SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marina Seifert

GEOMETRIJSKI ZADATCI U MATEMATIČKOM NATJECANJU „KLOKAN BEZ GRANICA“

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Željka Milin-Šipuš

Zagreb, studeni 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji i svima koji

su bili uz mene…

Sadržaj

Sadržaj iv
Uvod 1
Poglavlje 1. Natjecanje „Klokan bez granica“ 3
1.1 Općenito o natjecanju 3
1.2 Propozicije natjecanja 5
1.3 Kako je sve počelo? 6
1.4 Natjecanje u Hrvatskoj 7
Poglavlje 2. Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja 9
2.1 Van Hieleove razine geometrijskog mišljenja 10
Poglavlje 3. Geometrijski zadatci u natjecanju „Klokan bez granica“ 12
3.1 Otkrivanje uzoraka 14
3.2 Klasifikacija geometrijskih likova 19
3.2.1 Prepoznavanje geometrijskih oblika 20
3.2.2 Sastavljivost 24
3.2.3 Sukladnost 28
3.2.4 Prebrojavanje 30
3.3 Mjerenje 32
3.3.1 Duljina dužine 34
3.3.2 Kutovi 38
3.3.3 Opseg 43
3.3.4 Površina 47
3.3.5 Volumen 56
3.3.6 Mješoviti zadatci 58
3.4 Mnogokuti 65
3.5 Ostala geometrijska svojstva geometrijskih likova 71
3.6 Geometrijske transformacije 77
3.6.1 Rotacija 78
3.6.2 Simetrija 81
3.7 Prikazivanje trodimenzionalnih tijela u ravnini 83
3.7.1 Volumen tijela 84
3.7.2 Vizualizacije dvodimenzionalnih prikaza na temelju trodimenzionalnih oblika 89

3.7.3 Vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju dvodimenzionalnih prikaza 92
3.8 Koordinatna geometrija.. 93
3.9 Malo složeniji zadatci 96
Poglavlje 4. Strategije rješavanja zadataka 106
Zaključak.. 109
Bibliografija.. 111
Sažetak 113
Summary.. 114
Životopis.. 115

Uvod

Matematika je jedan od nevoljenijih predmeta u školama u Hrvatskoj te mnogo ljudi ″bježi″ od korištenja matematike. Često se može čuti da je matematika učenicima problem, jer se ne može jednostavno naštrebati, te da učenici ne vide smisao matematičkih pojmova i postupaka jer ne uočavaju kako će im to koristiti u životu. Upravo zbog takvih razloga i stavova u javnosti, proizašla je ideja natjecanja pod nazivom „Klokan bez granica“ („Kangourou sans frontiers”, „Kangaroo without borders“). To je vrsta međunarodnog matematičkog natjecanja u kojem učenici putem netipičnih i nestandardnih zadataka, ali ipak jednostavnih i zanimljivih zadataka često povezanih sa svakodnevnim životom, rješavaju razne matematičke probleme te primjenjuju logičko mišljenje i zaključivanje. Glavni cilj natjecanja je motivirati učenike da se bave matematikom izvan redovitih školskih programa (primjenjena matematika na životne probleme, zabavna matematika), odnosno popularizirati matematiku, te učenicima ukazati na ulogu logičkog mišljenja pri rješavanju zadataka.

S tim je ciljem uvedeno matematičko natjecanje „Klokan bez granica“. Postoji sedam natjecateljskih kategorija, ovisno o uzrastu učenika. Natjecanje je vrlo masovno, u njemu sudjeluje preko 60 država s više od 6 milijuna natjecatelja godišnje, a u Hrvatskoj sudjeluje oko 35 tisuća učenika godišnje. U Hrvatskoj se ovo natjecanje održava od 1999. godine, a u svijetu od 1991. i od tada konstantno bilježi porast broja sudionika. Već osamnaest godina zaredom organizator ovog natjecanja u Hrvatskoj je Hrvatsko matematičko društvo. Zadatci su vezani uz razna matematička područja, primjereni uzrastu učenika za koje su namijenjeni.

U zadatcima se najviše se ističe područje kombinatiorike, vjerojatnosti i geometrije, a puno manje je zastupljena algebra te se može uočiti puno manje matematičkog simbolizma i formalizma nego u „običnim“ natjecanjima. Obzirom na velik opseg zadataka, cilj ovog diplomskog je analizirati geometrijske zadatke koji se pojavljuju u natjecanju, za sve uzraste, obzirom na geometrijske pojmove koji se koriste, te težini i složenosti zadataka. Imajući na umu sve navedeno, diplomski rad organiziran je na sljedeći način. U prvom poglavlju navedene su općenite informacije o matematičkom natjecanju „Klokan bez granica“ te bitne propozicije i pravila natjecanja. U drugom poglavlju dan je kratki osvrt na van Hieleovu teoriju o razvoju geometrijskog mišljenja, a u trećem poglavlju napravljena je kategorizacija geometrijskih zadataka po kategorijama koje su konstruirane u svrhu ovog diplomskog rada. U zadnjem, odnosno četvrtome poglavlju, ukratko su opisane strategije rješavanja geometrijskih zadataka koje se mogu koristiti prilikom rješavanja te je naposlijetku dan zaključak i kratki sažetak diplomskog rada.

Poglavlje 1

Natjecanje „Klokan bez granica“

1.1 Općenito o natjecanju

Matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ najveće je međunarodno školsko natjecanje u svijetu. Radi se o natjecanju koje se organizira svake godine u ožujku, istoga dana, u isto vrijeme, u svim zemljama sudionicama. Ove je godine, osamnaesti put zaredom, održano pod svojim prepoznatljivim motom: bez eliminacije, selekcije i finala. S istim zadatcima u isto vrijeme natjecalo se više od 6 milijuna učenika u 64 države svijeta. Iste zadatke rješavali su učenici u Albaniji, Armeniji, Austriji, Bangladešu, Belgiji, Bjelorusiji, Boliviji, Brazilu, Bugarskoj, Cipru, Češkoj, Čileu, Danskoj, Ekvadoru, Estoniji, Finskoj, Francuskoj, Gani, Grčkoj, Hrvatskoj, Indoneziji, Iranu, Irskoj, Italiji, Izraelu, Jamajci, Kanadi, Kazahstanu, Kolumbiji, Kostariki, Latviji, Litvi, Mađarskoj, Makedoniji, Maleziji, Meksiku, Moldaviji, Mongoliji, Nizozemskoj, Njemačkoj, Norveškoj, Pakistanu, Panami, Paragvaju, Peruu, Poljskoj, Portoriku, Portugalu, Rumunjskoj, Rusiji, Sjedinjenim Američkim Državama, Slovačkoj, Sloveniji, Srbiji, Španjolskoj, pokrajini Kataloniji, Švedskoj, Švicarskoj, Tunisu, Turskoj, Ukrajini, Urugvaju, Velikoj Britaniji, Venezueli i Vijetnamu. Prema međunarodnim dogovorima svaki se učenik ima pravo natjecati bez obzira na njegov uspjeh u redovnoj nastavi. Cilj natjecanja je popularizacija matematike i širenje osnovne matematičke kulture, a bitna namjera je motivirati učenike da se bave matematikom izvan redovitih školskih programa.

Postoji sedam natjecateljskih kategorija, odnosno skupina. Skupinu P (pčelice) čine učenici II. razreda osnovnih škola, skupinu L (leptirići) čine učenici III.razreda osnovnih škola, skupinu E (ecolier) čine učenici IV. i V. razreda osnovnih škola, skupinu B (benjamin) čine učenici VI. i VII. razreda osnovnih škola, skupinu, skupinu C (cadet) čine učenici VIII. razreda osnovnih škola i I. razreda srednjih škola, skupinu J (junior) čine učenici II. i III. razreda srednjih škola te skupinu S (student) čine učenici IV. razreda srednjih škola ([8]). Natjecanje je pojedinačno te se ne koriste računala niti ikakve tablice s formulama pri rješavanju. Natjecanje je samofinancirajuće i svaki učenik dobiva poklon, a najbolji i nagrade. U Hrvatskoj je predviđeno da učenici sami financiraju natjecanje sa svotom od 15 kn po učeniku**.** Od prikupljenih sredstava 60% odlazi na poklone i nagrade učenicima (svaki učenik prilikom dolaska na natjecanje dobiva simboličan poklon, a 10% najbolje plasiranih učenika nagradu), a 40% na materijalne troškove (članarinu u međunarodnoj udruzi, prijevod, tiskarski i poštanski troškovi, ispravak zadataka i dr.). Nagrade su raznolike: knjige matematičkog sadržaja, pretplata na časopis *Matka*, majice, kape, torbe, igrice i dr. U posljednje dvije godine u Hrvatskoj Povjerenstvo natjecanja nagrađuje škole s najvećim brojem prijavljenih učenika – 10 osnovnih škola i 5 srednjih, a to su najčešće knjige vezane uz matematiku za školsku knjižnicu.

Organizacijom ovog natjecanja bavi se udruga pod nazivom „Klokani bez granica“, međunarodnog je karaktera te se samofinancira od sredstava koje uplaćuju učeninici koje se žele natjecati ([5]). Svake godine koordinator natjecanja iz svake zemlje sudionice odlazi na godišnju skupštinu udruge, gdje prema Statutu Udruge podnosi izvještaj o uspjehu natjecanja u prethodnom ciklusu. Nakon toga izabiru se zadaci za sljedeće natjecanje. Zadatke sastavlja povjerenstvo članovi kojeg su predstavnici svih zemalja sudionica natjecanja. Svaka država, članica udruge, dužna je poslati izvjestan broj zadataka kao prijedlog. Zatim se iz predloženih zadataka izabire jedan manji dio zadataka koji su primjereni za natjecanje. O svakome se zadataku posebno raspravlja, promatraju se i diskutiraju njegova razna rješenja, ocjenjuje se za koju natjecateljsku kategoriju je pogodan itd. Otprilike nakon dva dana intenzivnog rada donose se odluke koji zadatci će se uvrstiti u testove, te ih se prevodi na engleski. Nakon toga svaki koordinator natjecanja dobiva testove, prevodi ih na jezik svoje zemlje te dalje u svojoj zemlji organizira natjecanje. Koordinator ima pravo na promjenu 5 zadataka ukoliko smatra da se za predložene zadatke zahtijeva znanje koje učenici u toj zemlji još nisu stekli u redovnom matematičkom obrazovanju. Osim izbora zadataka, na godišnjoj skupštini udruge na prijedlog vijeća prihvaćaju se novi članovi. Novi članovi moraju proći probni rok od dvije godine, da bi bili punopravni članovi, tj.da bi mogli sudjelovati u glasovanju. Svaka zemlja ima samo jedan glas bez obzira na broj učenika koji sudjeluju u natjecanju ([8]). Sljedeće će se natjecanje održati 16. ožujka 2017. godine.

1.2 Propozicije natjecanja

Natjecanje se sastoji se od 12 zadataka za natjecateljske skupine Pčelica (P) i Leptirić (L), odnosno 24 zadatka za sve ostale skupine (Ecolier, Benjamin, Cadet, Junior i Student). Natjecanje je pojedinačno, džepna računala su zabranjena, a za svaki je zadatak ponuđeno pet odgovora od kojih je samo jedan ispravan. Zadaci su raznovrsni i poredani od lakših prema težima. Težina svakog zadataka, odnosno kompleksnost zadatka, u natjecanju je procijenjena brojem bodova (od 3 do 5 bodova) te oni manje zahtjevniji nose 3 boda, oni malo kompleksniji 4 boda, a zadatci koje traže veće razumijevanje određenih matematičkih kocepata i očekuju od učenika povezivanje različitih matematičkih sadržaja nose 5 bodova. Prema tome, učenici koji znaju riješiti složenije zadatke u konačnici će imati veći broj bodova. U kategorijama Pčelica i Leptirić rješava se 12 zadataka u 60 minuta. Najveći mogući broj bodova je 60. Prva četiri pitanja nose po 3 boda, druga četiri po 4 boda, a treća četiri po 5 bodova. Ako nijedan odgovor nije zaokružen, zadatak donosi 0 bodova, a ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak. Na početku svaki sudionik dobiva 12 bodova, kako bi se izbjegli negativni bodovi. U kategorijama Ecoliers, Benjamins, Cadets, Juniors i Students učenici rješavaju 24 zadatka u 75 minuta. Najveći mogući broj bodova je 120. Prvih osam pitanja nosi po 3 boda, drugih osam po 4 boda, a trećih osam po 5 bodova. Ako nijedan odgovor nije zaokružen, zadatak donosi 0 bodova, a ako je zaokruženi odgovor pogrešan, oduzima se četvrtina bodova predviđenih za taj zadatak. Na početku svaki sudionik dobiva 24 boda, kako bi se izbjegli negativni bodovi ([9]).

1.3 Kako je sve počelo?

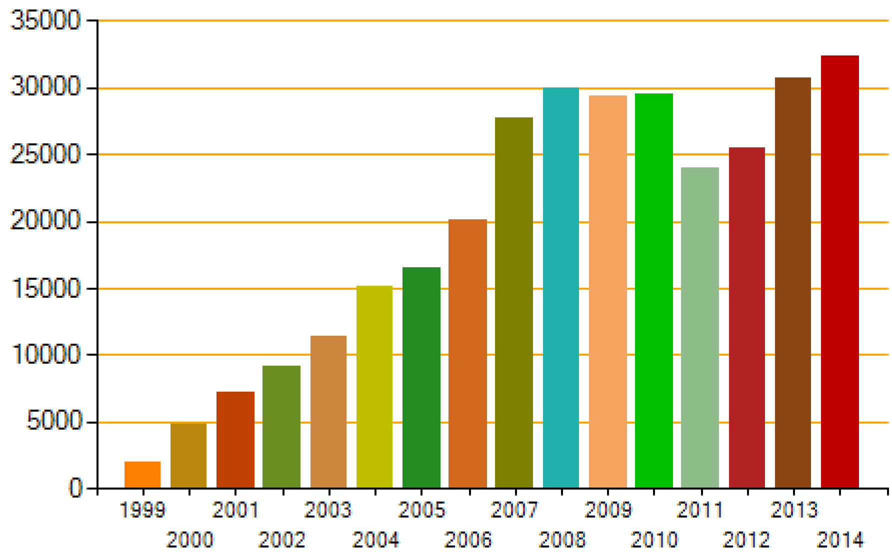
Početkom osamdesetih godina 20.stoljeća Peter O'Halloran, profesor matematike u Sydneyu, odlučio je pokrenuti novi tip "opuštenih i poštenih" natjecanja u Australiji. Njegova ideja je bila da se rješava niz matematičkih zadataka različitog, pa pomalo i nestandardnog sadržaja koji imaju ponuđene odgovore te se mogu ispravljati računalom i da pritom tisuće učenika može sudjelovati u isto vrijeme. Među mladim Australcima je natjecanje doseglo izvanredno veliki uspjeh. Godine 1991., dva francuska profesora odlučila su uvesti sličnu vrstu natjecnja u Francusku te su ga u čast profesoru O'Halloranu, obzirom da je natjecanje podrijetlom iz zemlje klokana, nazvali „Klokan bez granica“ („Kangourou sans frontiers“). Prva godina natjecanja u Francuskoj okupila je čak 120 000 učenika, 1992. broj sudionika bio je 300 000, da bi se naposlijetku 1993. ta brojka popela na 480 000 učenika ([10]).

U lipnju 1993. organizatori natjecanja u Francuskoj organizirali su međunarodni sastanak u Parizu, a nazočni profesori iz raznih europskih zemalja bili su impresionirani uspjehom i brojem sudionika u natjecanju. Nakon toga sedam je europskih zemalja odlučilo da će i oni u svojim školama organizirati natjecanje „Klokan bez granica“, a to su bile Bjelorusija, Mađarska, Nizozemska, Poljska, Rumunjska, Rusija i Španjolska. Natjecanje je doživjelo veliki uspjeh u svim zemljama u svibnju 1994. Iste godine u Strasbourgu, na vijeću Europe, predstavnici deset zemalja osnivaju udrugu „Klokan bez granica“ sa sjedištem u Parizu. Tu se rodila ideja o jedinstvenom natjecanju, koje bi služilo popularizaciji matematike među mladima, a cilj udruge bio bi promicanje matematičke kulture na sve moguće načine, a posebno organizirajući natjecanje koje se održava isti dan u svim zemljama članicama. Od te godine broj zemalja koje sudjeluju i učenika, odnosno natjecatelja, stalno se povećava. 1994. godine natjecanje je bilo organizirano u prethodno navedenih sedam zemalja Europe, uz sudjelovanje 569 000 učenika, dok je ove godine, 2016., sudjelovalo 64 države svijeta s oko 6 800 000 natjecatelja ([8]).

1.4 Natjecanje u Hrvatskoj

Međunarodno matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ prvi je put održano u Hrvatskoj 18.ožujka 1999. godine pod pokroviteljstvom Ministarstva prosvjete i športa i u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva. Hrvatsko matematičko društvo od tada svake godine organizira za osnovnoškolce i srednjoškolce natjecanje koje mnogi znaju i pod nazivom *„Matematički klokan“.* Incijativu da se Hrvatska pridruži nizu zemalja u kojima se organizira međunarodno matematičko natjecanje Klokan bez granica pokrenulo je Uredništvo časopisa Matka na 4.susretu nastavnika matematike Hrvatske održanome od 2. do 4. srpnja 1998. godine u Zagrebu. Već sljedeće godine u Hrvatskoj je prvi put održano natjecanje, a sudjelovalo je 2000 učenika, tisuću iz četiri osnovne i tisuću iz četiri srednje. Te je godine natjecanje u Hrvatskoj bilo u tzv.eksperimentalnoj fazi pa su škole sudionice bile odabrane na prijedlog nadzornika za matematiku. Radilo se o zagrebačkim školama: OŠ S.S. Kranjčević, OŠ Malešnica, OŠ Otok, OŠ A.Šeonoa, II.gimnazija, VII. gimnazija , XVI.gimnazija i Klasična gimnazija. U isto vrijeme te godine, u 21 europskoj zemlji odgovaralo je više od 1 600 000 učenika na istih 30 zadataka prevednih na 15 jezika. Učenici su se natjecali u četirima kategorijama: E,B,C i J, a natjecanje je trajalo 75 minuta ([8]). Svake sljedeće godine godine, broj sudionika se povećavao, tako da se osamnaest godina kasnije, 17.ožujka 2016.godine u 12 sati i 30 minuta, u Hrvatskoj natjecalo ukupno 38 634 učenika u 508 osnovnih i 121 srednjoj školi podijeljenih u sedam kategorija:

1. Pčelice – II. razred osnovne škole – 7 455 učenika – P
2. Leptirići – III. razred osnovne škole – 6 538 učenika - L
3. Ecoliers – IV. i V. razred osnovne škole – 11 023 učenika - E
4. Benjamins – VI. i VII. razred osnovne škole – 6 850 učenika - B
5. Cadets – VIII. razred osnovne i I razred srednje škole – 3 953 učenika - C
6. Juniors – II. i III. razred srednje škole – 2 122 učenika - J
7. Students – IV. razred srednje škole – 693 učenika – S



Slika.1.1: Dijagram broja sudionika na natjecanju „Klokan bez granica“ od 1999. - 2014. godine u Hrvatskoj

Poglavlje 2

Van Hieleova teorija o razvoju geometrijskog mišljenja

Učenici često mogu prepoznati neki geometrijski oblik, no imaju poteškoća s njegovom definicijom. Pitanja kao što su je li pravokutnik istovremeno i kvadrat ili je obrnuto, je li svaki romb kvadrat ili je obrnuto, jesu li trokuti sukladni ili slični zbunjuje dosta učenika. Takvim pitanjima nastavnik lako može utvrditi na kojoj razini geometrijskog mišljenja se nalazi pojedini učenik. Nastavnici u poučavanju geometrije uvijek moraju pronalaziti načine kako podići razinu geometrijskog mišljenja kod učenika, a zadatci u natjecanju „Klokan bez granica“ svakako tome mogu pridonijeti.

Nizozemski nastavnici Pierre van Hiele i njegova supruga Dina van Hiele - Geldof bavili su se razinama geometrijskog mišljenja i onime što je za karakteristično za pojedinu razinu. U svojim doktorskim disertacijama 1957.godine objavili su tzv. van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja - teorija o nivoima mišljenja kroz koje se prolaze pri učenju geometrije. Glavna razlika u njihovim izlaganjima ogledala se u tome što je Pierre, uglavnom, pokušavao otkriti razlog lošeg uspjeha učenika u učenju geometrije, dok je Dina pokušavala doći do konkretnih metoda u nastavi koje bi omogućile učenicima bolje shvaćanje geometrije ([6], str.11). Najvažniji rezultat te teorije bio je identificiranje pet razvojnih nivoa, odnosno razina, geometrijskog mišljenja. Razine opisuju kako i o kojem tipu geometrijskih ideja mislimo, bez obzira na količinu znanja koje imamo, a bitna razlika među razinama predstavljaju objekti o kojima smo u stanju geometrijski misliti. Na svaku sljedeću razinu se može doći samo ukoliko se usvojila prethodna razina, a to zavisi isključivo od učenja i usvajanja određenog gradiva.

2.1 Van Hieleove razine geometrijskog mišljenja

Prema M. De Villiersu ([6]), u van Hieleovoj teoriji razine geometrijskog mišljenja su označene su brojevima od 1 do 5, a to su :

- **Razina 1.Vizualizacija ili prepoznavanje**

  Na ovoj razini učenici mogu prepoznati određene geometrijske oblike kao što su npr. trokuti, kvadrati, krugovi itd. No, nisu svjesni njihovih svojstava i osobina te zaključke donose na temelju percepcije, a ne rasuđivanja.

- **Razina 2. Analiza**

  Učenici na ovoj razini promatraju geometrijske oblike kroz skup svojstava, ali još uvijek ne mogu uočiti vezu među njima. U stanju su naučiti i izreći svojstva koja ima neki geometrijski oblik, ali ne znaju koja od tih svojstava su dovoljna da bi se definirao taj geometrijski oblik. Oni izvode zaključke induktivno, na osnovu nekoliko primjera, ali još uvijek ne mogu koristiti dedukciju. Međutim, počinju vjerovati da ako neki lik pripada klasi kvadrata, da onda on ima sve osobine te klase, kao što su, na primjer: međusobno okomite dijagonale, stranice jednake duljine, četiri prava kuta itd.

