Regresijski model povjerenja

Velić, Ana

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ana Velić

Regresijski model povjerenja

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Miljenko Huzak

Zagreb, studeni 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

Osiguranje je jedan oblik upravljanja rizikom, prvenstveno usmjeren na smanjenje financijskih gubitaka. Osnovna ideja je da osiguranici, pojedinac ili grupa, uplatom premije osiguranja, prenose rizik na osiguravajuće društvo. Teorija povjerenja dio je aktuarske matematike koji se koristi za određivanje premije povjerenja. Osiguravajućim društvima od velike je važnosti mogućnost izračuna što točnije premije povjerenja kako bi bili što konkurentniji na tržištu. Glavna ideja je da se pojedinci koji se izlažu istom riziku svrstaju u istu grupu, koja se naziva kolektiv.

Ovaj rad baziran je na regresijskom modelu povjerenja. On omogućava definiranje premije povjerenja i procjenitelja povjerenja, kao linearne funkcije poznatih kovarijata. Naime, relacija između šteta i kovarijata zadana je linearnim regresijskim modelom. Posebna pažnja posvećena je jednostavnom regresijskom slučaju u kojemu je vrijeme kovarijata.

Dakle, u prvom poglavlju predstavljeni su osnovni pojmovi teorije povjerenja. Kroz matematičku formulaciju problema procjene rizika navedene su definicije točne individualne, kolektivne te bayesovske premije kao i njihovi međusobni odnosi.

Premija se općenito ne može egzaktno izračunati, stoga se u drugom poglavlju, procjenitelja za individualnu premiju traži među linearnim funkcijama uzorka. Takvi procjenitelji nazivaju se procjenitelji povjerenja, te se u trećem poglavlju promatraju u višedimenzionalnom modelu povjerenja. Nakon uvođenja procjenitelja povjerenja i višedimenzionalnog modela povjerenja, u četvrtom poglavlju dolazi se do regresijskog modela povjerenja.

1 Matematička formulacija problema procjene rizika

1.1 Individualni rizik i točna individualna premija

Neka je sa X_j označen ukupan iznos šteta za promatranog pojedinca u godini j ili u nekom drugom dobro definiranom razoblju $j, j = 1, ...n$. Veličine $X_j, j = 1, ..., n$ matematički se interpretiraju kao slučajne varijable.

Na temelju podataka o štetama promatranog pojedinca u prethodnim periodima, $\mathbf{X}$=$(X_1, ...X_n)$', cilj je odrediti njegovu premiju rizika ukupne štete za nadolazeći period, tj. njegovu očekivanu štetu u idućem periodu. U tu svrhu potrebno je imati određene pretpostavke na funkciju distribucije $F(x)$ slučajne varijable X_j.

Standardne pretpostavke funkcije distribucije:

A1: *stacionarnost:* Sve slučajne varijable X_j su jednako distribuirane s funkcijom distribucije $F(x)$

A2: *nezavisnost:* Slučajne varijable $X_j, j = 1, ..., n$ su nezavisne (za danu funkciju distribucije $F(x)$).

Napomena:

- Pretpostavka A1 potrebna je kako bi se uspostavila veza između prošlosti i budućnosti.

U osiguravajućoj praksi često se nailazi na situaciju kada je F nepoznata i varira među rizicima. U matematičkoj statistici, obzirom na mogućnost parametrizacije, F je označen sa F_ϑ, gdje je ϑ nepoznati parametar koji varira među rizicima. ϑ naziva se profil rizika, te se općenito uzima da je ϑ element nekog apstraktnog skupa Θ.

Princip računanja premije H je funkcija koja slučajnoj varijabli X pridružuje realni broj $H(X)$:

$$X \longmapsto H(X)$$

Neki dobro poznati principi računanja premija:

- Princip očekivanja: $X \longmapsto (1 + \alpha)E[X], \alpha > 0;$
- Princip standardne devijacije: $X \longmapsto E[X] + \beta\sigma(X), \beta > 0;$

- Princip varijance: $X \longmapsto E[X] + \gamma\sigma^2(X), \gamma > 0$;
- Eksponencijalni princip: $X \longmapsto \frac{1}{\delta}\ln E[e^{\delta X}], \delta > 0$;

Za svaki od navedenih principa, premiju $H(X)$ moguće je raščlaniti na čistu premiju rizika $E[X]$ i pozitivni ostatak rizika određen sa parametrima α, β, γ i δ. Može se primijetiti da je čistu premiju rizika $E[X]$ moguće dobiti principom očekivanja uz $\alpha = 0$.

Osiguravajuća društva primorana su, kako bi redovito ispunjavala svoje obveze prema osiguranicima u nepovoljnim godinama, držati kapital za pričuvu. Kapital za pričuvu predstavlja pozitivni ostatak rizika, te u njega ulazi i kompenzacija investitorima za izlaganje svog kapitala riziku, koja se promatra kao trošak rizičnog kapitala.

Rezultat primjenjivanja principa H jest točna individualna premija za rizik (s profilom ϑ), koja se označava $H(F_\vartheta)$. Ograničavanjem na promatranje čiste premije rizika dolazi se do definicije točne individualne premije rizika.

Definicija 1.1. T*očna individualna premija za rizik s profilom rizika* ϑ *jest*

$$P^{ind}(\vartheta) = E_\vartheta[X_{n+1}] =: \mu(\vartheta). \tag{1}$$

Točna individualna premija također se naziva i fer premijom rizika.

Problem određivanja individualne premije stoga se opisuje kao problem određivanja veličine $\mu(\vartheta)$. Naime, u praksi osiguranja, obje veličine ϑ i $\mu(\vartheta)$ su nepoznate, stoga je potrebno tražiti procjenitelja $\hat{\mu}(\vartheta)$ za $\mu(\vartheta)$.

1.2 Problem procjene rizika i premije kolektiva

Osiguravajuća društva osiguravaju različite vrste rizika. Oni se grupiraju u razrede "sličnih rizika" na bazi "objektivnih" karakteristika rizika. Primjerice, u auto osiguranju, neke od tih karakteristika su kapacitet cilindra, vrsta, snaga, težina motora, te individualne karakteristike vozača kao što su dob, spol, regija i slično. U osiguranju od požara bitne karakteristike bi bile, primjerice, tip konstrukcije osiguranog objekta, vrsta posla koja se obavlja u tom objektu ili mogućnost gašenja požara u tom objektu.

Bitna značajka teorije povjerenja jest da se svaki rizik ne gleda zasebno, već ga se promatra kao dio grupe "sličnih" rizika, koji se onda nazivaju kolektiv. Svaki rizik iz kolektiva okarakteriziran je svojim individualnim profilom rizika ϑ_i. Paramteri ϑ_i elementi su skupa $\mathit{\Theta}$, gdje je $\mathit{\Theta}$ skup svih mogućih vrijednosti profila rizika za taj kolektiv.

Obzirom da se rizici u kolektivu razlikuju, razlikuju se i njihove ϑ-vrijednosti. Bitna zajednička poveznica jest da su ϑ-vrijednosti za svaki rizik iz istog skupa $\mathit{\Theta}$, stoga se kaže da je kolektiv grupa sličnih rizika.

Specijalni slučaj jest homogeni kolektiv, gdje se $\mathit{\Theta}$ sastoji od samo jednog elementa i svaki član tog skupa ima isti profil rizika. Naime, u praksi to nije slučaj.

Osiguravateljima su ϑ-vrijednosti određenih rizika u kolektivu nepoznate, no temeljem *a priori* spoznaje i statističkih informacija, moguće je saznati neke pojedinosti o strukturi kolektiva. Primjerice, podatak da većina vozača predstavlja "dobar" rizik, obzirom na slabu učestalost šteta, dok samo manji postotak vozača kontinuirano čini štete. Formalno, te informacije mogu se sažeti vjerojatnosnom distribucijom $U(\vartheta)$ na skupu Θ.

Definicija 1.2. *Vjerojatnosna distribucija $U(\vartheta)$ naziva se strukturna funkcija kolektiva.*

$U(\vartheta)$ moguće je interpretirati na više načina:

- *empirijska bayesovska interpretacija*: ukoliko se ϑ u kolektivu promatra kao slučajni uzorak iz fiksnog skupa Θ, tada funkcija $U(\vartheta)$ predstavlja učestalost pojavljivanja ϑ na skupu Θ,

- *čista bayesovska interpretacija*: funkcija distribucije $U(\vartheta)$ interpretira se kao opis osobnog razmišljanja, *a priori* spoznaje te iskustva aktuara.

Prethodnim odjeljkom predstavljena je točna individualna premija, a sada će se pažnja posvetiti premiji kolektiva.

Definicija 1.3. *Premija kolektiva definirana je sa:*

$$P^{coll} = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta) =: \mu_0. \tag{2}$$

Osvrt na do sada definirane premije:

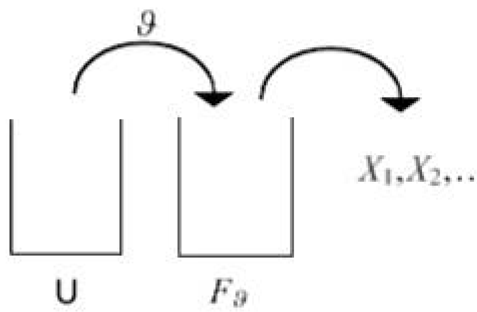
- *točna individualna premija* $P^{ind}(\vartheta) = \mu(\vartheta) = E_{\vartheta}[X_{n+1}]$ odgovara očekivanom iznosu štete individualnog rizika (uz dani profil rizika ϑ) za nadolazeći preiod $n+1$. Obzirom da je ϑ osiguravatelju nepoznat pa mu je time i $\mu(\vartheta)$ nepoznat, potrebno je procijeniti premiju. Naime, u najboljem slučaju, osiguravatelju su na raspolaganju informacije o štetama pojedinog osiguranika za nekoliko prethodnih perioda. Čest je slučaj da su te informacije vrlo ograničene te nisu pouzdan pokazatelj.
- *premija kolektiva* $P^{coll} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta)$ odgovara prosjeku očekivanih iznosa šteta individualnih rizika za cijeli kolektiv. U većini slučajeva ova vrijednost je također nepoznata osiguravatelju, no ipak ovu premiju moguće je procijeniti s velikom preciznošću na osnovu podataka iz prethodnih razdoblja.

Osiguravajućem društvu od velike je važnosti mogućnost izračuna kolektivne premije. Osiguravatelj bi mogao od svakog člana kolektiva zahtijevati jednaku premiju, stoga se nameće pitanje zbog čega je *točna individualna premija* toliko bitna osiguravajućim društvima.

Pri nadmetanju glavni cilj pojedinog osiguravajućeg društva jest ponuditi što bolju fer premiju rizika. Ukoliko neko osiguravajuće društvo ponudi jednaku premiju za svaki rizik u kolektivu, dobri rizici plaćaju previše, a loši premalo. Ukoliko konkurentsko osiguravajuće društvo ponudi raznolikije i više fer premije, ono automatski postaje poželjnije na tržistu. Dolazi do slijevanja dobrih rizika u konkurentsko osiguravajuće drušvo, dok prvo društvo ostaje poželjno samo za loše rizike. Dakle, struktura kolektiva se mijenja.

1.3 Problem procjene premije na jeziku bayesovske statistike

Matematički opis problema procjene premije na jeziku bayesovske statistike najlakše je demonstrirati na tzv. *modelu dvije urne.*



Slika 1: Model dvije urne

Prva urna predstavlja kolektiv sa funkcijom distribucije U. Iz nje se odabire individualni rizik, odnosno njegov profil rizika ϑ . Parametar ϑ određuje sastav druge urne, odnosno funkciju distribucije F_ϑ. Zatim se iz druge urne odabire vrijednosti slučajnih varijabli X_1, X_2,..., koje su nezavisne i jednako distribuirane sa funkcijom distribucije F_ϑ.

Matematički se ovaj model može opisati na sljedeći način:

Svaki rizik je okarakteriziran svojim individualnim profilom rizika ϑ, gdje je ϑ realizacija slučajne varijable Θ te vrijedi:

- uvjetno na događaj $\Theta = \vartheta$, X_1, X_2,... su nezavisne jednako distribuirane s funkcijom distribucije F_ϑ.
- Θ je slučajna varijabla s funkcijom distribucije U.

Opaske:

- Model *dvije urne* matematički opisuje već promatrani problem. Rizici u kolektivu se međusobno razlikuju, svaki ima svoj profil rizika ϑ. Zajednička odrednica im je to što su njihovi profili ϑ_i nezavisno odabrani iz iste urne s funkcijom distribucije U.
- U ovakvoj interpretaciji, individualnu premiju može se promatrati kao slučajnu varijablu. Točna vrijednost individualne premije nije poznata,

no ipak se zna nešto o mogućim vrijednostima $\mu(\Theta)$, te o vjerojatnostima s kojima se te vrijednosti događaju, stoga je prirodno $\mu(\Theta)$ promatrati kao slučajnu varijablu. Dakle, individualna premija definirana sa

$$\mu(\vartheta) = E_{\vartheta}[X_{n+1}] = E[X_{n+1}|\Theta = \vartheta]$$

može se smatrati i slučajnom varijablom $\mu(\Theta)$, što je ustvari uvjetno očekivanje $E[X_{n+1}|\Theta]$.

- Može se primijetiti da su *a priori* svi rizici jednaki. Portfelj se sastoji od boljih i lošijih rizika, no nije u moguće, *a priori*, znati kojem razredu pojedini rizik pripada. Zaključci o pojedinom riziku mogu se donijeti tek nakon promatranja individualnih rizika.

- Za razliku od individualne premije, kolektivna premija

$$P^{coll} = \mu_0 = \int_{\Theta} \mu(\vartheta) dU(\vartheta) = E[X_{n+1}]$$

je fiksni broj obzirom da se radi o bezuvjetnom očekivanju.

- Direktno iz promatranog modela slijedi da su $X_1, X_2, ...$ uvjetno nezavisne za dano $\Theta = \vartheta$, a $\Theta = \vartheta$ određuje F_{ϑ}. Bezuvjetno $X_1, X_2, ...$ su pozitivno korelirane:

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) = E[Cov(X_1, X_2|\Theta)] + Cov(E[X_1|\Theta], E[X_2|\Theta]) = \\ = Cov(\mu(\Theta), \mu(\Theta)) = Var[\mu(\Theta)] > 0^1. \end{aligned}$$

Napomena:

- Kako bi se reducirao broj oznaka, Θ koja je ranije korištena kao oznaka za skup mogućih vrijednosti od ϑ, sada će se koristiti za slučajnu varijablu čija je realizacija ϑ.

Glavni cilj je, za svaki pojedini rizik, procijeniti točnu individualnu premiju $\mu(\Theta)$ što je preciznije moguće. Potencijalni procjenitelj jest kolektivna premija μ_0, koji je prikladan procjenitelj za novi rizik za koji nema podataka o štetama za prethodna razdoblja. U tom slučaju premija se procijenjuje prosjekom očekivanih individualnih rizika za cijeli kolektiv. Bitno je uočiti kako taj procjenitelj uzima u obzir činjenicu da rizik pripada kolektivu čiji

[1] za formulu vidjeti H.Bühlmann, A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and its Aplications*, Springer, 2005

je profil rizika nasumično odabran iz "kolektivne urne" U, no ne zamara se iskustvom individualnih šteta. Ako se neki rizik promatra tijekom razdoblja od n godina, te ako je $\mathbf{X}$ vektor koji označava iznose individualnih šteta za to razdoblje, tada bi ta informacija trebala biti značajna prilikom procjene. Time se dolazi do definicije bayesovske premije, premije temeljene na iskustvu individualnih šteta $\mathbf{X}$.

