Poluizračunljivost

Čičković, Eugen

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Eugen Čičković

POLUIZRAČUNLJIVOST

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu proučavat će se pojam poluizračunljivosti i svi pojmovi koji prethode definiciji izračunljivog odnosno poluizračunljivog skupa.
Cilj ovoga rada jest matematički precizno definirati i strukturirati izračunljive skupove te vidjeti koji su dovoljni uvjeti da za neki skup možemo reći da je izračunljiv. Također je cilj istražiti što više konkretnih primjera i zaključiti o kakvim se skupovima radi i zadovoljavaju li oni tražena svojstva te možemo li na temelju toga doći do poopćenja određenih rezultata.

Osnovni pojam od kojega ćemo krenuti jest pojam rekurzivnih funkcija koje ćemo promatrati s različitim kodomenama i istraživati koja sve svojstva za njih vrijede. Zatim ćemo nadograditi ta svojstva kroz skupove u metričkim i topološkim prostorima te definirati izračunljive metričke i topološke prostore. U glavnom dijelu rada ćemo definirati izračunljiv i poluizračunljiv skup, promotriti neka svojstva tih skupova te zaključno odrediti dovoljan uvjet da neki skup bude izračunljiv.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije

1.1 Rekurzivne funkcije u $\mathbb{N}$

Definicija 1.1.1. *Neka je* $z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *nul-funkcija, tj.* $z(x) = 0\,, \forall x \in \mathbb{N}$, *funkcija* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija sljedbenika, tj.* $s(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{N}$, *a funkcija* $I_j^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *gdje su* $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ *i* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ *projekcija na j-tu koordinatu, tj.* $I_j^k(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = x_j$. *Funkcije* z, s, *i* I_j^k *nazivamo* ***inicijalnim funkcijama****.*

Definiramo sljedeća dva operatora: kompoziciju i primitivnu rekurziju.

Definicija 1.1.2. *Neka su* $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$h(x) = f(g_1(x), \ldots, g_n(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena ***kompozicijom*** *funkcija* $f, g_1, \ldots, g_n$.

Definicija 1.1.3. *Neka su* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo* $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *sa*

$$h(0, x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$$

$$h(y+1, x_1, \ldots, x_k) = g(h(y, x_1, \ldots, x_k), y, x_1, \ldots, x_k)\ .$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena ***primitivnom rekurzijom*** *od f i g.*

Definicija 1.1.4. *Za funkciju oblika* $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *koja se u konačno mnogo koraka može dobiti od inicijalnih funkcija primjenom operatora kompozicije i primitivne rekurzije kažemo da je* ***primitivno rekurzivna****.*

Osnovno pravilo:

Ako su $f, g_1, \dots, g_n$ primitivno rekurzivne i h dobivena kompozicijom od $f, g_1, \dots, g_n$, tada je i h primitivno rekurzivna.

Također, ako su f i g primitivno rekurzivne i h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, tada je i h primitivno rekurzivna.

Propozicija 1.1.5. *Funkcija $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, definirana sa $zb(x, y) = x + y$ je primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $G(a, b, c) = s(I_1^3(a, b, c))$.
Vrijedi:

$$zb(0, x) = I_1^1(x) = x \,,$$
$$zb(y + 1, x) = G(zb(y, x), y, x).$$

I_1^1 je inicijalna funkcija, pa je time i primitivno rekurzivna, a G je primitivno rekurzivna kao kompozicija inicijalnih funkcija s i I_1^3. Dakle, zb je dobivena primitivnom rekurzijom od I_1^1 i G pa je i zb primitivno rekurzivna. □

Propozicija 1.1.6. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $h(x, y) = x \cdot y$. Tada je h primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Vrijedi

$$h(0, x) = z(x)$$
$$h(y + 1, x) = g(h(y, x), y, x),$$

gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = a + c$. Funkcija g je primitivno rekurzivna kao kompozicija funkcija zb, I_1^3 i I_3^3, pri čemu je zb funkcija iz propozicije 1.1.5. Budući da je h dobivena primitivnom rekurzijom od z i g, zaključujemo da je h primitivno rekurzivna. □

Korolar 1.1.7. *Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f + g$ i $f \cdot g$ primitivno rekurzivne.*

Dokaz. Neka je zb funkcija iz propozicije 1.1.5. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = zb(f(x), g(x)),$$

iz čega zaključujemo da je $f + g$ kompozicija funkcija zb, f i g. Stoga je $f + g$ primitivno rekurzivna. Analogno dobivamo da je $f \cdot g$ primitivno rekurzivna. □

Uvedimo još jedan operator:

Definicija 1.1.8. *Neka je* $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *funkcija takva da za sve* $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$. *Definiramo* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0\}.$$

Pišemo

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \mu y(g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0)\,.$$

Za funkciju f *kažemo da je dobivena primjenom* μ ***-operatora*** *na* g.

Sada možemo definirati rekurzivne funkcije:

Definicija 1.1.9. *Za funkciju koja je od inicijalnih dobivena u konačno mnogo koraka primjenom kompozicije, primitivne funkcije i* μ *-operatora kažemo da je* ***rekurzivna***.

Osnovna pravila:

- Ako su $f, g_1, \ldots, g_n$ rekurzivne funkcije i h funkcija dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, \ldots, g_n$, tada je i h rekurzivna funkcija.
- Ako su f i g rekurzivne i h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g, tada je h rekurzivna funkcija.
- Ako je g rekurzivna i f dobivena primjenom μ -operatora na g, tada je i f rekurzivna.
- Ako je f primitivno rekurzivna, onda je i rekurzivna.

Uočimo sljedeće:
Ako su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije, onda na isti način kao i u korolaru 1.1.7 zaključujemo da su i funkcije $f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.