- **Razina 3. Neformalna dedukcija ili apstrakcija**
  Na ovoj razini učenici počinju shvaćati veze među svojstvima geometrijskih oblika, pa samim time, i veze među geometrijskim oblicima. Počinju razmišljati deduktivno, ali ne razumiju još uvijek pravilo i značenje formalne dedukcije. Na primjer, učenici mogu pratiti i shvatiti dokaz neke tvrdnje vezano za svojstva ili odnose geometrijskih oblika, ali ne bi znali sami dokazati takve tvrdnje. Na ovoj razini, učenici počinju razmišljati o tome šta je potrebno, a šta dovoljno da se neki geometrijski lik opiše. Na primjer, znaju da je dovoljno da četverokut, koji ima sve stranice jednake, ima jedan pravi kut, da bi bio kvadrat.

- **Razina 4. Dedukcija**
  Učenici su u stanju izvesti dokaze za određena svojstva ili veze među geometrijskim oblicima, izvode zaključke iz prethodno poznatih tvrdnji, razumiju značenje definicija i aksioma, i shvaćaju značenje nužnog i dovoljnog uvjeta za opisivanje određenog lika. Mogu donositi zaključke, koji se na ovoj razini više temelje na logici nego na intuiciji ([12]).

- **Razina 5. Strogost**
  Geometrijsko mišljenje je na ovoj razini apstraktno te na ovoj razini stariji učenici ili mlađi studenti u stanju su shvatiti geometrijski sustav koji nije euklidski te uspoređivati različite sustave ([4]).

Od objavljivanja, ova je teorija znanstveno potvrđena raznim metodama i danas više nema sumnji u njezinu valjanost. Svatko od učenika nalazi se na određenoj van Hieleovoj razini geometrijskog mišljenja, a učenici iste dobi često su na različitim razinama. Većina učenika nižih razreda osnovne škole nalazi na nultoj razini, a rijetko koji učenik osmog razreda na razini višoj od druge ([4]).

Poglavlje 3

Geometrijski zadatci u natjecanju „Klokan bez granica“

U ovom diplomskom radu pobliže ću analizirati geometrijske tipove zadataka koji se pojavljuju u natjecanju „Klokan bez granica“. Iako veliki dio zadataka u natjecanju zauzimaju i zadatci vezanih uz vjerojatnost i kombinatoriku, odlučila sam se za područje geometrije iz razloga što učenicima često takvi zadatci predstavljaju najveći problem. Jednu od dimenzija učeničkih postignuća određuju i matematički koncepti koji su organizirani su u pet domena te čak dvije od njih su vezane uz područje geometrije, a to su Oblik i prostor te Mjerenje. Geometrijski zadaci u ovom tipu natjecanja uvelike pridonose razvoju geometrijskog mišljenja kod učenika te prostornog zora, a to su dva najvažnija zadataka nastave matematike u sadržajnoj domeni Oblik i prostor. Pod pojmom prostorni zor podrazumijeva se intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta kojim smo svakodnevno okruženi. On uključuje koncepte tradicionalne geometrije, a osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika ([2]). U njega su uključeni i nestandardni pogledi na dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike, poput popločavanja ravnine i prostora, presavijanja papira, što su netipični zadatci za našu nastavu matematike ([4]), no u „Klokanu bez granica“ su to tipični zadatci koji se redovito pojavljuju skoro na svim razinama. Također, u zadatcima se ispituje poznavanje kvalitativnih svojstva geometrijskih oblika koji predstavljaju objekte iz realnog svijeta. Geometrijski zadatci klasificirani su u određene kategorije, uz naglasak na geometrijski sadržaj koji ti zadatci ispituju, od kojih su neki još podijeljeni u podkategorije. Zadatci su poredani prema njihovoj kompleksnosti, odnosno po kategorijama, od lakših prema težim.

Glavne kategorije su:

1. Otkrivanje uzoraka (OU)
2. Klasifikacija geometrijskih likova (GL)
3. Mjerenje (MJ)
4. Mnogokuti (MN)
5. Ostala geometrijska svojstva (GS)
6. Geometrijske transformacije (GT)
7. Prikazivanje trodimenzionalnih tijela u ravnini (TT)
8. Koordinatna geometrija (KG)
9. Malo složeniji zadatci (SZ)

3.1 Otkrivanje uzoraka

U kategoriji **Otkrivanje uzoraka** provjerava se prva van Hieleova razina, odnosno vizualno prepoznavanje, to jest vizualno uočavanje pravilnosti i oblika. Zadatci vezani uz otkrivanje pravilnosti najviše se pojavljuju u prve tri kategorije natjecanja (Pčelica, Leptirić, Ecolier), odnosno namjenjeni su učenicima od II. do V. razreda osnovne škole te ovisno o kompleksnosti zadatka boduju se od 3 do 5 bodova. Naš Nacionalni okvirni kurikulum podupire zadatke iz ove kategorije sa sljedećim ishodima:

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

Učenik/ca će:

- primijeniti matematičke pojmove i postupke u različitim kontekstima.

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik/ca će:

- prepoznati jednostavne ravninske oblike u različitim položajima
- prepoznati, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne oblike i njihove dijelove
- prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevnomu životu
- prepoznati pravilnosti i svojstva geometrijskih uzoraka.

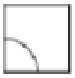
4.Mjerenje

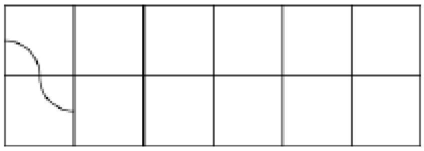
Učenik/ca će:

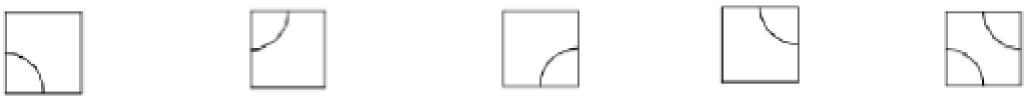
- odrediti mjeriva obilježja objekta ili pojave i primijeniti mjerenje pri rješavanju problema.

ZADATCI:

Zadatak 1. PČELICE 2014. - 5 bodova

Ana ima 12 ovakvih dijelova . Oblikuje zakrivljenu liniju pomoću takvih dijelova i započela je oblikovanje s lijeve strane. Kako će linija završiti?





A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

Zadatak 2. LEPTIRIĆ 2013. - 3 boda

Jedna pločica pala je sa zida, što se vidi na slici. Karolina ima tri pločice viška.

Pločica A

Pločica B

Pločica C

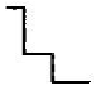
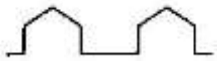
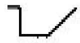
Koje od njih mogu nadomjestiti pločicu koja nedostaje?

A. A i C B. A i B C. B i C D. samo B E. bilo koja od njih

Rješenje: D

Zadatak 3. LEPTIRIĆ 2006. – 3 boda

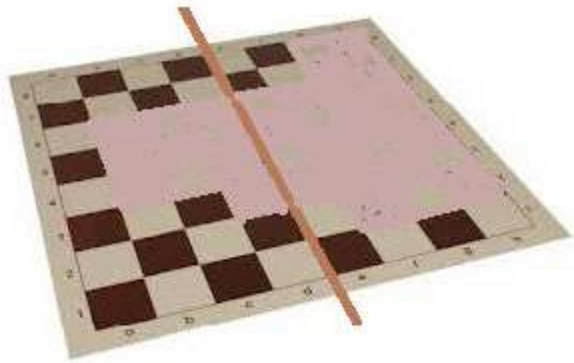
U daljini vidimo obrise starog dvorca. Koji od dijelova ne pripada tom obrisu?

A.  B.  C.  D.  E. 

Rješenje: C.

Zadatak 4. LEPTIRIĆ 2014. – 4 boda

Lena je htjela s tatom igrati šah. Kada je rasklopila šahovsku ploču,vidjela je da su neka crna polja izblijedila. Koliko je crnih polja izblijedilo na desnoj strani šahovske ploče?



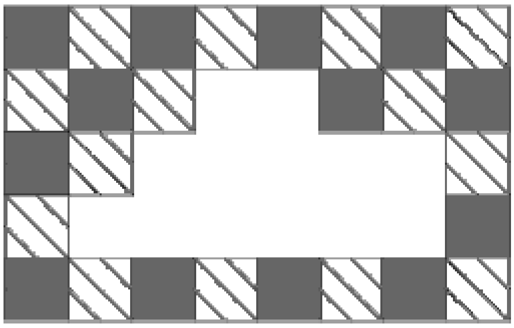
A. 11 B. 12 C. 13 D. 14 E. 15

Rješenje: B

Od ukupno 64 polja šahovske ploče, polovina njih su crne boje tj. njih 32. Na desnoj strani (polovini) šahovske ploče bilo je 16 crnih polja no sada su vidljiva samo 4. Znači, izblijedilo ih je 12.

Zadatak 5. ECOLIER 2012. – 3 boda

Zid je popločan dvjema vrstama pločica: sivima i pločicama s uzorkom (vidi sliku). Neke su se pločice odlijepile i pale sa zida. Koliko sivih pločica se odlijepilo?

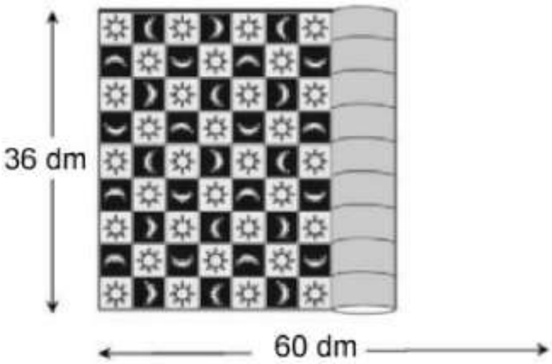


A. 9 B. 8 C. 7 D. 6 E. 5

Rješenje: C.

Zadatak 6. ECOLIER 2013. – 5 bodova

Zoran je kupio sag dug 60 dm i širok 36 dm. Na površini saga vidljivi su kvadratići u kojima se nalazi mjesec ili sunce. Sa slike je vidljivo da se duţ širine saga nalazi 9 kvadratića. Koliko se kvadratića ispunjenih mjesecom nalazi na površini saga kada se sag u potpunosti raširi?



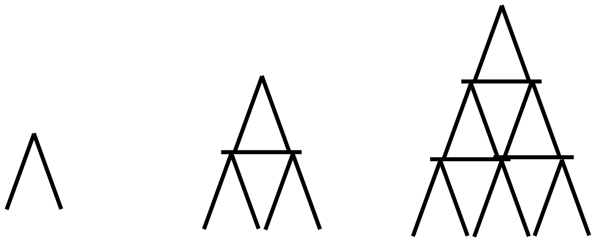
A. 68 B. 67 C. 65 D. 63 E. 60

Rješenje: B.

Duljina stranice kvadratića je 36 : 9 = 4 dm. Po dužoj stranici saga ima 60 : 4 = 15 kvadratića. Sag ima ukupno 9·15 = 135 kvadratića. U 1., 3., 5., 7. i 9. retku nalazi se 7 kvadratića ispunjenih mjesecom, a u 2., 4., 6. i 8. nalazi se 8 takvih kvadratića. Broj kvadratića ispunjenih mjesecom je 5·7 + 4·8 = 35 + 32 = 67.

Zadatak 7. ECOLIER 2006. – 5 bodova

Ivan je gradio kuće od karata. Na slici su kuće koje je Ivan izgradio, jednokatnica, dvokatnica i trokatnica. Koliko mu karata treba da bi izgradio četverokatnicu?



jednokatnica 2 karte | dvokatnica 7 karata | trokatnica 15 karata

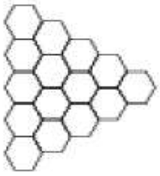
A. 23 B. 24 C. 25 D. 26 E. 27

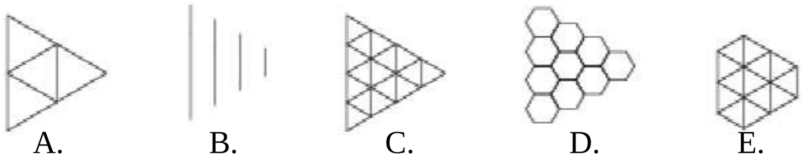
Rješenje: D.

Za 4. kat mu trebaju 2 karte, za 3. kat 5 karata, za 2. kat 8 karata, a za 1. kat 11 karata. Ukupno mu treba 26 karata.

Zadatak 8. ECOLIER 2014. - 5 bodova

Na slici je uzorak pločica. Spojimo li središta svih šesterokuta dobit ćemo novi uzorak. Koji od predloženih?





A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

3.2 Klasifikacija geometrijskih likova

U ovoj kategoriji učenici na temelju sastavljivosti, prebrojavanju, sukladnosti i prepoznavanju oblika klasificiraju geometrijske likove. Prema tome, ova kategorija podijeljena je na još četiri podkategorije: **Prepoznavanje geometrijskih oblika**, **Sastavljivost, Sukladnost** i **Prebrojavanje**. Ovi zadatci obuhvaćaju prvu razinu geometrijskog mišljenja prema van Hieleu. Učenici oblike promatraju samo kao cjelinu, ne obraćaju previše pažnju na svojstva te donose odluke se donose na temelju percepcije, ne rasuđivanja. Sukladnost je ovdje razvijena na intuitivnoj razini i učenici često koriste nevažna vizualna svojstva (npr. boju) pri prepoznavanju likova te njihovu uspoređivanju i klasificiranju. Uz to, neki zadatci na višim razinama natjecanja, zahtijevaju malo složenije prepoznavanje geometrijskih likova. Pomoću ovih zadataka, prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu, utvrđujemo sljedeće navedene ishode:

I. Matematički procesi

2. Povezivanje

Učenik/ca će:

- usporediti, grupirati, prebrojati i klasificirati objekte prema zadanomu kriteriju

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik/ca će:

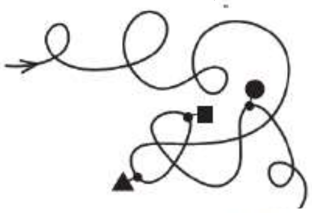
- istražiti i predvidjeti ishode sastavljanja i rastavljanja jednostavnijih i složenijih ravninskih oblika
- preprepoznati geometrijske oblike, sukladnost i simetriju u svijetu oko sebe
- poznati ravninske oblike u različitim položajima
- prepoznati, usporediti i klasificirati ravninske oblike te uočiti i primijeniti njihova geometrijska svojstva

3.2.1 Prepoznavanje geometrijskih oblika

ZADATCI:

Zadatak 1. PČELICE 2014. - 3 boda

Kojim redoslijedom ćeš naići na kvadrat, trokut i krug kreneš li od strelice?

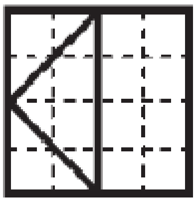


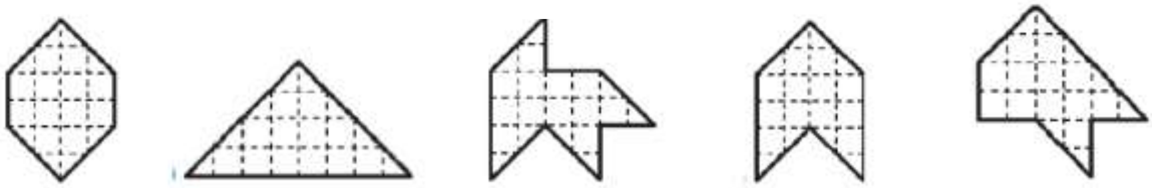
A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

Zadatak 2. LEPTIRIĆ 2014. - 3 boda

Kvadrat je razrezan na 4 dijela kao što je prikazano na slici. Koji se od sljedećih oblika ne može složiti od svih dijelova kvadrata?

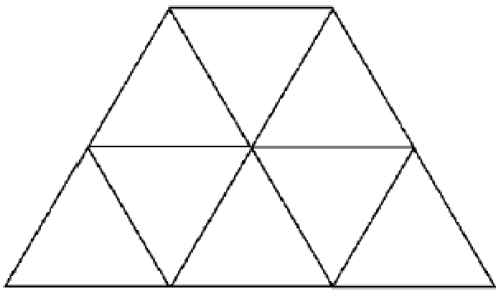




A. B. C. D. E.

Rješenje: C

Zadatak 3. ECOLIER 2013. – 3 boda



Koliko je trokuta na slici?

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 13

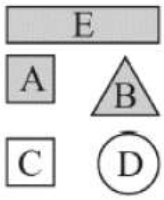
B.

Rješenje: B.

Na slici je 8 malih trokuta i 2 veća, koja se sastoje od 4 mala trokuta. Ukupno je to 8 + 2 = 10 trokuta.

Zadatak 4. ECOLIER 2011. – 3 boda

Marija je opisala jedan od pet likova na slici na sljedeći način: nije kvadrat, sive je boje, ili je trokut ili je krug. Koji je lik opisala?

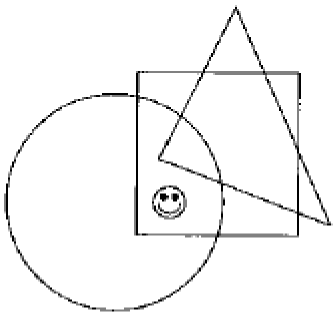


A. A B. B C. C D. D E. E

Rješenje: B.

Zadatak 5. BENJAMIN 2009. – 3 boda

Gdje je smajlić?



A. U krugu i trokutu, ali nije u kvadratu.

B. U krugu i kvadratu, ali nije u trokutu.

C. U trokutu i kvadratu, ali nije u krugu.

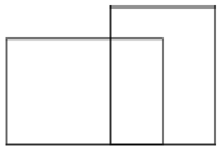
D. U krugu, ali nije u kvadratu i trokutu.

E. U kvadratu, ali nije u krugu i trokutu.

Rješenje: B.

Zadatak 6. CADET 2014. - 3 boda

Koliko različitih četverokuta vidite na slici?



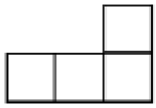
A. 0 B.1 C. 2 D. 4 E. 5

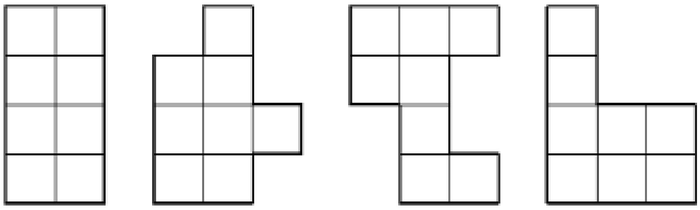
Rješenje: D.

3.2.2 Sastavljivost

ZADATCI:

Zadatak 7. PČELICE 2013. - 5 bodova
Ana ima na raspolaganju nekoliko likova u obliku slova L (vidi sliku desno). Koliko od sljedećih likova može složiti spajajući lijepljenjem zajedno dva ista lika u obliku slova L?





A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

Rješenje: E.

Sva četiri lika Ana može složiti lijepljenjem zajedno dva ista lika u obliku slova L.

Zadatak 8. PČELICE 2014. – 5 bodova
Kojim se od 5 oblika može nadopuniti ovaj oblik  ?

A. B. C. D. E.

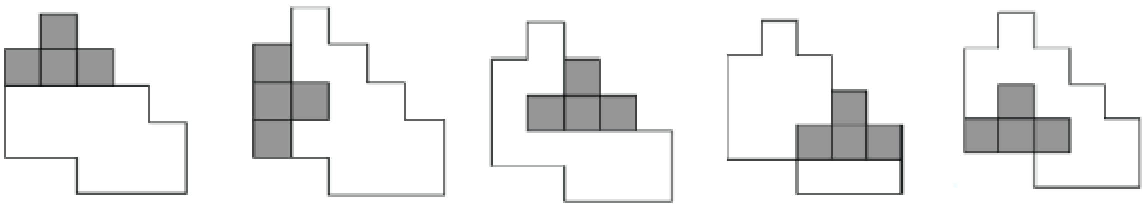
Rješenje: E.

Zadatak 9. ECOLIER 2014. - 3 boda

Andrea ima 4 različita dijela složena od 4 jednaka kvadratića koji su prikazani na slikama.

1. 2. 3. 4.

U koji će od oblika staviti 3.dio tako da s preostalim dijelovima u potpunosti može prekriti zadani oblik?

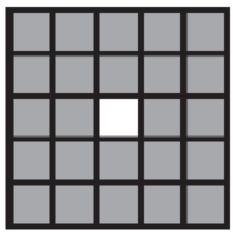


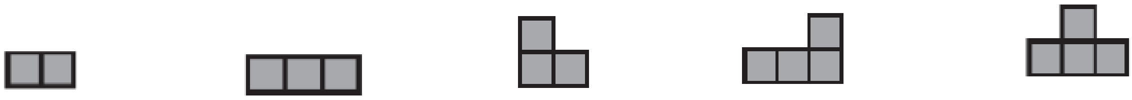
A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

Zadatak 10. ECOLIER 2012. – 4 boda

Figura na slici razrezana je na jednake dijelove. Koji od dijelova nije moguće dobiti razrezivanjem?



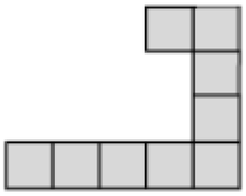


A. B. C. D. E.

Rješenje: E.

Zadatak 11. ECOLIER 2013. - 5 bodova

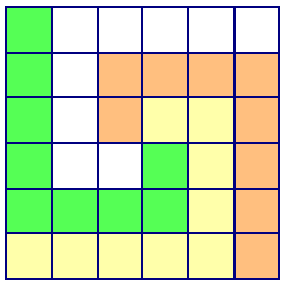
Helena ima nekoliko jednakih dijelova sastavljenih od manjih kvadrata prikazanih na slici. Koliko takvih dijelova joj je potrebno da bi složila kvadrat u potpunosti ispunjen kvadratićima?