Definicija 1.4. *Bayesovska premija definirana je sa*

$$P^{bayes} = \tilde{\mu}(\Theta) := E[\mu(\Theta)|\boldsymbol{X}]. \tag{3}$$

2 Procjenitelji povjerenja

Procjenitelja za $\mu(\Theta)$ pokušat će se pronaći među linearnim funkcijama uzorka $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)'$, odnosno tražit će se najbolji procjenitelji u srednjekvadratnom smislu u klasi svih linearnih procjenitelja.

2.1 Procjenitelji povjerenja u jednostavnom kontekstu

2.1.1 Premija povjerenja u jednostavnom modelu povjerenja

Pretpostavke jednostavnog modela povjerenja

i) Slučajne varijable $X_j, j = 1, 2, ..., n$, uz uvjet $\Theta = \vartheta$, su nezavisne i jednako distribuirane sa funkcijom distribucije F_ϑ i sa uvjetnim momentima

$$\mu(\vartheta) = E[X_j|\Theta = \vartheta],$$
$$\sigma^2(\vartheta) = Var[X_j|\Theta = \vartheta].$$

ii) Θ je slučajna varijabla sa funkcijom distribucije $U(\Theta)$. U ovom modelu je

$$P^{ind} = \mu(\Theta) = E[X_{n+1}|\Theta],$$

$$P^{coll} = \mu_0 = \int_\Theta \mu(\vartheta)dU(\vartheta).$$

Može se primijetiti da su, s obzirom na to da je Θ slučajna varijabla, $\mu(\Theta)$ te $\sigma^2(\Theta)$ također slučajne varijable.

Ponovno je cilj pronaći procjenitelja za individualnu premiju $\mu(\Theta)$ uz dano $\mathbf{X}$, no sada se procjenitelj traži među afinim funkcijama danog uzorka. Takav procjenitelj označava se sa P^{cred} ili $\hat{\hat{\mu}}(\Theta)$, te se naziva **procjenitelj povjerenja**.

Dakle, $\hat{\hat{\mu}}(\Theta)$ mora biti oblika

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta) = \hat{a_0} + \sum_{j=1}^n \hat{a_j} X_j.$$

Nadalje, $\hat{\hat{\mu}}(\Theta)$ mora biti takav da mu je srednjekvadratna greška procjene minimalna. Dakle, realni koeficijenti $\hat{a_0}, \hat{a_1}, ..., \hat{a_n}$ moraju zadovoljavati problem minimizacije

$$E[(\mu(\Theta) - \hat{a_0} - \sum_{j=1}^n \hat{a_j} X_j)^2] = \min_{a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}} E[(\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{j=1}^n a_j X_j)^2].$$

Parcijalna derivacija po a_0 daje sljedeću jednadžbu

$$E[\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j] = 0.$$

Koristeći da vrijedi

$$E[X_j] = E[E[X_j|\Theta]] = E[\mu(\Theta)],$$

dobiva se da je

$$a_0 = E[\mu(\Theta)] \cdot (1 - \sum_{j=1}^{n} a_j).$$

Diferencira li se srednjekvadratnu grešku po $a_i, i = 1, ..., n$, dobiva se

$$E[X_i(\mu(\Theta) - a_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j X_j)] = 0.$$

Neka je

$$\begin{aligned} \tau^2 &:= Var[\mu(\Theta)], \\ \mu_0 &:= E[\mu(\Theta)]. \end{aligned}$$

Može se uočiti da vrijedi

$$\begin{aligned} E[X_i\mu(\Theta)] = E[E[X_i\mu(\Theta)|\Theta]] &= E[\mu(\Theta)^2] = Var[\mu(\Theta)] + (E[\mu(\Theta)])^2 = \\ &= \tau^2 + \mu_0^2. \end{aligned}$$

Slično se dobiva za $j \neq k$

$$\begin{aligned} E[X_j X_k] = E[E[X_j X_k|\Theta]] &= E[\mu(\Theta)^2] = Var[\mu(\Theta)] + (E[\mu(\Theta)])^2 = \\ &= \tau^2 + \mu_0^2. \end{aligned}$$

Na kraju se još može uočiti da vrijedi

$$\begin{aligned} E[X_i^2] = E[E[X_i^2|\Theta]] = E[Var[X_i|\Theta]] + E[\mu(\Theta)^2] = \\ = E[Var[X_i|\Theta]] + Var[\mu(\Theta)] + (E[\mu(\Theta)])^2 = \sigma_0^2 + \tau^2 + \mu_0^2, \end{aligned}$$

gdje je

$$\sigma_0^2 := E[Var[X_i|\Theta]] = E[\sigma^2(\Theta)].$$

Sada se parcijalna derivacija po a_i može zapisati kao

$$a_i\sigma_0^2 = (1 - \sum_{j=1}^{n} a_j)(\tau^2 + \mu_0^2 - a_0\mu_0).$$

Odavde se vidi da mora vrijediti $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Neka je sada $\hat{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i$ i $\hat{a} = a_0$. Tada se traženi procjenitelj može zapisati u obliku

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta) = \hat{a} + \hat{b}\overline{X}$$

gdje

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j.$$

Naposljetku se dobiva

$$a = (1-b)\mu_0,$$
$$b = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma_0^2/n} = \frac{n}{n + \sigma_0^2/\tau^2}.$$

Time je dokazano da uz dane pretpostavke jednostavnog modela, procjenitelj povjerenja je dan sa

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta) = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\mu_0, \tag{4}$$

gdje su

$$\mu_0 = E[\mu(\Theta)],$$
$$\alpha = \frac{n}{n + \sigma_0^2/\tau^2}.$$

2.1.2 Kvadratni gubitak premije povjerenja

Premiju povjerenja P^{cred}, težinski prosjek P^{coll} i X, moguće je interpretirati sljedećim principom:

- $P^{coll} = \mu_0$ jest procjenitelj temeljen samo na *a priori* znanju. Njegov kvadratni gubitak jest

$$E[(\mu_0 - \mu(\Theta))^2] = Var(\mu(\Theta)) = \tau^2.$$

- $\overline{X}$ jest linearni i individualno nepristrani procjenitelj temeljen samo na opservacijama vektora $\mathbf{X}$. Njegov kvadratni gubitak je

$$E[(\overline{X} - \mu(\Theta))^2] = E[\sigma^2(\Theta)/n] = \sigma_0^2/n.$$

- P^{cred} jest težinski prosjek ta dva procjenitelja, gdje su težine proporcionalne inverznu kvadratnog gubitka

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta) = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\mu_0,$$

  gdje je $\alpha = \dfrac{n/\sigma_0^2}{n/\sigma_0^2 + 1/\tau^2} = \dfrac{\tau^2}{\tau^2 + \sigma_0^2/n} = \dfrac{n}{n + \sigma_0^2/\tau^2}.$

Sada se pomoću procjenitelja povjerenja $\hat{\mu}(\Theta)$ može izračunati kvadratni gubitak premije $\mu(\Theta)$

$$E[(\mu(\Theta)-\hat{\mu}(\Theta))^2]=E[(\alpha(\mu(\Theta)-\overline{X})+(1-\alpha)(\mu(\Theta)-\mu_0))^2]=$$
$$=\alpha^2\frac{\sigma_0^2}{n}+(1-\alpha)^2\tau^2=$$
$$=(\frac{n}{n+\sigma_0^2/\tau^2})^2\frac{\sigma_0^2}{n}+(\frac{\sigma_0^2/\tau^2}{n+\sigma_0^2/\tau^2})^2\tau^2=$$
$$=\frac{\sigma_0^2}{n+\sigma_0^2/\tau^2}=\alpha\frac{\sigma_0^2}{n}=$$
$$=\frac{\sigma_0^2/\tau^2}{n+\sigma_0^2/\tau^2}\tau^2=(1-\alpha)\tau^2$$

jer je

$$E[(\mu(\Theta)-\mu_0)(\mu(\Theta)-\overline{X})]=0.$$

2.1.3 Definicija procjenitelja povjerenja kao ortogonalne projekcije u Hilbertovom prostoru L^2

Neka je

$$L^2:=\{X:X \text{ je slučajna varijabla za koju vrijedi } E|X^2|<\infty\}.$$

Ukoliko X i Y pripadaju L^2 tada je njihov skalarni produkt definiran sa

$$\langle X,Y\rangle:=E[XY].$$

Podrazumijeva se da su slučajne varijable, $\mu(\Theta)\in L^2$, individualna premija koju se želi procijeniti, te $\mathbf{X}'=(X_1,X_2,...,X_n)$ opservacijski vektor čije su komponente elementi L^2, elementi Hilbertovog prostora L^2 sa pripadajućim momentima

$$\mu_0:=E[\mu(\Theta)],$$
$$\boldsymbol{\mu}'_{\mathbf{X}}:=(\mu_{X_1},\mu_{X_2},...,\mu_{X_n})=(E[X_1],E[X_2],...,E[X_n]),$$

te kovarijacijskom matricom za $\mathbf{X}$

$$\Sigma_{\mathbf{X}}:=Cov(\mathbf{X},\mathbf{X}')=\begin{pmatrix} Var[X_1] & Cov(X_1,X_2)\cdots & Cov(X_1,X_n)\\ Cov(X_2,X_1) & Var[X_2]\cdots & Cov(X_2,X_n)\\ \vdots & \ddots & \\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Var[X_n]\end{pmatrix}.$$

Definicija 2.1. *i) Dva elementa X i $Y \in L^2$ su* ***ortogonalni*** $(X \perp Y)$*, ukoliko je njihov skalarni produkt $\langle X, Y \rangle$ jednak 0.*
ii) Za zatvoreni potprostor (ili zatvoreni afin potprostor) $M \subset L^2$ definira se ortogonalna projekciju od $Y \in L^2$ na M sa: $\tilde{Y} \in M$ jest ***ortogonalna projekcija od*** *Y* ***na*** *M ($\tilde{Y} = Pro(Y|M)$) ako $Y - \tilde{Y} \perp M$, odnosno $Y - \tilde{Y} \perp Z_1 - Z_2$ za sve $Z_1, Z_2 \in M$.*

Teorem 2.2. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) $\tilde{Y} = Pro(Y|M)$.
ii) $\tilde{Y} \in M$ *i* $\langle Y - \tilde{Y}, Z - \tilde{Y} \rangle = 0$, *za sve* $Z \in M$.
iii) $\tilde{Y} \in M$ *i* $\|Y - \tilde{Y}\| \leq \|Y - Z\|$, *za sve* $Z \in M$.

Ranije je spomenuto kako se želi pronaći procjenitelja za $\mu(\Theta)$ baziranog na $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$. Uz dani vektor $\mathbf{X}$ sada se definiraju dvije klase $L(\mathbf{X}, \mathbf{1})$ i $L_e(\mathbf{X})$, te pripadajući procjenitelji povjerenja, no prije toga navodi se definicija afinog potprostora.

Definicija 2.3. *$Q \subset L^2$ je* ***zatvoren afin potprostor*** *od L^2 ako je*

$$Q = Z + P := \{X : X = Z + Y, Y \in P\},$$

gdje $Z \in L^2$ i P je zatvoren potprostor od L^2.

Definicija 2.4. *Procjenitelj povjerenja za $\mu(\Theta)$ baziran na $\boldsymbol{X}$ jest procjenitelj*

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta) := Pro(\mu(\Theta)|L(\boldsymbol{X}, 1))$$

u zatvorenom potprostoru

$$L(\boldsymbol{X}, 1) = \{\hat{\mu}(\Theta) : \hat{\mu}(\Theta) = a_0 + \textstyle\sum_i a_i X_i, a_0, a_1, ... \in \mathbb{R}\},$$

te se naziva ***nehomogeni procjenitelj povjerenja****.*

Definicija 2.5. ***Homogeni procjenitelj povjerenja*** *od $\mu(\Theta)$ baziran na $\boldsymbol{X}$ jest procjenitelj*

$$\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom} := Pro(\mu(\Theta)|L_e(\boldsymbol{X})$$

u zatvorenom afinom potprostoru

$$L_e(\boldsymbol{X}) := \{\hat{\mu}(\Theta) : \hat{\mu}(\Theta) = \textstyle\sum_i a_i X_i, a_1, a_2, ... \in \mathbb{R},\ E[\hat{\mu}(\Theta)] = E[\mu(\Theta)]\}.$$

Može se uočiti da za razliku od nehomogenog procjenitelja povjerenja, homogeni procjenitelj povjerenja ne sadrži konstantni član, te se zahtjeva da bude nepristran, što je za nehomogenog procjenitelja povjerenja automatski ispunjen uvjet.

Dakle, oba procjenitelja povjerenja interpretirana su kao *ortogonalna projekcija* (nepoznate) individualne premije $\mu(\Theta)$ na prikladno definirani potprostor (ili afini potprostor) od L^2. Dalje se navode osnovna svojstva projekcije koje će se često koristiti u nadolazećim poglavljima pri izvodu.[2]

Teorem 2.6. ***(iterativnost projekcije).*** *Neka su M i M' zatvoreni potprostori (ili zatvoreni afini potprostori) od L^2 takvi da je $M \subset M'$. Tada vrijedi*

$$Pro(Y|M) = Pro(Pro(Y|M')|M)$$

i

$$\|Y - Pro(Y|M)\|^2 = \|Y - Pro(Y|M')\|^2 + \|Pro(Y|M') - Pro(Y|M)\|^2.$$

Teorem 2.7. *Neka je $\tilde{\mu}(\Theta)$ bayesovska premija. Tada vrijedi:*

$$E[(\hat{\hat{\mu}}(\Theta) - \mu(\Theta))^2] = E[(\hat{\hat{\mu}}(\Theta) - \tilde{\mu}(\Theta))^2] + E[(\tilde{\mu}(\Theta) - \mu(\Theta))^2].$$

Teorem 2.8. ***(linearnost projekcije.)*** *a) Sljedeće svojstvo je istinito za projekcije na zatvorenom linearnom potprostoru P:*

$$Pro(aX + bY|P) = aPro(X|P) + bPro(Y|P), \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R}.$$

b) Sljedeće svojstvo je istinito za projekcije na afinom linearnom potprostoru Q:

$$Pro((a+b)^{-1}(aX + bY)|Q) = (a+b)^{-1}(aPro(X|Q) + bPro(Y|Q)), \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R} \text{ takve da je } a + b \neq 0.$$

Teorem 2.9. ***(uvjeti ortogonalnosti za nehomogenog procjenitelja povjerenja).*** *$\hat{\mu}(\Theta)$ jest nehomogeni procjenitelj povjerenja od $\mu(\Theta)$ baziran na **X** ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

i) $\langle \mu(\Theta) - \hat{\hat{\mu}}(\Theta), 1 \rangle = 0,$

ii) $\langle \mu(\Theta) - \hat{\hat{\mu}}(\Theta), X_j \rangle = 0,$ *za* $j = 1, 2, ..., n.$

[2] za dokaze vidjeti H.Bühlmann, A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and its Aplications*, Springer, 2005

Teorem 2.10. ***(uvjeti ortogonalnosti za homogenog procjenitelja povjerenja).*** *$\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom}$ jest homogeni procjenitelj povjerenja od $\mu(\Theta)$ baziran na $\boldsymbol{X}$ ako i samo ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

i) $\langle \mu(\Theta) - \hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom}, 1 \rangle = 0,$

ii) $\langle \mu(\Theta) - \hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom}, \hat{\mu}(\Theta) - \hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom} \rangle = 0,$ *za sve* $\hat{\mu}(\Theta) \in L_e(\boldsymbol{X})$.