Propozicija 1.1.10. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Tada je svaka konstantna funkcija* $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Za $a \in \mathbb{N}$ definiramo funkciju $c_a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $c_a(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Dokažimo indukcijom po $a \in \mathbb{N}$ da je c_a primitivno rekurzivna.

Baza: $a = 0 \Rightarrow\ c_0(x) = 0$, tj. $c_0(x) = z(I_1^k(x))$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Ovo znači da je c_0 kompozicija funkcija z i I_1^k koje su inicijalne, pa slijedi da je c_0 primitivno rekurzivna.

Pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $a \in \mathbb{N}$, dakle c_a je primitivno rekurzivna funkcija.

Korak: Imamo $c_{a+1}(x) = a + 1 = s(a) = s(c_a(x))$. Ovo znači da je c_{a+1} kompozicija funkcija s i c_a koje su primitivno rekurzivne, pa je i c_{a+1} primitivno rekurzivna.

Time je tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 1.1.11. *Neka je $a \in \mathbb{N}$ i neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$h(0) = a$$
$$h(y{+}1) = g(h(y), y).$$

Tada je h primitivno rekurzivna.

Dokaz. Definirajmo $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa

$$H(y, x) = h(y).$$

Dovoljno je dokazati da je funkcija H primitivno rekurzivna. Naime, vrijedi

$$h(y) = H(y, 0) = H(I_1^1(y), z(y)),$$

pa ako je H primitivno rekurzivna onda je i h primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih.
Neka je $c_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću a. Prema 1.1.10 funkcija c_a je primitivno rekurzivna. Neka je $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$G(a, b, c) = g(a, b).$$

Vrijedi $G(a, b, c) = g(I_1^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c))$ pa je G primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih.
Iz definicije funkcije h slijedi

$$H(0, x) = c_a(x)$$
$$H(y + 1, x) = G(H(y, x), y, x).$$

Ovo znači da je H dobivena primjenom primitivne rekurzije na funkcije c_a i G. Stoga je H primitivno rekurzivna funkcija. □

Primjer 1.1.12. *Neka je funkcija* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definirana sa*

$$p(y) = \begin{cases} y - 1 & \textit{ako je } y > 0 \\ 0 & \textit{ako je } y = 0\ . \end{cases}$$

Tada je p *primitivno rekurzivna funkcija.*

Imamo

$$\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p(y+1) &= y = I_2^2(p(y), y) \end{aligned}$$

Iz propozicije 1.1.11 slijedi da je p primitivno rekurzivna (za $a = 0$ i $g = I_2^2$).

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Definiramo broj

$$x \mathbin{\dot{-}} y = \begin{cases} x - y & \text{ako je } x \geq y \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Definicija 1.1.13. *Za funkciju* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x \mathbin{\dot{-}} y$ *kažemo da je* ***modificirano oduzimanje****.*

Lema 1.1.14. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *definirana sa* $h(y, x) = x \mathbin{\dot{-}} y$*. Tada je* h *primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned} h(0, x) &= x \\ h(y+1, x) &= x \mathbin{\dot{-}} (y+1) = p(x \mathbin{\dot{-}} y) = p(h(y, x)), \end{aligned}$$

gdje je p funkcija iz primjera 1.1.12. Definiramo funkciju $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ sa $G(a, b, c) = p(a)$. Funkcija G je primitivno rekurzivna jer je kompozicija funkcija p i I_1^3. Imamo

$$\begin{aligned} h(0, x) &= I_1^1(x) \\ h(y+1, x) &= G(h(y, x), y, x). \end{aligned}$$

Dakle, h je dobivena primitivnom rekurzijom funkcija I_1^1 i G. Stoga je h primitivno rekurzivna. □

Propozicija 1.1.15. *Modificirano oduzimanje je primitivno rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje. Neka je h funkcija iz prethodne leme. Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(x,y) = h(y,x)$, tj. $f(x,y) = h(I_2^2(x,y), I_1^2(x,y))$. Dakle, f je kompozicija funkcija h, I_2^2 i I_1^2, pa slijedi da je f primitivno rekurzivna. □

Korolar 1.1.16. *Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane sa*

$$a(x,y) = |x - y|\,,$$
$$b(x,y) = \min\{x, y\}\,,$$
$$c(x,y) = \max\{x, y\}.$$

Tada su a, b i c primitivno rekurzivne funkcije.

Dokaz. Neka je f modificirano oduzimanje te neka je h funkcija iz leme 1.1.14. Tada je

$$a(x,y) =| x - y |= (x \mathbin{\dot{-}} y) + (y \mathbin{\dot{-}} x) = f(x,y) + h(x,y).$$

Dakle, $a = f + h$, pa prema korolaru 1.1.7 zaključujemo da je a primitivno rekurzivna funkcija.
Vrijedi:

$$b(x,y) = \min\{x, y\} = x \mathbin{\dot{-}} (x \mathbin{\dot{-}} y).$$

Prema tome, $b(x,y) = f(x, f(x,y)) = f(I_1^2(x,y), f(x,y))$, pa je b primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija.
Vrijedi

$$c(x,y) = \max\{x, y\} = y + (x \mathbin{\dot{-}} y).$$

Prema tome $c(x,y) = I_2^2(x,y) + f(x,y)$, pa je c primitivno rekurzivna kao zbroj primitivno rekurzivnih funkcija. □

Propozicija 1.1.17. *Funkcija $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $h(y,x) = x^y$ je primitivno rekurzivna.*

Dokaz. Vrijedi

$$h(0,x) = 1 = c_1(x)$$
$$h(y+1, x) = g(h(y,x), y, x),$$

gdje su $c_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1 i $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirana s $g(a,b,c) = I_1^3(a,b,c) \cdot I_3^3(a,b,c)$. Dakle, h je dobivena primitivnom rekurzijom od c_1 i g koje su primitivno rekurzivne, pa je i h primitivno rekurzivna. □

