathbb{H}$ i svaki element γ iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Promotrimo kako se μ_γ ponaša kad komponiramo elemente iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Neka su γ i φ dva elementa iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Računanjem dobivamo:

$$\mu_{\gamma\circ\varphi} = \rho(z) - \rho((\gamma\circ\varphi)(z))|(\gamma\circ\varphi)'(z)|$$

$$= \rho(z) - \rho((\gamma\circ\varphi)(z))|\gamma'(\varphi(z))||\varphi'(z)|$$

$$= \rho(z) - \rho(\varphi(z))|\varphi'(z)| + \rho(\varphi(z))|\varphi'(z)|$$

$$-\rho((\gamma\circ\varphi)(z)|\gamma'(\varphi(z))||\varphi'(z)|$$

$$= \mu_\varphi(z) + \mu_\gamma(\varphi(z))|\varphi'(z)|.$$

Iz ovoga slijedi: ako vrijedi $\mu_\gamma \equiv 0$ za sve γ iz skupa koji generira Möb$^+(\mathbb{H})$, onda vrijedi za sve elemente iz Möb$^+(\mathbb{H})$. Jedan skup generatora od Möb$^+(\mathbb{H})$ čine transformacija $m(z) = az + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$ i $a > 0$, i transformacija $K(z) = -\frac{1}{z}$. Analizirat ćemo uvjete na ρ tako vrijedi $\mu_\gamma \equiv 0$ za te transformacije.

Promotrimo generator oblika $\gamma(z) = z + b$ za $b \in \mathbb{R}$ i $a = 1$. Tada je $\gamma'(z) = 1$ za svaki $z \in \mathbb{H}$. Uvjet na $\rho(z)$ je $0 = \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = \rho(z) - \rho(z+b)$ za svaki $z \in \mathbb{H}$ i svaki $b \in \mathbb{R}$. Tada je $\rho(z) = \rho(z+b)$ za svaki $z \in \mathbb{H}$ i svaki $b \in \mathbb{R}$. Zapravo, $\rho(z)$ ovisi samo o imaginarnom dijelu $y = Im(z)$ od $z = x + iy$. Da bi to vidjeli eksplicitno, pretpostavimo da $z_1 = x_1 + iy$ i $z_2 = x_2 + iy$ imaju jednake imaginarne djelove; tada je $z_2 = z_1 + (x_2 - x_1)$. Kako je $x_2 - x_1$ realan, imamo $\rho(z_2) = \rho(z_1)$.

Možemo ρ promatrati kako realne funkciju jedne realne varijable $y = Im(z)$. Promotrimo realnu funnkciju $r : \langle 0, \infty\rangle \to \langle 0, \infty\rangle$ danu s $r(z) = \rho(iy)$. Napomenimo da je $\rho(z) = r(Im(z))$ za svaki $z \in \mathbb{H}$.

Promotrimo generator oblika $\gamma(z) = az$ za $a > 0$ i $b = 0$. Tada je $\gamma'(z) = a$ za svaki $z \in \mathbb{H}$, a uvjet na ρ je $0 = \mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = \rho(z) - a\rho(az)$ za svaki $z \in \mathbb{H}$ i $a > 0$. Dakle, $\rho(z) = a\rho(az)$, tj. $r(y) = ar(ay)$ za svaki $y > 0$ i $a > 0$. Dijeljenjem s a dobivamo $r(ay) = \frac{1}{a}r(y)$. Uvrštavanjem $y = 1$ dobivamo $r(a) = \frac{1}{a}r(1)$, dakle r je potpuno određen s vrijednosti u 1. Pozivanjem na definiciju funkcije r imamo da invarijantnost pod djelovanjem grupe Möb$^+(\mathbb{H})$ povlači da $\rho(z)$ mora biti oblika $\rho(z) = r(Im(z)) = \frac{c}{Im(z)}$ za neku pozitivnu konstantu c.

Slična analiza mogla bi se napraviti za funkcije $K(z) = -\frac{1}{z}$ i $B(z) = -\overline{z}$, koje zajedno s Möb$^+(\mathbb{H})$ generiraju cijelu grupu Möb$(\mathbb{H})$. No u ovom slučaju ne možemo koristiti dosadašnje argumente zato što derivacija $B'(z)$ nije definirana. Taj problem možemo riješiti na način da ju komponiramo s $f : [a, b] \to \mathbb{H}$, $f(t) = x(t) + iy(t)$ te deriviramo kao put. Ovime bismo dokazali slijedeći teorem.