A. 3 B. 4 C. 6 D. 8 E. 16

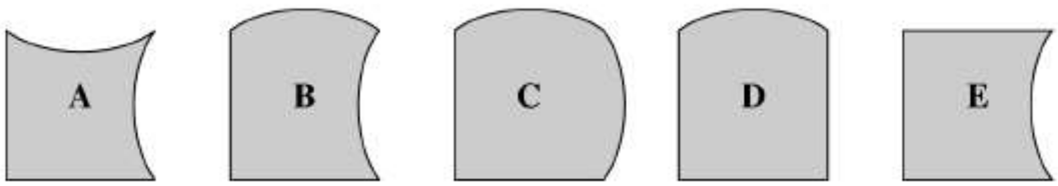
Rješenje: B.

Potrebna su joj 4 takva dijela.



Zadatak 12. BENJAMIN 2014. – 3 boda

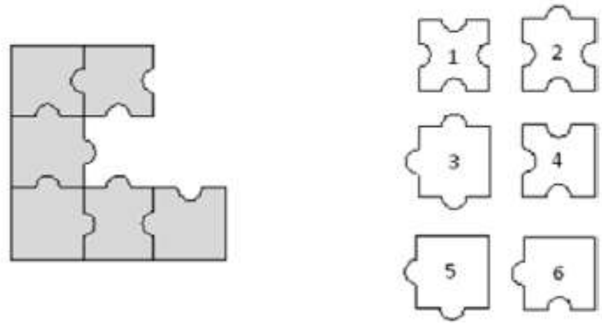
S četiri od ovih pet komada možemo složiti kvadrat. Koji komad ne moramo koristiti?



Rješenje: B.

Zadatak 13. BENJAMIN 2012. – 4 boda

Koja tri komada brojevima označenih puzzle možemo dodati slici da bi je nadopunili na kvadrat?

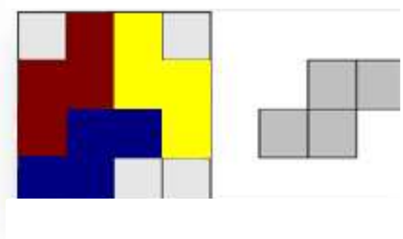


A. 1, 3, 4   B. 1, 3, 6   C. 2, 3, 5   D. 2, 3, 6   E. 2, 5, 6

Rješenje: D.

Zadatak 14. CADET 2013. – 3 boda

Ana ima list papira podijeljen dužinama na kvadrate, kao na slici desno. Rezanjem po tih dužinama izrezuje oblike poput ovog na slici desno. Koliko će najmanje kvadrata ostati nakon što Ana izreže sve željene oblike s papira?



A. 0   B. 2   C. 4   D. 6   E. 8

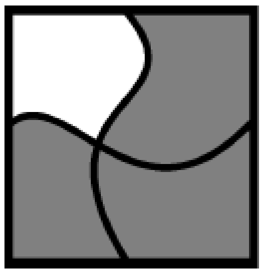
Rješenje: C.

3.2.3 Sukladnost

ZADATCI:

Zadatak 15. PČELICE 2012. - 3 boda

Koji dio nedostaje na slici?



A. B. C. D. E.

Rješenje: B.

Zadatak 16. PČELICE 2013. - 4 boda

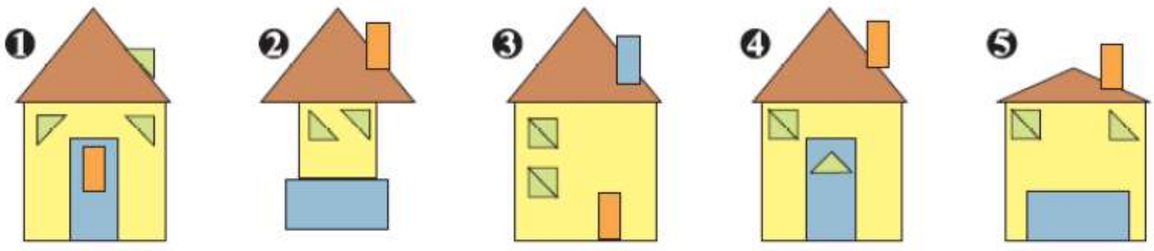
Rina je izrezala veliki dio keksa. Koji?

A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

Zadatak 17. ECOLIER 2014. - 3 boda

Koje su kuće izrađene od potpuno jednakih dijelova oblika trokuta i pravokutnika?

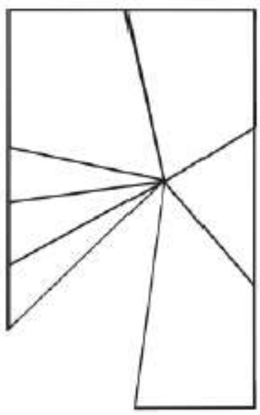


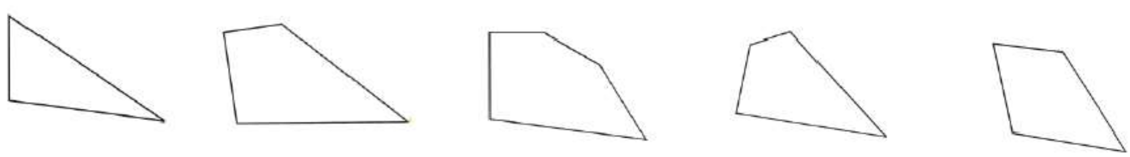
A. 1, 4   B. 3, 4   C. 1, 4, 5   D. 3, 4, 5   E. 1, 2, 4, 5

Rješenje: A.

Zadatak 18. ECOLIER 2013. - 4 boda

Ogledalo pravokutnog oblika na slici desno se razbilo. Koji od dijelova nedostaje?



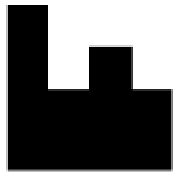


A.   B.   C.   D.   E.

Rješenje: B.

Zadatak 19. ECOLIER 2013. - 4 boda

Koja od sljedećih figura nadopunjuje figuru na desnoj strani tako da one zajedno čine pravokutnik?



A. B. C. D. E.

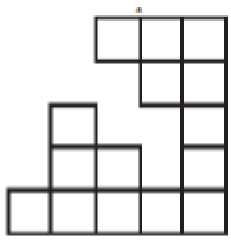
Rješenje: C.

3.2.4 Prebrojavanje

ZADATCI:

Zadatak 20. PČELICE 2014. – 3 boda

Kvadrat je bio složen od 25 manjih jednakih kvadratića, ali neki su nestali. Koliko ih je nestalo?



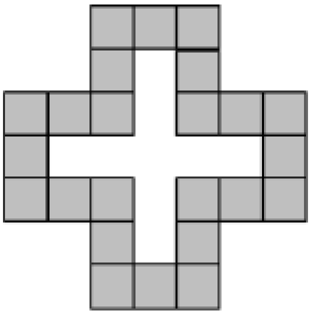
A. 6 B. 7 C. 8 D. 9 E. 10

Rješenje: E.

Ostalo ih je 15, dakle, nestalo ih je 25 – 15 = 10.

Zadatak 21. PČELICE 2013. - 4 boda

Na slici je uzorak sastavljen od kvadratića. Koliko kvadratića popunjava prazni dio uzorka?

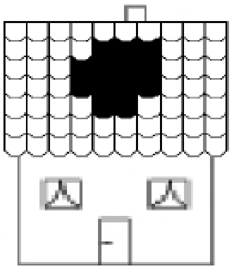


A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

Rješenje: E.

Zadatak 22. LEPTIRIĆ 2008. – 5 bodova

Oluja je napravila rupu na prednjoj strani krova. U svakom od 7 redova bilo je 10 crijepova. Koliko je crijepova preostalo na prednjoj strani krova?



A. 57 B. 59 C. 61 D. 67 E. 70

Rješenje: A.

Na prednjoj strani krova bilo je 70 crijepova prije oluje (7 redova po 10 crijepova). Oluja je uništila ukupno 3 + 4 + 4 + 2 = 13 crijepova. Preostalo ih je 70 – 13 = 57.

3.3 Mjerenje

U Nacionalnom okvirnom matematičkom kurikulumu domena Geometrija podijeljena je na Oblik i prostor te Mjerenje. Mjerenje je jedno od pet glavnih matematičkih koncepata i ono je zastupljeno je tijekom cijelog matematičkog obrazovanja. Učenici već od prvog razreda uspoređuju i procijenjuju duljinu, obujam, masu, vrijeme, zatim rabe standardne mjerne jedinice za duljinu, površinu, obujam, masu, vrijeme i temperaturu u svakodnevnom životu te približno ili točno mjere površinu jednostavnih likova prebrojavanjem jediničnih kvadrata i računaju opseg jednostavnih likova. Dolaskom u više razrede učenici primijenjuju formule za opseg i površinu kvadrata, pravokutnika i ostalih geometrijskih likova kao što su trokut (jednakostraničan, jednakokračan, raznostraničan) i krug. Isto tako, primjenjuju i formule za obujam kocke i kvadra, a od osmog razreda primjenjuju i formule za obujam ostalih geometrijskih tijela.

Kategoriju **Mjerenje** podijelila sam na šest podkategorija, a to su **Duljina dužine, Kut, Opseg, Površina i Volumen i Mješoviti zadatci**. U kategoriji **Mješoviti zadatci** svrstala sam zadatke u kojima se očekuje povezivanje koncepata površine lika, opsega lika ili nekog drugog geometrijskog svojstava lika, odnosno radi se o zadatcima u kojima se kombinira mjerenje s drugim geometrijskim svojstvima. Takvi zadatci pojavljuju se pretežito u višim kategorijama natjecanja jer podrazumijevaju drugu razinu geometrijskog mišljenja prema van Hieleu. Naš Nacionalni okvirni kurikulum podupire zadatke u ovoj kategoriji sa sljedeće navedenim ishodima:

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

Učenik\ca će:

- postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik\ca će:

- opisati i rabiti pravilnosti i svojstva geometrijskih uzoraka
- prepoznati, opisati, usporediti i primijeniti svojstva i odnose ravninskih i prostornih geometrijskih oblika radi mjerenja, računanja i zaključivanja
- prepoznati, opisati i primijeniti sukladnost i sličnost geometrijskih oblika

4. Mjerenje

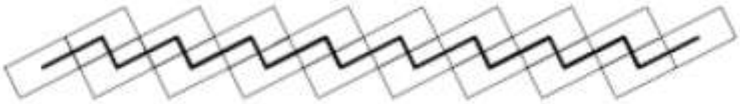
Učenik\ca će:

- primijeniti osnovne formule u svezi s mjerivim obilježjima likova
- izračunati duljinu, obujam, kut te površinu i opseg različitih geometrijskih likova
- odrediti mjeriva obilježja objekta, likova i tijela, odabrati primjerene mjerne jedinice te primijeniti mjerenje pri rješavanju problema
- odrediti mjeriva obilježja objekata, likova i tijela primjenjujući osnovne formule, proporcionalnost, sličnost, Pitagorin poučak te ih rabiti u računanju duljine, mjere kuta, površine i obujma
- približno i točno odrediti udaljenost dviju točaka, površinu likova i obujam tijela brojanjem jediničnih dužina, kvadrata i kocaka

3.3.1 Duljina dužine

Zadatak 1. ECOLIER 2009. - 3 boda

U svom vrtu Antonio je napravio uzorak kao na slici, koristeći 18 pravokutnika sa stranicama duljina 4 dm i 6 dm. Antonio je nacrtao crnu liniju spajajući središta tih pravokutnika. Koliko je duga crna linija?



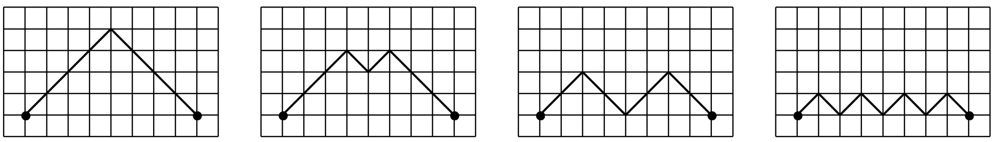
A. 80 dm B. 86 dm C. 90 dm D. 96 dm E. 100 dm

Rješenje: B.

Crna linija sastoji se od kraćih međusobno sukladnih dužina i duljih međusobno sukladnih dužina. Kraće dužine imaju duljinu kao i kraća stranica pravokutnika, a dulje dužine kao dulja stranica pravokutnika. Duljih dužina ima 9, a kraćih 8 pa je ukupna duljina crne linije $9 \cdot 6$ dm + $8 \cdot 4$ dm = 86 dm.

Zadatak 2. ECOLIER 2006.- 4 boda

Između dviju točaka nacrtane su 4 "staze". Koja je "staza" najkraća?



A. B. C. D.

E. sve su jednake duljine

Rješenje: E.

Zadatak 3. ECOLIER 2012. - 5 bodova

Duljine stranica papira oblika pravokutnika su 192 mm i 84 mm. Rezanjem papira usporedno s jednom njegovom stranicom možemo odrezati kvadrat. Isti postupak nastavljamo s ostatkom papira. Kolika je duljina stranice najmanjeg kvadrata koji možemo dobiti takvim postupkom?

A. 1 mm B. 4 mm C. 6 mm D. 10 mm E. 12 mm

Rješenje: E.

Rezanjem početnog pravokutnika kojemu su duljine stranica 192 mm i 84 mm, usporedno s jednom njegovom stranicom (84 mm), dobit ćemo 2 kvadrata sa stranicama duljine 84 mm i manji pravokutnik sa stranicama duljine 84 mm i 24 mm. Rezanjem pravokutnika kojemu su duljine stranica 84 mm i 24 mm, usporedno s jednom njegovom stranicom (24 mm), dobit ćemo 3 kvadrata sa stranicama duljine 24 mm i još manji pravokutnik sa stranicama duljine 24 mm i 12 mm. Taj pravokutnik sa stranicama duljine 24 mm i 12 mm možemo razrezati na dva kvadrata sa stranicama duljine 12 mm.

Zadatak 4. BENJAMIN 2014. – 3 boda

Katarina ima 38 šibica i od njih sastavlja trokut i kvadrat, te pritom iskoristi sve šibice. Svaka se stranica trokuta sastoji od 6 šibica. Koliko ima šibica u svakoj stranici kvadrata?

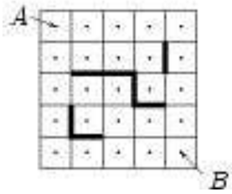
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7 E. 8

Rješenje: B.

Katarina će za trokut potrošiti 18 šibica, pa joj za kvadrat ostaje 20 šibica, što znači da se stranica kvadrata sastoji od 5 šibica.

Zadatak 5. CADET 2006. – 5 bodova

Marin i Ante su nacrtali kvadrat 5 x 5 i označili središta malih kvadrata. Nakon što su nacrtali prepreke unutar velikog kvadrata, pokušali su otkriti na koliko načina je moguće doći iz točke A u točku B koristeći se što kraćim putem. Kretanje je dozvoljeno iz centra u centar samo vertikalno i horizontalno. Koliko takvih najkraćih puteva postoji iz A u B?



A. 6 B. 8 C. 9 D.11 E. 12

Rješenje : E

Zadatak 6. JUNIOR 2011. – 3 boda

Zebra na pješačkom prijelazu ima crne i bijele pruge širine 50 cm. Prijelaz započinje i završava bijelim prugama i ima ukupno 8 bijelih pruga. Kolika je širina ceste?

A. 7 m B. 7.5 m C. 8 m D. 8.5 m E. 9 m

Rješenje: B.

Ukupno ima 8 bijelih i 7 crnih pruga između, te je to ukupno 15 pruga, ukupne širine 750 cm ili 7.5 m

Zadatak 7. JUNIOR 2014. - 4 boda

U Africi je otkrivena nova vrsta krokodila. Duljina njegova repa trećina je njegove cjelokupne duljine. Njegova glava duga je 93 cm što je četvrtina duljine krokodila bez repa. Kolika je duljina ovog krokodila u cm?

A. 558 B. 496 C. 490 D. 372 E. 186

Rješenje: A.

Označimo s k duljinu cijelog krokodila, a sa r duljinu njegova repa.

Znamo da je $r = \frac{1}{3}k$. Sada imamo $93 = \frac{1}{4}(k - r) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}k = \frac{1}{6}k$, tj. $k = 93 \cdot 6 = 558$ cm.

3.3.2 Kutovi

ZADATCI:

Zadatak 8. BENJAMIN 2006. – 3 boda

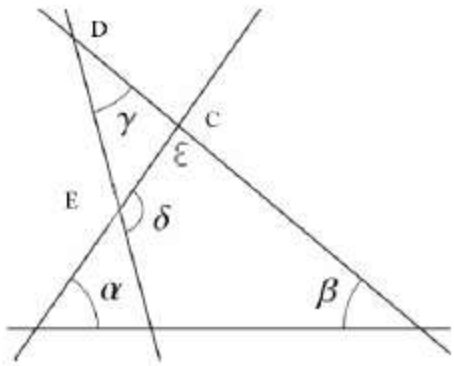
Izaberi sliku na kojoj je kut među kazaljkama 150°.

A. B. C. D. E.

Rješenje: E.

Kut između svake dvije znamenke na satu je 30°. Prema tome vrijedi 5 · 30° = 150°.

Zadatak 9. CADET 2013. - 4 boda



Na slici pravci zatvaraju kutove $\alpha = 55^\circ, \beta = 40^\circ$ i $\gamma = 35^\circ$. Koliki je kut δ?

A. 100° B. 105° C. 120° D. 125° E. 130°

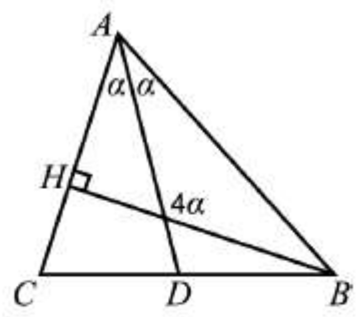
Rješenje: E.

Treći kut u trokutu je $\varepsilon = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 85^\circ$. Njegov sukut je $\varepsilon_1 = 95^\circ$.

Kut δ je vanjski kut trokuta CDE. $\delta = \gamma + 95^\circ = 130^\circ$.

Zadatak 10. CADET 2014. - 4 boda

Zadan je trokut ABC kojemu je $\overline{BH}$ visina, a $\overline{AD}$ simetrala kuta CAB. Tupi kut između $\overline{BH}$ i $\overline{AD}$ četiri je puta veći od kuta DAB. Koliki je kut CAB?



A. 30° B. 45° C. 60° D. 75° E. 90°

Rješenje: C.

Sjecište visine i simetrale označimo sa M. U trokutu BMA kut pri vrhu B označimo s β_1. Tada je $5\alpha + \beta_1 = 180^\circ \rightarrow \beta_1 = 180^\circ - 5\alpha$.

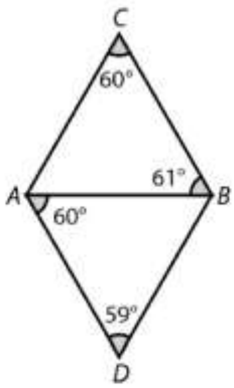
U trokut BHA vrijedi $2\alpha + \beta_1 = 90^\circ \rightarrow \beta_1 = 90^\circ - 2\alpha.$

Iz toga slijedi da je $180^\circ - 5\alpha = 90^\circ - 2\alpha \quad \rightarrow \quad 3\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Dakle, $2\alpha = 60^\circ$.

Zadatak 11. JUNIOR 2013. - 4 boda

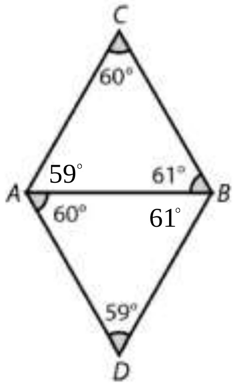
Bojan je htio nacrtati dva jednakostranična trokuta koja spojena daju romb. No, nije točno pogodio sve udaljenosti. Kada je završio, Mia je izmjerila četiri kuta i uočila da nisu jednaki. Koja je od pet danih dužina Bojanovog lika najdulja?



A. $\overline{AD}$ B. $\overline{AC}$ C. $\overline{AB}$ D. $\overline{BC}$ E. $\overline{BD}$

Rješenje: A

Trokuti ABC i ADB su slični jer imaju jednake kutove (K-K-K teorem o sličnosti trokuta).

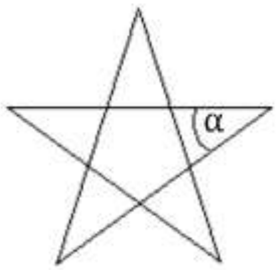


U trokutu ABC najdulja je stranica $\overline{AC}$, a u trokutu ADB najdulja je stranica $\overline{AD}$ (nasuprot su najvećeg kuta). Kako je nasuprot stranice $\overline{AB}$ u jednom trokutu kut od 60°, a u drugom trokutu kut od 59° zaključujemo da je stranica $\overline{AD}$ dulja od stranice $\overline{AC}$.

Zadatak 12. STUDENT 2012. - 4 boda

Kolika je veličina kuta α u zvijezdi čiji su vrhovi vrhovi pravilnog peterokuta?

A. 24° B. 30° C. 36° D. 45° E. 72°

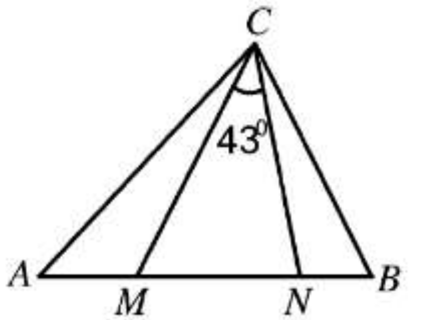


Rješenje: C.