Neka su $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s

$$\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ako je } x > 0 \\ 0 & \text{, ako je } x = 0\,. \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ako je } x > 0 \\ 1 & \text{, ako je } x = 0\,. \end{cases}$$

Funkcije sg, $\overline{\mathrm{sg}}$ su primitivno rekurzivne jer je

$$\begin{aligned} \mathrm{sg}(0) &= 0 \\ \text{i } \mathrm{sg}(y+1) &= 1 = c_1(\mathrm{sg}(y), y), \end{aligned}$$

gdje je $c_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1, pa iz propozicije 1.1.11 slijedi da je sg primitivno rekurzivna, a primitivna rekurzivnost funkcije $\overline{\mathrm{sg}}$ slijedi iz

$$\overline{\mathrm{sg}} = 1 \mathbin{\dot{-}} \mathrm{sg}(x) = f(c_1(x), \mathrm{sg}(x)),$$

gdje je f modificirano oduzimanje, a $c_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1.

Propozicija 1.1.18. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$f(x,y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor & \textit{ako je } y > 0 \\ x & \textit{ako je } y = 0\,. \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}, y > 0$. Neka je $k = f(x,y)$. Dakle, $k = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$, pa je $k \leq \frac{x}{y} < k+1$ iz čega slijedi da je $ky \leq x < (k+1)y$. Iz ovoga zaključujemo da je

$$k = \min\{z \in \mathbb{N} \mid x < (z+1)y\} = \min\{z \in \mathbb{N} \mid x < (z+1)(y + \overline{\mathrm{sg}}(y))\}.$$

Dakle,

$$f(x,y) = \min\{z \in \mathbb{N} \mid x < (z+1)(y + \overline{\mathrm{sg}}(y))\}. \tag{1.1}$$

Uočimo da ova jednakost vrijedi i za $y = 0$. Definirajmo $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ s $g(x,y,z) = \overline{\mathrm{sg}}((z+1)(y + \overline{\mathrm{sg}}(y)) \mathbin{\dot{-}} x)$. Tada za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x < (z+1)(y + \overline{\mathrm{sg}}(y)) \iff g(x,y,z) = 0.$$

Iz (1.1) slijedi

$$f(x, y) = \mu z(g(x, y, z) = 0).$$

Dakle, f je dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g. Dovoljno je stoga dokazati da je g rekurzivna. No, to je jasno iz definicije od g budući da su $\overline{\text{sg}}$ i modificirano oduzimanje primitivno rekurzivne funkcije te da su zbroj i produkt primitivno rekurzivnih funkcija primitivno rekurzivne funkcije. □

Definicija 1.1.19. *Definiramo funkciju* ost : $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *s*

$$\text{ost}(x, y) = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y.$$

(Uzimamo $\left\lfloor \frac{x}{0} \right\rfloor = x$*)*

Propozicija 1.1.20. *Funkcija* ost *je rekurzivna funkcija i za sve* $x, y \in \mathbb{N}, y \geq 1$ *vrijedi da je* $\text{ost}(x, y)$ *ostatak pri dijeljenju* x *sa* y.

Dokaz. Uočimo da je ost kompozicija modificiranog oduzimanja, funkcije I_1^2 i funkcije $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirane s $f(x, y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y$. Funkcija f je rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija (prema propoziciji 1.1.18). Prema tome, ost je rekurzivna funkcija. Neka su $x, y \in \mathbb{N}, y \geq 1$. Neka je r ostatak pri dijeljenju x sa y. Tada je $x = q \cdot y + r$, pri čemu je $q \in \mathbb{N}$ i $0 \leq r < y$. Iz ovoga slijedi

$$\frac{x}{y} = q + \frac{r}{y},$$

pa zbog $0 \leq \frac{r}{y} < 1$ vrijedi

$$\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor = q.$$

Uvrštavajući prethodnu jednakost u $x = q \cdot y + r$ dobivamo

$$r = x - \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y = x \dot{-} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \cdot y = \text{ost}(x, y).$$

Time je propozicija dokazana. □

Definicija 1.1.21. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^k$. *Kažemo da je* S ***rekurzivan skup*** *u* $\mathbb{N}^k$ *ako je njegova karakteristična funkcija* $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivna.*

Primjer 1.1.22. *1)* $\mathbb{N}$ *je rekurzivan skup u* $\mathbb{N}$ *jer je* $\chi_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *konstantna funkcija s vrijednošću 1. Isto tako* $\mathbb{N}^k$ *je rekurzivan skup u* $\mathbb{N}^k$*, za svaki* $k \geq 1$*. Nadalje, iz istog razloga prazan skup je rekurzivan u* $\mathbb{N}^k$*, za svaki* $k \geq 1$*.*

2) Neka je $2\mathbb{N} = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$*. Dakle,* $2\mathbb{N}$ *je skup svih parnih brojeva. Skup* $2\mathbb{N}$ *je rekurzivan skup, naime vrijedi*

$$\chi_{2\mathbb{N}}(x) = \overline{sg}(\mathrm{ost}(x, 2)),$$

iz čega zaključujemo da je funkcija $\chi_{2\mathbb{N}}$ *rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija.*

Propozicija 1.1.23. *Neka su* S *i* T *rekurzivni skupovi u* $\mathbb{N}^k$*. Tada su i skupovi* S^C*,* $S \cap T$*,*$S \cup T$ *i* $S \setminus T$ *rekurzivni.*