Teorem 4.8. *Duljina krivulje obzirom na funkciju ρ invarijantna je na djelovanje grupe* Möb$(\mathbb{H})$*, tj. vrijedi $||f||_\rho = ||\gamma \circ f||_\rho$ za svaki po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ i svaki $\gamma \in$*Möb$(\mathbb{H})$*, ako i samo ako je ρ oblika $\rho(z) = \frac{c}{Im(z)}$ za neku pozitivnu konstantu c.*

Nije moguće odrediti specijalnu vrijednost konstante c korištenjem samo djelovanja grupe Möb$(\mathbb{H})$. Da bi izbjegli brigu oko toga možemo staviti da je $c = 1$.

Definicija 4.9. *Za po dijelovima gladak put $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ definiramo hiperboličku duljinu od f kao*

$$||f||_{\mathbb{H}} = \int_f \frac{1}{Im(z)}|dz| = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))}|f'(t)|dt.$$

Propozicija 4.10. *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ po dijelovima gladak put. Hiperbolička duljina $||f||_{\mathbb{H}}$ od f je konačna.*

Dokaz. Postoji konstanta $B > 0$ tako da je slika $f([a, b])$ sadržana u podskupu $K_B = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) \geq B\}$ od $\mathbb{H}$. Ova činjenica slijedi iz toga što su $[a, b]$, pa onda i $f([a, b])$ kompaktni. Prema definiciji po dijelovima glatkog puta, postoji particija od $[a, b]$ na podintervale $[a_0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_n, a_{n+1}]$ takva da je f gladak na svakom od podintervala $[a_k, a_{k+1}]$. Derivacija $f'(t)$ je neprekidna na svakom podintervalu. Prema teoremu najveće vrijednosti za neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu postoji A_k za svaki k tako da je $|f'(t)| \leq A_k$ za svaki $t \in [a_k, a_{k+1}]$. Neka je A najveći od $A_0, ..., A_n$. Tada imamo

$$||f||_{\mathbb{H}} = \int_a^b \frac{1}{Im(f(t))}|f'(t)|dt \leq \int_a^b \frac{1}{B}Adt = \frac{A}{B}(b - a),$$

što je konačna veličina. $\square$

Sada znamo kako računati hiperboličku duljinu svakog po dijelovima glatkog puta u $\mathbb{H}$ tako da integriramo hiperbolički element duljine luka $\frac{1}{Im(z)}|dz|$ duž tog puta. Na osnovu toga izgradit ćemo hiperboličku metriku u $\mathbb{H}$.

4.3 Hiperbolička metrika

Definicija 4.11. *Metrika na skupu X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *za svaki* $x, y \in X$ *i* $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *za svaki* $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *za svaki* $x, y, z \in X$ *(nejednakost trokuta).*

Ako je d metrika na skupu X kažemo da je (X, d) *metrički prostor.* Primjer standardne metrije na $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ je dan apsulutnom vrijednosti. Standardna metrika na $\mathbb{C}$ je funkcija $n : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $n(z, w) = |z - w|$.

Neka je X skup u kojem znamo mjeriti duljinu puteva. Neka je za svaki par x i y točaka iz X skup $\Gamma[x, y]$ puteva $f : [a, b] \to X$ takvih da je $f(a) = x$ i $f(b) = y$ neprazan, te svakom putu f iz $\Gamma[x, y]$ možemo pridružiti nenegativan realan broj $||f||$, duljinu od f.

Kažemo da je X krivuljni metrički prostor ako je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definirana s $d(x, y) = inf\{||f|| | f \in \Gamma[x, y]\}$ metrika te ako za svake dvije točke $x, y \in X$ postoji put $f \in \Gamma[x, y]$ takav da je $d(x, y) = ||f||$. Taj put f nazivamo put koji realizira udaljenost između točaka x i y.