Napomena:

- Nehomogeni i homogeni procjenitelji povjerenja su oba nepristrana u kolektivu. Naime, za homogeni procjenitelj povjerenja taj uvjet slijedi iz definicije od $L_e(\mathbf{X})$, dok je za nehomogenog procjenitelja povjerenja taj uvjet automatski ispunjen.

Prethodno navedeni uvjeti ortogonalnosti za procjenitelje povjerenja mogu se zapisati i u obliku normalnih jednakosti.

Teorem 2.11. ***(normalne jednakosti za nehomogenog procjenitelja povjerenja).*** *$\hat{\hat{\mu}}(\Theta)$ jest nehomogeni procjenitelj povjerenja od $\mu(\Theta)$ baziran na $\boldsymbol{X}$ ako i samo ako su zadovoljene sljedeće jednakosti:*

i) $E[\hat{\hat{\mu}}(\Theta) - \mu(\Theta)] = 0,$

ii) $Cov(\mu(\Theta), X_j) = Cov(\hat{\hat{\mu}}(\Theta), X_j),$ *za* $j = 1, 2, ..., n.$

Teorem 2.12. ***(normalne jednakosti za homogenog procjenitelja povjerenja).*** *$\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom}$ jest homogeni procjenitelj povjerenja od $\mu(\Theta)$ baziran na $\boldsymbol{X}$ ako i samo ako su zadovoljene sljedeće jednakosti:*

i) $E[\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom} - \mu(\Theta)] = 0,$

ii) $Cov(\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom} - \mu(\Theta), \hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom}) = Cov(\hat{\hat{\mu}}(\Theta)^{hom} - \mu(\Theta), \hat{\mu}(\Theta))$ *za sve* $\hat{\mu}(\Theta) \in L_e(\boldsymbol{X})$.

3 Višedimenzionalni model povjerenja

3.1 Apstraktni višedimenzionalni model povjerenja

Promatra se problem procjene premije u auto-osiguranju. Razlikuju se manje i veće tjelesne ozljede. Za svaki rizik i i svaku godinu dan je dvodimenzionalni vektor, učestalost manjih i učestalost većih tjelesnih ozljeda. Dakle, kako bi se pronašao procjenitelj za $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$ morat će se procijeniti dvodimenzionalni vektor.

U prethodnom poglavlju predstavljen je pojam procjenitelja povjerenja, te se vidjelo da se razlikuju homogeni i nehomogeni procjenitelj povjerenja. Također se vidjelo da se ti procjenitelji mogu definirati kao ortogonalne projekcije na prikladno definirani potprostor, odnosno afin potprostor od L^2. Sada se promatra kako to izgleda kada je vrijednost koja se procjenjuje višedimenzionalni vektor. Važno je napomenuti da se pri procjeni višedimenzionalnog vektora $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$ žele koristiti sva zapažanja istovremeno. Neka je $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$ dimenzije p. Apstraktni višedimenzonalni model povjerenja pretpostavlja da postoji slučajni vektor $\mathbf{X}$, jednake dimenzije kao i $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$ za koji vrijedi $E[\mathbf{X}|\Theta] = \boldsymbol{\mu}(\Theta)$, odnosno nepristran je. Cilj je pronaći procjenitelja povjerenja baziranog na $\mathbf{X}$, stoga se kao i prije traži među linearnim funkcijama danog uzorka. Važno je napomenuti kako vektor $\mathbf{X}$ ne smije biti isti kao i opservacijski vektor, što u pravilu niti nije. Kasnije će se pokazati da je $\mathbf{X}$ općenito kompresija originalnih opservacija.

Pretpostavke modela:

Za svaki rizik i dan je p - dimenzionalni vektor $\mathbf{X}_i$ za koji vrijedi:

i) Uz dano Θ_i

$$E[\mathbf{X}_i'|\Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)' = (\mu_1(\Theta_i), \mu_2(\Theta_i), ..., \mu_p(\Theta_i)),$$

$$Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i) = E[(\mathbf{X}_i - E[\mathbf{X}_i|\Theta_i])(\mathbf{X}_i - E[\mathbf{X}_i|\Theta_i])'|\Theta_i] = \Sigma_i(\Theta_i)$$

ii) Parovi $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), ...$ su nezavisni, te su $\Theta_1, \Theta_2, ...$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

Želi se za svaki rizik i procijeniti pripadni vektor $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$. Te vrijednosti će ovisiti o strukturnim parametrima višedimenzionalnog modela povjerenja:

$$\boldsymbol{\mu}_0 := E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] \tag{5}$$

$$S_i := E[\Sigma_i(\Theta_i)] = E[Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i)] \tag{6}$$

$$T := Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)') \tag{7}$$

Može se primijetit da je

$$Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i') = S_i + T.$$

Pretpostavlja se još da je $S_i + T > 0$, tj. pozitivno definitna matrica.

Napomena:

- $\boldsymbol{\mu}_0$ je vektor dimenzije p, dok su S_i i T pozitivno semidefinitne kvadratne matrice reda p.

3.1.1 Nehomogeni višedimenzionalni procjenitelj povjerenja

Višedimenzionalni procjenitelj povjerenja je definiran po komponentama, stoga je potrebno za svaku komponentu vektora $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ pronaći pripadnog procjenitelja povjerenja. Važno je napomenuti kako procjenitelj povjerenja za $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ ovisi samo o komponentama vektora $\mathbf{X}_i$.

Obzirom da je napomenuto kako će se procjenitelja tražiti među linearnim funkcijama danog uzorka, prema definiciji $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ mora biti oblika:

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) := \begin{pmatrix} Pro(\mu_1(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_i, 1)) \\ \vdots \\ Pro(\mu_p(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_i, 1)) \end{pmatrix} = Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_i, \mathbf{1})), \tag{8}$$

gdje se projekcija shvaća po komponentama, te je

$$L(\mathbf{X}_i, 1) := [1, X_{i1}, ..., X_{ip}] = \{a_{i0} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij} X_{ij}, a_{i0}, a_{i1}, ... \in \mathbb{R}\}$$

linearni potprostor razapet sa 1 i komponentama vektora $\mathbf{X}_i$.

$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ živi u prostoru $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{1}) := \{a + A\mathbf{X}_i : a \in \mathbb{R}^p,\ A \in M_p\}$.

Napomena:

- Kako bi se pojednostavila notacija, u narednom se odjeljku napušta indeks i.

Neka je $k = 1, 2, ..., p$, te neka je sa

$$\hat{\hat{\mu}}_k(\Theta) = a_{k0} + \textstyle\sum_j a_{kj} X_j$$

označen procjenitelj povjerenja za komponente od $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$.

Da bi se pokazalo da $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta)$ zaista jest takav procjenitelj, mora se pokazati da zadovoljava sljedeće normalne jednakosti:

i) $E[\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta) - \boldsymbol{\mu}(\Theta)] = 0$

ii) $Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), X_j) = Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta), X_j), j = 1, 2, ..., n$

Naime, prema Teoremu 2.11., u navedenim oznakama mora vrijediti:

$$\mu_k = a_{k0} + \textstyle\sum_{j=1}^{p} a_{kj} \mu_j$$

$$Cov(\mu_k(\Theta), X_m) = \sum_{j=1}^{p} a_{kj} Cov(X_j, X_m), m = 1, 2, ..., p$$

Koristeći matričnu notaciju sada je

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta) = a + A \cdot \mathbf{X},$$

gdje su

$$a = \begin{pmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{k0} \\ \vdots \\ a_{p0} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p} \\ \cdots \\ a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kp} \\ \cdots \\ a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp} \end{pmatrix}$$

U ovim oznakama, normalne jednakosti mogu se zapisati kao

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = a + A \cdot \boldsymbol{\mu}_0, \tag{9}$$

$$Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), \mathbf{X}') = A \cdot Cov(\mathbf{X}, \mathbf{X}'). \tag{10}$$

Kako vrijedi

$$\begin{aligned} Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), \mathbf{X}') = E[Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), \mathbf{X}'|\Theta)] + Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), E[\mathbf{X}'|\Theta]) = \\ = Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta), \boldsymbol{\mu}(\Theta)') = T, \end{aligned}$$

$$Cov(\mathbf{X}, \mathbf{X}') = E[Cov(\mathbf{X}, \mathbf{X}'|\Theta)] + Cov(E[\mathbf{X}|\Theta], E[\mathbf{X}'|\Theta]) = S + T,$$

tada iz (10) slijedi da je

$$T = A(T + S),$$

te

$$A = T(T + S)^{-1}.$$

Dobiva se sljedeća formula:

Teorem 3.1 **(procjenitelj povjerenja).** *Nehomogeni procjenitelj povjerenja dan je sa*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) = A_i \boldsymbol{X}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}_0 \tag{11}$$

gdje su $\boldsymbol{\mu}_0, T, S_i$ *definirani kao prije, te*

$$A_i = T(T + S_i)^{-1}$$

Napomena:

- A_i se naziva matrica povjerenja,
- Matrica $T + S_i$ je kovarijacijska matrica za $\mathbf{X}_i$ i po pretpostavci regularna.
- procjenitelj $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ jest težinski prosjek $\mathbf{X}_i$ i $\boldsymbol{\mu}_0$.
- $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ je ortogonalna projekcija od $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ u $L(\mathbf{X}_i, \mathbf{1})$.

Općenito

$$\begin{gathered}T = E[(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = \\ = \text{kvadratni gubitak matrice } \boldsymbol{\mu} \text{ u odnosu na } \boldsymbol{\mu}(\Theta_i),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}S_i = E[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = \\ = \text{kvadratni gubitak matrice } \mathbf{X}_i \text{ u odnosu na } \boldsymbol{\mu}(\Theta_i).\end{gathered}$$

Neka je

$$L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}) = \{a + \textstyle\sum_i B_i \mathbf{X}_i : a \in \mathbb{R}^p,\ B_i \in M_p\}.$$

Tada je taj prostor po komponentama jednak prostoru

$$L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, 1) \times ... \times L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, 1),$$

gdje su $L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, 1) = [L(\mathbf{X}_1, 1) \cup ... \cup L(\mathbf{X}_I, 1)]$. Očito je $L(\mathbf{X}_i, 1) \subset L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, 1)$.

Može se primijetiti da je $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) = Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))$.

Ako je $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^p$ slučajni vektor takav da su mu komponente u L^2 , tada je sa

$$\hat{\mathbf{Y}} := Pro(\mathbf{Y}|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))$$

definirana ortogonalna projekcija u prostor $L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1})$ tako da vrijedi

i) $E[\hat{\mathbf{Y}}] = E[\mathbf{Y}]$
ii) $Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i') = 0$, za svaki $i = 1, ..., I$.

Propozicija 3.2. *Za $A \in M_p$ vrijedi*

$$A Pro(\boldsymbol{Y}|L(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I, \boldsymbol{1})) = Pro(A\boldsymbol{Y}|L(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I, \boldsymbol{1})).$$

Dokaz: $\hat{\mathbf{Y}} = Pro(\mathbf{Y}|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))$ i može se primijetiti da

$i)$ $A\hat{\mathbf{Y}} \in L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1})$ zbog

$$A \cdot (\hat{a} + \sum_i \hat{A}_i \mathbf{X}_i) = A\hat{a} + \sum_i (A\hat{A}_i)\mathbf{X}_i \in L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}),$$

$ii)$ $A\hat{\mathbf{Y}}$ zadovoljava normalne jednakosti za $Pro(A\mathbf{Y}|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))$.

1° $E[A\hat{\mathbf{Y}}] \overset{lin.m.o.}{=} AE[\hat{\mathbf{Y}}] \overset{pretp.}{=} AE[\mathbf{Y}] \overset{lin.m.o.}{=} E[A\mathbf{Y}]$,

2° Za proizvoljan $i = 1, ..., I$,

$$Cov(A\mathbf{Y} - A\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i) = ACov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i) = A \cdot 0 = 0.$$

□

Neka je sada sa $V(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$ označen sljedeći skup:

$$V = V(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I) = \{\sum_{i=2}^I C_i(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1),\ C_i \in M_p\}.$$

Tada je V vektorski prostor takav da je za sve $A_1, A_2 \in M_p$ i $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in V$ $A_1\mathbf{Y}_1 + A_2\mathbf{Y}_2 \in V$. Neka su $A_1, A_2 \in M_p$ i $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in V$.

$$\begin{aligned} A_1\mathbf{Y}_1 + A_2\mathbf{Y}_2 &= A_1 \cdot (\sum_{i=2}^I C_i^{(1)}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1)) + A_2 \cdot (\sum_{i=2}^I C_i^{(2)}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1)) = \\ &= \sum_{i=2}^I A_1 C_i^{(1)}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) + \sum_{i=2}^I A_2 C_i^{(2)}(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = \\ &= \sum_{i=2}^I (A_1 C_i^{(1)} + A_2 C_i^{(2)})(\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) \in V \text{ zbog } A_1 C_i^{(1)} + A_2 C_i^{(2)} \in M_p. \end{aligned}$$

Za $\mathbf{Y} \in (L^2)^p$ definira se $\hat{\mathbf{Y}} \in V$ takav da je

$i)$ $E[\hat{\mathbf{Y}}] = 0$
$ii)$ $Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = 0$, za svaki $i \neq 1$.