Dokaz. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\chi_{S^C}(x) &= \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x)),\\
\chi_{S \cap T}(x) &= \chi_S(x) \cdot \chi_T(x),\\
\chi_{S \cup T}(x) &= \mathrm{sg}(\chi_S(x) + \chi_T(x)),
\end{aligned}$$

pa koristeći činjenicu da je kompozicija rekurzivnih funkcija rekurzivna te da su zbroj i produkt rekurzivnih funkcija rekurzivne funkcije zaključujemo da su ove funkcije rekurzivne. Prema tome S^C, $S \cap T$ i $S \cup T$ su rekurzivni skupovi. S obzirom da je $S \setminus T = S \cap T^C$ zaključujemo da je $S \setminus T$ rekurzivan skup. □

Primjer 1.1.24. *Neka je* $2\mathbb{N} + 1 = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$*. Tada je* $2\mathbb{N} + 1 = (2\mathbb{N})^C$*, pa je* $2\mathbb{N} + 1$ *rekurzivan skup prema propoziciji 1.1.23.*

Propozicija 1.1.25. *Neka su* $n, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *te neka su* $f_1, \dots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Neka su* $S_1, \dots, S_n$ *rekurzivni podskupovi od* $\mathbb{N}^k$ *sa svojstvom da za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *postoji jedinstveni* $i \in \{1, \dots, n\}$ *takav da je* $x \in S_i$*. Neka je* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa*

$$h(x) = \begin{cases} f_1(x) & , \text{ ako je } x \in S_1,\\ f_2(x) & , \text{ ako je } x \in S_2,\\ & \vdots \\ f_n(x) & , \text{ ako je } x \in S_n\,. \end{cases}$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$h(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + f_2(x) \cdot \chi_{S_2}(x) + \cdots + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x),$$

pa zaključujemo da je h rekurzivna funkcija kao zbroj konačno mnogo funkcija od kojih je svaka rekurzivna kao umnožak rekurzivnih. □

Primjer 1.1.26. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ iz propozicije 1.1.18. Znamo da je f rekurzivna funkcija. Definirajmo $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ sa*

$$g(x,y) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor & , \text{ ako je } \ y \geq 1, \\ x+1 & , \text{ ako je } \ y = 0 \ . \end{cases}$$

Dokažimo da je i g rekurzivna funkcija.
Definirajmo $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq 1\}$ i $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = 0\}$.
Skup S_1 je rekurzivan jer je $\chi_{S_1}(x,y) = \overline{sg}(1 \dot{-} y)$, a S_2 je rekurzivan kao komplement od S_1. Iz definicije funkcije g je jasno da je

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \text{ ako je } \ (x,y) \in S_1, \\ (s \circ I_1^2)(x,y) & , \text{ ako je } \ (x,y) \in S_2, \end{cases}$$

pa prema propoziciji 1.1.25 zaključujemo da je g rekurzivna funkcija.

Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i neka je $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$. Pretpostavimo da su $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ takvi da postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x_1, \ldots, x_k, y) \in S$. Označimo sa $\mu y((x_1, \ldots, x_k, y) \in S)$ najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x_1, \ldots, x_k, y) \in S$.

Propozicija 1.1.27. *Neka je $k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i neka je S rekurzivan skup u $\mathbb{N}^{k+1}$ takav da za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x_1, \ldots, x_k, y) \in S$. Definirajmo $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \mu y((x_1, \ldots, x_k, y) \in S).$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Definirajmo $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ s

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\chi_S(x_1, \ldots, x_k, y)).$$

Očito je g rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih, a vrijedi

$$(x_1, \ldots, x_k, y) \in S \iff g(x_1, \ldots, x_k, y) = 0.$$

Iz definicije funkcije f slijedi da je f funkcija dobivena primjenom μ operatora na g. Prema tome, f je rekurzivna funkcija. □

Korolar 1.1.28. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *rekurzivan skup takav da za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $(x, y) \in S$. *Tada postoji rekurzivna funkcija* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *takva da je* $(x, f(x)) \in S, \forall x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. Funkcija f iz propozicije 1.1.27 je očito tražena funkcija. □

Propozicija 1.1.29. *Neka je D skup svih* $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ *takvih da* $x \mid y$, *tj. takvih da x dijeli y. Tada je D rekurzivan skup.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $x \geq 1$. Iz propozicije 1.1.20 slijedi

$$\mathrm{ost}(y, x) = 0 \Longleftrightarrow x \mid y. \tag{1.2}$$

No, iz definicije funkcije ost slijedi da relacija (1.2) vrijedi i ako je $x = 0$. Dakle, (1.2) vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi

$$\chi_D(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(\mathrm{ost}(y, x)).$$

Prema tome, D je rekurzivan skup. □

Neka je ¶ skup svih prostih brojeva.

Teorem 1.1.30. *Skup ¶ je rekurzivan.*

Dokaz. Neka je D skup iz propozicije 1.1.29. Neka je $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (y, x) \in D \text{ } i \text{ } y > 1 \text{ } ili \text{ } x \leq 1\}$. Tvrdimo da je S rekurzivan skup. Definirajmo

$$D' = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (y, x) \in D\},\ E = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y > 1\} \text{ i } F = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq 1\}.$$

Vrijedi

$$\chi_{D'}(x, y) = \chi_D(y, x) = \chi_D(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)),$$

pa je $\chi_{D'}$ rekurzivna funkcija kao kompozicija rekurzivnih. Dakle, D' je rekurzivan skup. Nadalje,

$$\chi_E(x, y) = \mathrm{sg}(y \dot{-} 1), \chi_F(x, y) = \overline{\mathrm{sg}}(x \dot{-} 1),$$

iz čega slijedi da su E i F rekurzivni skupovi. Po definiciji skupova S,D',E i F slijedi $S = (D' \cap E) \cup F$. Prema propoziciji 1.1.23 S je rekurzivan skup. Uočimo da za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in S$. Definirajmo

$$d : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ s } d(x) = \mu y((x, y) \in S).$$