Sada možemo organizirati $\mathbb{H}$ u krivuljni metrički prostor. Za svaki par točaka x i y iz $\mathbb{H}$, neka $\Gamma[a, b]$ označava skup svih po dijelovima glatkih puteva $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ takvih da je $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Hiperboličku dužinu s krajnjim točkama x i y možemo parametrizirati po dijelovima glatkim putem. Vidimo da je $\Gamma[a, b]$ neprazan. Prema propoziciji 4.10 znamo da svaki put f iz $\Gamma[a, b]$ ima konačnu hiperboličku duljinu $||f||_{\mathbb{H}}$. Promotrimo funkciju $d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) = inf\{||f||_{\mathbb{H}} | f \in \Gamma[x, y]\}.$$

$d_{\mathbb{H}}(x, y)$ nazivamo *hiperboličkom udaljenosti* između x i y.

Teorem 4.12. $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ *je krivuljni metrički prostor. Put koji realizira udaljenost u* $\Gamma[x, y]$ *je svaka skoro jednostavna parametrizacija hiperboličke dužine s krajevima* x *i* y.

Dokaz ovog teorema je dosta opsežan i može se naći u cjelini 3.4 knjige [1]. Dokazat ćemo slijedeću korisnu propoziciju.

Propozicija 4.13. *Za svaki element γ iz Möb($\mathbb{H}$) i svaki par točaka x i y iz $\mathbb{H}$ vrijedi $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$.*

Dokaz. Dokaz ćemo započeti s promatranjem $\{\gamma \circ f | f \in \Gamma[x,y]\} \subseteq \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$. Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ put u $\Gamma[x,y]$ takav da je $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Tada je $(\gamma \circ f)(a) = \gamma(x)$ i $(\gamma \circ f)(b) = \gamma(y)$ pa je $\gamma \circ f$ u $\Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]$.

Duljina $||f||_{\mathbb{H}}$ je invarijantna obzirom na djelovanje grupe Möb($\mathbb{H}$), tj. vrijedi $||\gamma \circ f||_{\mathbb{H}} = ||f||_{\mathbb{H}}$ za svaki put f iz $\Gamma[x,y]$, pa je

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)) = inf\{||g||_{\mathbb{H}} | g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\}$$

$$\leq inf\{||\gamma \circ f||_{\mathbb{H}} | f \in \Gamma[x,y]\}$$

$$= inf\{||f||_{\mathbb{H}} | f \in \Gamma[x,y]\} = d_{\mathbb{H}}(x,y).$$

Element γ je invertibilan i njegov inverz γ^{-1} je u Möb($\mathbb{H}$). Promotrimo skup

$$\{\gamma^{-1} \circ g | g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} \subseteq \Gamma[x,y].$$

Na isti način kao ranije zaključujemo

$$d_{\mathbb{H}}(x,y) = inf\{||f||_{\mathbb{H}} | f \in \Gamma[x,y]\}$$

$$\leq inf\{||\gamma^{-1} \circ g||_{\mathbb{H}} | g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\}$$

$$= inf\{||g||_{\mathbb{H}} | g \in \Gamma[\gamma(x), \gamma(y)]\} = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y)).$$

Dokazali smo da vrijedi $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(x), \gamma(y))$. □

Pokataz ćemo kako možemo računati udaljenost između točaka x i y iz $\mathbb{H}$. Prema propoziciji 4.13 znamo da svaki element iz Möb($\mathbb{H}$) čuva udaljenost među točkama. Možemo izabrati takav γ iz Möb($\mathbb{H}$) koji će točke x i y preslikati u točke na pozitivnom dijelu imaginarne osi, tj. $\gamma(x) = \mu i$ i $\gamma(y) = \lambda i$. Tada vrijedi $d_{\mathbb{H}}(x,y) = d_{\mathbb{H}}(\mu i, \lambda i)$. Takav γ postoji zbog tranzitivnih svojstava Möb. Od ranije znamo kako računamo hiperboličku duljinu krivulje. Krivulja koja spaja točke μi i λi je pravac. Dakle, trebamo izračunati duljinu dužine s krajevima μi i λi. Neka je $f : I \to \mathbb{H}$ zadana s $f(t) = it$ ta krivulja pri čemu je $I = [\mu, \lambda]$ ili $I = [\lambda, \mu]$ ovisno o tome je li $\mu > \lambda$ ili $\lambda > \mu$. Vrijedi $f'(t) = i$ pa je $|f'(t)| = 1$. Računamo duljinu krivulje između točaka μi i λi :

$$\int_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{Im(f(t))} |f'(t)| dt = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{1}{t} dt$$

$$= \ln(\lambda) - \ln(\mu) = \left| \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right|.$$

Apsulutnu vrijednost koristimo zato da formula vrijedi u oba slučaja $\lambda > \mu$ i $\mu > \lambda$.