Najprije se pokazuje da takav $\hat{\mathbf{Y}}$ postoji i gotovo sigurno je jedinstven. Neka su $\hat{\mathbf{Y}}_1$ i $\hat{\mathbf{Y}}_2$ takvi da vrijede (i) i (ii). Tada je

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_1, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = 0 \\ Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_2, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = 0. \end{aligned}$$

Tada slijedi i da je $Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2) = 0$ i $Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}_2, \hat{\mathbf{Y}}_1) = 0$. Također se dobiva da

$$\begin{aligned} Cov(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}_1) &= Cov(\hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_1) = Cov(\hat{\mathbf{Y}}_1, \hat{\mathbf{Y}}_2) = Cov(\hat{\mathbf{Y}}_2, \hat{\mathbf{Y}}_1) = \\ &= Cov(\mathbf{Y}, \hat{\mathbf{Y}}_2) = Cov(\hat{\mathbf{Y}}_2, \hat{\mathbf{Y}}_2), \end{aligned}$$

te je stoga

$$Cov(\hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_2, \hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_2) = 0.$$

Tada

$$0 = E[(\hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_2)(\hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_2)'] \Rightarrow E[|\hat{\mathbf{Y}}_1 - \hat{\mathbf{Y}}_2|^2] = 0 \Rightarrow \hat{\mathbf{Y}}_1 = \hat{\mathbf{Y}}_2 \text{ g.s.}$$

Ostaje još provjeriti da je zaista moguće pronaći rješenje od $Cov(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = 0$, za svaki $i \neq 1$. Neka je

$$E_i := Cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1),$$

te se zahtjeva da je $E_i = Cov(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1)$, odnosno

$$E_i = \textstyle\sum_{j=2}^{p} \hat{C}_j Cov(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1).$$

$$Cov(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_1) = Cov(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i) - Cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_i) - Cov(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_1) + \\ + Cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) = \delta_{ij}(T + S_i) + T + S_1.$$

Sada je $E_i = \hat{C}_i(T + S_i) + T + S_1$ iz čega se dobiva

$$\hat{C}_i = (E_i - T - S_1)(T + S_i)^{-1}.$$

Dakle, pokazano je da $\hat{\mathbf{Y}}$ postoji i gotovo sigurno je jedinstveno, stoga se može definirati

$$\hat{\mathbf{Y}} := Pro(\mathbf{Y}|V).$$

Na isti način kao u prethodnoj propoziciji može se pokazati da za $A \in M_p$ vrijedi

$$APro(\mathbf{Y}|V) = Pro(A\mathbf{Y}|V).$$

3.1.2 Homogeni višedimenzionalni procjenitelj povjerenja

U ovom odjeljku do izražaja dolazi homogeni višedimenzionalni procjenitelj povjerenja. Za razliku od nehomogenog procjenitelja, homogeni procjenitelj ne sadrži konstantni izraz $\boldsymbol{\mu}$.
Neka je definiran afin potprostor

$$L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I) = \{\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) : \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) = \sum_{i=1}^I B_i \mathbf{X}_i,\ \sum_{i=1}^I B_i = I\}.$$

Najprije se može primijetiti, zbog

$$E[\mathbf{X}_i] = E[E[\mathbf{X}_i|\Theta_i]] = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)] = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)] = \boldsymbol{\mu}_0,$$

gdje se predzadnja jednakost dobiva zbog nezavisnosti i jednake distribuiranosti slučajnih varijabli $\Theta_1, \Theta_2, ...$ Stoga se može zaključiti da su $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I \in L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$.

Potrebno je još pokazati da je prostor $L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$ zatvoren na konveksne kombinacije. Neka su $\mathbf{Y}_1 = \sum_{i=1}^I B_i^{(1)} \mathbf{X}_i$ i $\mathbf{Y}_2 = \sum_{i=1}^I B_i^{(2)} \mathbf{X}_i \in L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$. Tada za $A \in M_p$ vrijedi

$$\begin{aligned} A\mathbf{Y}_1 + (I-A)\mathbf{Y}_2 &= A(\sum_{i=1}^I B_i^{(1)} \mathbf{X}_i) + (I-A)(\sum_{i=1}^I B_i^{(2)} \mathbf{X}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^I A B_i^{(1)} \mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^I (I-A) B_i^{(2)} \mathbf{X}_i = \\ &= \sum_{i=1}^I (A B_i^{(1)} + (I-A)(B_i^{(2)}) \mathbf{X}_i \in L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I) \end{aligned}$$

zbog $\sum_{i=1}^I (A B_i^{(1)} + (I-A) B_i^{(2)}) = I$.

Sada za $\mathbf{Y} \in (L^2)^p$ definira projekcija na prostor $L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$ kao

$$Pro(\mathbf{Y}|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \mathbf{X}_1 + Pro(\mathbf{Y} - \mathbf{X}_1|V),$$

gdje je V prostor definiran u prethodnom odjeljku.

Propozicija 3.3. *Neka su $\hat{\boldsymbol{Y}}_1 = Pro(\boldsymbol{Y}_1|L_e(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I))$ i $\hat{\boldsymbol{Y}}_2 = Pro(\boldsymbol{Y}_2|L_e(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I))$. Tada za kvadratnu matricu A vrijedi*

$$\begin{gathered} Pro(A\boldsymbol{Y}_1 + (I-A)\boldsymbol{Y}_2|L_e(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I)) = \\ APro(\boldsymbol{Y}_1|L_e(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I)) + (I-A)Pro(\boldsymbol{Y}_2|L_e(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_I)). \end{gathered}$$

Dokaz: Koristeći definiciju projekcije na prostor $L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)$ dobiva se

$$\begin{gathered} Pro(A\mathbf{Y}_1 + (I-A)\mathbf{Y}_2|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \mathbf{X}_1 + Pro(A(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1) + (I - \\ A)(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_1)|V) = \mathbf{X}_1 + APro(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1|V) + (I-A)Pro(\mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_1|V) = \\ \mathbf{X}_1 + A(Pro(\mathbf{Y}_1|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) - \mathbf{X}_1) + (I-A)(Pro(\mathbf{Y}_2|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) - \mathbf{X}_1) = \\ = APro(\mathbf{Y}_1|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) + (I-A)Pro(\mathbf{Y}_2|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)). \end{gathered}$$

$\square$

Teorem 3.4. *Homogeni višedimenzionalni procjenitelj povjerenja dan je sa*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} = A_i \boldsymbol{X}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \tag{12}$$

gdje su T i S_i definirane kao u prethodnom odjeljku, te

$$A_i = T(T + S_i)^{-1},$$

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1} \sum_{i=1}^{I} A_i \boldsymbol{X}_i.$$

Dokaz: Kako je $L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I) \subset L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1})$ koristeći Teorem 3.6. i prethodnu propoziciju dobiva se

$$\begin{aligned}\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} &= Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)\\ &= Pro(Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I))\\ &= Pro(A_i\mathbf{X}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu})|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) =\\ &= A_i\mathbf{X}_i + (I - A_i)Pro(\boldsymbol{\mu}|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)).\end{aligned}$$

Preostaje pokazati da vrijedi:

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} := Pro(\boldsymbol{\mu}|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1} \sum_{i=1}^{I} A_i\mathbf{X}_i.$$

Potrebno je provjeriti normalne jednakosti za homogenog procjenitelja povjerenja, odnosno potrebno je pokazati da za sve $\sum_{i=1}^{I} B_i\mathbf{X}_i$ za koje je $\sum_{i=1}^{I} B_i = I$ vrijedi

$$Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, (\sum_{i=1}^{I} B_i\mathbf{X}_i)') = Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}'). \tag{13}$$

Zbog $Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i') = T + S_i$ te zbog nezavisnosti $\mathbf{X}_i$ dobiva se

$$\begin{aligned}Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}') &= (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1}(\sum_{i=1}^{I} A_i Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i')A_i')(\sum_{i=1}^{I} A_i')^{-1} =\\ &= (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1}(\sum_{i=1}^{I} TA_i')(\sum_{i=1}^{I} A_i')^{-1} = (\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1}T.\end{aligned}$$

Analogno (zbog $\sum_{i=1}^{I} B_i = I$) slijedi

$$\begin{aligned}Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, (\textstyle\sum_{i=1}^{I} B_i\mathbf{X}_i)') &= (\textstyle\sum_{j=1}^{I} A_j)^{-1}(\sum_{i=1}^{I} A_i Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i')B_i') =\\ &(\textstyle\sum_{j=1}^{I} A_j)^{-1} \sum_{i=1}^{I}(TB_i') = (\sum_{j=1}^{I} A_j)^{-1}T.\end{aligned}$$

čime je pokazano da vrijedi (13). $\square$

3.1.3 Kvadratni gubitak višedimenzionalnih procjenitelja povjerenja

Primarno se bazira na linearnu kombinaciju

$$\mu(\Theta) := \sum_{k=1}^{p} a_k \mu_k(\Theta) = \mathbf{a}' \boldsymbol{\mu}(\Theta)$$

radije nego na komponente vektora $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$. Neka je

$$\hat{\mu}(\Theta) := \sum_{k=1}^{p} a_k \hat{\mu}_k(\Theta) = \mathbf{a}' \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta)$$

procjenitelj za $\mu(\Theta)$. Kvadratni gubitak jednak je

$$\begin{aligned} E[(\hat{\mu}(\Theta) - \mu(\Theta))^2] &= E[(\sum a_k(\hat{\mu_k}(\Theta) - \mu_k(\Theta))^2] = \\ &= \mathbf{a}' E[(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) - \boldsymbol{\mu}(\Theta)) \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) - \boldsymbol{\mu}(\Theta))']\mathbf{a} = \mathbf{a}' V_2 \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Ima smisla definirati kvadratni gubitak vektora $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta)$ pomoću matrice V_2.

Definicija 3.5. *Matrica kvadratnog gubitka procjenitelja $\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta)$ definirana je sa*

$$V_2 := E[(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) - \boldsymbol{\mu}(\Theta)) \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta) - \boldsymbol{\mu}(\Theta))'],$$

gdje se očekivana vrijednost razmatra po komponentama.

Teorem 3.6. *Matrica kvadratnog gubitka višedimenzionalnog procjenitelja povjerenja $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ definiranog sa*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) = A_i \boldsymbol{X}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}_0$$

dana je sa

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T = A_i S_i. \tag{14}$$

Napomena:

- Kao i prije, matrice T i S_i redom matrice kvadratnog gubitka $\boldsymbol{\mu}$ i $\mathbf{X}_i$ s obzirom na $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$.

Dokaz: Najprije se računa matrica kvadratnog gubitka:

$$\begin{gathered} E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = \\ = A_i E[(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] A_i' + \\ + (I - A_i) E[(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'])(I - A_i)' = \\ = T(T + S_i)^{-1} S_i (T + S_i)^{-1} T + S_i (T + S_i)^{-1} T (T + S_i)^{-1} S_i = \\ = S_i (T + S_i)^{-1} T = (I - A_i)T = A_i S_i, \end{gathered}$$

gdje je u zadnjem koraku korištena činjenica da je

$$S_i(T+S_i)^{-1}T = T(T+S_i)^{-1}S_i.$$

□

Teorem 3.7. *Matrica kvadratnog gubitka homogenog višedimenzionalnog procjenitelja dana je sa*

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = \\ (I - A_i)T[I + (\sum_{i=1}^{I} A_i')^{-1}(I - A_i)'].$$

Dokaz: Neka je $\mu(\Theta_i) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$. Vrijedi

$$E[(\hat{\hat{\mu}}(\Theta_i)^{hom} - \mu(\Theta_i))^2] = E[(\hat{\hat{\mu}}(\Theta_i)^{hom} - \hat{\mu}(\Theta_i))^2] + E[(\hat{\mu}(\Theta_i) - \mu(\Theta_i))^2].$$

Kako prethodna tvrdnja vrijedi za sve vektore $\mathbf{a}$, za sve matrice gubitka mora vrijediti:

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)) \cdot \\ (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i))'] + E[(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))']$$

Drugi sumand jednak je prema prethodnom teormu:

$$E[(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T.$$

Za prvi sumand je prema Teoremu 3.2:

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} - \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i))'] = \\ (I - A_i)Cov(\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}')(I - A_i)' = (I - A_i)T(\sum_{j=1}^{I} A_j')(I - A_i)',$$

i time je teorem dokazan.

□

3.2 Općenita višedimenzionalna struktura i optimalno sažimanje podataka

U prethodnom odjeljku se pretpostavljalo da postoji točno jedan vektor $\mathbf{X}$ koji je iste dimenzije kao $\boldsymbol{\mu}(\Theta)$ te za koji vrijedi $E[\mathbf{X}|\Theta] = \boldsymbol{\mu}(\Theta)$. Također je istaknuto da vektor $\mathbf{X}$ nije isti kao opservacijski vektor, ali je u većini slučajeva sažet od originalnih podataka. Do sada je pitanje postizanja optimalne kompresije, bez da se izgube relevantni podaci, ostavljeno netaknuto, no ovaj odjeljak će se pozabaviti njime.

Pretpostavlja se sljedeće: za svaki rizik $i = 1, ..., I$ neka je

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)' = (\mu_1(\Theta_i), ..., \mu_p(\Theta_i))$$

vektor koji se želi procijeniti, te neka je

$$\mathbf{X}_i' = (X_{i1}', X_{i2}', ..., X_{in_i}')$$

vektor opservacija.
Sva opažanja povezana s i - tim rizikom, bilo jednodimenzionalna ili višedimenzionalna, stavljaju se u opservacijski vektor $\mathbf{X}_i$. Pretpostavlja se da je linearni prostor razapet vektorima $E[\mathbf{X}_i|\Theta_i]$ isti kao linearni prostor razapet komponentama $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$. Time se dolazi do sljedećih pretpostavki:

Pretpostavke modela: Dan je portfelj od I rizika. Svaki od rizika i ($i = 1, ..., I$) okarakteriziran je svojim individualnim profilom rizika ϑ_i koji je sam po sebi realizacija slučajne varijable Θ_i. Pretpostavlja se sljedeće:

- P1: Za svaki rizik i postoji matrica Y_i za koju je uz dano Θ_i
$$E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = Y_i\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \tag{15}$$
gdje je Y_i matrica dimenzije $n_i \times p$ i ranga p.
- P2: Parovi $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), ...$ su nezavisni, te su $\Theta_1, \Theta_2, ...$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

Optimalno sažimanje podrazumijeva redukciju vektora $\mathbf{X}_i$ do vektora $\mathbf{B}_i$ koji je jednake dimenzije kao i $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ koji se želi procijeniti. Sada se definira optimalno sažimanje uz prethodno navedene pretpostavke modela.

Definicija 3.8. *Optimalno sažimanje podataka dano je sa:*

$$\boldsymbol{B}_i := Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\boldsymbol{X}_i)) \tag{16}$$

gdje je

$$L_e^{ind}(\boldsymbol{X}_i) = \{\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) : \hat{\mu}_k(\Theta_i) = \sum_j a_{ij}^{(k)} X_{ij},\ za\ k = 1, ..., p;$$
$$E[\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i)|\Theta_i] = \boldsymbol{\mu}(\Theta_i).\}$$

Napomena:

- Pomnoži li se slijeva $E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = Y_i\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ matricom $C_i = (Y_i'Y_i)^{(-1)}Y_i'$ dobiva se
$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) = C_i E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] \tag{17}$$
gdje je C_i matrica dimenzije $n_i \times p$ i ranga p.

- Zbog pretpostavke P1, potporstor $L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$ je neprazan. Naime, $C_i\mathbf{X}_i \in L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$.

- $L_e^{ind}(\mathbf{X}_i)$ je prostor procjenitelja od $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ koji su linearni u komponentama od $\mathbf{X}_i$ i čija je uvjetno očekivana vrijednost uz dano Θ_i jednaka $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$. Zbog proizvoljnosti od $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$ kao slučajne varijable,
$$L_e^{ind}(\mathbf{X}_i) = \{B_i\mathbf{X}_i : B_iY_i = I_p\}.$$

Teorem 3.9. ***(procjenitelj povjerenja).*** *Nehomogeni procjenitelj povjerenja uz prethodno navedene pretpostavke modela dan je sa*
$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) = A_i\boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}_0,$$
gdje su
$$A_i = T(T + S_i)^{-1},$$
$$\boldsymbol{\mu}_0 = E[\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)],$$
$$S_i = E[Cov(\boldsymbol{B}_i, \boldsymbol{B}_i'|\Theta_i)],$$
$$T = Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i), \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)').$$

Napomena:

- Zbog nezavisnosti rizika, nehomogeni procjenitelj povjerenja $\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)$ ovisi samo o podacima i - tog rizika.