Prema propoziciji 1.1.27 d je rekurzivna funkcija. Uočimo da je $d(x)$, za $x > 1$ najmanji broj veći od 1 koji dijeli x. Stoga za $x \geq 2$ vrijedi

$$x \text{ prost} \Longleftrightarrow d(x) = x.$$

Tada je

$$\P = G \cap \{x \in \mathbb{N} \mid x > 1\},$$

gdje je $G = \{x \in \mathbb{N} \mid d(x) = x\}$. Skup G je rekurzivan jer je $\chi_G(x) = \overline{\mathrm{sg}} \mid d(x) - x \mid$, stoga je $\P$ rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa. □

Neka su $p_0, p_1, \ldots$ prosti brojevi redom. Dakle, $p_0 = 2, p_1 = 3, \ldots$

Propozicija 1.1.31. *Funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $y \mapsto p_y$ je rekurzivna.*

Dokaz. Definirajmo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x) = \mu z(z \in \P \text{ } i \text{ } x < z).$$

Iz propozicije 1.1.27 slijedi da je g rekurzivna funkcija. Definirajmo $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ s

$$h(0) = 2,$$
$$h(y + 1) = g(h(y)).$$

Primjetimo da je $h(y + 1) = (g \circ I_1^2)(h(y), y)$. Dakle, slijedi da je funkcija h rekurzivna. Uočimo: $h(y) = p_y$, $\forall y \in \mathbb{N}$. Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$e(x, i) = \begin{cases} \text{eksponent kojim } p_i \text{ ulazi u rastav broja } x \text{ na proste faktore} & \text{, ako je } x \geq 1, \\ 0 & \text{, ako je } x = 0 . \end{cases}$$

Propozicija 1.1.32. *Funkcija e je rekurzivna.*

Dokaz. Uočimo da za sve $x,i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$e(x, i) = \mu y(p_i^{y+1} \nmid x \text{ } ili \text{ } x = 0). \tag{1.3}$$

Neka je $E = \{(x, i, y) \mid p_i^{y+1} \nmid x\}$. Skup E je rekurzivan jer je

$$\chi_E(x, i, y) = \chi_{D^C}(p_i^{y+1}, x),$$

pri čemu je D skup iz propozicije 1.1.29. Skup $\{(x, i, y) \in \mathbb{N}^3 \mid (x, i, y) \in E \text{ } ili \text{ } x = 0\}$ je rekurzivan kao unija dva rekurzivna skupa. Sada iz relacije (1.3) i propozicije 1.1.27 slijedi da je e rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.1.33. *Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana na sljedeći način:*

$$f(x) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} \mid p_n \mid x\} & , \ ako\ je\ \ x \geq 2, \\ x & , \ ako\ je\ \ x \in \{0, 1\}\ . \end{cases}$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Indukcijom lako dobivamo da je $x < p_x$, za svaki $x \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ najveći broj takav da $p_n \mid x$. Iz $n < p_n$ slijedi $n < x$. Neka je $i \in \mathbb{N}$ najmanji broj takav da $p_{x \dot{-} i} \mid x$. Tada je $x \dot{-} i = n$.
Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$g(x) = \mu i(p_{x \dot{-} i} \mid x \ ili \ x = 1).$$

Tada je $f(x) = x \dot{-} g(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}$. Stoga je dovoljno dokazati da je g rekurzivna funkcija.
Definirajmo skup $S = \{(x, i) \mid p_{x \dot{-} i} \mid x\}$. Vrijedi $\chi_S(x, i) = \chi_D(p_{x \dot{-} i}, x)$, pri čemu je D skup iz propozicije 1.1.29, iz čega slijedi da je S rekurzivan skup.
Neka je $T = \{(x, i) \mid x = 1\}$. Tada vrijedi $\chi_T(x, i) = \overline{\mathrm{sg}}(|x - 1|)$, pa je T rekurzivan skup.
Iz definicije skupova S i T i definicije funkcije g slijedi da je $g(x) = \mu i((x, i) \in S \cup T)$, pa iz propozicije 1.1.27 slijedi da je g rekurzivna funkcija. Time je tvrdnja propozicije dokazana. $\square$

Definicija 1.1.34. *Neka su k,n $\in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ kažemo da je **rekurzivna** ako su komponentne funkcije od f rekurzivne, tj. ako su rekurzivne funkcije $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)), \forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Uočimo sljedeće:

Ako su $k, n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$, $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcije, onda je $g \circ f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ kompozicija funkcija $g, f_1, \ldots, f_n$ gdje su $f_1, \ldots, f_n$ komponentne funkcije od f.
Iz ovoga slijedi da je $g \circ f$ rekurzivna funkcija ako su f i g rekurzivne funkcije.
Nadalje, ako je $l \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ i ako je $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^l$, onda su komponentne funkcije od $g \circ f$ upravo funkcije $g_1 \circ f, \ldots, g_l \circ f$ gdje su $g_1, \ldots, g_l$ komponentne funkcije od g. Stoga je $g \circ f$ rekurzivna funkcija ako su f i g rekurzivne funkcije.

Definicija 1.1.35. *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Za skup $S \subseteq \mathbb{N}^k$ kažemo da je **rekurzivno prebrojiv** ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $S = \mathrm{Im}(f)$.*

Primjer 1.1.36. *1) Skup $\mathbb{N}$ je rekurzivno prebrojiv jer je $\mathbb{N} = \mathrm{Im}(I_1^1)$.*

2) Skup $\mathbb{N}^2$ je rekurzivno prebrojiv jer je $\mathbb{N}^2 = \mathrm{Im}(f)$, gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ definirana sa $f(x) = (e(x, 0), e(x, 1))$ pri čemu je e funkcija iz propozicije 1.1.32.
Naime, očito su komponentne funkcije od f rekurzivne, pa je i f rekurzivna funkcija, a za sve $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vrijedi $f(2^a \cdot 3^b) = (a, b)$, iz čega slijedi $\mathbb{N}^2 = \mathrm{Im}(f)$.