Na primjer, promotrimo dvije točke $x = 2 + i$ i $y = -3 + i$. Hiperbolički pravac l koji spaja te točke je euklidska kružnica s centrom u $-\frac{1}{2}$ i polumjerom $\frac{\sqrt{29}}{2}$. Krajnje točke u beskonačnosti pravca l su $p = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$ i $q = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$.

Da bi γ preslikao pravac l u pozitivni dio imaginarne osi mora preslikavati točke u beskonačnosti od l u točke u beskonačnosti od pozitivnog dijela imaginarne osi. Neka je $\gamma(z) = \frac{z-p}{z-q}$. Determinanta od γ je $p - q > 0$ pa je γ iz $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$. Transformacija γ preslikava p u 0, a q u ∞. Dakle, preslikava pravac l u pozitivan dio imaginarne osi.

Imamo:

$$\gamma(2+i) = \frac{2+i-p}{2+i-q} = \frac{p-q}{(2-q)^2+1}i$$

i

$$\gamma(-3+i) = \frac{-3+i-p}{-3+i-q} = \frac{p-q}{(3+q)^2+1}i.$$

Računamo udaljenost:

$$d_{\mathbb{H}}(2+i, -3+i) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(2+i), \gamma(-3+i)) = \left| \ln \left(\frac{(2-q)^2+1}{(3+q)^2+1} \right) \right|$$

$$= \ln \left(\frac{58+10\sqrt{29}}{58-10\sqrt{29}} \right) \approx 3,29.$$

Ovaj način računanja može biti vrlo kompliciran pa bi htjeli imati opću formulu za računanje udaljenosti između točaka. Jedan način je da ovaj proces provedemo za opće točke $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 + y_2 i$. Neka je c središte, a r polumjer euklidske kružnice koja sadrži hiperbolički pravac točkama z_1 i z_2. Tada je

$$d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) = \left| \ln \left(\frac{(x_1 - c - r)y_2}{y_1(x_2 - c - r)} \right) \right|$$

fromula za hiperboličku udaljenost između točaka z_1 i z_2.

4.4 Metrička svojstva hiperboličke ravnine

Izometrije metričkog prostora (X, d) su homeomorfizmi f od X koji čuvaju udaljenost, tj. $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ za svaki par točaka $x, y \in X$. Općenito, ne možemo zaključiti da je svaka funkcija koja čuva udaljenost homeomorfizam.

Propozicija 4.14. *Neka je $f : X \to X$ funkcija koja čuva udaljenost. Tada je f neprekidna i injektivna.*

Dokaz. Neka su x i y dvije točke domene. Ako je $f(x) = f(y)$ tada je $d(f(x), f(y)) = 0$. Znamo da f čuva udaljenost pa je $d(x, y) = 0$ što povlači da je $x = y$. Dakle, f je injektivna.

Da bi pokazali neprekidnost od f u točki x uzmimo neki $\varepsilon > 0$. Trebamo pronaći $\delta > 0$ takav da je $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(z))$. Zbog $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ vidimo da ako je $y \in U_\delta(x)$ onda je $d(x, y) < \delta$ i $d(f(x), f(y)) < \delta$ pa je $f(y) \in U_\delta(f(x))$. Dakle, možemo staviti da je $\delta = \varepsilon$. □

Promotrimuo metriku e na $\mathbb{Z}$ definirana na slijedeći način:

$$e(n, m) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1, & m \neq n. \end{cases}$$

Funkcija e daje metriku na $\mathbb{Z}$, ali različitu od uobičajene metrike na $\mathbb{Z}$. Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definirana s $f(m) = 2m$ čuva udaljenost, ali nije surjekcija pa nije homeomorfizam. No, funkcija koja čuva udaljenost je homeomorfizam ako joj kodomenu restringiramo na sliku $f(X)$ zato što je f bijekcija ako ju promatramo kao funkciju $f : X \to f(X)$. Općenitije, svaka funkcija koja čuva udaljenost $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ je homeomorfizam između X i $f(X) \subseteq Y$. Za svaki par točaka $z, w \in f(X)$ imamo:

$$d(z, w) = d(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = d(f^{-1}(z), f^{-1}(w)).$$

Funkcija $f^{-1} : f(X) \to X$ čuva udaljenost pa je i neprekidna. Identiteta u svakom metričkom prostoru čuva udaljenost. Inverzna funkcija homeomorfizma koji čuva udaljenost je također homeomorfizam koji čuva udaljenost. Komponiranjem dva homeomorfizma koji čuvaju udaljenost dobiva se homeomorfizam koji čuva udaljenost. To nas dovodi do zaključka da skup svih izometrija nekog metričkog prostora čini gupu. Definirajmo *hiperboličku izometriju* kao izometriju od $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$. Označimo s $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ *grupu izometrija* od $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

Teorem 4.15. $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}}) = \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$.