- Može se primijetiti
$$S_i = E[(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))'] = \text{kvadratni gubitak vektora } \mathbf{B}_i \text{ u odnosu na } \boldsymbol{\mu}(\Theta_i).$$

$T = E[(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}(\Theta_i))']$ = kvadratni gubitak vektora $\boldsymbol{\mu}_0$ u odnosu na $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)$.

Dokaz: Prema Teoremu 3.1, navedeni procjenitelj jest procjenitelj povjerenja baziran na $\mathbf{B}_i$ stoga mora vrijediti

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) \perp \mathbf{B}_i.$$

Također se želi pokazati i da je to procjenitelj povjerenja baziran na svim podacima, odnosno želi se pokazati da vrijedi

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) \perp \mathbf{X}_i.$$

Dovoljno je pokazati

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) \perp \mathbf{X}_i - Y_i \mathbf{B}_i$$

gdje je Y_i matrica dana u pretpostavkama modela. Lijeva strana može se zapisati u obliku

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i) = A_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i) + (I - A_i)(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}_0).$$

Prvo se pokazuje da je $\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i \perp \mathbf{X}_i - Y_i \mathbf{B}_i$. Kako je $\mathbf{B}_i := Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) | L_e^{ind}(\mathbf{X}_i))$ slijedi da je

$$\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i \perp C_i \mathbf{X}_i - B_i.$$

To znači da je

$$Y_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i) \perp Y_i C_i \mathbf{X}_i - Y_i B_i,$$

odnosno

$$Y_i Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i, (C_i \mathbf{X}_i - B_i)') Y_i' = 0.$$

S druge strane, vrijedi $Y_i C_i = Y_i (Y_i' Y_i)^{-1} Y_i' = P_{L(Y_i)}$ je ortogonalna projekcija na prostor $L(Y_i)$ razapet stupcima od Y_i. Dakle,

$$\mathbf{X}_i = P_{L(Y_i)} \mathbf{X}_i + (I_n - P_{L(Y_i)}) \mathbf{X}_i.$$

Kako je $Y_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i) \in L(Y_i)$ i $Y_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i) \perp (I_n - P_{L(Y_i)}) \mathbf{X}_i$ slijedi da je $Y_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i) \perp \mathbf{X}_i - Y_i B_i$. Dakle

$$Cov(Y_i(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i), (\mathbf{X}_i - Y_i B_i)') = 0 \Rightarrow Y_i Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i, (\mathbf{X}_i - Y_i B_i)') = 0.$$

Kako je Y_i punog ranga, dobiva se

$$Cov(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - B_i, (\mathbf{X}_i - Y_i B_i)') = 0.$$

Ortogonalnost drugog sumanda $(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu})$ lako se vidi iz

$$E[(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}) \cdot (\mathbf{X}_i - Y_i \mathbf{B}_i)'] = E[E[(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i) - \boldsymbol{\mu}) \cdot (\mathbf{X}_i - Y_i \mathbf{B}_i)' | \Theta_i]] = 0$$

čime je teorem dokazan. $\square$

Napomena:

- Kao što je pokazano, sažimanje $\mathbf{B}_i$ sadrži potpunu informaciju o podacima za nehomogenog procjenitelja povjerenja, no bitno je naglasiti da sadrži i potpunu informaciju o podacima za homogenog procjenitelja povjerenja. Stoga se može reći da je $\mathbf{B}_i$ *dovoljna statistika* za oba procjenitelja.

Teorem 3.10. ***(homogeni procjenitelj povjerenja).*** *Homogeni procjenitelj povjerenja je*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} = A_i \boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}},$$

gdje $A_i = T(T + S_i)^{-1}$ *i*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = (\textstyle\sum_{i=1}^I A_i)^{-1} \sum_{i=1}^I A_i \boldsymbol{B}_i.$$

Dokaz: U prethodnom teoremu je pokazano da nehomogeni procjenitelj povjerenja ovisi samo o $\mathbf{B}_i$. Preostaje još pokazati da to vrijedi i za homogenog procjenitelja povjerenja. Iz prethodnog teorema zna se da vrijedi

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_i) = Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1})) = A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}_0.$$

Zbog svojstva linearnosti i iterativnosti projekcije na afin prostor dobiva se

$$\begin{gathered}
\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} = Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \\
= Pro(Pro(\boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \mathbf{1}))|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \\
= Pro(A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\mu}_0|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \\
= A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)Pro(\boldsymbol{\mu}_0|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)). = A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}, \\
\text{gdje } \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = Pro(\boldsymbol{\mu}_0|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)).
\end{gathered}$$

Koristeći svojstvo iteracije projekcije dobiva se

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = Pro(Pro(\boldsymbol{\mu}_0|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \boldsymbol{\mu}(\Theta_1), ..., \boldsymbol{\mu}(\Theta_I)))))|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)).$$

Sada je

$$Pro(\boldsymbol{\mu}_0|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I, \boldsymbol{\mu}(\Theta_1), ..., \boldsymbol{\mu}(\Theta_I)))) = \tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^I \boldsymbol{\mu}(\Theta_i).$$

Iz gornjih jednakosti se dobiva da je

$$\begin{gathered}
\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = Pro(\tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^I \boldsymbol{\mu}(\Theta_i)|L_e(\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_I)) = \\
= \tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^I \hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}}(\Theta_i)^{hom} = \\
= \tfrac{1}{I}\textstyle\sum_{i=1}^I A_i\mathbf{B}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}},
\end{gathered}$$

stoga je

$$\sum_{i=1}^{I} A_i\mathbf{B}_i - (\sum_{i=1}^{I} A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\mu}}} = 0$$

i time je teorem dokazan. $\square$

4 Teorija povjerenja u regresijskom slučaju

4.1 Motivacija i općeniti linearni model

Charles A. Hachemeister, američki aktuar, htio je procijeniti prosječne iznose šteta za tjelesne ozljede nakon nesreće u auto - osiguranju u različitim državama SAD - a. Njegov problem se bazirao na jednostavnom regresijskom modelu. Prije nego se pređe na regresijski model povjerenja, potrebno je prisjetiti se osnovnih rezultata općenitog linearnog modela.

Općeniti linearni model dan je sa

$$\mathbf{X} = Y \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{18}$$

gdje je $\mathbf{X}$ = opservacijski vektor dimenzije $n \times 1$,
Y = poznata matrica dimenzije $n \times p$ $(n \geq p)$,
$\boldsymbol{\beta}$ = nepoznati vektor parametara dimenzije $p \times 1$,
$\boldsymbol{\varepsilon}$ = vektor slučajnih odstupanja dimenzije $n \times 1$,
za koji vrijedi $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ i $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}') = \Sigma$.

Ubuduće će se pretpostavljati da je matrica Y punog ranga p.

Sljedeći teorem koji se navodi bez dokaza daje nepristranog procjenitelja za koeficijente $\boldsymbol{\beta}$:

Teorem 4.1. *Nepristrani procjenitelj za $\boldsymbol{\beta}$ dan je sa*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Y'\Sigma^{-1}Y)^{-1}Y'\Sigma^{-1}\boldsymbol{X}. \tag{19}$$

Kovarijacijska matrica od $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dana je sa

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}') = (Y'\Sigma^{-1}Y)^{-1}. \tag{20}$$

Napomena: Obratiti će se pozornost na dva specijalna slučaja procjene parametara:

- Metoda najmanjih kvadrata : $\Sigma = \sigma^2 \cdot I$. Tada je

  $$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Y'Y)^{-1}Y'\mathbf{X}$$

  i

  $$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}') = \sigma^2 \cdot (Y'Y)^{-1}$$

- Metoda najmanjih kvadrata s težinama: $\Sigma = \sigma^2 \cdot W^{-1}$, gdje je
$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix}.$$
Tada je
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (Y'WY)^{-1}Y'W\mathbf{X}$$
i
$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}') = \sigma^2 \cdot (Y'WY)^{-1} \tag{21}$$

4.2 Regresijski model povjerenja

Dan je portfelj od I rizika. Neka je
$$\mathbf{X}_i' = (X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in})$$
opservacijski vektor i - tog rizika, te neka je $\mathbf{w}_i' = (w_{i1}, w_{i2}, ..., w_{in})$ vektor pripadnih težina. Pretpostavlja se da uz dano Θ_i, $\mathbf{X}_i$ zadovoljava regresijsku jednakost
$$\mathbf{X}_i = Y_i \cdot \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) + \varepsilon_i, \tag{22}$$
gdje
$$E[\varepsilon_i] = 0.$$
U ovom slučaju komponente vektora $\boldsymbol{\beta}$ ne gledaju se kao fiksirane vrijednosti, već kao slučajne varijable sa funkcijom distribucije koja je određena strukturom kolektiva.

4.2.1 Standardni regresijski model

Pretpostavke modela (standardni regresijski model)
Rizik i je okarakteriziran svojim individualnim profilom rizika ϑ_i, koji je sam po sebi realizacija slučajne varijable Θ_i. Pretpostavlja se sljedeće:

- R1: Uz dano Θ_i, vrijednosti $X_{ij}, j = 1, 2, ..., n$ su nezavisne te vrijedi
$$\underbrace{E[\mathbf{X}_i|\Theta_i]}_{n\times 1} = \underbrace{Y_i}_{n\times p} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}_{p\times 1}, \tag{23}$$
gdje je $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ regresijski vektor duljine $p \leq n$ sa linearno nezavisnim komponentama, a Y_i je poznata matrica ranga p, te vrijedi $Var[X_{ij}|\Theta_i] = \dfrac{\sigma^2(\Theta_i)}{\omega_{ij}}$.

- R2: Parovi $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), ...$ su nezavisni, te su $\Theta_1, \Theta_2, ...$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

Napomena:

- Pretpostavka R1 govori da uvjetno, uz dano Θ_i, opservacije $X_{ij}, (j = 1, ..., n)$ zadovoljavaju općeniti linearni model (22).

Cilj je odrediti individualnu premiju $\mu_{\boldsymbol{a}}(\Theta_i) = E[X_{\boldsymbol{a}}|\Theta_i]$ za bilo koji dani vektor $\boldsymbol{a}' = (a_1, a_2, ..., a_p)$, gdje je $X_{\boldsymbol{a}} := \boldsymbol{a}' C_i X_i$ za C_i takvu matricu da je $C_i Y_i = I_p$. Uzimajući u obzir navedeni regreijski model, vrijednost koja se želi odrediti je tada oblika

$$\mu_{\boldsymbol{a}}(\Theta_i) = E[\boldsymbol{a}' C_i X_i|\Theta] = \boldsymbol{a}' C_i E[X_i|\Theta] = \boldsymbol{a}' C_i Y_i \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) = \boldsymbol{a}' \boldsymbol{\beta}(\Theta_i). \tag{24}$$

Da bi se odredio procjenitelja povjerenja za $\mu_{\boldsymbol{a}}(\Theta_i)$ za bilo koji ponuđeni vektor $\boldsymbol{a}$, mora se odrediti procjenitelja povjerenja za vektor $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$. Teorem 3.8., iz prethodnog poglavlja, kaže da se za konstrukciju procjenitelja povjerenja najprije treba konstruirati optimalno sažimanje $\mathbf{B}_i = Pro(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)|L_e^{ind}(\mathbf{X}_i))$. Stoga se definiraju strukturni parametri:

$$\underbrace{\boldsymbol{\beta}_0}_{p\times 1} := E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)],$$

$$\sigma_0^2 := E[\sigma^2(\Theta_i)],$$

$$\underbrace{T}_{p\times p} := Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)').$$

Napomena:

- Nadalje se pretpostavlja da je T punog ranga.

Prvi moment je dan sa

$$E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mu(\Theta_i).$$

Ovdje je $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ jednodimenzionalan, te je

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) = \mu(\Theta_i), Y_i = (1, ..., 1)'.$$

Primjer jednostavne linearne regresije:

$$E[X_{ij}|\Theta_i] = \beta_0(\Theta_i) + j \cdot \beta_1(\Theta_i)$$

ili u matričnoj notaciji

$$E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}}_{Y_i} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0(\Theta_i) \\ \beta_1(\Theta_i) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}.$$

Sada se koristeći rezultate iz prethodnog poglavlja može izvesti formulu za procjenitelja povjerenja. Najprije se treba prisjetiti da je

$$W_i = \begin{pmatrix} w_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{in} \end{pmatrix}.$$

Teorem 4.2. ***(sažimanje podataka).*** *Uzimajući u obzir pretpostavke na model za standardni regresijski slučaj:*
i)) individualni nepristrani procjenitelj za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ jest

$$\boldsymbol{B}_i = (Y_i' W_i Y_i)^{-1} Y_i' W_i \boldsymbol{X}_i. \tag{25}$$

ii)) kvadratni gubitak matrice $\boldsymbol{B}_i$ je

$$E[(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = \sigma^2 \cdot (Y_i' W_i Y_i)^{-1}. \tag{26}$$

Dokaz: Uz dani Θ_i, prema teoremu 4.1, već je poznato da je $\mathbf{B}_i$ nepristrani procjenitelj za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$, a obzirom da niti jedna od matrica Y_i, W_i ne ovisi o vrijednostima od Θ_i, mora biti i optimalno sažimanje podataka. Iz (21) slijedi da je

$$Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) \cdot (Y_i' W_i Y_i)^{-1}.$$

Kako vrijedi

$$Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i) = E[(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'|\Theta_i]$$

uzimajući očekivanje obje strane, dobiva se upravo tražena tvrdnja *ii*) i time je teorem dokazan. □

Teorem 4.3. ***(formula povjerenja u standardnom slučaju).*** *Koristeći pretpostavke modela za standardni slučaj, slijedi da procjenitelj povjerenja za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ zadovoljava*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) = A_i \boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}_0, \tag{27}$$

gdje su

$$A_i = T(T + \sigma^2 (Y_i' W_i Y_i)^{-1})^{-1},$$

i

$$\boldsymbol{\beta}_0 = E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)].$$

Matrica kvadratnog gubitka dana je sa

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T. \tag{28}$$

Dokaz: Prema Teoremu 3.9 zna se da je

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) = A_i \mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}_0,$$

gdje je

$$A_i = T(T + S_i)^{-1} = T(T + \sigma^2 (Y_i' W_i Y_i)^{-1})^{-1}.$$

Teorem 3.6 kaže da je kvadratni gubitak procjenitelja $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)$ jednak

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T = A_i S_i$$

čime je teorem dokazan. □

Prethodni teorem da je definiciju nehomogenog procjenitelja povjerenja. Potrebno je dati i formulu za homogenog procjenitelja povjerenja što će učiniti sljedeći teorem koji je direktna posljedica Teorema 3.4 i Teorema 3.6 iz prethodnog poglavlja.