3) *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada je $\mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup, što dobivamo na isti način kao pod 2).*

Primjer 1.1.37. *Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*
To je očito za $S = \emptyset$. Ako je S neprazan, odaberimo neki $s_0 \in S$ i definirajmo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ ako je } x \in S, \\ s_0 & , \text{ ako je } x \in S^C . \end{cases}$$

Tada iz propozicije 1.1.25 slijedi da je f rekurzivna funkcija, a očito je $\mathrm{Im}(f) = S$.

Propozicija 1.1.38. *Neka je $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da je S neprazan. Odaberimo $s_0 \in S$. Imamo $s_0 = (s_1, \dots, s_n)$, gdje su $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$. Neka je $w : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna surjekcija (takva funkcija postoji jer je $\mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup). Definirajmo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ sa

$$f(x) = \begin{cases} w(x) & , \text{ ako je } w(x) \in S, \\ s_0 & , \text{ inače } . \end{cases}$$

Tvrdimo da je f rekurzivna funkcija te da je $\mathrm{Im}(f) = S$.
Očito je $\mathrm{Im}(f) \subseteq S$. S druge strane, ako je $s \in S$, onda postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $w(x) = s$. Tada je $f(x) = w(x) = s$, dakle $s \in Im(f)$. Prema tome, $Im(f) = S$.
Neka su $f_1, \dots, f_n$ komponentne funkcije od f te $w_1, \dots, w_n$ komponentne funkcije od w. Neka je $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada je

$$f_i(x) = \begin{cases} w_i(x) & , \text{ ako je } w(x) \in S, \\ s_i & , \text{ inače } . \end{cases}$$

Neka je $T = \{x \in \mathbb{N} \mid w(x) \in S\}$. Tada je $\chi_T(x) = \chi_S(w(x))$, tj. $\chi_T = \chi_S \circ w$. Stoga je χ_T rekurzivna funkcija, tj. T je rekurzivan skup.
Očito je

$$f_i(x) = \begin{cases} w_i(x) & , \text{ ako je } x \in T, \\ s_i & , \text{ ako je } x \in T^C . \end{cases}$$

Iz propozicije 1.1.25 slijedi rekurzivnost od f_i. Time smo dokazali da su sve komponentne funkcije od f rekurzivne, tj. f je rekurzivna i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Propozicija 1.1.39. *Neka su $k,n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv skup. Tada je $f(S)$ rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Inače, postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je $Im(g) = S$. Promotrimo funkciju $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$. To je rekurzivna funkcija i vrijedi $f(S) = Im(f \circ g)$. Dakle, $f(S)$ je rekurzivno prebrojiv skup. □

Korolar 1.1.40. *Neka su $k,n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i neka je S neprazan podskup od $\mathbb{N}^n$. Tada je S rekurzivno prebrojiv ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je $S = Im(f)$.*

Dokaz. Ako je $S = Im(f)$, gdje je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija, tada je prema prethodnoj propoziciji S rekurzivno prebrojiv skup, naime $S = f(\mathbb{N}^k)$.
Obratno, neka je S rekurzivno prebrojiv. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $S = Im(f)$. Neka je $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ neka rekurzivna surjekcija (npr. $g = I_1^k$) . Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija i $\mathrm{Im}(f \circ g) = S$. □

Teorem 1.1.41. ***[Teorem o projekciji]*** *Neka su $k,n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je T rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^{k+n}$. Neka je S skup svih $x \in \mathbb{N}^k$ za koje postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$. Tada je S rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je $p : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}^k$ definirana sa

$$p(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_k).$$

Očito je p rekurzivna funkcija (komponentne funkcije od p su projekcije $\mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$). Tvrdimo da je $S = p(T)$.
Neka je $x \in S$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in T$. Očito je $x = p(x, y)$, tj. $x \in p(T)$. Obratno, ako je $x \in p(T)$ onda postoji $a \in T$ takav da je $x = p(a)$. Imamo

$$a = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n),$$

gdje su $a_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1, \ldots, k + n$. Iz $x = p(a)$ slijedi $x = (a_1, \ldots, a_k)$. Označimo $y = (a_{k+1}, \ldots, a_{k+n})$. Tada je $(x, y) \in T$. Dakle, $x \in S$. Time smo dokazali da je $S = p(T)$.
Iz propozicije 1.1.39 slijedi da je S rekurzivno prebrojiv skup. □

1.2 Rekurzivne funkcije u $\mathbb{Z}$

Definicija 1.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ kažemo da je* ***rekurzivna*** *ako postoje rekurzivne funkcije $a,c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot a(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Lema 1.2.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Tada je f rekurzivna funkcija ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $u,v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = u(x) - v(x)$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Neka je f rekurzivna funkcija. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot a(x), \forall x \in \mathbb{N}^k$. Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ imamo

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot a(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)) \cdot a(x) - \chi_{2\mathbb{N}+1}(c(x)) \cdot a(x).$$

Tada za $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definirane s

$$u(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)) \cdot a(x)$$
$$i\ v(x) = \chi_{2\mathbb{N}+1}(c(x)) \cdot a(x)$$

vrijedi da su rekurzivne i da je $f(x) = u(x) - v(x)$.
Obratno, pretpostavimo da postoje rekurzivne funkcije $u, v : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $f(x) = u(x) - v(x)$. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid u(x) < v(x)\}$. Skup S je rekurzivan jer je

$$\chi_S(x) = \mathrm{sg}(v(x) \dot{-} u(x)).$$

Nadalje, neka je $a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $a(x) =\mid u(x) - v(x) \mid$. Funkcija a je rekurzivna kao kompozicija funkcije iz korolara 1.1.16 i funkcija u i v.
Vrijedi $f(x) = (-1)^{\chi_S(x)} \cdot a(x)$.
Zaključak: f je rekurzivna funkcija. □

Uočimo sljedeće:

- *Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.*
- *S druge strane, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$, onda je rekurzivna i kao $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Naime, iz $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot a(x)$, gdje su $a,c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije slijedi*

  $$f(x) =\mid f(x) \mid=\mid (-1)^{c(x)} \cdot a(x) \mid=\mid a(x) \mid= a(x).$$

  Dakle, $f = a$, tj. f je rekurzivna funkcija.