Dokaz ovog teorema može se naći u [1].

Propozicija 4.16. *Neka su x, y i z tri točke iz $\mathbb{H}$. Tada vrijedi*

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) + d_{\mathbb{H}}(y, z) = d_{\mathbb{H}}(x, z)$$

ako i samo ako y pripada hiperboličkoj dužini koja ima krajnje točke x i z.

Dokaz ove propozicije može se naći u [1].

Do sada smo promatrali udaljenosti između dviju točaka iz $\mathbb{H}$. Na sličan način možemo definirati udaljenost između dva podskupa X i Y od $\mathbb{H}$ kao

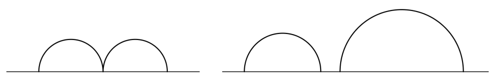
$$d_{\mathbb{H}}(X,Y) = inf\{d_{\mathbb{H}}(x,y) | x \in X, y \in Y\}.$$

Za podskup X kažemo da je *ograničen* ako postoji $R > 0$ takav da je X sadržan u otvorenom hiperboličkom disku $U_R(i) = \{z \in \mathbb{C} | d_{\mathbb{H}}(z,i) < R\}$. Podskup X je *kompaktan* ako je zatvoren i ograničen.

Propozicija 4.17. *Neka je X kompaktan podskup od $\mathbb{H}$ i Y neki podskup od $\mathbb{H}$. Tada je $d_{\mathbb{H}}(X,Y) > 0$ ako i samo ako su X i Y disjunktni.*

Dokaz ove propozicije može se naći u [1]. Hiperbolička udaljenost između podskupova nije metrika na skupu svih podskupova od $\mathbb{H}$, ali daje jedan način mjerenja udaljenosti između dva zatvorena skupa u $\mathbb{H}$. Na taj način možemo odrediti udaljenost između hiperboličkih pravaca.Postoje dvije vrste paralelnosti hiperboličkih pravaca.

Definicija 4.18. *Hiperbolički pravci koji su disjunktni u $\mathbb{H}$, a kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ koje ih sadrže nisu disjunktne nazivaju se paralelnim pravcima. Hiperbolički pravci koji su disjunktni u $\mathbb{H}$, a kružnice u $\overline{\mathbb{C}}$ koje ih sadrže su također disjunktne nazivaju se ultraparalelnim pravcima.*



Slika 9: Dvije vrste paralelnih pravaca u $\mathbb{H}$

Neka su l_1 i l_2 dva paralelna pravca sa zajedničkom krajnjom točkom u beskonačnosti x na $\overline{\mathbb{R}}$. Nekaj je y_k druga krajnja točka u beskonačnosti pravca l_k. Möb($\mathbb{H}$) djeluje trostruko tranzitivno na $\mathbb{R}$, možemo staviti da je $x = \infty$, $y_1 = 0$ i $y_2 = 1$. Svaka točka na pravcu l_1 je oblika λi za $\lambda > 0$, a svaka točka na pravcu l_2 je oblika $1 + \lambda i$ za $\lambda > 0$.

Put $f : [0,1] \to \mathbb{H}$ zadan s $f(t) = t + \lambda i$ parametrizira horizontalnu euklidsku dužinu s krajnjim točkama λi i $1+\lambda i$. Vrijedi $d_{\mathbb{H}}(l_1,l_2) \le d_{\mathbb{H}}(\lambda i, 1+\lambda i) \le ||f||_{\mathbb{H}} = \int_1^0 \frac{1}{\lambda} dt = \frac{1}{\lambda}$ za svaki $\lambda > 0$. Ako pustimo da $\lambda \to \infty$ vidimo da je $d_{\mathbb{H}}(l_1,l_2) = 0$ za dva paralelna pravca koji imaju zajedničku krajnju točku u beskonačnosti. Tine smo dokazali slijedeću propoziciju.