Teorem 4.4. ***(homogeni procjenitelj povjerenja.)*** *Koristeći pretpostavke modela u standardnom regresijskom modelu, slijedi da je homogeni procjenitelj povjerenja za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ dan formulom*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} = A_i \boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}, \tag{29}$$

gdje je

$$A_i = T(T + \sigma^2 (Y_i' W_i Y_i)^{-1})^{-1},$$
$$\text{te } \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1} \sum_{i=1}^{I} A_i \boldsymbol{B}_i.$$

Matrica kvadratnog gubitka dana je sa

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] =$$
$$= (I - A_i)T[I + (\sum_{i=1}^{I} A_i')^{-1}(I - A_i)']. \tag{30}$$

4.2.2 Opći regresijski model

Pretpostavke modela (Hachemeisterov model)
Rizik i je okarakteriziran svojim individualnim profilom rizika ϑ_i, koji je sam po sebi realizacija slučajne varijable Θ_i. Pretpostavlja se sljedeće:

- H1: Uz dano Θ_i, vrijednosti $X_{ij}, j = 1, 2, ..., n$ su nezavisne te vrijedi

$$\underbrace{E[\mathbf{X}_i|\Theta_i]}_{n\times 1} = \underbrace{Y_i}_{n\times p} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)}_{p\times 1}, \tag{31}$$

  gdje je $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ regresijski vektor duljine $p \leq n$ sa linearno nezavisnim komponentama, a Y_i je poznata matrica ranga p, $Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i) = \Sigma_i(\Theta_i)$.

- H2: Parovi $(\Theta_1, \mathbf{X}_1), (\Theta_2, \mathbf{X}_2), ...$ su nezavisni, te su $\Theta_1, \Theta_2, ...$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable.

Napomena:

- Hachemeisterov model uključuje standardni regresijski model kao specijalni slučaj.

- $Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i'|\Theta_i) = \Sigma_i(\Theta_i)$ implicira da su strukturni parametri matrice

$$S_i = E[\Sigma_i(\Theta_i)], (i = 1, 2, ..., I)$$

Ponovno je cilj pronaći procjenitelja povjerenja, te se ponovno potrebno fokusirati na sažimanje podataka.

Uvjetno, uz dani Θ_i, nepristrani procjenitelj povjerenja jest

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(\Theta_i) = (Y_i \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} \mathbf{X}_i,$$

te je kovarijacijska matrica

$$Cov(\hat{\boldsymbol{\beta}}(\Theta_i), \hat{\boldsymbol{\beta}}(\Theta_i)'|\Theta_i) = (Y_i \Sigma_i(\Theta_i)^{-1} Y_i)^{-1}.$$

Naime, može se primijetiti da kovarijacijska matrica ovisi o nepoznatim vrijednostima od Θ_i, te je stoga i sama nepoznata.

Teorem 4.5. ***(sažimanje podataka).*** *Uzimajući u obzir gore navedene pretpostavke modela:*
i)) individualni nepristrani procjenitelj za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ baziran na $\boldsymbol{X}_i$ jest

$$\boldsymbol{B}_i = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} \boldsymbol{X}_i. \tag{32}$$

ii)) kvadratni gubitak matrice $\boldsymbol{B}_i$ je

$$E[(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))(\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}. \tag{33}$$

Napomena:

- $\mathbf{B}_i$ je individualno nepristran zbog

$$\begin{aligned} E[\mathbf{B}_i|\Theta_i] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \\ = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} Y_i \boldsymbol{\beta}(\Theta_i) = \boldsymbol{\beta}(\Theta_i). \end{aligned}$$

Dokaz: Potrebno je pokazati da je uvjet ortogonalnosti

$$\boldsymbol{\beta}(\Theta_i) - \mathbf{B}_i \perp A\mathbf{X}_i - \mathbf{B}_i$$

zadovoljen za sve matrice A za koje je

$$E[A\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \boldsymbol{\beta}(\Theta_i).$$

Uvjet ortogonalnosti može se zapisati kao

$$E[Cov(\mathbf{B}_i, (A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i)] = E[Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i)].$$

Iz $E[A\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ i $E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = Y_i \cdot \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$, slijedi

$$AY_i = I,$$

budući da je $E[A\mathbf{X}_i|\Theta_i] = AY_i \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ za sve vrijednosti $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$. Koristeći $\mathbf{B}_i = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} \mathbf{X}_i$ slijedi da vrijedi

$$\begin{aligned} E[Cov(\mathbf{B}_i, (A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i)] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} S_i A' = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' A' = \\ = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1}. \end{aligned}$$

Kako $E[Cov(\mathbf{B}_i, (A\mathbf{X}_i)'|\Theta_i)]$ ne ovisi o A, mora vrijediti

$$E[Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i)] = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1},$$

čime je teorem dokazan.

$\square$

Idući teorem direktna je posljedica Teorema 3.9 i Teorema 3.6 primjenjena na kompresiju $\mathbf{B}_i$.

Teorem 4.6. *Uzimajući u obzir pretpostavke modela, slijedi da procjenitelj povjerenja za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ zadovoljava*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) = A_i \boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}_0, \tag{34}$$

gdje su

$$\begin{gathered} A_i = T(T + (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1})^{-1}, \\ \boldsymbol{B}_i = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} \boldsymbol{X}_i, \\ S_i = E[\Sigma_i(\Theta_i)] = E[Cov(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_i' | \Theta_i)], \\ T = Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)'), \\ \boldsymbol{\beta}_0 = E[\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)]. \end{gathered}$$

Matrica kvadratnog gubitka dana je sa

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T. \tag{35}$$

Dokaz: Prema Teoremu 3.9 se zna da je

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) = A_i \mathbf{B}_i + (I - A_i)\boldsymbol{\beta}_0,$$

gdje je

$$A_i = T(T + S_i)^{-1} = T(T + (Y_i' S_i Y_i)^{-1})^{-1}.$$

Teorem 3.6 kaže da je kvadratni gubitak procjenitelja $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)$ jednak

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i) - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] = (I - A_i)T = A_i S_i$$

čime je teorem dokazan. □

Jednako kao u prethodnom odjeljku potrebno je navesti i formuli za homogenog procjenitelja povjerenja. To će učiniti sljedeći teorem koji je direktna posljedica Teorema 3.4 i Teorema 3.6 iz prethodnog poglavlja.

Teorem 4.7. *(homogeni procjenitelj povjerenja.)* *Uzimajući u obzir pretpostavke općeg regresijskog modela povjerenja, slijedi da je homogeni procjenitelj povjerenja za $\boldsymbol{\beta}(\Theta_i)$ dan formulom*

$$\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} = A_i \boldsymbol{B}_i + (I - A_i)\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}, \tag{36}$$

gdje je

$$A_i = T(T + (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1})^{-1},$$
$$\boldsymbol{B}_i = (Y_i' S_i^{-1} Y_i)^{-1} Y_i' S_i^{-1} \boldsymbol{X}_i,$$
$$te\ \hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1} \textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i \boldsymbol{B}_i.$$

Matrica kvadratnog gubitka dana je sa

$$E[(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)) \cdot (\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\Theta_i)^{hom} - \boldsymbol{\beta}(\Theta_i))'] =$$
$$= (I - A_i)T[I + (\sum_{i=1}^{I} A_i')^{-1}(I - A_i)']. \tag{37}$$

4.3 Jednostavni regresijski slučaj

Jednostavni regresijski model u kojemu je vrijeme kovarijata bila je baza Hachemeisterovog originalnog problema. Taj problem je i dalje, u praksi, najvažnija primjena Hachemeisterovog regresijskog modela, stoga mu se treba posebno posvetiti.

Dakle, jednostavan regresijski model je oblika

$$E[X_{ij}|\Theta_i] = \beta_0(\Theta_i) + j \cdot \beta_1(\Theta_i)$$

ili u matričnoj notaciji

$$E[\mathbf{X}_i|\Theta_i] = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix}}_{Y_i} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0(\Theta_i) \\ \beta_1(\Theta_i) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}_(\Theta_i)},$$

gdje $\beta_0(\Theta_i)$ označava odsječak na y - osi, a $\beta_1(\Theta_i)$ nagib pravca.

Nadalje, pretpostavka je da se radi o standardnom regresijskom slučaju te je

$$S_i = E[Cov(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i|\Theta_i)] = \sigma^2 \cdot W_i^{-1},$$

$$\text{gdje je } W_i = \begin{pmatrix} w_{i1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_{in} \end{pmatrix}.$$

Teoretski model se uklapa u okvir regresijskog modela povjerenja. No, primjenom modela na podatke, Hachemeister je otkrio da ne dobiva dobre rezultate. Naime, "trik" je bio u tome da se odsječak na y - osi modelira u sredini vremenskog perioda, a ne na samome početku. Prvo se želi koristiti originalni model kako bi se otkrilo gdje nastaje problem.

Promatra se slučaj kada su nagib pravca i odsječak na y - osi nezavisni. Tada je kovarijacijska matrica T oblika

$$T = Cov(\boldsymbol{\beta}(\Theta_i), \boldsymbol{\beta}(\Theta_i)') = \begin{pmatrix} \tau_0^2 & 0 \\ 0 & \tau_1^2 \end{pmatrix}.$$

Kako bi se pojednostavila notacija u narednom odjeljku napušta se indeks i. Nadalje, neka je $V := Y'WY$.

Radi daljnjeg pojednostavljenja, definiraju se "uzoračke" težine sa $w_j/w_\bullet$, te sa $E^{(s)}$ i $Var^{(s)}$ pripadne momente s obzirom na distribuciju. Primjerice:

$E^{(s)}[j] = \sum_{j=1}^{n} j\frac{w_j}{w_\bullet}$,

$E^{(s)}[X_j] = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_\bullet}X_j$,

$Var^{(s)}[j] = \sum_{j=1}^{n} j^2\frac{w_j}{w_\bullet} - (\sum_{j=1}^{n} j^2\frac{w_j}{w_\bullet})^2 = E^{(s)}[j^2] - (E^{(s)}[j])^2$.

U jednostavnom regresijskom slučaju dobiva se

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1\ldots 1 \\ 1 & 2\ldots n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n \end{pmatrix} =$$

$$= w_\bullet \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_\bullet} & \sum_{j=1}^{n} j\frac{w_j}{w_\bullet} \\ \sum_{j=1}^{n} j\frac{w_j}{w_\bullet} & \sum_{j=1}^{n} j^2\frac{w_j}{w_\bullet} \end{pmatrix} =$$

$$= w_\bullet \begin{pmatrix} 1 & E^{(s)}[j] \\ E^{(s)}[j] & E^{(s)}[j^2] \end{pmatrix},$$

te je nepristrani procjenitelj jednak

$$\mathbf{B} = V^{-1}Y'W\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & E^{(s)}[j] \\ E^{(s)}[j] & E^{(s)}[j^2] \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_\bullet}X_j \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{w_\bullet}jX_j \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Var^{(s)}[j]} \cdot \begin{pmatrix} E^{(s)}[j^2] & -E^{(s)}[j] \\ -E^{(s)}[j] & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{(s)}[X_j] \\ E^{(s)}[jX_j] \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Var^{(s)}[j]} \cdot \begin{pmatrix} E^{(s)}[j^2] \cdot E^{(s)}[X_j] - E^{(s)}[j] \cdot E^{(s)}[jX_j] \\ E^{(s)}[jX_j] - E^{(s)}[j] \cdot E^{(s)}[X_j] \end{pmatrix}.$$

Dalje se želi izračunati matrica A:

$$\begin{aligned} A = T(T + \sigma^2V^{-1})^{-1} = \\ = (I + \sigma^2V^{-1}T^{-1})^{-1} = \\ = (V + \sigma^2T^{-1})^{-1}V. \end{aligned}$$

Prvo je potrebno naći inverz od T, odnosno

$$T^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2\tau_1^2}\begin{pmatrix} \tau_1^2 & 0 \\ 0 & \tau_0^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} \kappa_0 & 0 \\ 0 & \kappa_1 \end{pmatrix},$$
$$\text{gdje su } \kappa_0 = \frac{\sigma^2}{\tau_0^2}, \kappa_1 = \frac{\sigma^2}{\tau_1^2},$$

te se dobiva da je

$$V + \sigma^2 T^{-1} = \begin{pmatrix} w_\bullet + \kappa_0 & w_\bullet E^{(s)}[j] \\ w_\bullet E^{(s)}[j] & w_\bullet E^{(s)}[j^2] + \kappa_1 \end{pmatrix}.$$

Sada je

$$(V + \sigma^2 T^{-1})^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} w_\bullet E^{(s)}[j^2] + \kappa_1 & -(w_\bullet E^{(s)}[j]) \\ -(w_\bullet E^{(s)}[j]) & w_\bullet + \kappa_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{gdje je } N = (w_\bullet + \kappa_0)(w_\bullet E^{(s)}[j^2] + \kappa_1) - (w_\bullet E^{(s)}[j])^2 =$$
$$= w_\bullet^2 Var^{(s)}[j] + \kappa_0 w_\bullet E^{(s)}[j^2] + w_\bullet \kappa_1 + \kappa_0\kappa_1,$$

te je matrica A jednaka

$$A = \frac{w_\bullet}{N} \cdot \begin{pmatrix} w_\bullet Var^{(s)}[j] + \kappa_1 & \kappa_1 E^{(s)}[j] \\ \kappa_0 E^{(s)}[j] & w_\bullet Var^{(s)}[j] + \kappa_0 E^{(s)}[j^2] \end{pmatrix}.$$

Može se primijetit da matrica povjerenja A nije dijagonalna, iako matrice S i T jesu, što je glavna vodilja do krivog rezultata. No, postoji jednostavan način kako se nastali problem može zaobići. Naime, rješenje jest da sjecište sa y - osi uzimaju u sredini ("centru gravitacije") vremenskog intervala, odnosno

$$j_0 = E^{(s)}[j] = \sum_{j=1}^{n} j \frac{w_j}{w_\bullet}.$$

Tada se dobiva regresija oblika

$$\mu_j(\Theta) = \beta_0(\Theta) + (j - E^{(s)}[j]) \cdot \beta_1(\Theta),$$

te je matrica Y jednaka

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 - E^{(s)}[j] \\ 1 & 2 - E^{(s)}[j] \\ \vdots & \vdots \\ 1 & n - E^{(s)}[j] \end{pmatrix}.$$

Napomena:

- Linearna transformacija vremenske osi ne utječe na procjenitelja povjerenja. No, izmjenom originalnog modela dobio se novi vektor, te se pretpostavlja da je kovarijacijska matrica T dijagonalna u odnosu na taj novi vektor.

Ponavljajući prethodne izračune u novom vremenu $k = j - E^{(s)}[j]$, te koristeći $E^{(s)}[k] = 0$ dobiva se da je procjenitelj $\mathbf{B}$ jednak

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} E^{(s)}[X_j] \\ \frac{Cov^{(s)}(j,X_j)}{Var^{(s)}(j)} \end{pmatrix}$$

i

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{gdje } a_{11} = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \kappa_0} = \frac{w_\bullet}{w_\bullet + \frac{\sigma^2}{\tau_0^2}},$$

$$a_{22} = \frac{w_\bullet Var^{(s)}(j)}{w_\bullet Var^{(s)}(j) + \kappa_1} = \frac{w_\bullet Var^{(s)}(j)}{w_\bullet Var^{(s)}(j) + \frac{\sigma^2}{\tau_1^2}}.$$

Potrebno je još odrediti procjenitelje povjerenja za komponente $\boldsymbol{\beta}(\Theta)$. Prema teoremu 5.3 vrijedi

$$\hat{\hat{\beta}}_0(\Theta) = a_{11}B_0 + (1 - a_{11})\beta_{00}, \tag{38}$$

$$\hat{\hat{\beta}}_1(\Theta) = a_{22}B_1 + (1 - a_{22})\beta_{01}, \tag{39}$$

gdje su B_0 i B_1 komponente nepristranog procjenitelja $\mathbf{B}$, β_{00} i β_{01} su komponente od $\boldsymbol{\beta}_0$.