Unutar zvijezde nalazi se također manji pravilni peterokut čiji su svi unutarnji kutovi veličine $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5}=108^\circ$. To je vanjski kut jednakokračnog trokuta u kojem se nalazi kut α, a njegov sukut iznosi 72° te je onda $\alpha=180^\circ-144^\circ=36^\circ$.

Zadatak 13. STUDENT 2013. - 4 boda

U trokutu ABC na slici za točke M i N na stranici vrijedi $|AN|=|BC|$ i $|BM|=|BC|$. Koja je mjera kuta $\sphericalangle ACB$ ako je $\sphericalangle MCN=43^\circ$?



A. 86° B. 89° C. 90° D. 92° E. 94°

Rješenje: E.

Kako je $|AN|=|AC|$ iz trokuta ANC slijedi da je $\sphericalangle CNA=\sphericalangle ACN=x$. Analogno, iz trokuta MBC zbog $|BM|=|BC|$ imamo $\sphericalangle MCB=\sphericalangle BMC=y$. Iz trokuta MNC vidimo da je $x+y=180^\circ-43^\circ=137^\circ$. Sada je $\sphericalangle ACB=x+y-43^\circ=137^\circ-43^\circ=94^\circ$.

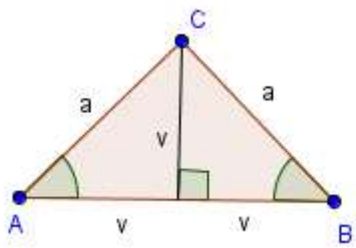
Zadatak 14. STUDENT 2012. - 5 bodova

Simetrala kuta nasuprot osnovici u jednakokračnom trokutu *ABC* dijeli trokut na dva jednakokračna trokuta. Koja je najmanja moguća veličina kuta uz osnovicu trokuta *ABC*?

A. 15° B. 22.5° C. 30° D. 36° E. 45°

Rješenje: E.

Simetrala kuta nasuprot osnovici u jednakokračnom trokutu *ABC* dijeli trokut na dva pravokutna jednakokračna trokuta.



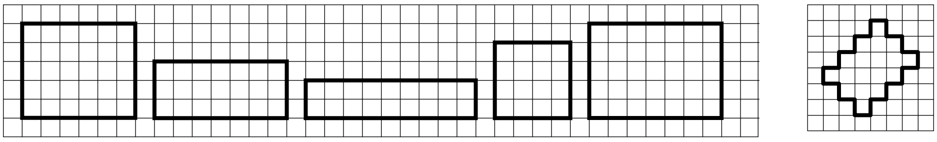
Oba šiljasta kuta u tim pravokutnim trokutima iznose 45°. Prema tome, veličina kuta uz osnovicu je 45°.

3.3.3 Opseg

ZADATCI:

Zadatak 15. ECOLIER 2006. – 4 boda

Žica na desnoj slici preoblikovana je u pravokutnik. Koji od sljedećih pravokutnika je moguće rješenje?

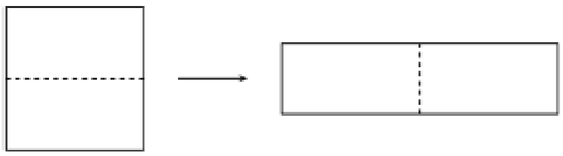


Rješenje: E.

Žica na desnoj slici ima duljinu 24 stranice kvadrata. Jedini pravokutnik koji ima opseg duljine 24 stranica kvadrata je pravokutnik na slici E sa stranicama duljina 5 i 7 stranica kvadrata.

Zadatak 16. BENJAMIN 2014. - 3 boda

Kvadrat opsega 48 cm presječen je na dva dijela i od njih je sastavljen pravokutnik. Koliki je opseg pravokutnika?



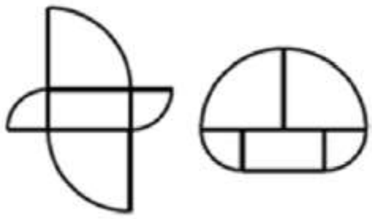
A. 24 cm B. 30 cm C. 48 cm D. 60 cm E. 72 cm

Rješenje: D.

Stranice kvadrata su 12 cm. Stranice pravokutnika su 24 cm i 6 cm, pa je $O = 2a + 2b = 60$ cm.

Zadatak 17. BENJAMIN 2012. - 4 boda

Oba lika na slici sastavljena su od istih pet komada. Pravokutnik je dimenzija 5 cm x 10 cm, a ostali dijelovi su četvrtine dva različita kruga. Kolika je razlika između njihovih opsega?



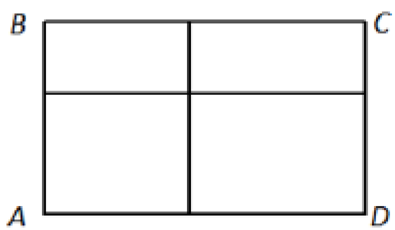
A. 2.5 cm B. 5 cm C.10 cm D. 20 cm E. 30 cm

Rješenje: D.

Opsezi ta dva lika razlikuju se za jednu dulju stranicu pravokutnika i dvije kraće, dakle za 10 + 5 + 5 = 20 cm.

Zadatak 18. BENJAMIN 2012. - 5 boda

Pravokutnik ABCD razrezan je u četiri manja pravokutnika kako to prikazuje slika. Opsezi manjih pravokutnika su 11,16 i 19. Opseg četvrtog pravokutnika nije ni najmanji ni najveći. Odredi opseg pravokutnika ABCD.



A. 28 B. 30 C. 32 D. 38 E. 40

Rješenje: B.

$|AD| = x + y, |AB| = z + t$
$2x + 2t = 11$
$2y + 2t = 16$
$2y + 2z = 19 \to 2z = 19 - 2y$

$O = 2(x + y) + 2(z + t) = 2x + 2y + 2z + 2t = 2x + 2t + 2y + (19 - 2y)$
$O = 11 + 2y - 19 - 2y = 30$

Zadatak 19. JUNIOR 2008.- 3 boda

Tom i Jerry dobili su jednake papire u obliku pravokutnika. Svaki od njih je svoj papir razrezao na dva jednaka pravokutnika. Tom je izrezao pravokutnike s opsegom 40 cm, a Jerry dva pravokutnika s opsegom 50 cm. Koliki je bio opseg početnog komada papira?

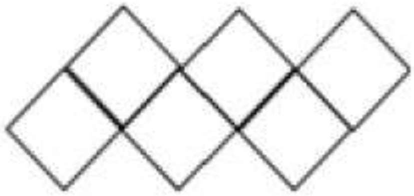
A. 40 cm B. 50 cm C. 60 cm D. 80 cm E. 100 cm

Rješenje: C.

Neka su a i b stranice početnog pravokutnika. Tom je, na primjer, mogao razrezati pravokutnik na dva pravokutnika sa stranicama $\frac{a}{2}$ i b, a Jerry bi u tom slučaju svoj papir razrezao na pravokutnike sa stranicama a i $\frac{b}{2}$. Dakle, vrijedi $a + 2b = 40$, $2a + b = 50$. Odatle dobivamo da je $a = 20$, $b = 10$, pa je opseg 60 cm.

Zadatak 20. JUNIOR 2013. - 4 boda

Slika prikazuje cik-cak uzorak sastavljen od šest kvadrata dimenzija 1 cm x 1 cm. Opseg mu je 14 cm. Koliki je opseg cik-cak uzorka koji je sastavljen od 2013 takvih kvadrata?



A. 2022 cm B. 4028 cm C. 4032 cm D. 6038 cm E. 8050 cm

Rješenje: B.

Dodavanjem svakog novog kvadrata opseg lika povećava se za 2. Za 2013 kvadrata stoga imamo opseg $4 + 2012 \cdot 2 = 4028$ cm .

3.3.4 Površina

ZADATCI:

Zadatak 21. ECOLIER 2012. - 3 boda

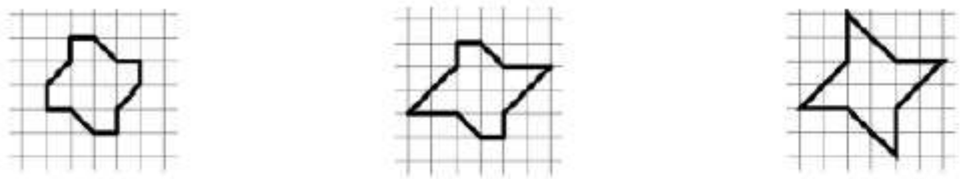
Na četiri od sljedećih pet kvadrata površine obojene sivom i bijelom bojom su međusobno jednake po veličini. Na kojem kvadratu su površine različite veličine?

A. B. C. D. E.

Rješenje: D.

Zadatak 22. ECOLIER 2011. - 3 boda

Koji lik ima najveću površinu?



A. B. C.

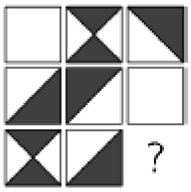
D. E.

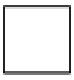
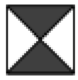
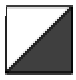
Rješenje: C.

Lik C površinom je veći od likova A i B, što se lako vidi. Likovi D i E imaju jednake površine (9 kvadratića), a lik C ima površinu veću od 9 kvadratića.

Zadatak 23. BENJAMIN 2014. - 4 boda

Koju pločicu moramo dodati slici da bi bijela površina bila manja od crne površine?



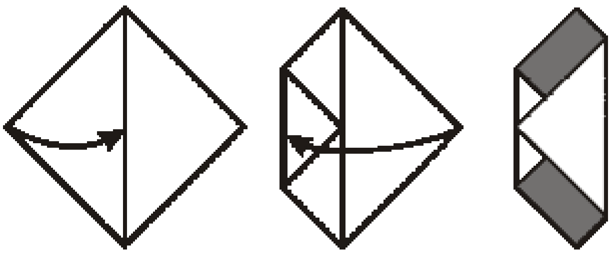
A.  B.  C.  D.  E. To je nemoguće.

Rješenje: E.

Crnih polja ima ukupno 3, a bijelih 5, pa je nemoguće ispuniti uvjet.

Zadatak 24. BENJAMIN 2012. - 5 bodova

Imamo papir u obliku kvadrata površine 64 cm^2 i dva puta ga preklapamo kako je prikazano na slici. Koliki je zbroj površina osjenčanih pravokutnika?



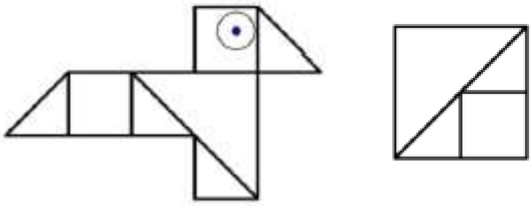
A. 10 cm^2 B. 14 cm^2 C. 15 cm^2 D.16 cm^2 E. 24 cm^2

Rješenje: D.

Lijevi trokut preklapamo na pola, a desni na $\frac{3}{4}$. Stranice pravokutnika su tada 4 cm i 2 cm. Površina osjenčanog pravokutnika je stoga $P = 2\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 8\text{ cm}^2$, odnosno zbroj površina osjenčanih pravokutnika je $2P = 16\text{ cm}^2$.

Zadatak 25. CADET 2014. - 3 boda

Vesna ima nekoliko komada papira u obliku kvadrata površine 4. Ona ih je razrezala u kvadrate i pravokutne trokute. Uzela je nekoliko komada i od njih složila pticu kao što vidimo na donjoj slici. Kolika je površina ptice? (Oko ptice se ne računa.)



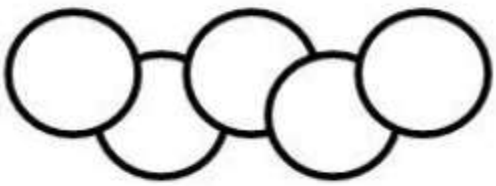
A.3 B. 4 C. $\frac{9}{2}$ D.5 E.6

Rješenje: E.

Veći trokut ima površinu 2, manji $\frac{1}{2}$, a kvadratić ima površinu 1. Površina ptice je 6.

Zadatak 26. CADET 2014. - 4 boda

Površina svakog kruga na slici je 1 cm^2. Dio u kojem se dva kruga međusobno preklapaju ima površinu $\frac{1}{8}$ cm^2. Koliku površinu pokrivaju ovih pet krugova?



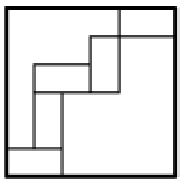
A. 4 cm^2 B. $\frac{9}{2}$ cm^2 C. $\frac{35}{8}$ cm^2 C. D. $\frac{39}{8}$ cm^2 E. $\frac{19}{4}$ cm^2

Rješenje: B.

Prvi i zadnji krug su cijeli pa je njihova površina P = 2 cm^2, trećem i četvrtom nedostaje jedno preklapanje te je stoga njihova površina $P = 2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{4}$ cm^2, a drugi krug ima površinu $P = 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ cm^2. Ukupna površina je $P = \frac{8}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ cm^2.

Zadatak 27. CADET 2014. - 4 boda

Pet jednakih pravokutnika smješteni su unutar kvadarata. Stranica kvadrata je 24 cm. Kolika je površina jednog pravokutnika?



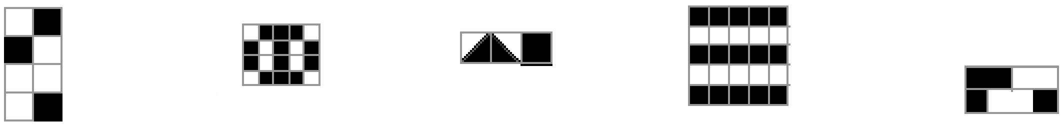
A. 12 cm2 B. 16 cm2 C. 18 cm2 D. 24 cm2 E. 32 cm2

Rješenje: E.

Označimo li kraću stranicu pravokutnika sa x, a dulju sa y vidimo da je $2x + 2y = 24$ i $3y = 24$. Iz toga slijedi, $y = 8$ i $x = 4$, a površina pravokutnika P = 32 cm^2.

Zadatak 28. CADET 2009. - 3 boda

U gusarskoj školi svaki učenik mora sašiti svoju crno-bijelu zastavu. Pri tome mora biti ispunjen uvjet da crni dio čini tri petine zastave. Koliko od prikazanih zastava ispunjava taj uvjet?



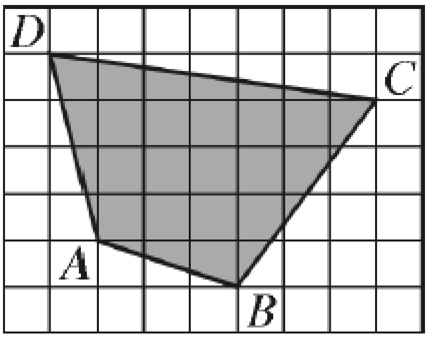
A. nijedna B. jedna C. dvije D. tri E. četiri

Rješenje: C.

Zadani uvjet vrijedi za drugu i četvrtu zastavu.

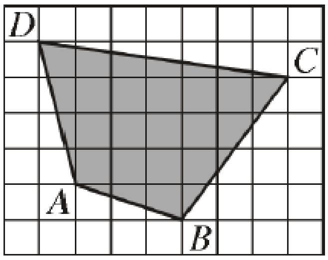
Zadatak 29. CADET 2013. - 5 bodova

Na slici vidimo osjenčani četverokut *ABCD* nacrtan u rešetki. Svaki kvadratić rešetke ima stranicu duljine 2 cm. Kolika je površina četverokuta *ABCD*?



A. 96 cm^2 B. 84 cm^2 C. 76 cm^2 D. 88 cm^2 E. 104 cm^2

Rješenje: B.

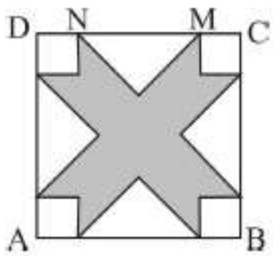


Promotrimo četverokut opisan oko našeg osjenčanog četverokuta. Njegova je površina $P = (7 \cdot 5) \cdot 4 \text{ cm}^2 = 140 \text{ cm}^2$. Od te površine oduzimamo one koje nisu osjenčane. Ispod stranice $\overline{AB}$ je površina $P_1 = [(3 \cdot 1) : 2] \cdot 4 \text{ cm}^2 = 6 \text{ cm}^2$, ispod stranice $\overline{BC}$ je površina $P_2 = [(3 \cdot 4) : 2] \cdot 4 \text{ cm}^2 = 24 \text{ cm}^2$.

Iznad stranice $\overline{CD}$ je površina $P_3 = [(7 \cdot 1) : 2] \cdot 4 \text{ cm}^2 = 14 \text{ cm}^2$. Ispod stranice $\overline{DA}$ je površina $P_4 = [(4 \cdot 1) : 2] \cdot 4 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2$ i na kraju površina kvadrata kod vrha A je $P_5 = 4 \text{ cm}^2$. Dakle, $P - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) = 140 - (6 + 24 + 14 + 8 + 4) = 84 \text{ cm}^2$.

Zadatak 30. CADET 2009. – 5 bodova

ABCD je kvadrat duljine stranice 10 cm. Udaljenost između točaka *M* i *N* je 6 cm. Neosjenčani djelovi su jednaki jednakostranični trokuti i jednaki kvadrati. Izračunaj površinu osjenčanog dijela unutar kvadrata *ABCD.*



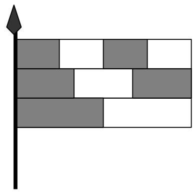
A. 42 cm^2 B. 46 cm^2 C. 48 cm^2 D. 52 cm^2 E. 58 cm^2

Rješenje: C.

100 - (4 · 4 + 2 · 18) = 48 cm^2

Zadatak 31. JUNIOR 2006. – 3 boda

Zastava se sastoji od tri pruge iste širine koje su podijeljene na dva, tri i četiri jednaka dijela kao na slici. Koji dio zastave, izražen razlomkom, je obojan sivom bojom?



A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{7}$ E. $\frac{5}{9}$

Rješenje: E.

$$\frac{2}{12}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$$

Zadatak 32. JUNIOR 2011. – 3 boda

Mozaik površine 360 cm², oblika pravokutnika, sastavljen je od jednakih dijelova kvadratnog oblika. Mozaik je dug 24 cm, a po širini ima 5 dijelova kvadratnog oblika. Kolika je površina svakog dijela kvadratnog oblika?

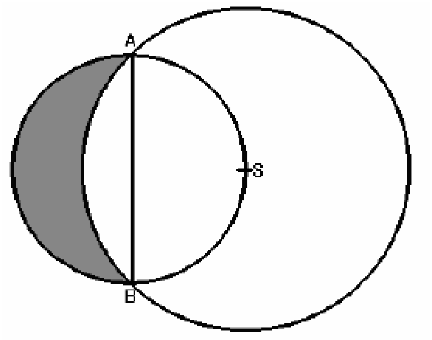
A. 1 cm² B. 4 cm² C. 9 cm² D. 16 cm² E. 25 cm²

Rješenje: C.

Pravokutnik je širok 15 cm, duž te stranice ima 5 dijelova kvadratnog oblika. Duljina stranice tog kvadratnog dijela je 3 cm, a površina 9 cm².

Zadatak 33. JUNIOR 2011. – 5 bodova

Dva kruga nacrtana su kao na slici. Dužina $\overline{AB}$ promjer je manjeg kruga. Središte većeg kruga nalazi se na manjoj kružnici, a polumjer većeg kruga ima duljinu *r*. Kolika je površina osjenčanog dijela?



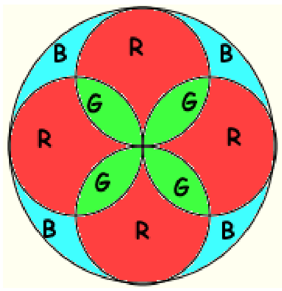
Rješenje: C.

Površinu osjenčanog dijela možemo dobiti kao razliku površine manjeg polukruga i površine odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$. Duljina polumjera manjeg kruga je $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, a površina manjeg polukruga $\frac{r^2\pi}{4}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ može se dobiti kao razlika površine kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom *AB* i površine jednakokračnog pravokutnog trokuta *ASB*. Površina kružnog isječka većeg kruga nad kružnim lukom *AB* je $\frac{r^2\pi \cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2\pi}{4}$, a površina jednakokračnog pravokutnog trokuta *ASB* je $\frac{r^2}{2}$. Površina odsječka većeg kruga nad tetivom $\overline{AB}$ je $\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}$.

Prema tome, površina osjenčanog dijela je $\frac{r^2\pi}{4} - \left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2}$.

Zadatak 34. STUDENT 2006. – 4 boda

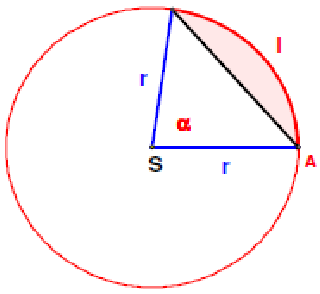
Na crkvenom prozoru nalazi se rozeta. Slova R, G i B predstavljaju crvenu, zelenu i plavu boju. Znamo da je za prozor upotrebljeno 400 cm^2 zelenog stakla. Koliko je cm^2 plavog stakla upotrebljeno?



A. 396 B. 400 C. 120π D. $90\sqrt{2}\pi$ E. 382

Rješenje: B.

Kružni odsječak je dio kruga što ga odsijeca tetiva, te odsječak u svakom krugu ima



površinu 50 cm^2. Iz toga slijedi $\frac{r^2\pi\cdot\alpha}{360^\circ}-\frac{r^2\sin\alpha}{2}=50\text{ cm}^2$, odnosno $\frac{r^2\pi\cdot 90^\circ}{360^\circ}-\frac{r^2}{2}=\frac{r^2\pi}{4}-\frac{r^2}{2}=50\ \text{cm}^2$ što je ekvivalentno s $r^2\pi-2r^2=200$ cm^2. Dakle, $r^2=\frac{200}{\pi-2}$ i računamo da je površina malog kruga jednaka $P_{\text{mali}}=r^2\pi=\frac{200}{\pi-2}\pi$ cm^2. Radijus velike kružnice je jednak $2\sqrt{\frac{200}{\pi-2}}$, pa je prema tome površina velikog kruga $P_{\text{veliki}}=4\cdot\frac{200}{\pi-2}\pi$ cm^2.