Propozicija 4.19. *Neka su l_1 i l_2 dva paralelna pravca u $\mathbb{H}$. Tada je $d_{\mathbb{H}}(l_1,l_2) = 0$.*

U knjizi [1] nalazi se dokaz sljedeće propozicije.

Propozicija 4.20. *Neka su l_0 i l_1 dva ultraparalelna pravca u $\mathbb{H}$. Tada je $d_{\mathbb{H}}(l_0, l_1) > 0$.*

Neka je l hiperbolički pravac i A točka iz $\mathbb{H}$ koja ne pripada pravcu l. Tada postoji jedinstvena točka B koja pripada pravcu l takva da je dužina $\overline{AB}$ okomita na l. Vrijedi $d_{\mathbb{H}}(A, l) = d_{\mathbb{H}}(A, B)$.

Propozicija 4.21. *Neka su l_1 i l_2 dva ultraparalelna hiperbolička pravca. Postoji jedinistveni hiperbolički pravaca l koji je okomit na pravce l_1 i l_2. Ako su l_1 i l_2 dva paralelna hiperbolička pravca tada ne postoji hiperbolički pravac koji je okomit na l_1 i l_2.*

Ultraparalelni pravci imaju jedinstvenu zajedničku okomicu i udaljenost između njih neograničeno raste u obje strane od okomice. Udaljenost između paralelnih pravaca u jednom smjeru neograničeno raste, a u drugom smjeru teži k nuli.

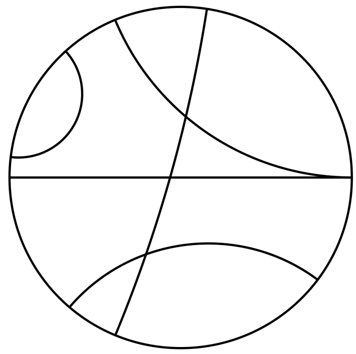
5 Još neki modeli hiperboličke ravnine

Za sve što smo do sada radili koristili smo model gornje poluravnine. Postoji još mnoštvo modela hiperboličke ravnine. Ovdje ćemo prikazati neke od njih.

5.1 Poincaréov disk

Jedan od vrlo korisnih modela je i *Poincaréov disk* $\mathbb{D}$. Kao i kod modela gornje poluravnine, koristimo kompleksnu ravninu $\mathbb{C}$. Poincareov model hiperboličke ravnine je otvoren disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.

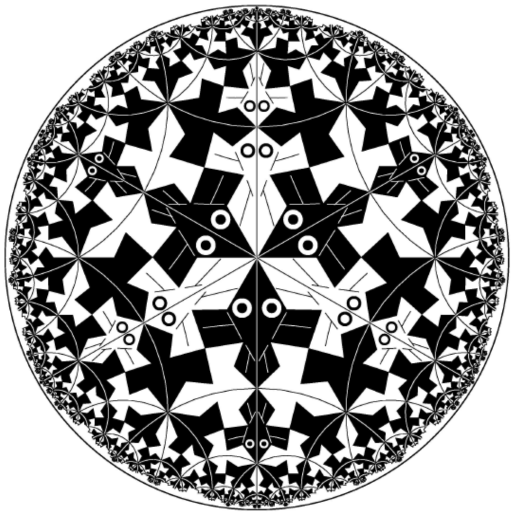
Svaki hiperbolički pravac u $\mathbb{H}$ sadržan je u euklidskoj kružnici iz $\overline{\mathbb{C}}$ okomitoj na $\overline{\mathbb{R}}$. Svaki *Hiperbolički pravac* u $\mathbb{D}$ je presjek euklidske kružnice iz $\overline{\mathbb{C}}$ okomite na jediničnu kružnicu $\mathbb{S}^1$ i diska $\mathbb{D}$. Nekoliko hiperboličkih pravaca vidljivo je na slici 10.



Slika 10: Nekoliko pravaca u Poincaréovom disku

Ovaj model poslužio je kao inspiracija nekim crtežima M. C. Eschera. Jedan od takvih crteža vidi se na slici 11.[1]

[1]preuzeto sa `http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Dunham.pdf` dana 31.10.2016.