Pod tim pretpostavkama, formula povjernja u jednostavom regresijskom modelu može se raščlaniti na dvije jednodimenzionalne formule povjerenja. Prethodno navedene formule primijenjuju se direktno u praksi. Nagib pravca i odsječak na y - osi mogu se odvojeno procijeniti. Također je potrebno pronaći procjenitelje za strukturne parametre što će biti učinjeno malo kasnije.

Trebalo bi pomnije promotriti što je učinjeno. Matematički, zapravo su izmijenjeni stupci matrice Y tako da budu međusobno ortogonalni. Kao posljedica, matrica povjerenja A je dijagonalna, te $\beta_0(\Theta)$ nema utjecaja na $\beta_1(\Theta)$ i obratno. Dakle, kada su stupci matrice Y ortogonalni, procjenitelji za parametre $\beta_0(\Theta)$ i $\beta_1(\Theta)$ su stohastički nekorelirani.

Potrebno je skrenuti pozornost na još jednu stvar, a to je da se "centar gravitacije" može razlikovati za različite rizike i. No, u praksi, se uglavnom vrlo malo razlikuju. Ostaje pitanje kako definirati "centar gravitacije". Prirodno bi bilo uzeti "centar gravitacije" cijelog kolektiva, odnosno

$$j_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{j\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} j,$$

gdje je $w_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{I} w_{i\bullet}$.

Dakle, u situacijama kada su individualni "centri gravitacije" u blizini, uzima se "centar gravitacije" za cijeli kolektiv, te se primjenjuje na formule koju su izvedene za komponente vektora $\beta(\Theta_i)$. U tom slučaju matrica povjerenja A je sljedećeg oblika:

$$A_i = \frac{w_{i\bullet}}{N_i} \cdot \begin{pmatrix} w_{i\bullet} Var^{(s_i)}[j] + \kappa_1 + \Delta_i^2 \kappa_0 & \Delta_i \kappa_0 Var^{(s_i)}[j]) \\ \Delta_i \kappa_0 & (w_{i\bullet} + \kappa_0) Var^{(s_i)}[j] \end{pmatrix}.$$

$$\text{gdje je } N_i = (w_{i\bullet} + \kappa_0)(w_{\bullet} E^{(s)}[j^2] + \kappa_1) - (w_{i\bullet} Var^{(s_i)}[j] + \kappa_1) + w_{i\bullet} \Delta_i^2 \kappa_0,$$

$$\Delta_i = E^{(s_i)}[j] - j_0.$$

Matrica povjerenja A ponovno nije dijagonalna. Kao što je već spomenuto, u praksi, Δ_i su uglavnom vrlo mali. Može se primijetit da je za $\Delta_i = 0$ navedena matrica povjerenja jednaka onoj koja je izvedena u prethodnom dijelu. Za vrlo male Δ_i, rezultat je poprilično blizu rezultatu koji se dobije sa jednostavnijim jednodimenzionalnim formulama iz prethodnog poglavlja.

Još preostaje naći procjenitelje za strukturne parametre.

Neka je

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} w_{ij} (X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}),$$

gdje su $\hat{\mu}_{ij}$ prilagođene vrijednosti individualnog regresijskog pravca, odnosno

$$\hat{\mu}_{ij} = \hat{\beta}_0(\Theta_i) + (j - j_0^{(i)}) \hat{\beta}_1(\Theta_i),$$

gdje

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0(\Theta_i) \\ \hat{\beta}_1(\Theta_i) \end{pmatrix} = (Y_i' W_i Y_i)^{-1} Y_i' W_i \mathbf{X}_i.$$

Zna se da su $\hat{\sigma}_i^2$ nepristrani procjenitelji za $\sigma^2(\Theta_i)$. Stoga je prirodno za procjenitelja od $\sigma^2(\Theta_i)$ uzeti

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \hat{\sigma}_i^2.$$

Uzme li se sjecište sa y - osi u individualnom "centru gravitacije", dobiva se da je kovarijacijska matrica individualnih regresijskih parametara dijagonalna i oblika

$$Cov(\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i'|\Theta_i) = \sigma^2(\Theta_i) \begin{pmatrix} w_{i\bullet} & 0 \\ 0 & w_{i\bullet}d_i \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\text{gdje } d_i = Var^{(s_i)}(j) = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}}(j - j_0^{(i)})^2,$$
$$j_0^{(i)} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} j.$$

U praksi, individualni "centri gravitacije" vrlo malo variraju jedan od rugoga, stoga se $j_0^{(i)}$ mogu zamijeniti "centrom gravitacije" kolektiva

$$j_0 = \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{w_{\bullet\bullet}} j.$$

Na kraju se dobivaju sljedeći nepristrani procijenitelji:

$$\hat{\tau}_0^2 = c_0 \cdot \{\frac{I}{I-1} \textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}}(B_{0i} - \overline{B_0})^2 - \frac{I\hat{\sigma}^2}{w_{\bullet\bullet}}\},$$
$$\text{gdje } c_0 = \frac{I}{I-1}\{\textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}}(1 - \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}})\}^{-1},$$
$$\overline{B_0} = \textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}} B_{0i}.$$

$$\hat{\tau}_1^2 = c_1 \cdot \{\frac{I}{I-1} \textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*}(B_{1i} - \overline{B_1})^2 - \frac{I\hat{\sigma}^2}{w_{\bullet\bullet}^*}\},$$
$$\text{gdje } w_{i\bullet}^* = d_i \cdot w_{i\bullet},$$
$$c_1 = \frac{I}{I-1}\{\textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*}(1 - \frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*})\}^{-1},$$
$$\overline{B_1} = \textstyle\sum_{i=1}^{I} \frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*} B_{1i}.$$

Primjer 4.8. *Sljedeće tablice sadrže podatke za portfelj auto osiguranja koji se sastoji od četiri grupe rizika*

godina	1.rizik	2.rizik	3.rizik	4.rizik
1	6244	4067	2455	951
2	6583	4166	2250	1086
3	6156	3526	2068	883
4	6297	3432	1974	786
5	6217	3213	1720	744
6	6363	3151	1633	760

Tablica 1: Broj zahtjeva za svaki rizik

godina	1.rizik	2.rizik	3.rizik	4.rizik
1	6182	5462	6233	3214
2	6104	5668	6997	4297
3	6574	6143	6680	4112
4	6561	5942	8088	3987
5	6479	7112	6232	7132
6	6821	6547	7562	5490

Tablica 2: Prosječni iznosi šteta za svaki rizik

Za svaku grupu rizika $i = 1, 2, 3, 4$ *potrebno je procijeniti regresijski pravac.*

Potrebno je izračunati:

a) "centar gravitacije" za svaku grupu rizika, te kolektivni "centar gravitacije
b) regresijski pravac za prosječne iznose šteta za svaku grupu rizika primjenjujući prethodno navedene formule

Rješenje:

a) Prema formuli za individualni "centar gravitacije"

$$j_0^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} j,$$

dobiva se

$$j_0^{(1)} = 1\cdot\frac{6244}{37860}+2\cdot\frac{6583}{37860}+3\cdot\frac{6156}{37860}+4\cdot\frac{6297}{37860}+5\cdot\frac{6217}{37860}+6\cdot\frac{6363}{37860} = 3.50,$$

$$j_0^{(2)} = 1\cdot\frac{4067}{21555}+2\cdot\frac{4166}{21555}+3\cdot\frac{3526}{21555}+4\cdot\frac{3432}{21555}+5\cdot\frac{3213}{21555}+6\cdot\frac{3151}{21555} = 3.33,$$

$$j_0^{(3)} = 1\cdot\frac{2455}{12100}+2\cdot\frac{2250}{12100}+3\cdot\frac{2068}{12100}+4\cdot\frac{1974}{12100}+5\cdot\frac{1720}{12100}+6\cdot\frac{1633}{12100} = 3.26,$$

$$j_0^{(4)} = 1\cdot\frac{951}{5210}+2\cdot\frac{1086}{5210}+3\cdot\frac{883}{5210}+4\cdot\frac{786}{5210}+5\cdot\frac{744}{5210}+6\cdot\frac{760}{5210} = 3.30.$$

Globalni "centar gravitacije"

$$j_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_{\bullet j}}{w_{\bullet\bullet}} j,$$

jednak je

$$j_0 = 1\cdot\frac{13717}{76725}+2\cdot\frac{14085}{76725}+3\cdot\frac{12633}{76725}+4\cdot\frac{12489}{76725}+5\cdot\frac{11894}{76725}+6\cdot\frac{11907}{76725} = 3.40.$$

Može se primijetiti kako se idividualni "centri gravitacije" vrlo malo razlikuju.

b) Za procjenu regresijskog pravca za prosječne iznose šteta, prvo je potrebno izračunati individualne regresijske pravce

$$\mu_j(\Theta) = \beta_0(\Theta) + (j - E^{(s)}[j]) \cdot \beta_1(\Theta),$$

gdje su

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_0(\Theta_i) \\ \hat{\beta}_1(\Theta_i) \end{pmatrix} = (Y_i' W_i Y_i)^{-1} Y_i' W_i \boldsymbol{X}_i.$$

Kako se individualni "centri gravitacije" vrlo malo razlikuju, može se uzeti kolektivni "centar gravitacije". Tada je za svaku grupu rizika matrica Y_i oblika

$$Y_i = \begin{pmatrix} 1 & 1-3.40 \\ 1 & 2-3.40 \\ 1 & 3-3.40 \\ 1 & 4-3.40 \\ 1 & 5-3.40 \\ 1 & 6-3.40 \end{pmatrix},$$

te su

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} 6182 \\ 6104 \\ 6574 \\ 6561 \\ 6479 \\ 6821 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} 5462 \\ 5668 \\ 6143 \\ 5942 \\ 7112 \\ 6547 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 6233 \\ 6997 \\ 6680 \\ 8088 \\ 6232 \\ 7562 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_4 = \begin{pmatrix} 3214 \\ 4297 \\ 4112 \\ 3987 \\ 7132 \\ 5490 \end{pmatrix}.$$

Matrice težina W_i za pojedinu grupu rizika su dijagonalne matrice gdje su dijagonalni elementi jednaki broju zahtjeva za pojedinu grupu rizika.

Primjenjujući gornju formulu dobiva se

	1.rizik	2.rizik	3.rizik	4.rizik
sjecište (u j0)	6439	6114	6958	4653
nagib	124	274	179	551

Tablica 3: Individualni regresijski pravci

Sada koristeći formule

$$\hat{\hat{\beta}}_0(\Theta) = a_{11}B_0 + (1 - a_{11})\beta_{00},$$
$$\hat{\hat{\beta}}_1(\Theta) = a_{22}B_1 + (1 - a_{22})\beta_{01}$$

treba izračunati procijenjene regresijske pravce.

Prvo za svaku grupu rizika $i = 1, 2, 3, 4$ treba izračunati matrice A_i i $\boldsymbol{B}_i$. Kako je

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} E^{(s)}[X_j] \\ \frac{Cov^{(s)}(j,X_j)}{Var^{(s)}(j)} \end{pmatrix},$$

slijedi da

$$B_0^{(1)} = 6182 \cdot \frac{6244}{37860} + 6104 \cdot \frac{6583}{37860} + 6574 \cdot \frac{6156}{37860} + 6561 \cdot \frac{6297}{37860} + 6479 \cdot \cdot \frac{6217}{37860} + 6821 \cdot \frac{6363}{37860} = 6451.4,$$

$$B_0^{(2)} = 5462 \cdot \frac{4067}{21555} + 5668 \cdot \frac{4166}{21555} + 6143 \cdot \frac{3526}{21555} + 5942 \cdot \frac{3432}{21555} + 7112 \cdot \cdot \frac{3213}{21555} + 6547 \cdot \frac{3151}{21555} = 6094.2,$$

$$B_0^{(3)} = 6233 \cdot \frac{2455}{12100} + 6997 \cdot \frac{2250}{12100} + 6680 \cdot \frac{2068}{12100} + 8088 \cdot \frac{1974}{12100} + 6232 \cdot \cdot \frac{1720}{12100} + 7562 \cdot \frac{1633}{12100} = 6933.3,$$

$$B_0^{(4)} = 3214 \cdot \frac{951}{5210} + 4297 \cdot \frac{1086}{5210} + 4112 \cdot \frac{883}{5210} + 3987 \cdot \frac{786}{5210} + 7132 \cdot \cdot \frac{744}{5210} + 5490 \cdot \frac{760}{5210} = 4600.1.$$

Još je potrebno izračunati

$$Cov^{(1)}(j, X_j) = (1 \cdot 6182 \cdot \frac{6244}{37860} + 2 \cdot 6104 \cdot \frac{6583}{37860} + 3 \cdot 6574 \cdot \frac{6156}{37860} + 4 \cdot \cdot 6561 \cdot \frac{6297}{37860} + 5 \cdot 6479 \cdot \frac{6217}{37860} + 6 \cdot 6821 \cdot \frac{6363}{37860}) - 6451.4 \cdot 3.50 = 362.9,$$

$$Cov^{(2)}(j, X_j) = (1 \cdot 5462 \cdot \frac{4067}{21555} + 2 \cdot 5668 \cdot \frac{4166}{21555} + 3 \cdot 6143 \cdot \frac{3526}{21555} + 4 \cdot \cdot 5942 \cdot \frac{3432}{21555} + 5 \cdot 7112 \cdot \frac{3213}{21555} + 6 \cdot 6547 \cdot \frac{3151}{21555}) - 6094.2 \cdot 3.33 = 798.7,$$

$$Cov^{(3)}(j, X_j) = (16233 \cdot \frac{2455}{12100} + 2 \cdot 6997 \cdot \frac{2250}{12100} + 3 \cdot 6680 \cdot \frac{2068}{12100} + 4 \cdot \cdot 8088 \cdot \frac{1974}{12100} + 5 \cdot 6232 \cdot \frac{1720}{12100} + 6 \cdot 7562 \cdot \frac{1633}{12100}) - 6933.3 \cdot 3.26 = 515.9,$$

$$Cov^{(4)}(j, X_j) = (1 \cdot 3214 \cdot \frac{951}{5210} + 2 \cdot 4297 \cdot \frac{1086}{5210} + 3 \cdot 4112 \cdot \frac{883}{5210} + 4 \cdot 3987 \cdot \frac{786}{5210} + 5 \cdot 7132 \cdot \frac{744}{5210} + 6 \cdot 5490 \cdot \frac{760}{5210}) - 4600.1 \cdot 3.30 = 1589.3,$$

te

$$Var^{(1)}(j) = (1 \cdot 1 \cdot \frac{6244}{37860} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{6583}{37860} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{6156}{37860} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{6297}{37860} + 5 \cdot 5 \cdot \cdot \frac{6217}{37860} + 6 \cdot 6 \cdot \frac{6363}{37860}) - 3.50^2 = 2.9,$$

$$Var^{(2)}(j) = (1 \cdot 1 \cdot \frac{4067}{21555} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4166}{21555} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3526}{21555} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{3432}{21555} + 5 \cdot 5 \cdot \cdot \frac{3213}{21555} + 6 \cdot 6 \cdot \frac{3151}{21555}) - 3.33^2 = 2.9,$$

$$Var^{(3)}(j) = (1 \cdot 1 \cdot \frac{2455}{12100} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{2250}{12100} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{2068}{12100} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{1974}{12100} + 5 \cdot 5 \cdot \cdot \frac{1720}{12100} + 6 \cdot 6 \cdot \frac{1633}{12100}) - 3.26^2 = 2.9,$$

$$Var^{(4)}(j) = (1 \cdot 1 \cdot \frac{951}{5210} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1086}{5210} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{883}{5210} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{786}{5210} + 5 \cdot 5 \cdot$$
$$\cdot \frac{744}{5210} + 6 \cdot 6 \cdot \frac{760}{5210}) - 3.30^2 = 2.9.$$