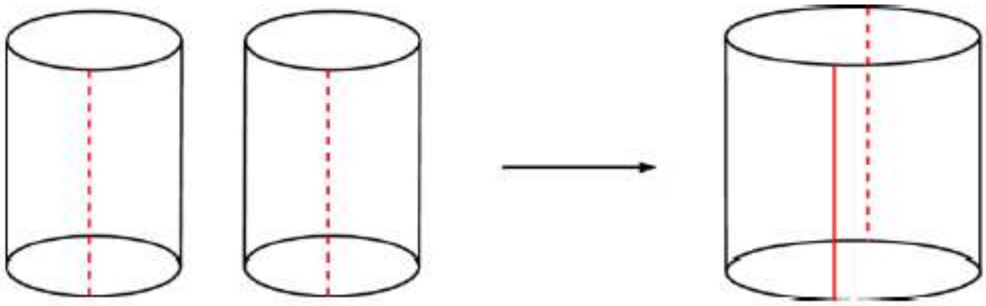
Vrijedi da je $P_{\text{veliki}} = 4\cdot P_{\text{mali}}$ – “duplo područje” + P_{plavo}. Zaključujemo, $P_{\text{plavo}} = P_{\text{veliki}}$ – $4\cdot P_{\text{mali}}$ + “duplo područje” = $4\cdot\frac{200}{\pi-2}\pi-4\cdot\frac{200}{\pi-2}\pi+400=400$ cm^2.

3.3.5 Volumen

ZADATCI:

Zadatak 35. STUDENT 2013. - 3 boda

Plaštovi dva identična valjka prerezani su po iscrtkanoj liniji i zaljepljeni tako da tvore jedan veliki valjak, kao na slici. Što možemo reći o volumenu velikog valjka u usporedbi s volumenom jednog manjeg valjka?



A. Ima 2 puta veći volumen.

B. Ima 3 puta veći volumen.

C. Ima π puta veći volumen.

D. Ima 4 puta veći volumen.

E. Ima 8 puta veći volumen

Rješenje: D.

Ako je radijus baze manjeg valjka r, onda je opseg baze $2r\pi$. Slijedi da je opseg baze velikog valjka $2 \cdot 2r\pi$, tj. radijus baze velikog valjka je $2r$. Volumen manjeg valjka je $r^2\pi h$, dok je volumen velikog valjka $(2r)^2\pi h = 4r^2\pi h$. Vidimo da je volumen velikog valjka 4 puta veći od volumena manjeg valjka.

Zadatak 36. STUDENT 2010.- 3 boda

Dvije prazne kocke imaju osnovice površina 1 dm^2 i 4 dm^2. Želimo napuniti veću kocku vodom koristeći manju kocku. Koliko puta ćemo je puniti?

A. 2 puta B. 4 puta C. 6 puta D. 8 puta E. 16 puta

Rješenje: D.

Volumen veće kocke je 8 dm^3, a manje 1 dm^3.

Zadatak 37. BENJAMIN 2009. – 4 boda

Želimo napuniti kutiju veličine $30 \times 30 \times 50$ jednakim kockama. Koliko najmanje kocaka trebamo, da bi to mogli učiniti?

A. 15 B. 30 C. 45 D. 75 E. 150

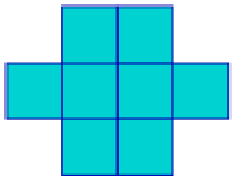
Rješenje: C.

Volumen kutije je 45000, pa trebamo najmanje 45 kocaka brida 10.

3.3.6 Mješoviti zadatci

Zadatak 38. BENJAMIN 2012. - 4 boda

Lik s desne strane izrađen je od istih kvadrata, a opseg mu je 42 cm. Kolika je površina tog lika ?



A. 8 cm^2 B. 9 cm^2 C. 24 cm^2 D. 72 cm^2 E.128 cm^2

Rješenje: D.

$O = 14a \rightarrow 42 = 14a \rightarrow a = 3$ cm

$P = 8a^2 \rightarrow P = 72$ cm^2

Zadatak 39. CADET 2013. - 3 boda

Na slici je veliki jednakostraničan trokut koji ima površinu 9. Dužine paralelne stranicama dijele stranicu na tri jednaka dijela. Kolika je ukupna površina osjenčanih dijelova?

A. 1 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

Rješenje: D.

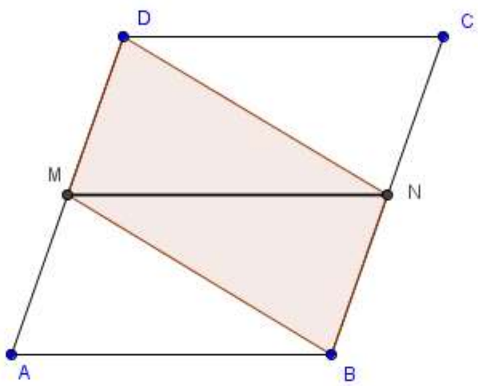
Presiječemo li rombove po manjoj dijagonali vidimo da je veliki trokut sastavljen od 9 manjih jednakostraničnih trokuta, od kojih su 6 osjenčana.

Zadatak 40. CADET 2014. - 3 boda

Površina paralelograma je 10. Točke M i N su polovišta stranica $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$. Kolika je površina četverokuta $MBND$?

A. 0.5 B. 5 C. 2.5 D. 7.5 E.10

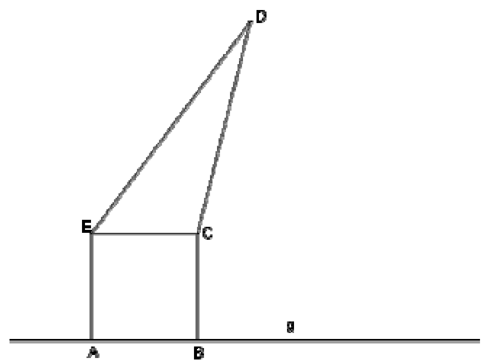
Rješenje: B.



Dužina $\overline{MN}$ dijeli paralelogram na 4 sukladna trokuta. Površina četverokuta $MBND$ je 5.

Zadatak 42. JUNIOR 2012. - 3 boda

Kvadrat $ABCE$ ima stranice duljine 4 cm i površinu jednaku površini trokuta ECD. Kolika je udaljenost točke D od pravca g?



A. 8 cm B. (4+ $2\sqrt{3}$ .cm C. 12 cm D. $10\sqrt{2}$ cm

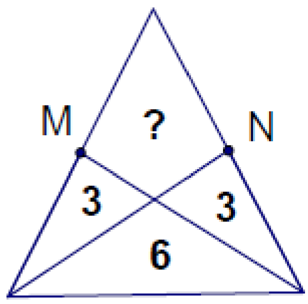
E. ovisi o položaju točke D

Rješenje: C.

Površina kvadrata iznosi 16 cm^2. Trokut ECD ima također površinu 16 cm^2 i zajedničku stranicu s kvadratom. Duljina visine na zajedničku stranicu $\overline{EC}$ iznosi 8 cm. Udaljenost točke D od pravca g jednaka je 8 + 4 = 12 cm.

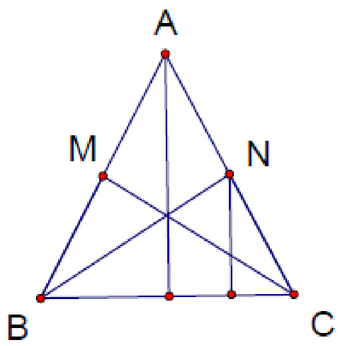
Zadatak 43. JUNIOR 2012. - 3 boda

Točke M i N su polovišta krakova jednakokračnog trokuta. Kolika je površina četverokuta označenog s "?" ?



A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7

Rješenje: D.



Visina v_1 iz točke N na osnovicu $\overline{BC}$ zadanog jednakokračnog trokuta ima duljinu jednaku polovini visine v na osnovicu $\overline{BC}$. Površina trokuta NBC jednaka je zbroju površina dvaju manjih trokuta i iznosi 6 + 3 = 9. Trokut *NBC* i trokut *ABC* imaju zajedničku stranicu $\overline{BC}$, s pripadajućom visinom v, odnosno v_1. Kako je visina v dva puta dulja od visine v_1, to je i površina trokuta *ABC* dva puta veća od površine trokuta *NBC*. Znači, površina trokuta *ABC* iznosi 18. Oduzimanjem poznatih površina sa slike, slijedi da je površina četverokuta označenog s "?" jednaka 18 – 6 – 3 – 3 = 6.

Zadatak 44. JUNIOR 2012. - 3 boda

Trokut *ABC* je pravokutni trokut s katetama duljina 6 cm i 8 cm, a točke *K*, *L* i *M* su polovišta njegovih stranica. Koliki je opseg trokuta *KLM* ?

A. 10 cm B. 12 cm C. 15 cm D. 20 cm E. 24 cm

Rješenje: B.

Duljina hipotenuze u trokutu *ABC* je 10 cm. Dužine $\overline{KL}$, $\overline{LM}$ i $\overline{MK}$ su srednjice trokuta *ABC* i njihove duljine su polovine duljina stranica trokuta *ABC*. Opseg trokuta *KLM* iznosi 3 + 4 + 5 = 12 cm.

Zadatak 45. JUNIOR 2012. - 4 boda

Dvije stranice četverokuta imaju duljine 1 cm i 4 cm. Dijagonala duljine 2 cm dijeli četverokut na dva jednakokračna trokuta. Koliki je opseg četverokuta?

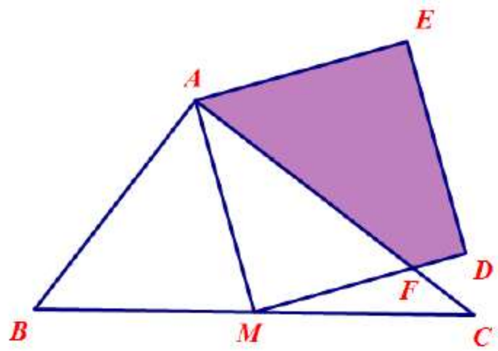
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 11 cm E. 12 cm

Rješenje: D.

Stranice četverokuta imaju duljine 4 cm, 4 cm, 2 cm i 1 cm. Iz toga slijedi da je opseg četverokuta 11 cm.

Zadatak 46. JUNIOR 2014. - 5 boda

Neka je ABC trokut takav da je $|AB| = 6$ cm , $|AC| = 6$ cm i $|BC| = 6$ cm. Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$. $AMDE$ je kvadrat i $\overline{MD}$ siječe $\overline{AC}$ u točki F. Odredi površinu četverokuta $AFDE$ u cm^2.



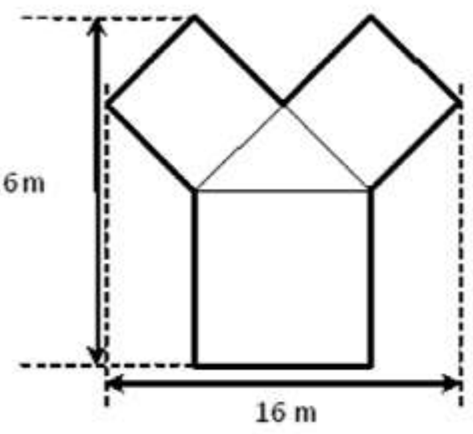
A. 1248 B. 1258 C. 1268 D. 1278 E. 128

Rješenje: B

Po obratu Pitagorinog poučka trokut ABC je pravokutan, s pravim kutom kod vrha A. Onda je M središte opisane kružnice tog trokuta, tj. vrijedi $|MB| = |MA| = |MC| = 5$ cm te $\measuredangle ABM = \measuredangle MAB$ i $\measuredangle MAC = \measuredangle ACM$. Prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta, trokuti ABC i AMF slični su, pa možemo odrediti duljinu stranice $\overline{MF}$. Površina traženog četverokuta razlika je površina kvadrata $AMDE$ i trokuta AMF, tj. 52 − 5·1542 = 1258 cm^2.

Zadatak 47. STUDENT 2012. - 4 boda

Na slici je gredica posađena ružama. Bijele ruže nalaze se u sukladnim kvadratima, a crvene ruže u trećem kvadratu. Žute ruže nalaze se u pravokutnom trokutu. Kolika je površina cijele gredice?



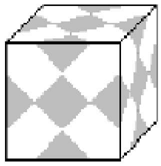
A. 114 m^2 B. 130 m^2 C. 144 m^2 D. 160 m^2 E. 186 m^2

Rješenje: C.

Neka je *d* duljina dijagonale manjeg kvadrata. Dakle, vrijedi: 2 d =16, d = 8, a odatle slijedi da je duljina *a* stranice manjeg kvadrata jednaka $4\sqrt{2}$ m. Duljina *A* stranice većeg kvadrata je 8 m (jer je $d + A = 16$). Površina cijele gredice jednaka je zbroju površina dvaju sukladnih manjih kvadrata, većeg kvadrata i pravokutnog trokuta.

Dakle, $P = 2\cdot(4\sqrt{2})^2 + 8^2 + \dfrac{(4\sqrt{2})^2}{2} = 144\ \text{m}^2$.

Zadatak 48. STUDENT.2009 – 4 boda



Šimun ima staklenu kocku brida duljine 1 dm. Na strane kocke nalijepio je sukladne kvadrate zlatne boje, tako da kocka sa svih strana izgleda jednako, što se može vidjeti na slici. Koliko površine kocke je zlatne boje?

A. 375 cm² B. 300 cm² C. 225 cm² D. 150 cm² E. 37.5 cm²

Rješenje: C.

Za zlatne kvadrate vrijedi da je dvostruka duljina njihove dijagonale jednaka duljini brida kocke. Duljina dijagonale kvadrata je 0.5 dm, a duljina stranice kvadrata je $\frac{\sqrt{2}}{4}$ dm. Površina zlatnog kvadrata je $\frac{1}{8}$ dm², a takvih zlatnih kvadrata ima 18. Površina kocke zlatne boje prema tome jednaka je $P = 18 \cdot \frac{1}{8} = \frac{9}{4}$ dm^2, a kada preračunamo to je 225 cm².

3.4 Mnogokuti

Pojam mnogokuta uvodi se u sedmi razred tako da se najprije ponove osnovni pojmovi vezani uz trokut i četverokut nakon čega slijedi definicija mnogokuta. U višim kategorijama natjecanja (Benjamin, Cadet, Junior, Student) redovito se pojavljuju razni zadatci vezani uz mnogokute te njihova svojstva kao što su broj dijagonala, veličine unutarnjih i vanjskih kutova te površina i opseg mnogokuta. Ovim zadatcima učenici će prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu:

I. Matematički procesi

2.Povezivanje

Učenik\ca će:

- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima i pojmovima te rješavati zadatke njihovim povezivanjem.

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

Učenik\ca će:

- postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti.

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik\ca će:

- rabiti pravilnosti i svojstva geometrijskih uzoraka
- prepoznati i primijeniti svojstva i odnose ravninskih geometrijskih oblika, odnosno mnogokuta, radi mjerenja, računanja i zaključivanja
- prepoznati i primijeniti sukladnost i sličnost geometrijskih oblika.

4. Mjerenje

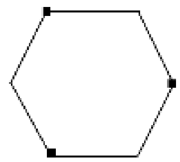
Učenik\ca će:

- odrediti mjeriva obilježja mnogokuta primjenjujući osnovne formule, proporcionalnost, sličnost, Pitagorin poučak te ih rabiti u računanju duljine stranice, dijagonala, mjere kuta, površine i opsega mnogokuta.

ZADATCI:

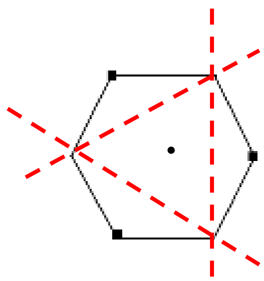
Zadatak 1. BENJAMIN. 2006 – 4 boda

Papir ima oblik šesterokuta jednako dugih stranica. Ako ga preklopimo tako da se tri označena vrha dodiruju u središtu šesterokuta koji ćemo lik dobiti?



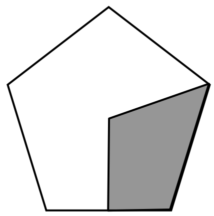
A. šesterokraku zvijezdu B. dvanaesterokut C. osmerokut D. kvadrat E. trokut

Rješenje: E.



Zadatak 2. CADET 2006. – 3 boda

Točka O je središte pravilnog peterokuta. Koliki dio peterokuta je osjenčan?



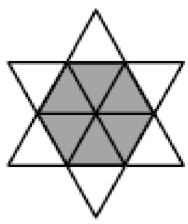
A. 10% B. 20% C. 25% D. 30% E. 40%

Rješenje: D.

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$, a iz toga slijedi , tj. $\frac{3}{10}=\frac{p}{100}$ tj. p = 30%.

Zadatak 3. CADET 2009. – 3 boda

Zvijezda na slici sastoji se od 12 jednakih istostraničnih trokuta. Opseg zvijezde je 36 cm. Koliki je opseg zatamnjenoga šesterokuta?



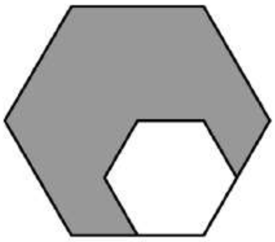
A. 6 cm B. 12 cm C. 18 cm D. 24 cm E. 30 cm

Rješenje: C.

Opseg zvijezde određuju po dvije stranice trokuta svakog „kraka“ zvijezde, a opseg šesterokuta je određen s po jednom stranicom istog trokuta, pa je za pola manji, odnosno on je 18 cm.

Zadatak 4. JUNIOR 2014. - 3 boda

Stranica velikog pravilnog šesterokuta dva puta je dulja od stranice malog pravilnog šesterokuta. Površina je malog šesterokuta 4 cm^2. Kolika je površina velikog šesterokuta?



A. 16 cm^2 B. 14 cm^2 C. 12 cm^2 D. 10 cm^2 E. 8 cm^2

Rješenje: A.

Koeficijent sličnosti ova dva lika je $k = 2$. Njihove površine se onda odnose kao $k^2 = 4$, tj. površina velikog šesterokuta četiri je puta veća od površine malog šesterokuta, 4·4=16.

Zadatak 5. JUNIOR 2013. - 4 boda

Dužina $\overline{AB}$ spaja dva nasuprotna vrha pravilnog šesterokuta, a dužina $\overline{CD}$ spaja polovišta njegovih dviju nasuprotnih stranica. Koliki je umnožak duljina tih dviju dužina ako je površina šesterokuta 60?

A. 40 B. 50 C. 60 D. 80 E. 100

Rješenje: D.

Pravilni šesterokut sastoji se od šest jednakostraničnih trokuta. Ako je duljina stranice šesterokuta a, površina šesterokuta je $6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 3 \cdot a \cdot v_a = 60$ iz čega slijedi $a \cdot v_a = 20$.

Dužina $\overline{AB}$ ima duljinu $2a$, a dužina $\overline{CD}$ ima duljinu $2v_a$, pa stoga vrijedi da je $(2a)\cdot(2v_a)=4a\cdot v_a=80$.

Zadatak 6. JUNIOR 2013. - 5 bodova

Koliko postoji trokuta čiji su vrhovi ujedno vrhovi pravilnog trinaesterokuta, a središte opisane kružnice tog poligona je unutar trokuta?

A. 72 B. 85 C. 91 D. 100

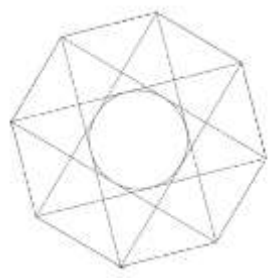
E. nešto drugo

Rješenje: C.

Svih trokuta kojima su vrhovi ujedno i vrhovi pravilnog trinaesterokuta ima $\frac{13\cdot 12\cdot 11}{6}=286$. Trokuta koje ne sadrže središte opisane kružnice poligona ima $\frac{13\cdot 6\cdot 5}{2}=195$, pa onih koji sadrže središte kružnice ima 286 - 195 = 91.

Zadatak 7. STUDENT 2013. - 3 boda

Pravilni osmerokut na slici ima stranicu duljine 10. Koliki je radijus kružnice upisane malom osmerokutu kojeg tvore dijagonale?



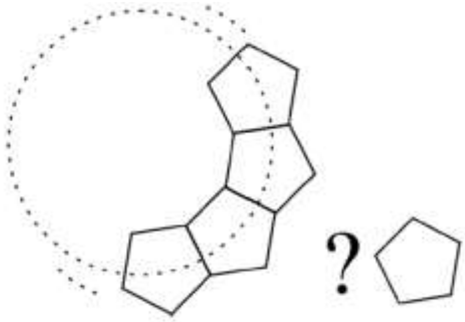
A. 10 B. 7.5 C. 5 D. 2.5 E. 2

Rješenje: C.

Ta kružnica ujedno je i upisana kružnica kvadratu sa stranicom duljine 10 (kao i stranica zadanog osmerokuta), pa je njen radijus $\frac{10}{2}=5$.

Zadatak 8. STUDENT 2013. - 4 boda

Rade ima identične plastične dijelove u obliku pravilnog peterokuta. Lijepi ih rub uz rub u krug (kao na slici). Koliko će se peterokuta potrošiti za takvo slaganje?



Rješenje: C.

Spojimo li središte zamišljene kružnice s vrhovima peterokuta (ona dva vrha koja su najbliža središtu) dobit ćemo kut od 36°. Zaista, unutarnji kut pravilnog peterokuta je 108°, pa su kutovi uz osnovicu u konstruiranog jednakokračnog trokuta $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, a kut nasuprot osnovici je onda $180^\circ - 2\cdot 72^\circ = 36^\circ$. Da bi završio krug, Radi treba $\frac{360^\circ}{36^\circ}=10$ dijelova.