Slika 11: M. C. Escher: *Circle Limit I.*

Granica u beskonačnosti Poincaréovog diska $\mathbb{D}$ je jedinična kružnica $\mathbb{S}^1$. To je kružnica iz $\overline{\mathbb{C}}$ koja određuje $\mathbb{D}$. Udaljenost između bilo koje točke koja pripada kružnici $\mathbb{S}^1$ i bilo koje točke iz $\mathbb{D}$ je beskonačna.

Teorem 5.1. *Hiperbolička duljina po dijelovima glatkog puta $f : [a, b] \to \mathbb{D}$ dana je integralom*

$$||f||_{\mathbb{D}} = \int_f \frac{2}{1 - |z|^2} |dz|.$$

Hiperboličku duljinu po dijelovima glatkih puteva u $\mathbb{D}$ koristimo za definiranje udaljenosti u $\mathbb{D}$. Neka su x i y dvije točke iz $\mathbb{D}$ i neka je $\Theta[x, y]$ skup svih po dijelovima glatkih puteva $f : [a, b] \to \mathbb{D}$ tako da je $f(a) = x$ i $f(b) = y$. Definiramo $d_{\mathbb{D}}(x, y) = inf\{||f||_{\mathbb{D}} | f \in \Theta[x, y]\}$.

Propozicija 5.2. *Za dvije točke $x, y \in \mathbb{D}$ vrijedi*

$$d_{\mathbb{D}}(x, y) = \left| \ln \frac{(xP)(yQ)}{(xQ)(yP)} \right|$$

pri čemu su P i Q krajnje točke u beskonačnosti pravca koji sadrži točke x i y.

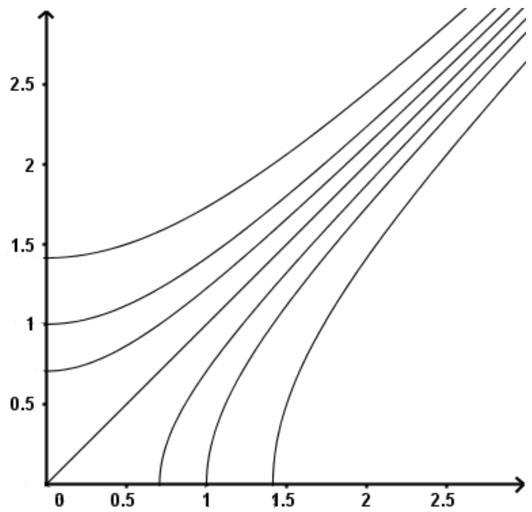
Kut između hiperboličkih pravaca u ovom modelu je kut koji zatvaraju tangente na euklidske kružnice u točki presjeka.

5.2 Opći model hiperboličke ravnine

Opća konstrukcija je metoda izgradnje ravninskog modela hiperboličke ravnine iz gornje poluravnine $\mathbb{H}$ korištenjem alata kompleksne analize. Ako želimo izgraditi model na nekom skupu X tada on mora biti podskup od $\mathbb{C}$ za koji postoji holomorfni homeomorfizam $\xi : X \to \mathbb{H}$ i da su ξ i ξ^{-1} obje holomorfne.

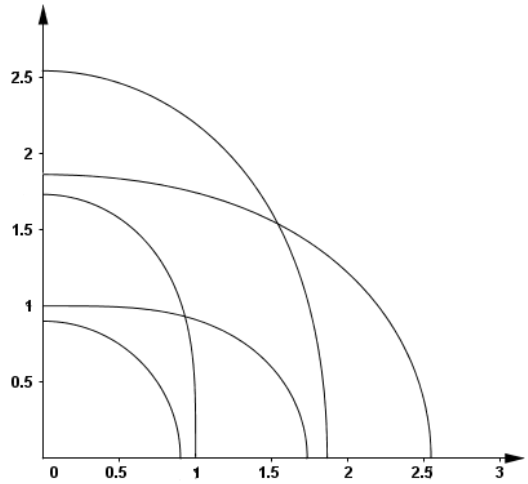
Na primjer, neka je X *kvadrantna ravnina* $X = \{z \in \mathbb{C} | Re(z) > 0; Im(z) > 0\}$ i $\xi : X \to \mathbb{H}$ zadan s $\xi(z) = z^2$. Neka se $w = u + iv$ koordinate točke u X, a z kordinata u $\mathbb{H}$, tada je $\xi(w) = z = u^2 - v^2 + 2iuv$. Dvije su vrste hiperboličkih pravaca u $\mathbb{H}$, jedni su sadržani u euklidskim pravcima $L_c = \{z \in \mathbb{H} | Re(z) = c\}$, a drugi sadržani u euklidskim kružnicama $A_{c,r} = \{z \in \mathbb{H} | (Re(z) - c)^2 + (Im(z))^2 = r^2\}$.