1.3 Rekurzivne funkcije u $\mathbb{Z}$

Propozicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije $-f, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Neka su $a, a', c, c' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1)^{c(x)} \cdot a(x), \\ g(x) &= (-1)^{c'(x)} \cdot a'(x) \;. \end{aligned}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} -f(x) &= (-1)^{c(x)+1} \cdot a(x), \\ f(x) \cdot g(x) &= (-1)^{c(x)+c'(x)} \cdot a(x) \cdot a'(x), \end{aligned}$$

pa je jasno da su $-f$ i $f \cdot g$ rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$. Prema lemi 1.2.2 postoje $u, u', v, v' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $f(x) = u(x) - v(x)$ i $g(x) = u'(x) - v'(x)$.
Tada je

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= u(x) - v(x) + u'(x) - v'(x) \\ &= (u(x) + u'(x)) - (v(x) + v'(x)) \\ &= (u + u')(x) - (v + v')(x), \end{aligned}$$

pa iz leme 1.2.2 slijedi da je $f + g$ rekurzivna funkcija. $\square$

1.4 Rekurzivne funkcije u $\mathbb{Q}$

Definicija 1.4.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Za funkciju $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ kažemo da je **rekurzivna** ako postoje rekurzivne funkcije $a,b,c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i*

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}, \forall x \in \mathbb{N}^k.$$

Očito je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija ako i samo ako postoje rekurzivne funkcije $\tilde{a} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i $f(x) = \dfrac{\tilde{a}(x)}{b(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.

Propozicija 1.4.2. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f,g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su $-f, |f|, f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne funkcije.*

Dokaz. Neka su $a,b,c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \dfrac{a(x)}{b(x)}$.
Tada je

$$-f(x) = (-1)^{c(x)+1} \cdot \frac{a(x)}{b(x)},$$
$$|f(x)| = (-1)^0 \cdot \frac{a(x)}{b(x)},$$

pa je jasno da su $-f$ i $|f|$ rekurzivne funkcije.
Neka su $\tilde{a},\tilde{a} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Z}$ i $b,b' : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0$ i $f(x) = \dfrac{\tilde{a}(x)}{b(x)}$, $b'(x) \neq 0$ i $g(x) = \dfrac{\tilde{a}'(x)}{b'(x)}$. Tada je

$$f(x) + g(x) = \frac{\tilde{a}(x)b'(x) + \tilde{a}'(x)b(x)}{b(x)b'(x)},$$
$$f(x) \cdot g(x) = \frac{\tilde{a}(x)\tilde{a}'(x)}{b(x)b'(x)},$$

pa iz propozicije 1.3.1 slijedi da su $f + g$ i $f \cdot g$ rekurzivne funkcije. □

Propozicija 1.4.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Neka je $S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$, $T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = 0\}$ i $V = \{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) \geq 0\}$. Tada su skupovi S,T i V rekurzivni.*

Dokaz. Neka su $a,b,c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0$ i $f(x) = (-1)^{c(x)} \cdot \dfrac{a(x)}{b(x)}$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$.
Vrijedi

$$x \in S \iff (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} > 0 \iff c(x) \in 2\mathbb{N} \ i \ a(x) > 0.$$

Stoga je $\chi_S(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)) \cdot \mathrm{sg}(a(x))$ pa je S rekurzivan skup.
Nadalje, $x \in T \iff a(x) = 0$ pa je $\chi_T(x) = \overline{\mathrm{sg}}(a(x))$, stoga je i T rekurzivan skup.
Iz $V = S \cup T$ slijedi da je i V rekurzivan skup. □

Korolar 1.4.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $h,g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su skupovi $\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) < g(x)\}$, $\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) = g(x)\}$ i $\{x \in \mathbb{N}^k \mid h(x) \leq g(x)\}$ rekurzivni.*

Dokaz. Ovo slijedi kada prethodnu propoziciju primjenimo na $f = g - h$ (koja je rekurzivna prema propoziciji 1.4.2). □

Propozicija 1.4.5. *Neka su $k,n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada je i funkcija $f \circ h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna.*

Dokaz. Neka su $a, b, c : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je $b(x) \neq 0$ i $(-1)^{c(x)} \cdot \dfrac{a(x)}{b(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^n$.
Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = (-1)^{c(h(x))} \cdot \frac{a(h(x))}{b(h(x))} = (-1)^{(c \circ h)(x)} \cdot \frac{(a \circ h)(x)}{(b \circ h)(x)}.$$

Funkcije $a \circ h, b \circ h, c \circ h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ su rekurzivne pa je $f \circ h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. □

1.5 Rekurzivne funkcije u $\mathbb{R}$

Definicija 1.5.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima svojstvo da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je*

$$|f(x) - F(x,i)| < 2^{-i}\ ,\ \forall x \in \mathbb{N}^k\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada za f kažemo da je ***rekurzivna funkcija*** *(kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$) , a za F kažemo da je* ***rekurzivna aproksimacija od*** *f.*

Uočimo sljedeće: svaka rekurzivna funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Naime, ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija tada je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ definirana s $F(x,i) = f(x), \forall x \in \mathbb{N}^k\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}$ rekurzivna aproksimacija od f (rekurzivnost od F slijedi iz prethodne propozicije).