3.5 Ostala geometrijska svojstva geometrijskih likova

U ovu kategoriju svrstala sam zadatke koji su povezani uz različita geometrijska svojstva kao što su simetrala stranica, polovište stranice, opisane i upisane kružnice raznim geometrijskim likovima, broj stranica, bridova i vrhova geometrijskih tijela. Ovi zadatci su raznoliki, pa potrebna razina geometrijskog mišljenja u nekim zadatcima prema van Hieleu je prva, dok je u nekim potrebna i druga razina. Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu učenici će u ovim zadatcima:

I. Matematički procesi

2.Povezivanje

- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima i pojmovima te rješavati zadatke njihovim povezivanjem

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

- postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

- rabiti pravilnosti i svojstva geometrijskih uzoraka
- prepoznati i primijeniti svojstva i odnose ravninskih geometrijskih oblika, radi mjerenja, računanja i zaključivanja
- primijeniti osnovne odnose i zakonitosti u svezi s ravninskim geometrijskim oblicima, uključujući sukladnost i sličnost trokuta

4. Mjerenje

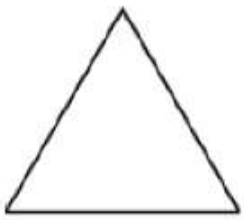
Učenik\ca će:

- primijeniti proporcionalnost i sličnost u mjerenju
- odrediti mjeriva obilježja geometrijskih likova primjenjujući osnovne formule, proporcionalnost, sličnost, Pitagorin poučak te ih rabiti u računanju duljine stranice, mjere kuta, površine i opsega geometrijskih likova

ZADATCI:

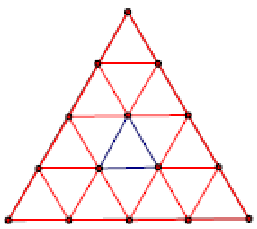
Zadatak 1. ECOLIER 2013. - 5 bodova

Spajajući polovišta stranica trokuta dobivamo manji trokut. Nastavljajući postupak još jednom u manjem trokutu nastaju još manji trokuti. Koliko takvih najmanjih trokuta može ispuniti početni trokut?



A. 5 B. 8 C. 10 D. 16 E. 32

Rješenje: D.



Zadatak 2. CADET 2014. - 5 bodova

Pravokutnik ima stranice duljine 6 cm i 11 cm. Izaberemo jednu od duljih stranica. Povučemo simetrale kuteva s oba kraja te stranice. Te dvije simetrale dijele suprotnu dulju stranicu na tri dijela. Koje su duljine tih dijelova?

A. 1 cm, 9 cm, 1 cm B. 2 cm, 7 cm, 2 cm C. 3 cm, 5 cm, 3 cm

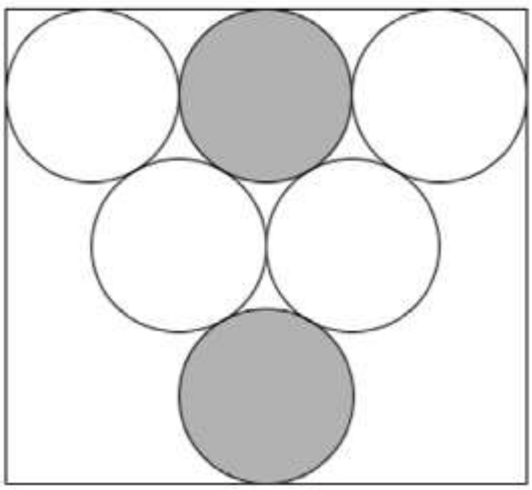
D. 4 cm, 3 cm, 4 cm E. 5 cm, 1 cm, 5 cm

Rješenje: E.

Povučemo li simetrale dobit ćemo dva jednakokračna pravokutna trokuta koji se preklapaju za 1 cm.

Zadatak 3. JUNIOR 2012. - 4 boda

U pravokutnik s jednom stranicom duljine 6 cm upisano je 6 krugova kao na slici. Koja je udaljenost između dva siva kruga?



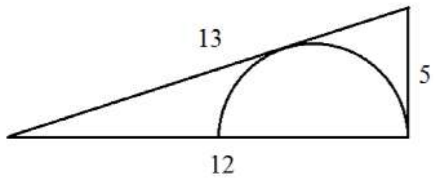
A. 1 cm B. $\sqrt{2}$ cm C. $(2\sqrt{3}-2)$ cm D. $\frac{\pi}{2}$ cm E. 2 cm

Rješenje: C.

Dužine koje spajaju središta lijevog i desnog kruga u gornjem redu pravokutnika i središte donjeg sivog kruga čine tranice jednakostraničnog trokuta. Duljina stranice tog jednakostraničnog trokuta iznosi 4 cm. Visina tog jednakostraničnog trokuta računa se po formuli $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i iznosi $2\sqrt{3}$ cm. Udaljenost između dva siva kruga iznosi $(2\sqrt{3} - 2)$ cm.

Zadatak 4. JUNIOR 2012. - 4 boda

Na slici je pravokutni trokut sa stranicama duljina 5 cm, 12, cm i 13 cm. Koliki je radijus ucrtane polukružnice?



A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{12}{3}$ D. $\frac{13}{3}$ E. $\frac{17}{3}$

Rješenje: B.

Nadopunimo li pravokutni trokut sukladnim trokutom, dobit ćemo jednakokračni trokut s krakovima duljine 13 cm i osnovicom duljine 10 cm. Površina tog jednakokračnog trokuta iznosi 60 cm^2, a radijus $r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ cm njemu upisane kružnice.

Zadatak 5. STUDENT 2013. - 3 boda

Koliko bridova ima prizma koja ukupno ima 2013 strana?

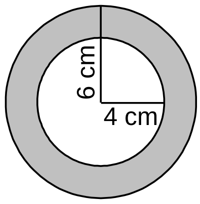
A. 2011 B. 2013 C. 4022 D. 4024 E. 6033

Rješenje: E.

Prizmu nazivamo *n*-terostranom ako ima *n + 2* strane (ukupnom broju strana dodaju su i osnovke) i *3n* bridova. Dakle radi se o 2011-erostranoj prizmi koja ima $3 \cdot 2011 = 6033$ brida.

Zadatak 6. STUDENT 2006.- 3 boda

Suzana ima dva privjeska napravljena od istih materijala. Privjesci su jednako široki i jednake su težine. Prvi ima oblik kružnog vijenca koji je sastavljen od dva koncentrična kruga radijusa 6 cm i 4 cm. Drugi privjesak ima oblik punog kruga. Koliki je radijus drugog kruga?



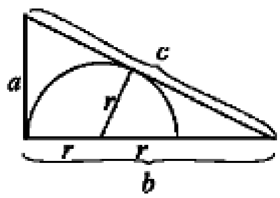
A. 4 cm B. $2\sqrt{6}$ cm C. 5 cm D. $2\sqrt{5}$ cm E. $\sqrt{10}$ cm

Rješenje: D.

Označimo radijus drugog privjeska s *x*. Vrijedi da je površina prvog privjeska jednaka površini drugog privjeska, odnosno $x^2\pi = 6^2\pi - 4^2\pi$. Iz toga slijedi $x^2 = 36 - 16 = 20$, tj. $x = 2\sqrt{5}$.

Zadatak 7. STUDENT 2012. – 4 boda

Na slici je pravokutni trokut sa stranicama duljina *a*, *b* i *c*. U trokut je upisana polukružnica. Koliki je radijus *r* te polukružnice?



A. $\frac{a(c-a)}{2b}$ B. $\frac{ab}{a+b+c}$ C. $\frac{ab}{b+c}$ D. $\frac{2ab}{a+b+c}$ E. $\frac{ab}{a+c}$

Rješenje: E.

Nadopunimo li pravokutni trokut sukladnim trokutom, dobit ćemo jednakokračni trokut s krakovima duljine c i osnovicom duljine $2a$. Površina tog jednakokračnog trokuta iznosi ab, a radijus r njemu upisane kružnice jednak je $r=\frac{P}{s}=\frac{ab}{a+c}$.

3.6 Geometrijske transformacije

Oblici se mogu pomicati u ravnini ili prostoru, a tu promjenu možemo opisati u terminima translacije, simetrije i rotacije, odnosno geometrijskim transformacijama. U sljedeće navedenim zadatcima učenici analiziraju različite matematičke situacije te primjenjuju različite transformacije i njihova svojstva pri njihovu rješavanju. Zadatci su svrstani u još dvije podkategorije, a to su **Simetrija** i **Rotacija**. Nacionalni okvirni kurikulum podupire ove zadatke sljedeće navedenim ishodima.

I. Matematički procesi

2.Povezivanje

Učenik\ca će:

- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima i pojmovima te rješavati zadatke njihovim povezivanjem

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

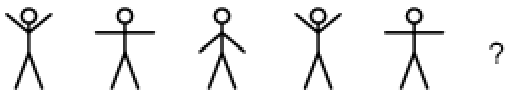
Učenik\ca će:

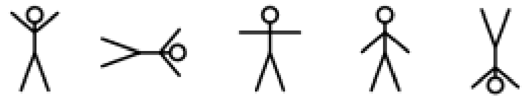
- osnosimetrično i centralnosimetrično preslikati, translatirati i rotirati jednostavne likove
- prepoznati sukladne trokute, centralnosimetrične i osnosimetrične likove u svijetu oko sebe
- rabiti geometrijske transformacije ravnine za uočavanje pravilnosti i svojstava geometrijskih uzoraka

3.6.1 Rotacija

Zadatak 1. ECOLIER 2006. – 3 boda

Barbara crta tri različite figure u istom redoslijedu. Koja će figura biti sljedeća?



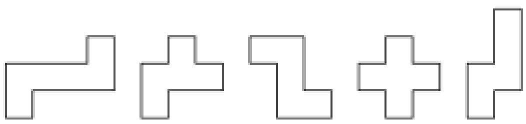


A. B. C. D. E.

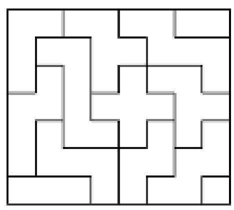
Rješenje: D.

Zadatak 2. ECOLIER 2006. – 5 bodova

Smiješ pomicati i zakretati svaku od donjih figura kako želiš, ali ne smiješ mijenjati njen oblik. Koja od figura nije upotrijebljena u ovoj “slagalici”?.



A. B. C. D. E.



Rješenje : C.

Zadatak 3. JUNIOR 2013 - 4 boda

Trokut RZT nastao je rotacijom jednakostraničnog trokuta AZC oko točke Z, gdje je kut $\beta = \sphericalangle CZR = 70^\circ$. Kolika je mjera kuta $\alpha = \sphericalangle CAR$?

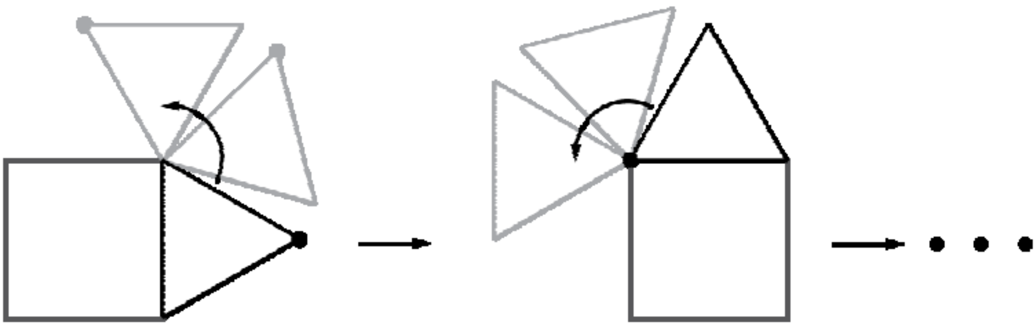
A.20 B.25 C.30 D.35 E.40

Rješenje: D.

Kut $\sphericalangle AZC = 60^\circ$ jer je trokut jednakostraničan. Stranice $\overline{AZ}$ i $\overline{ZR}$ jednake su duljine, pa je trokut AZR jednakokračan, a kutovi $\sphericalangle RAZ$ i $\sphericalangle ZRA$ jednake su mjere i to $\dfrac{180^\circ - (60^\circ + 70^\circ)}{2} = 25^\circ$. Kut α je tada jednak $60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$.

Zadatak 4. STUDENT 2012. - 5 bodova

Jednakostranični trokut rotira oko vrhova kvadrata sa stranicom duljine 1 cm, kao što je prikazano na slici.



Kolika je duljina puta koji napravi označena točka takvom rotacijom trokuta dok trokut i označena točka ne dođu ponovno u početni položaj?

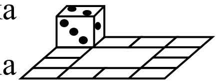
A. 4π B. $\dfrac{28\pi}{3}$ C. 8π D. $\dfrac{14}{3}\pi$ E. $\dfrac{21}{2}\pi$

Rješenje: B.

Duljina kružnog luka koji točka opisuje dok prvi puta ne padne na stranicu kvadrata (lijevi gornji vrh kvadrata) iznosi $\frac{1 \cdot \pi \cdot 210^\circ}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6}$. Da bi točka ponovno došla u isti položaj u kojem je bila prije početka rotacije, mora opisati 8 takvih lukova, pa je duljina tog puta $8 \cdot \frac{7\pi}{6} = \frac{28\pi}{3}$.

Zadatak 5. STUDENT 2006. – 5 bodova

Kocka se nalazi na početnom polju kao na slici. Koliko puta kocka treba proći stazu da se vrati na početnu poziciju sa svim stranama na početnim mjestima?



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. To je nemoguće napraviti.

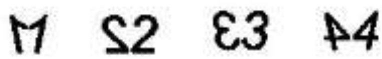
Rješenje: C.

3.6.2 Simetrija

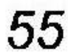
ZADATCI:

Zadatak 7. LEPTIRIĆ 2006. – 3 boda

Ova četiri crteža prikazuju brojeve od 1 do 4 viđene u ogledalu.



Koja će od slika biti sljedeća u nizu?

A.  B.  C.  D.  E. 

Rješenje: C.

Zadatak 8. ECOLIER 2014. - 4 boda

Ivanka je oslikala cvijećem stakla na prozorima. Kako to cvijeće izgleda s druge strane prozora?

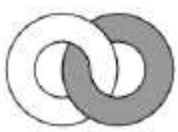
    

A. B. C. D. E.

Rješenje: E.

Zadatak 9. BENJAMIN 2014. – 3 boda

Dva velika prstena, jedan sivi i drugi bijeli povezani su međusobno. Petar stoji ispred prstenova i vidi ih kao na slici. Pavao stoji iza njih. Što vidi Pavao?

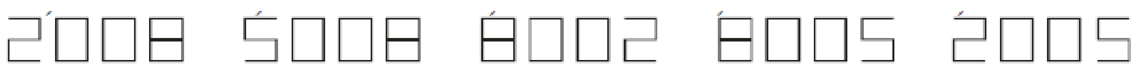


A. B. C. D. E.

Rješenje: D.

Zadatak 10. JUNIOR 2008. – 3 boda

Na proslavi 2008. Nove godine, Borna je obukao majicu s brojem godine i pred ogledalom izveo je stoj na rukama. Koju je sliku u ogledalu vidio njegov prijatelj Vinko stojeći iza Borne, normalno na nogama?



A. B. C. D. E.

Rješenje: B.

3.7 Prikazivanje trodimenzionalnih tijela u ravnini

Jedan od najvažnijih zadataka nastave u domeni Oblik i prostor je razvoj prostornog zora. Pod prostornim zorom podrazumijevamo intuitivni osjećaj za oblike u prostoru i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. Razvijeni prostorni zor podrazumijeva i sposobnost misaone vizualizacije objekata i prostornih odnosa (npr. misaono okretanje objekta) te snalaženje s geometrijskim opisima objekata i njihovog položaja.

Također, oblike možemo gledati iz različitih perspektiva. Sposobnost sagledavanja iz različitih točaka gledanja doprinosi razumijevanju odnosa između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih figura te misaonom zamišljanju, tj. vizualizaciji promjene položaja i veličine oblika. Uz to, bitno je i da učenici razviti sposobnost misaone vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju njihovih dvodimenzionalnih prikaza; mreža, tlocrta, bokocrta i nacrta ([3]). Ova kategorija je podijeljena na još tri podkategorije a to su: **Volumen tijela**, **Vizualizacije dvodimenzionalnih prikaza na temelju njihovih trodimenzionalnih oblika** i **Vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju njihovih dvodimenzionalnih prikaza**. Sljedeći zadatci potkrepljuju ove ishode navedene iz Nacionalnog okvirnog kurikuluma.

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

Učenik\ca će:

- postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti.

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik\ca će:

- skicirati, opisati i protumačiti ravninske prikaze prostornih oblika
- prepoznati prostorne oblike u različitim položajima
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja prostornih oblika
- prepoznati prostorne oblike prema njihovim tlocrtima, nacrtima i bokocrtima i mrežama te obratno
- prepoznati, izgraditi i klasificirati prostorne geometrijske oblike te uočiti njihova geometrijska svojstva.

4. Mjerenje

Učenik\ca će:

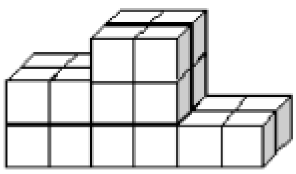
- odrediti obujam tijela brojanjem jediničnih kocaka.

3.7.1 Volumen tijela

ZADATCI:

Zadatak 1. PČELICE 2013. - 5 bodova

Petar je izgradio postolje od kocaka, kao na slici. Koliko je kocaka upotrijebio za gradnju?



A. 12 B. 18 C. 19 D. 22 E. 24

Rješenje: E.

Za najviši dio postolja Petru je potrebno 4 + 4 + 4 = 12 kocaka, za drugi po visini dio postolja potrebno mu je 4 + 4 = 8 kocaka, a za najniži dio postolja 4 kocke. Ukupno je upotrijebio 12 + 8 + 4 = 24 kocke.

Zadatak 2. ECOLIER 2009. - 4 boda

Tomica je izgradio stol od malih kocaka. Koliko ih je upotrijebio?

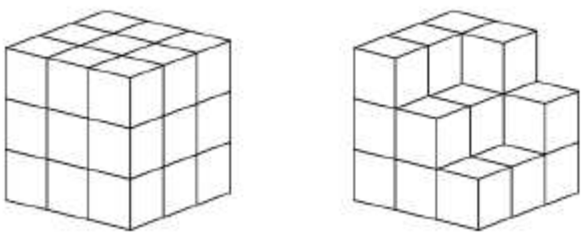
A. 24 B. 26 C. 28 D. 32 E. 36

Rješenje: D.

Za plohu stola trebalo mu je 4·5 = 20 kockica. Za jednu nogu stola trebalo mu je 3 kockice, odnosno za sve 4 noge 4·3 = 12 kockica. Upotrijebio je ukupno 32 kockice.

Zadatak 3. BENJAMIN 2013. - 3 boda

Natalija i Dijana slažu od malih kocaka veliku kocku.Natalija je završila svoju kocku kao što vidimo na lijevoj slici. Koliko još malih kockica mora dodati Dijana svome uratku da i ona dobije kocku koja je jednaka Natalijinoj?



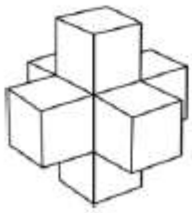
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

Rješenje: C.

Zadatak 4. CADET 2014. - 4 boda

Od sedam jediničnih kocki (kocka kojoj je brid jednak jedinici) Karlo je sastavio tijelo kao na slici. Koliko takvih jediničnih kocaka treba dodati da bi dobio kocku brida 3?

A. 12 B. 14 C. 16 D. 18 E. 20

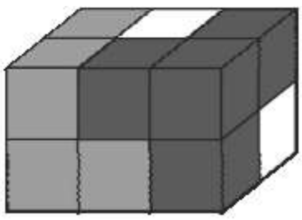


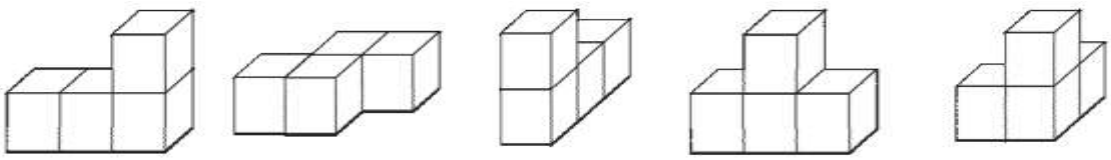
Rješenje: E.

U prvom redu 8, u drugom 4 i u trećem 8, ukupno 20 kocaka,

Zadatak 5. JUNIOR 2012. - 3 boda

Kvadar je složen od tri dijela različitih boja (slika). Svaki dio sastoji se od 4 kocke istih boja. Kako izgleda dio bijele boje?



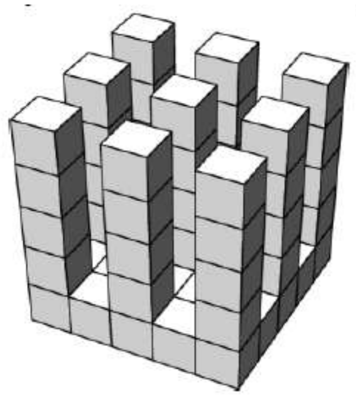


A. B. C. D. E.

Rješenje: D.

Zadatak 6. STUDENT 2014. – 3 boda

Ako izvadimo određeni broj $1\times1\times1$ kockica iz $5\times5\times5$ kocke dobit ćemo tijelo koje se sastoji od stupova iste visine koji leže na istom podnožju, kao na slici. Koliko je kockica izvađeno?

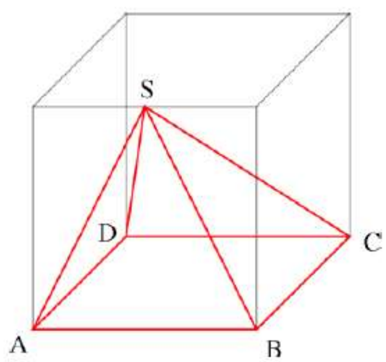


A. 56 B. 60 C. 64 D. 68 E. 80

Rješenje: C.