Slika od L_c pod ξ^{-1} je krivulja $\{w \in X | u^2 - v^2 = c\}$ u X. Za $c = 0$ ta krivulja je euklidski polupravac k s početkom u 0 koji zatvara kut od $\frac{\pi}{4}$ s pozitivnim dijelom relne osi. Za $c \neq 0$ ta krivulja je dio grane hiperbole kojem je k asimptota. Nekoliko pravaca oblika L_c vidi se na slici 12.



Slika 12: Nekoliko hiperboličkih pravaca oblika L_c

Slika od $A_{c,r}$ pod ξ^{-1} je krivulja poznata kao *Cassinijevi ovali.* Neka su w_0 i w_1 dvije fiksne točke iz $\mathbb{C}$. Cassinijev oval je skup točaka w iz $\mathbb{C}$ za koje vrijedi da je produkt euklidskih udaljenosti $|(w - w_0)||(w - w_1)|$ konstantan. Nekoliko pravaca oblika $A_{c,r}$ vidi se na slici 13.



Slika 13: Nekoliko hiperboličkih pravaca oblika $A_{c,r}$

Literatura

[1] J.W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, drugo izdanje, Springer, London 2005.

[2] F.M. Brückler, prezentacija: *Matematika u Europi u prvoj polovici 19. stoljeća*, Zagreb, ak. g. 2014./15. dostupno na `http://prelog.chem.pmf.hr/ fmbruckler/PovMat/povmat12b.pdf`

[3] N. Elezović, D. Petrizio, *Funkcije kompleksne varijable*, Element, Zagreb, 1994.

[4] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1997.

[5] Š. Ungar, *Matematička analiza 4*, skripta, PMF-MO, 2006. Dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/ ungar/nastava.html/MA/Analiza4.pdf`

[6] *Poincaré Hyperbolic Disk*

`http://mathworld.wolfram.com/PoincareHyperbolicDisk.html`, 31.10.2016.

Sažetak

Hiperbolička ravnina ima mnoga svojstva euklidske ravnine. Međutim, u njoj ne vrijedi peti euklidov postulat pa donosi i mnoge novosti u odnosu na euklidsku geometriju. Izrabali smo model gornje poluravnine $\mathbb{H}$ u kojem smo istraživali svojstva ove geometrije.

Glavni zadatak bio je na prirodan način uvesti metriku. Prije toga morali smo otkriti grupu Möbiusovih tansformacija koje čuvaju incidenciju. Proučavali smo tranzitivnost i konformnost elemenata opće Möbiusove grupe. Uz to morali smo otkriti grupu koja čuva $\mathbb{H}$. Iz kompleksne analize smo iskoristili duljine krivulja te krivuljne integrale. Otkrili smo formule za računanje hiperboličke duljine i udaljenosti te smo otkrili još neka metrička svojstva. Osim modela gornje pluravnine spomenuli smo i Poincaréov disk i opću konstrukciju hiperboličke ravnine pomoću kompleksne analize.

Summary

The hyperbolic plane has many properties of the usual Euclidean plane. However, since Euclid's fifth postulate does not hold, it also has many strange features, different from Euclidean geometry. We study properties of the hyperbolic plane using the upper half-plane model $\mathbb{H}$.

Our main goal was to introduce the hyperbolic metric in a natural way. We consider the group of incidence-preserving Möbius transformations and study transitivity properties and conformality of the general Möbius group. After that we discover it's subgroup preserving $\mathbb{H}$. We use complex analysis to compute arc-length and path integrals, and obtain formulae for calculating hyperbolic length and distance. We discover some other metric properties of the hyperbolic plane. Besides the upper half-plane model, we also mention the Poincaré disk model and a general construction using complex analysis.

Životopis

Rođena sam 2. studenog 1990. godine u Karlovcu. Osnovnu školu završavam 2005. godine te upisujem Ekonomsko - turističku školu u Karlovcu, smjer: ekonomist - ekonomija i trgovina. Godine 2009. završavam srednju školu te upisujem studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Završila sam preddiplomski nastavnički smjer te sam i na diplomskom studiju nastavila nastavnički smjer.