Dobiva se

$$B_1^{(1)} = \frac{362.9}{2.9} = 124.1,$$

$$B_1^{(2)} = \frac{798.7}{2.9} = 274.2,$$

$$B_1^{(3)} = \frac{515.9}{2.9} = 179.4,$$

$$B_1^{(4)} = \frac{1589.3}{2.9} = 551.3.$$

Kako bi se izračunale matrice A_i za $i = 1, 2, 3, 4$, prvo treba pronaći procjenitelje za strukturne parametre obzirom da

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & a_{22}^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$\text{gdje } a_{11}^{(i)} = \frac{w_{\bullet i}}{w_{\bullet i} + \frac{\sigma^2}{\tau_0^2}},\ a_{22}^{(i)} = \frac{w_{\bullet i} Var^{(s)}(j)}{w_{\bullet i} Var^{(s)}(j) + \frac{\sigma^2}{\tau_1^2}}.$$

Dakle,

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(X_{ij} - \hat{\mu}_{ij}),$$

te slijedi

$$\hat{\sigma}_1^2 = 146100599,\ \hat{\sigma}_2^2 = 431148192,\ \hat{\sigma}_3^2 = 1087386513,\ \hat{\sigma}_4^2 = 809946912.$$

Sada je

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \hat{\sigma}_i^2 = 618645554$$

procjenitelj za $\sigma^2(\Theta_i)$.

Potrebno je još pronaći procjenitelje za τ_0^2 i τ_1^2. Prema formulama iz prethodnog odjeljka slijedi

$c_0 = \frac{I}{I-1}\{\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}}(1-\frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}})\}^{-1} = \frac{3}{4}\cdot\{\frac{37860}{76725}\cdot(1-\frac{37860}{76725})+\frac{21555}{76725}\cdot$
$\cdot(1-\frac{21555}{76725})+\frac{12100}{76725}\cdot(1-\frac{12100}{76725})+\frac{5210}{76725}\cdot(1-\frac{5210}{76725})\}^{-1} = 1.157233,$

$\overline{B_0} = \sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}}B_{0i} = \frac{37860}{76725}\cdot 6541.4+\frac{21555}{76725}\cdot 6094.2+\frac{12100}{76725}\cdot 6933.3+$
$+\frac{5210}{76725}\cdot 4600.1 = 6301.3,$

te je tada

$$\hat{\tau}_0^2 = c_0\cdot\{\frac{I}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}}{w_{\bullet\bullet}}(B_{0i}-\overline{B_0})^2-\frac{I\hat{\sigma}^2}{w_{\bullet\bullet}}\} = 398855.4.$$

Sada još treba izračunati

$$\hat{\tau}_1^2 = c_1\cdot\{\frac{I}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*}(B_{1i}-\overline{B_1})^2-\frac{I\hat{\sigma}^2}{w_{\bullet\bullet}^*}\},$$
$$\textit{gdje } w_{i\bullet}^* = d_i\cdot w_{i\bullet}.$$

Dakle,

$$d_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}}(j-j_0^{(i)})^2,$$

odnosno

$$d_1 = 2.9,\ d_2 = 2.9,\ d_3 = 2.9,\ d_4 = 2.9,$$

te je sada

$c_1 = \frac{I}{I-1}\{\sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*}(1-\frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*})\}^{-1} = \frac{3}{4}\cdot\{\frac{110706.1}{223323.4}\cdot(1-\frac{110706.1}{223323.4})+$
$+\frac{62796.6}{223323.4}\cdot(1-\frac{62796.6}{223323.4})+\frac{34799.4}{223323.4}\cdot(1-\frac{34799.4}{223323.4})+\frac{15021.3}{223323.4}\cdot$
$\cdot(1-\frac{15021.3}{223323.4})\}^{-1} = 1.160297,$

$\overline{B_1} = \sum_{i=1}^{I}\frac{w_{i\bullet}^*}{w_{\bullet\bullet}^*}B_{1i} = \frac{110706.1}{223323.4}\cdot 124.1+\frac{62796.6}{223323.4}\cdot 274.2+\frac{34799.4}{223323.4}\cdot 179.4+$
$+\frac{15021.3}{223323.4}\cdot 551.3 = 242.5.$

Nadalje, slijedi

$$\hat{\tau}_1^2 = 9211.847,$$

stoga se sada mogu formirati matrice A_i i B_i za svaki $i = 1, 2, 3, 4$. Dakle,

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 6451.4 \\ 124.1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 6094.2 \\ 274.2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_3 = \begin{pmatrix} 6933.3 \\ 179.4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_4 = \begin{pmatrix} 4600.1 \\ 551.3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.960 \\ 00.62 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0.930 \\ 00.48 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0.890 \\ 00.34 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 0.770 \\ 00.18 \end{pmatrix}.$$

Preostalo je još izračunati $\boldsymbol{\beta}_0$ koji je jednak

$$\boldsymbol{\beta}_0 = (\textstyle\sum_{i=1}^{I} A_i)^{-1} \sum_{i=1}^{I} A_i \boldsymbol{B}_i.$$

te se dobiva

$$\boldsymbol{\beta}_0 = \begin{pmatrix} 6076.1 \\ 286.9 \end{pmatrix}.$$

Napokon, koristeći prethodno navedene formule dobivaju se procjenjeni regresijski pravci

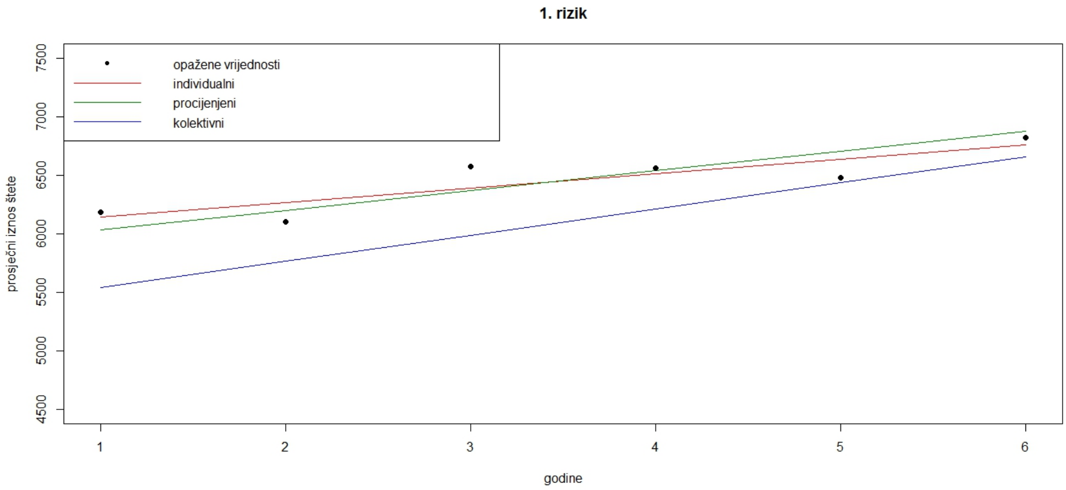
	1.rizik	2.rizik	3.rizik	4.rizik
sjecište (u j0)	6437	6093	6836	4939
nagib	169	245	212	271

Tablica 4: Procijenjeni regresijski pravci

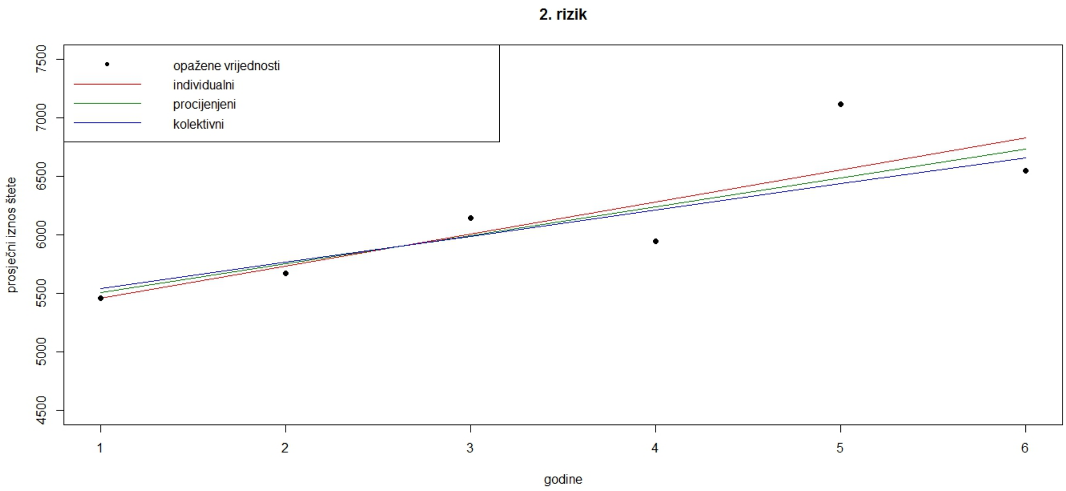
Kolektivni regresijski pravac je tada oblika

$$\mu_j(\Theta) = 6076 + (j - 3.40) \cdot 224.$$

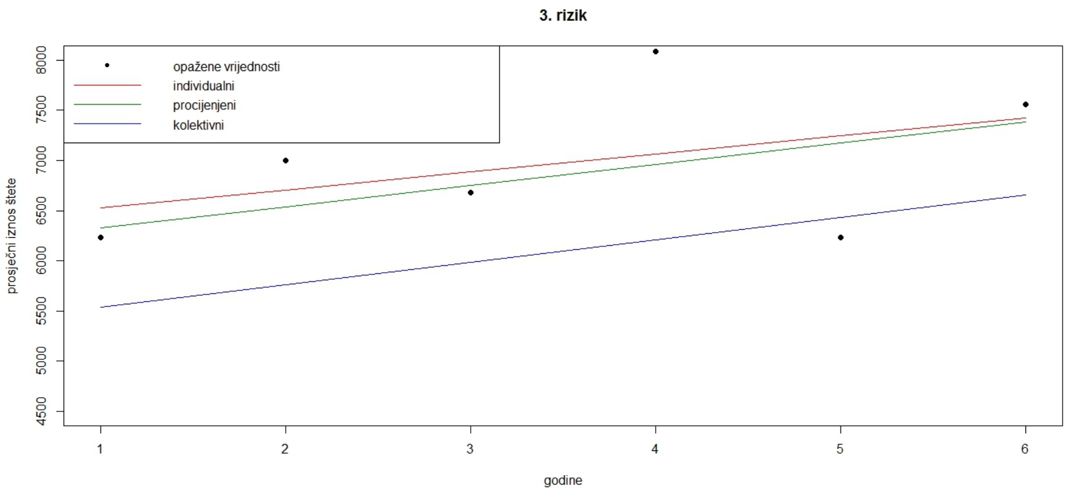
Prikaz sva tri pravca, kao i opaženih vrijednosti za sve četiri grupe rizika dan je sljedećim slikama:



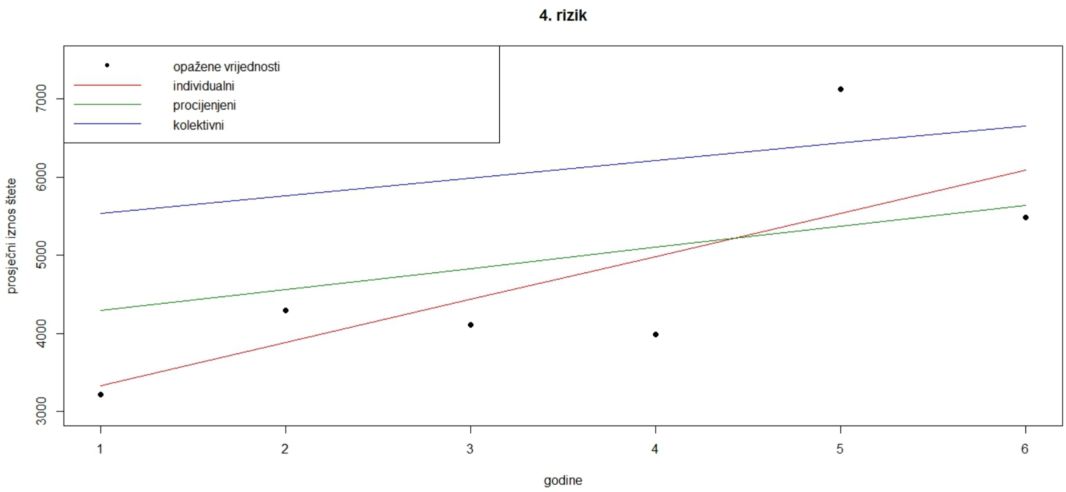
Slika 2: Regresijski pravci za prvi rizik



Slika 3: Regresijski pravci za drugi rizik



Slika 4: Regresijski pravci za treći rizik



Slika 5: Regresijski pravci za četvrti rizik

Literatura

[1] H. Bühlmann, A. Gisler, *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer, Berlin, 2005.

[2] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

Sažetak

U ovom radu opisan je regresijski model povjerenja. Posebna naznaka dana je na jednostavni regresijski model gdje je vrijeme kovarijata, obzirom da je taj model bila osnova za Hachemeisterov problem procjene šteta. Također uveden je pojam procjenitelja povjerenja, odnosno procjenitelja za individualnu premiju. U radu su opisani homogeni i nehomogeni procjenitelj povjerenja, te kako se definiraju kada se nalaze u više dimenzija, odnosno kada postoji portfelj od više rizika.

Summary

In this graduate thesis the regression credibility model was examined. Particular attention was paid to the simple linear regression case with time as covariable, considering that this model was basis for Hachemeister's original problem. Also, credibility estimators were introduced, known as estimators for the individual premium. In thesis were decribed differences between homogenous and inhomogenous credibility estimator, and also definition of them when they are in multidimensional credibility model.

Životopis

Ana Velić rođena je 12. prosinca 1992. godine u Zagrebu. Pohađala je XV. gimnaziju u Zagrebu, te nakon polaganja državne mature 2011. godine upisuje Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno - matematičkog fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, 2014. godine upisuje Diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike na istom odsjeku. Krajem završetka studija zapošljava se u Privrednoj banci Zagreb, u Sektoru za upravljanje rizicima, gdje trenutno radi.