Zadatak 7. STUDENT 2013. – 3 boda

U kocki na slici vidimo krutu neprozirnu piramidu *ABCDS* s bazom *ABCD.* Vrh piramide *S* leži na polovištu brida kocke. Gledamo piramidu odozgo, odozdo, sprijeda, odozada, s lijeve strane, s desne strane. Koji pogled nećemo uočiti?



A. B. C. D. E.

Rješenje: E.

A – sprijeda, B – strana, C – odozdo, D – odozgo.

Zadatak 8. CADET 2008. – 4 boda

Drvena kocka 11 x 11 x 11 nastala je ljepljenjem 11^3 jediničnih kocaka. Koliko se najviše jedinicnih kocaka može vidjeti gledajuci iz iste točke gledanja?

A. 328 B. 329 C. 330 D. 331 E. 332

Rješenje: D.

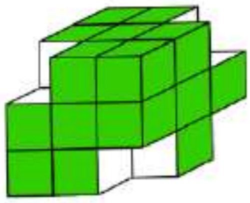
121 + 110 + 100 = 331

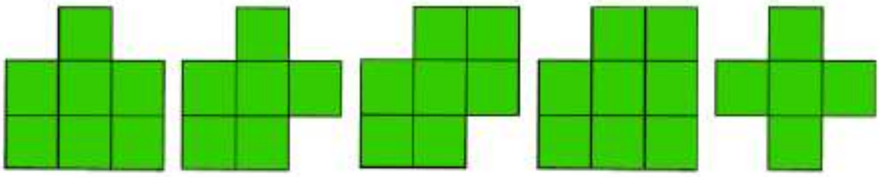
3.7.2 Vizualizacije dvodimenzionalnih prikaza na temelju njihovih trodimenzionalnih oblika

ZADATCI:

Zadatak 9. LEPTIRIĆ 2013. - 5 bodova

Suzana je iz kocke složene od 27 kockica uklonila četiri kockice iz četiri vrha kao na slici. Koristeći strane okrnjene kocke otisnula je nekoliko otisaka. Koliko je otisaka od ponuđenih Suzana uspjela otisnuti?





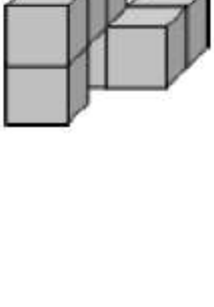
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

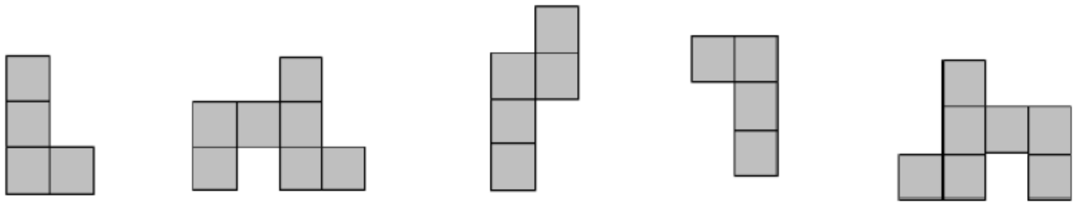
Rješenje: D.

Uspjela je otisnuti sve otiske osim zadnjeg jer nema strane kocke na kojoj su uklonjene kockice iz sva četiri vrha.

Zadatak 10. ECOLIER 2014. - 4 boda

Građevina na slici napravljena je lijepljenjem 8 jednakih kocaka. Kako građevina izgleda odozgo?





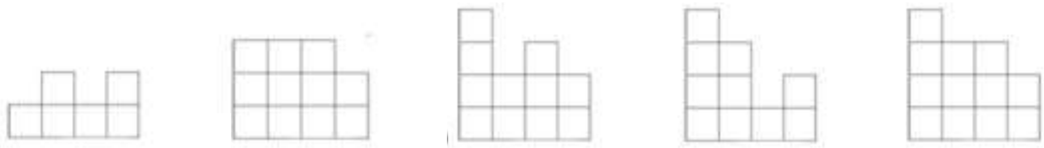
A. B. C. D. E.

Rješenje: C.

Zadatak 11. BENJAMIN 2013. - 4 boda

Ivan je sagradio zgradu od kocki. Na slici vidimo zgradu odozgo. U svakom polju je broj kocki koje su smještene jedna na drugu u obliku tornja. Ako tu zgradu gledamo s prednje strane koju ćemo od sljedećih slika vidjeti ?

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2



A. B. C. D. E.

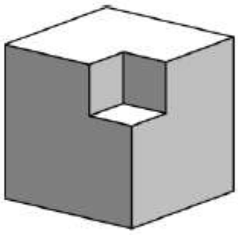
Rješenje: E.

Gledamo uvijek najviši toranj u svakom stupcu.

Zadatak 12. BENJAMIN 2013 – 4 boda

Drvena kocka ima bridove 3 cm. Na uglu je izrezana mala kockica bridova 1 cm. Koliko strana (ploha) omeđuje tijelo koje nastaje kad na svakom uglu kocke izrežemo po jednu kockicu?

A. 16 B. 20 C. 24 D. 30 E. 36



Rješenje. D

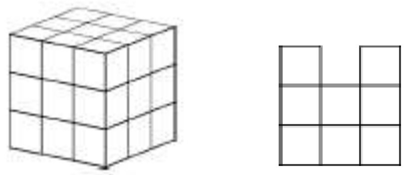
Izrezivanjem male kockice dobivamo 3 nove strane. Izrezali smo 8 kockica te je $3 \cdot 8 + 6 = 30$.

3.7.3 Vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju njihovih dvodimenzionalnih prikaza

ZADATCI:

Zadatak 13. BENJAMIN 2014. – 5 bodova

Na slici desno je kocka koja je sastavljena od 27 malih kockica. Koliko malih kockica moramo oduzeti od velike kocke da bi nam pogled prednje strane bili kao na donjoj slici.

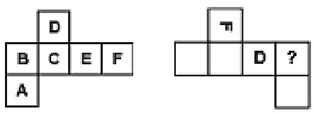


A.5 B.6 C.7 D.8 E.9

Rješenje: D.

Zadatak 14. BENJAMIN 2006. - 5 bodova

Strane kocke označene su slovima. Prva slika prikazuje jednu od mogućih mreža kocke, a druga slika je također jedna od mreža te kocke. Koje se slovo nalazi ispod znaka upitnika?



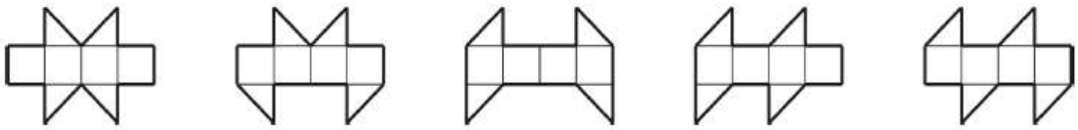
A. A B. B C. C D. E E. Nemoguće je odrediti.

Rješenje: D.

U prvoj mreži baze su bile D i A, a u drugoj su F i C. Na traženom mjestu je strana E.

Zadatak 15. CADET 2013. - 4 boda

S kojom od slijedećih mreža ne možemo sastaviti kocku?



A. mreža 1 B. mreža 2 C. mreža 3 D. mreža 4 E. mreža 5

Rješenje: C.

3.8 Koordinatna geometrija

Geometrijske oblike možemo opisati pomoću njihovog položaja, tj. lokacije u ravnini ili prostoru, za čije precizno određenje koristimo različite koordinatne sustave. Učenici trebaju biti sposobni odrediti položaj i opisati prostorne odnose upotrebom koordinatne geometrije, a zadatci u ovoj kategoriji upravo to provjeravaju. Prema Nacionalnom okvirnom kurikulumu ishodi ovih zadataka su:

I. Matematički procesi

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

- postaviti i analizirati jednostavniji problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

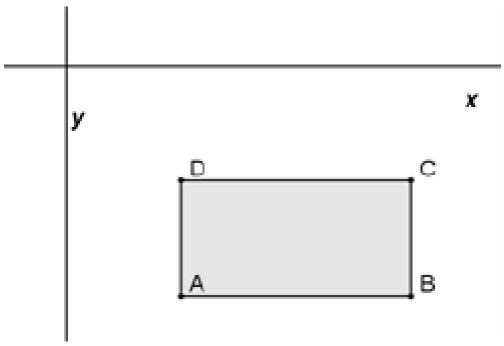
- nacrtati u pravokutnomu koordinatnomu sustavu u ravnini točku zadanu koordinatama te očitati koordinate točke.

Zadatak 1. CADET 2013 – 4 boda

Stranice pravokutnika *ABCD* paralelne su sa koordinatnim osima. *ABCD* leži ispod osi *x* i desno od osi *y*. Koordinate točaka *A*, *B*, *C*, *D* su cijeli brojevi. Za svaku točku odredite vrijednost $\frac{y}{x}$. Koja od četiri točke ima najmanju vrijednost?

A. *A* B. *B* C. *C* D. *D* E. Ovisi o pravokutniku.

Rješenje: A.



Budući je $y < 0$, onda je $y : x$ to manji što je $|y : x|$ veći. $|y : x|$ je to veći što je x manji, a $|y|$ veći. Najmanji x, a najveći $|y|$ ima točka *A*.

Zadatak 2. JUNIOR 2014. - 3 boda

Toma je u koordinatnom sustavu nacrtao kvadrat. Jedna njegova dijagonala leži na osi *x*. Koordinate vrhova na osi *x* su (−1,0) i (5,0). Što su od navedenoga koordinate još jednog vrha tog kvadrata?

A. (2,0) B. (2,3) C. (2,−6) D. (3,5) E. (3,−1)

Rješenje: B.

Sjecište dijagonala ovog kvadrata polovište je dužine kojoj su krajnje točke $(-1,0)$ i $(5,0)$. To je točka $(2,0)$. Dijagonale kvadrata su međusobno okomite, jednake du duljine i raspolavljaju se. Stoga druga dijagonala prolazi točkom $(2,0)$ okomito na x-os, a svaki vrh kvadrata udaljen je za 3 od središta. Sada je jasno da su preostala dva vrha kvadrata točke $(2,3)$ i $(2,-3)$.

3.9 Malo složeniji zadatci

U ovoj kategoriji nalaze se zadatci za koje je potrebno više vremena za rješavanja i nisu toliko trivijalni kao neki prethodno riješeni, a uz to zahtijevaju veće matematičko znanje i razumijevanje pojmova te povezivanje. Prema tome, ovi zadatci su poduprijeti sljedeće navedenim ishodima iz Nacionalnog okvirnog kurikuluma.

I. Matematički procesi

2.Povezivanje

Učenik\ca će:

- uspostaviti i razumjeti veze i odnose među matematičkim objektima i pojmovima te rješavati zadatke njihovim povezivanjem.

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

Učenik\ca će:

- kreativno, kritički i fleksibilno misliti
- postaviti i analizirati problem, isplanirati njegovo rješavanje odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka te ga riješiti.

II. Matematički koncepti

3. Oblik i prostor

Učenik\ca će:

- prepoznati ravninske oblike i njihova svojstva
- prepoznati i primijeniti sukladnost i sličnost geometrijskih oblika.

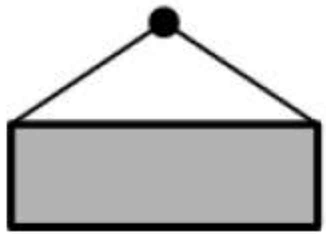
4. Mjerenje

Učenik\ca će:

- odrediti mjeriva obilježja likova i tijela primjenjujući osnovne formule, proporcionalnost, sličnost, Pitagorin poučak, Teorem o središnjem i obodnom kutu i Talesov poučak te ih rabiti u računanju duljine, mjere kuta, površine i opsega geometrijskih likova.

Zadatak 1. JUNIOR 2014. - 4 boda

Pavao je stavio pravokutne slike na zid. Za svaku sliku postavio je čavao na visini 2.5 m od poda i spojio je nit duljine 2 m na dva gornja ugla slike. Koja od sljedećih slika je najbliža podu (format slike: širina u cm × visina u cm) ?



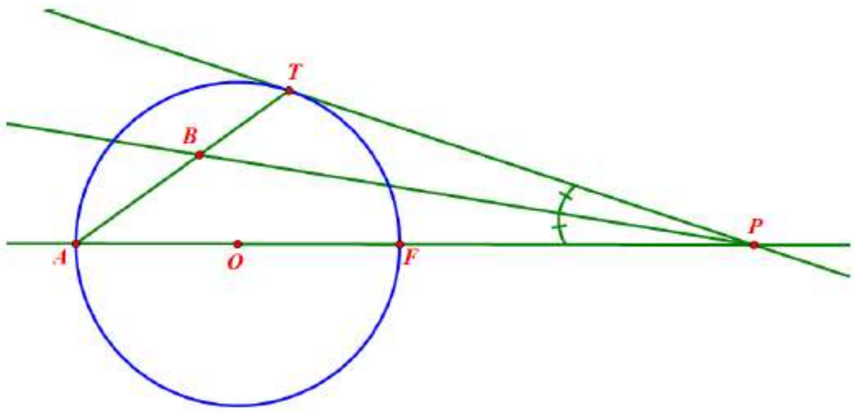
A. 60×40 B. 120×50 C. 120×90 D. 160×60 E. 160×100

Rješenje:

Udaljenost slike od poda dobit ćemo tako da od 2.5 m oduzmemo udaljenost od čavla do slike i visinu slike. Udaljenost od čavla do slike dobijemo primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut kojem je hipotenuza polovica niti, a jedna kateta polovica širine slike. Označimo li format slike sa $a \times b$ (u metrima. udaljenost slike od poda dana je izrazom $2.5-\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}+b\right)$.

Zadatak 2. JUNIOR 2014. - 5 bodova

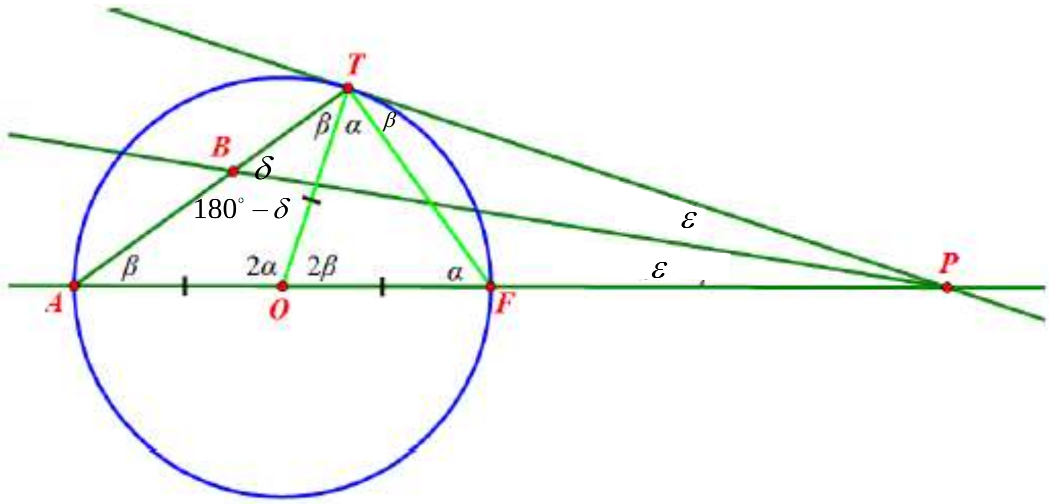
Na slici je pravac PT tangenta kružnice sa središtem u točki *O*, a pravac PB simetrala je kuta $\sphericalangle TPA$. Odredi kut $\sphericalangle TBP$.



A. 30° B. 45° C. 60° D. 75° E. Ovisi o položaju točke *P*.

Rješenje: B.

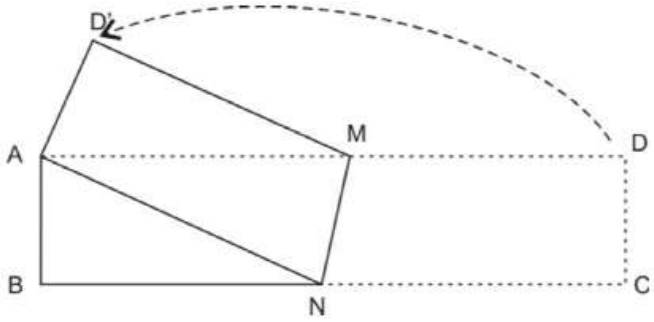
Označimo α i β kuteve kao na slici. Vrijedi da je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Kako su trokuti *AOT* i *OFT* jednakokračni, tada za kutove vrijedi $x = 2\alpha$ i $y = 2\beta$. Nadalje označimo:



U trokutu *BTP* vrijedi $\delta+\gamma+\varepsilon=180^\circ$ i $\gamma=90^\circ+\beta \Rightarrow \delta+90^\circ+\beta+\varepsilon=180^\circ$. Iz toga slijedi $\delta+\beta+\varepsilon=90^\circ$. U trokutu *APB* vrijedi $\beta+180^\circ-\delta+\varepsilon=180^\circ \Rightarrow \delta=\beta+\varepsilon$. Prema tome je $2\delta=\sphericalangle TBP=90^\circ$, odnosno $\delta=\sphericalangle TBP=45^\circ$.

Zadatak 3. STUDENT 2012. – 3 boda

Papir *ABCD* oblika pravokutnika sa stranicama duljina 4 cm i 16 cm presavijen je preko pravca *MN* tako da je vrh *C* poklopio s vrhom *A*, kao što je prikazano na slici. Kolika je površina četverokuta *ANMD'* ?



A. 28 cm^2 B. 30 cm^2 C. 32 cm^2 D. 48 cm^2 E. 56 cm^2

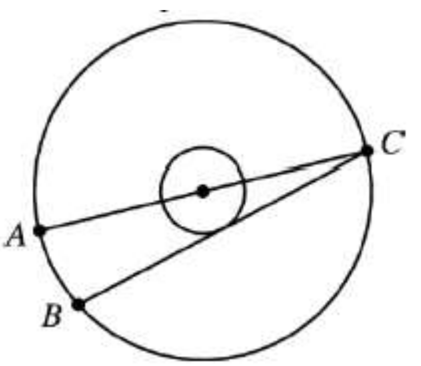
Rješenje: C.

Neka je $|BN|=x$, tada je $|CN|=|NA|=16-x$. Za duljine stranica pravokutnog trokuta ABN vrijedi: $4+x^2=(16-x)^2$, a odatle je $x=|BN|=7.5$ cm i $|CN|=8.5$ cm. Pravac *AN* je presječnica usporednih pravaca *BC* i *AD* pa je $\sphericalangle BNA\cong\sphericalangle NAM$, a pravac *AD* je presječnica usporednih pravaca AN i MD' pa je $\sphericalangle NAM\cong\sphericalangle AMD'$. U trokutima *ABN* i *AD'M* imamo tri para sukladnih kutova ($\sphericalangle BNA\cong\sphericalangle AMD', \sphericalangle NBA\cong\sphericalangle AD'M=90^\circ$) i jedan par stranica jednake duljine $|AB|=|AD'|$, pa su trokuti *ABN* i *AD'M* sukladni (K-S-K teorem o sukladnosti trokuta). Sukladni trokuti imaju jednake površine, pa se površina četverokuta *ANMD'* može izračunati zbrajanjem površina trokuta *AD'M* i *ANM*.

$P(ABN) = P(AD'M) = \frac{4 \cdot 7.5}{2} = 15 \text{ cm}^2$. Trokut ANM je trokut u kojem je visina na stranicu $\overline{AM}$ jednake duljine kao i kraća stranica pravokutnika *ABCD*, pa je $P(ANM) = \frac{|AM| \cdot |AB|}{2} = \frac{8.5 \cdot 4}{2} = 17 \text{ cm}^2$. Dakle, $P(ANMD') = 15 + 17 = 32 \text{ cm}^2$.

Zadatak 4. STUDENT 2014. - 4 boda

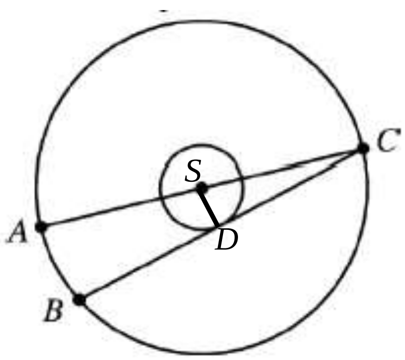
Radijusi dvije koncentrične kružnice odnose se u omjeru 1 : 3. $\overline{AC}$ dijametar je velike kružnice, $\overline{BC}$ tetiva je velike kružnice koja je ujedno tangenta male kružnice, duljina dužine $\overline{AB}$ je 12. Tada je radijus velike kružnice?



A. 13 B. 18 C. 21 D. 24 E. 26

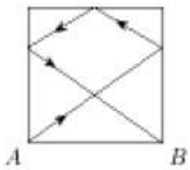
Rješenje: B.

Označimo dirałište tangente i male kružnice s *D*, a središte obiju kružnica sa *S*. Trokut *SDC* pravokutan je s pravim kutom kod vrha *D* (zbog tangente). Trokut *ABC* pravokutan je s pravim kutom kod vrha *B* (Talesov poučak). Ova dva trokuta imaju i jedan zajednički kut (kod vrha *C)* pa su slični. Postavimo omjer $|AB|:|SD| = |AC|:|SC|$, tj. $12 : r = 2R : R$ iz čega imamo r = 6 pa je R = 18.



Zadatak 5. STUDENT 2009. – 5 bodova

Na biljarskom stolu kvadratnog oblika stranice duljine 2 m, lopta je izbačena iz kuta A. Nakon što je dotakla tri strane stola, kao što to pokazuje slika, lopta se vratila u kut B. Kolika je duljina puta lopte od kuta A do kuta B?



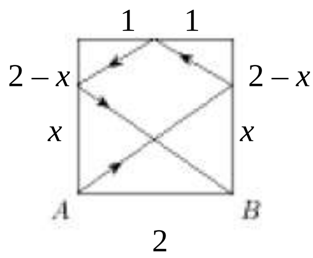
(Napomena: Na mjestima gdje lopta dotiče stranu stola, kut upadanja jednak je kutu odbijanja.)

A. 7 B. $2\sqrt{13}$ C. 8 D. $4\sqrt{3}$ E. $2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

Rješenje: B.

Dva veća pravokutna trokuta s pravim kutovima u vrhu *A*, odnosno *B* su sukladna. Njihove katete su duljina 2 m i *x* m.

.



Na nasuprotnoj dužini dužine $\overline{AB}$ imamo također dva sukladna pravokutna trokuta s katetama duljina 1m i (2 – *x*) m. Veliki i mali pravokutni trokuti su slični pa vrijedi $x : 2 = (2 - x) : 1$, odakle je $x = \frac{4}{3}$ m. Lopta se kreće po hipotenuzama četiri pravokutna trokuta pa je ukupni put lopte $2\frac{2\sqrt{13}}{3} + 2\frac{\sqrt{13}}{3} = 2\sqrt{13}$ m.

Zadatak 6. STUDENT 2012. - 5 bodova

Kvadrat *ABCD* ima stranice duljine 2 cm. Točke *E* i *F* su redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$. Točka *G* je točka na dužini $\overline{CF}$ takva da vrijedi $3|CG| = 2|GF|$. Površina trokuta *BEG* iznosi:

A. $\frac{7}{10}$ cm^2 B. $\frac{4}{5}$ cm^2 C. $\frac{8}{5}$ cm^2 D. $\frac{3}{5}$ cm^2 E. $\frac{6}{5}$ cm^2

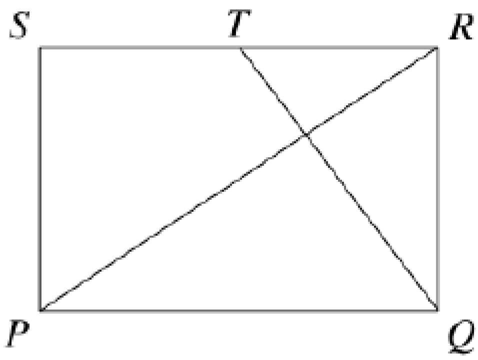
Rješenje: B.

Iz $3|CG| = 2|GF|$ slijedi da je $|CG|:|GF| = 2:2 = 2k:3k$.

Neka je $x = |MF|$ i $y = |MA|$. Produljimo li dužine $\overline{CF}$ i $\overline{AB}$ redom preko točaka *A* i *F*, dobit ćemo slične pravokutne trokute *MBC* i *MAF* (slični su po poučku K-K-K, $\sphericalangle M$ zajednički i 90˚). Zbog sličnosti slijedi $y:(y+2) = 1:2$, a odatle je y = 2 cm i $|MB| = 4$ *cm.* Analogno je $x = |MF| = |FC| = 5k$. Neka je *N* nožište visine iz vrha *G* na stranicu $\overline{EB}$. Iz sličnosti trokuta *MNG* i *MBC* (slični su po poučku K-K-K) dalje slijedi $(x+3k):(x+5k) = |NG|:2$, a odatle je $|NG| = \frac{16k}{10k} = \frac{8}{5}$ cm. Prema tome je površina trokuta jednaka $P(BGE) = \frac{|EB||NG|}{2} = \frac{1\cdot\frac{8}{5}}{2} = \frac{4}{5}$ cm^2.

Zadatak 7. STUDENT 2014. - 5 bodova

Dan je pravokutnik *PQRS*. T je polovište stranice $\overline{RS}$, a $\overline{QT}$ je okomito na dijagonalu $\overline{PR}$. Koliki je omjer $|PQ|:|QR|$?



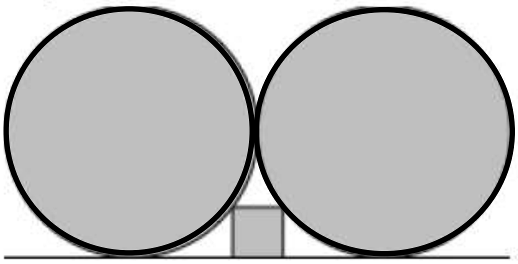
A. 2:1 B. $\sqrt{3}$:1 C. 3:2 D. $\sqrt{2}$:1 E. 5:4

Rješenje: D

Trokuti PQR i QRT su slični pa imamo omjer $|TR|:|QR|=|QR|:|PQ|$ tj.vrijedi $\frac{1}{2}|PQ|:|QR|=|QR|:|PQ|$. Iz toga slijedi $|QR|^2=\frac{1}{2}|PQ|^2$, pa je omjer jednak $\frac{|PQ|}{|QR|}=\sqrt{2}$.

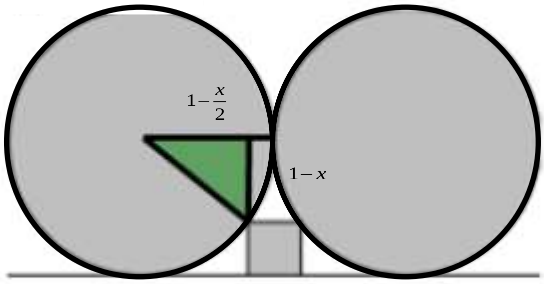
Zadatak 8. STUDENT 2014. - 5 bodova

Kvadrat je smješten između horizontalnog pravca i dvije kružnice radijusa 1 koje se međusobno dodiruju i koje diraju pravac, kao na slici. Kolika je duljine stranice ovog kvadrata?



A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{5}$ E. $\frac{1}{2}$

Rješenje: A.



Označimo sa x duljinu stranice kvadrata. Trokut istaknut na slici pravokutan je s katetama duljina $1-\frac{x}{2}$ i $1-x$ i s hipotenuzom duljine 1. Pitagorin poučak nam daje jednadžbu $1^2=(1-\frac{x}{2})^2+(1-x)^2$, tj. $\frac{5}{4}x^2-3x+1=0$ čija su rješenja 2 i $\frac{2}{5}$. Rješenje 2 nema smisla.

Zadatak 9. STUDENT 2014. - 5 bodova

Dva pravilna mnogokuta duljine stranice 1 leže sa suprotnih strana njihove zajedničke stranice $\overline{AB}$. Jedan od njih je 15-terokut $ABCD\ldots$, a drugi je n-terokut $ABZY\ldots$ Za koji n će udaljenost $|CZ|$ biti jednaka 1?

A. 10 B. 12 C. 15 D. 16 E. 18

Rješenje: A.

Trokut BCZ jednakostraničan je pa su njegovi kutovi 60°. Unutarnji kut pravilnog 15-terokuta iznosi 156°. Zbroj kutova oko vrha β treba biti 360° pa imamo 156° + 60° + α = 360° iz čega vidimo da je unutarnji kut n-terokuta α = 144°. Sada iz jednakosti $144^\circ = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ imamo n = 10.

Poglavlje 4.
Strategije rješavanja zadataka

Najveći stupanj učenikove aktivnosti na nastavi matematike postiže se upravo rješavanjem matematičkih zadataka (problema), što je i jedan od najefikasnijih oblika učenja. Postoje različite općenite metode za rješavanje matematičkih problema, odnosno zadataka, koje mogu učeniku pomoći i olakšati rješavanje zadatka, a razne metode koje učenik usvoji prilikom rješavanja zadataka može primjenjivati i u sličnim životnim situacijama. Moguće strategije rješavanja geometrijskih problema su:

- metoda pokušaja i promašaja
- grafička metoda
- metoda uočavanja pravilnosti
- metoda razlaganje problema na potprobleme
- metoda promjene fokusa
- algebarska metoda.

Najčešća primjenjiva metoda u ovakvom tipu natjecanja s ponuđenim odgovorima jest metoda pokušaja i promašaja. Učenici zadatak rješavaju naslućivanjem njegova rješenja ili postupka koji vodi rješenju te provjerom, odnosno uvrštavanjem konkretnih, pogodno odabranih vrijednosti (rješenja) u postavljeni izraz (zadatak) i na taj način eliminiraju neke od ponuđenih odgovora. Ovu strategiju mogli bismo zvati i „*Pokušaj i vidi što možeš pronaći ili zaključiti!*“ ([2]).

Iako, pogađanje može potrajati dulje nego li rješavanje zadatka nekom drugom strategijom, ali isto tako se moze dogoditi da rješenje pogodimo i otprve. Iz tog razloga bolji pristup je ako se metodu pokušaja i promašaja kombinira s logičkim zaključivanjem ([1]). Većina zadataka u kategoriji Klasifikacija geometrijskih likova, Geometrijske transformacije te Prikazivanje trodimenzionalnih tijela (Volumen tijela) može se riješiti primjenom ove metode. U ostalim kategorijama pogodno ju je kombinirati s nekom drugom, kako bi prvo eliminirali neke odgovore, a do konkretnog rješenja došli nekom drugom strategijom. Također učinkovita strategija u kategorijama Otkrivanje pravilnosti, Klasifikacija geometrijskih likova i Geometrijske transformacije je grafička metoda. Grafička metoda se u literaturi naziva još i metoda modela, odnosno odnosno model zornije prikazuje odnose i veze medu promatranim objektima od opisa situacije riječima. U toj metodi bitno je načelo zornosti, a zadatak rješavamo prostorno-vizualnim organiziranjem podataka ([2]), tj. crtanjem različitih dijagrama ili u slučaju zadataka na ovom natjecanju docrtavanjem na već postojeću sliku u zadatku (OU - 1, 2, 3, 8; KGL - 8, 9, 10, 14, 20; GS - 1, 2). Ako u konačnici učenici zadatak riješe na neki drugi način, crtež im može pomoći dajući ”osjećaj“ za problem i navodeći na ideje ili moguće odgovore. Još jedna efikasna metoda koju možemo upotrijebiti prilikom rješavanja zadataka na ovakvom natjecanju jest metoda uočavanja pravilnosti. Matematika je znanost o pravilnostima, tj. zakonitostima, a uočavanje pravilnosti, odnosno zakonitosti u (matematičkim) objektima ključna je metoda istraživanja u matematici te se primjenjuje se u svim područjima matematike ([2]). Prema tome, i posebna kategorija zadataka u ovom diplomskog radu se i zove Otkrivanje uzoraka zbog mnogobrojnosti takve vrste zadataka na ovom natjecanju. Također, ta metoda je i učinkovita u kategoriji Geometrijskih transformacija (GT - 4, 5) te nam može pomoći i prilikom lakšeg rješavanja nekih drugih zadataka. Na primjer, ako uočimo pravilnost u zadatku TT- 6 da se u svakom stupcu pojavljuju točno 4 kockice i ako pomnožimo to s brojem stupaca koji nedostaju lakše i brže ćemo izračunati koliko kockica ukupno nedostaje. Metoda koja je zastupljenija pri rješavanju složenijih zadataka je metoda razlaganje problema na potprobleme. Također, pogodno je raščlaniti zadatak na podzadatke pa se na kraju rješenja lakših problema kombiniraju te daju konačni rezultat ([11], str. 51). Na primjer zadatak SZ-6 jest zadatak u kojem se prvo računaju duljine nepoznatih stranica pravokutnih trokuta primjenom sličnosti trokuta i proporcionalnosti, zatim se računaju duljine hipotenuze tih trokuta primjenom Pitagorina poučka, a na kraju se zadatak svodi na zbrajanje svih duljina hipotenuza tih trokuta. Metoda promjene fokusa se zasniva na proučavanju komplementa promatranog skupa umjesto samog skupa. Primjenjuje se u situacijama u kojima je komplement jednostavniji od samog skupa jer je skup opisan kao unija skupova. Recimo, u zadataku MJ - 34 lakše je gledati da je plavo obojena površina jednaka razlici površine velikog kruga i površine četiri upisane crvene kružnice, pri čemu moramo paziti na zeleni dio, odnosno na dio gdje se crvene kružnice preklapaju. Algebraska metoda je metoda koja se zasniva na prevođenju problema zadanog riječima, odnosno nealgebarski, na jezik algebarskih simbola (jezik simbola, jednadžbi i nejednadžbi). Problem koji je preveden na jezik algebarskih simbola rješava se algebarskim metodama, a dobiveno se rješenje interpretira u izvornom kontekstu. Ova se metoda naziva još i Descartesova metoda, u čast René Descartesa, "oca" koordinatne, tj. analitičke geometrije. Ova se metoda često primjenjuje u školskoj matematici, i to pri rješavanju (problemskih) zadataka zadanih riječima koji se svode na linearnu, kvadratnu ili neku drugu jednadžbu ili nejednadžbu ([2]). U matematičkom natjecanju „Klokan bez granica" može se primijeniti u zadatcima riječima kao što su MJ - 7, SZ - 3 i SZ - 5. Tekst zadatka treba prevesti u jezik matematičkih (algebarskih) simbola: svaku od nepoznatih veličina treba označiti pogodnim simbolom (najčešće slovom), i to tako da simbol sugerira što se njime označava (nepoznanice ne moraju uvijek biti označene slovom x, y i sl.). Svaku zadanu vezu poznatih i nepoznatih veličina treba prevesti u jednadžbu, odnosno nejednadžbu koristeći simbole za nepoznate i brojeve za poznate veličine. Rješavanje zadataka zadanih u izvanmatematičkom kontekstu (na primjer SZ-5 i MJ-7) njihovim prevođenjem u jednadžbe tradicionalno je područje primjene Descartesove metode u nastavi matematike ([2]).

Zaključak

Geometrija je vizualno proučavanje oblika, veličina, obrazaca i pozicija. Prisutna je u svakodnevnom životu svugdje oko nas, koristimo je gradeći, uređujući svijet oko sebe, u umjetnosti, sportu itd. Među općim ciljevima matematičkog obrazovanja u Nacionalnom okvirnom kurikulumu navodi se da će učenici u svom školovanju biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje, pa je izrazito bitno da nastavnik potiče to kod učenika. Različitim pristupima i strategijama razvoj takvog mišljenja može se potaknuti, a tome uvelike mogu pridonijeti i ovakvi „netipični“ zadatci kakvi se pojavljuju u matematičkom natjecanju „Klokan bez granica“. Smatram da se njima mogu zainteresirati učenici svih dobi jer su prilagođeni njihovom uzrastu i koncipirani su na zanimljiviji način nego zadatci iz udžbenika. Djeca se s geometrijom prvi puta susreću kroz igru još u ranom djetinjstvu kada počnu percipirati svijet oko sebe, pa obzirom na to mislim da ćemo ih puno lakše zainteresirati za geometriju kroz zanimljivije, zabavnije i njima pristupačnije zadatke. Sadržajnom analizom geometrijskih zadataka u ovome natjecanju utvrđeno je da se ne pojavljuju trigonometrijski omjeri te općenito trigonometrija u geometrijskim zadatacima te da se geometrijski koncepti prvenstveno baziraju na znanju iz osnovne škole. Također, u geometrijskim zadatacima nema niti analitičke geometrije iako je ona, kao i trigonometrija, dosta u srednjoj školi zastupljena. Rijetko koji se zadatak nađe vezan uz koordinatni sustav. Na primjer, među zadatcima se ne pojavljuju uvjeti okomitosti i paralelnosti pravaca, odnosi pravaca i ravnina u prostoru, jednadžbe pravaca u bilokojem obliku, elipse, hiperbole, parabole itd. Proučavanjem zadataka također se zaključuje da se većina toga temelji na elementarnoj geometriji (sintetičkoj geometriji) i osnovnim znanjima iz tog područja te geometriji prostora, odnosno stereometriji. U zadatcima se često traži primjena teorema o sukladnosti i sličnosti trokuta, poznavanje formula za površinu raznih geometrijskih likova i tijela, poznavanje osnovnih pojmova vezanih uz geometrijske likove i tijela te mjerenje. U stereometriji se stavlja veliki naglasak na intuitivnu razinu projiciranja i misaone vizualizacije. Općenito, kompleksnost zadataka varira, pa tako u višim kategorijama natjecanja zadatci su kompleksniji te se u njima traži određeno povezivanje matematičkih koncepata. Usprkos ograničenjima u matematičkom sadržaju, primjerice, u kategoriji Student nalaze se malo izazovniji zadatci u kojim se dobro vidi koliko učenik dobro razumije koncepte te povezuje gradivo te se od njega očekuje malo složenije povezivanje. Kao i svi zadatci, pa tako i geometrijski zadatci u matematičkom natjecanju „Klokan bez granica“, potiču učenike na pravilan izbor i razlučivanje, čime se potiče razvoj geometrijskog mišljenja, ali prvenstveno tim zadatcima populariziramo matematiku te motiviramo učenike da se bave matematikom izvan redovitih školskih programa.

Bibliografija

[1] Z. Bogdanović, *Strategije rješavanja matematičkih zadataka u nižim razredima osnovne škole*, Istraživanje matematičkog obrazovanja, Vol. V, Broj 8 (2013), 67–74, dostupno na http://www.imvibl.org/dmbl/meso/imo/imo_vol_5_2013/imo_vol_5_2013_ 8_67_74.pdf (listopad 2016.)

[2] A. Čižmešija, *Poučavanje i učenje matematike rješavanjem problemskih zadataka*, materijali s predavanja na kolegiju Metodika nastave matematike 4, Zagreb, 2015./2016.

[3] A. Čižmešija, *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike*, materijali s predavanja na kolegiju Metodika nastave matematike 4, Zagreb, 2015./2016.

[4] A. Čižmešija, R. Svedrec, N. Radović, T. Soucie, *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole*, Zbornik radova 4.kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske (P. Mladinić i R. Svedrec), HMD, Zagreb, 2010, 143-162.

[5] M. Ćulav-Markičević, ed, *Matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ 2012-2014*, HMD, Zagreb, 2015.

[6] M. De Villiers, *Rethinking Proof*, Key Curiculum Press, 2003.

[7] J. Kličinović, *Van Hieleove razine geometrijskog razmišljanja*, dostupno na https://sites.google.com/site/normalaskup/josip (listopad 2016.)

[8] N. Lukač, ed, *Matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ 1999-2004,* HMD, Zagreb, 2005.

[9] N. Lukač, ed, *Matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ 2005-2008,* HMD, Zagreb, 2009.

[10] N. Lukač, ed, *Matematičko natjecanje „Klokan bez granica“ 2009-2011*, HMD, Zagreb, 2012.

[11] D. Mišanec, *Strategije rješavanja geometrijskih problemskih zadataka u nastavi matematike*, dostupno na http://digre.pmf.unizg.hr/4033/1/Diplomski%20rad%20(Dario%20Mi%C5%A1anec).pdf (listopad 2016.)

[12] A. D. Romano, *Van Hieleova teorija o učenju geometrije*, Metodički obzori, Vol 4, 1-2 No.7-8 (2009), 95 – 103, dostupno na hrcak.srce.hr/45746 (listopad 2016.)

[13] HMD – Hrvatsko matematičko društvo, izvor slika u diplomskom radu, dostupno na http://www.matematika.hr/klokan/ (rujan 2016.)

[14] A. Horvatek, izvor slika u diplomskom radu, dostupno na http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan-bez-granica.htm (rujan 2016.)

[15] Nacionalni okvirni kurikulum za predškolski odgoj i obrazovanje te opće obvezno i srednjoškolsko obrazovanje, dostupno na http://mzos.hr/datoteke/Nacionalni_okvirni_kurikulum.pdf (listopad 2016.)

Sažetak

Temeljni cilj matematičkog natjecanja „Klokan bez granica“ je popularizacija matematike i širenje osnovne matematičke kulture. Namjera je motivirati učenike da se bave matematikom izvan redovitih školskih programa. U ovom diplomskom radu posebno su istaknuti geometrijski zadatci u tom natjecanju te su razvrstani u devet kategorija, ovisno o kojem području geometrije se bave te su u svakoj kategoriji navedeni ishodi koji se tim zadatcima propituju. Iako živimo u svijetu u kojem nas okružuje geometrija, učenici doživljavaju geometrijske zadatke kao teške i ne povezuju ih sa stvarnim svijetom s kojim je geometrija zapravo toliko isprepletena. To je upravo jedna od ključnih razlika zadatka u matematičkom natjecanju „Klokan bez granica“ od zadataka iz udžbenika. Iz tog razloga, bitno je učenicima prikazati i ovakve tipove zadataka, kako bi se možda njihov stav prema geometriji promijenio, ali i kako bi ih više zainteresirali i potaknuli na različite načine razmišljanja i pristupe rješavanja geometrijskih problema. Prilikom rješavanja „zabavnijih“ zadataka kao što su u ovom natjecanju učenici će se više angažirati jer su im srodniji i zanimljiviji te pritom može doći do razvoja njihove kreativnosti, a samim time i boljeg geometrijskog mišljenja.

Summary

The basic objective of mathematical competition „Kangaroo without borders“ is to popularize mathematics and to spread basic mathematical culture. The intention is to motivate students to practice math outside the regular school programs. In this thesis we analayze geometric problems from this competition. They are classified into nine categories and in each category learning outcomes that are connected to them are listed. Although we live in a world where we are surrounded by geometry, pupils experience geometric problems as difficult and do not connect them to the real world with which geometry actually is so intertwined. Problems in math contest „Kangaroo without borders“ are more related with the real world problems and this is one of the key differences of tasks from textbooks. For this reason, it is important to show students these types of problems, in order to perhaps change their attitude towards geometry, or just to make them more interested for geometry and encourage different ways of thinking and approaches to solve geometric problems. When dealing with "entertaining" problems, such as in this competition, students will be more engaged and solving these problems will result in the development of their creativity, and therefore better geometric reasoning.

Životopis

Rođena sam 02.ožujka 1993. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu grofa Janka Draškovića u Vrapču te sam je završila 2007. Iste godine sam nastavila svoje školovanje u XVI. gimnaziji u Zagrebu. Budući da je moja ljubav prema matematici postala sve izraženija, zajedno s mojom željom za podučavanjem, upisala sam 2011. godine preddiplomski studij Matematika - nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija, 2014. godine, upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Tijekom diplomskog studija volontirala sam u Učeničkom domu Antun Gustav Matoš u Zagrebu gdje sam održavala pripreme za državnu maturu učenicima te sam također dobila stipendiju Sveučilišta u Zagrebu za akademsku godinu 2014./2015. te 2015./2016.