Primjer 1.5.2. *Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \sqrt{x}$ je rekurzivna. Dokažimo to. Definirajmo $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(k) = \frac{e(k,o)}{e(k,1)+1}$, gdje je e funkcija iz propozicije 1.1.32. Očito je g rekurzivna funkcija. Nadalje, jasno je da je* $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$. *Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Tada postoji $r \in \mathbb{Q}, r \geq 0$ takav da je $r \leq \sqrt{x} < r + 2^{-i}$. Stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $g(k) \leq \sqrt{x} < g(k) + 2^{-i}$, iz čega slijedi*

$$g(k)^2 \leq x < (g(k) + 2^{-i})^2.$$

Neka je

$$S = \{(x,i,k) \in \mathbb{N}^3 \mid g(k)^2 \leq x < (g(k) + 2^{-i})^2\}.$$

Neka su

$$S_1 = \{(x,i,k) \in \mathbb{N}^3 \mid g(k)^2 \leq x\}$$

$$S_2 = \{(x,i,k) \in \mathbb{N}^3 \mid x < (g(k) + 2^{-i})^2\}.$$

Očito je $S = S_1 \cap S_2$.
Iz propozicija 1.4.2, 1.4.5 , 1.1.17 i korolara 1.4.4 slijedi da su S_1 i S_2 rekurzivni skupovi. Stoga je i S rekurzivan.
Pokazali smo da za sve $x, i \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $(x,i,k) \in S$. Iz korolara 1.1.28 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je $(x, i, \varphi(x,i)) \in S\ ,\ \forall x, i \in \mathbb{N}$. Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$g(\varphi(x,i))^2 \leq x < (g(e(x,i)) + 2^{-i})^2$$

iz čega slijedi

$$g(\varphi(x,i)) \leq \sqrt{x} < g(e(x,i)) + 2^{-i}.$$

Stoga je

$$|\sqrt{x} - g(\varphi(x,i))| < 2^{-i}\ ,\ \forall x, i \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, $g \circ \varphi$ je rekurzivna aproksimacija od f , tj. f je rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.5.3. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivne funkcije. Tada su rekurzivne i funkcije* $-f, |f|, f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka su F i G rekurzivne aproksimacije od f i g.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|-f(x) - (-F(x, i))| = |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $-F$ rekurzivna aproksimacija od f.
Neka su $u, v \in \mathbb{R}$. Tada je

$$|u| = |u - v + v| \leq |u - v| + |v|$$

pa je

$$|u| - |v| \leq |u - v|.$$

Isto tako

$$|v| - |u| \leq |v - u| = |u - v|.$$

Stoga je

$$||u| - |v|| \leq |u - v|.$$

Koristeći ovu nejednakost dobivamo da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$||f(x)| - |F(x, i)|| \leq |f(x) - F(x, i)| < 2^{-i},$$

tj. $|F|$ je rekurzivna aproksimacija od $|f|$.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|f(x)+g(x)-(F(x, i)+G(x, i))| = |f(x)-F(x, i)+g(x)-G(x, i)| \leq |f(x)-F(x, i)|+|g(x)-G(x, i)| < 2{\cdot}2^{-i}.$$

Dakle, $|(f + g)(x) - (F + G)(x, i)| < 2 \cdot 2^{-i}$.
Definirajmo $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $H(x, i) = (F + G)(x, i + 1)$.
Funkcija H je rekurzivna prema propozicijama 1.4.2 i 1.4.5. Za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|(f + g)(x) - H(x, i)| < 2 \cdot 2^{-(i+1)} = 2^{-i}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je $f + g$ rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.5.4. *Neka je* $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ *rekurzivna funkcija. Tada je skup* $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) > 0\}$ *rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Označimo ovaj skup sa S.
Budući da je f rekurzivna postoji rekurzivna aproksimacija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ od f. Dakle, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga slijedi
$$f(x) - F(x,i) < 2^{-i} \quad \text{i} \quad F(x,i) - f(x) < 2^{-i},$$
pa je
$$f(x) - 2^{-i} < F(x,i) \tag{1.4}$$
$$F(x,i) - 2^{-i} < f(x). \tag{1.5}$$
Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{N}^k$ takav da je $f(x) > 0$. Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je
$$2 \cdot 2^{-i} < f(x)$$
iz čega slijedi
$$2^{-i} < f(x) - 2^{-i}.$$
Iz (1.4) slijedi
$$2^{-i} < F(x,i).$$
Obratno, pretpostavimo da postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $2^{-i} < F(x,i)$.
Tada je
$$0 < F(x,i) - 2^{-i}$$
pa iz (1.5) slijedi
$$f(x) > 0.$$
Zaključak:
$$f(x) > 0 \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } 2^{-i} < F(x,i). \tag{1.6}$$
Neka je $T = \{(x,i) \mid x \in \mathbb{N}^k,\ i \in \mathbb{N},\ 2^{-i} < F(x,i)\}$.
Iz (1.6) zaključujemo da vrijedi ekvivalencija
$$x \in S \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x,i) \in T,$$
tj.
$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x,i) \in T\}.$$
Dovoljno je stoga pokazati da je T rekurzivno prebrojiv, naime tada će iz teorema o projekciji (1.1.41) slijediti da je S rekurzivno prebrojiv.

Definirajmo $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $G(x,i) = 2^{-i}, x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$.
Tada je
$$G(x,i) = (-1)^0 \cdot \frac{1}{2^i}$$
iz čega je jasno da je G rekurzivna funkcija.
Vrijedi
$$T = \{(x,i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid G(x,i) < F(x,i)\}$$
pa je prema korolaru 1.4.4 T rekurzivan skup. Posebno, T je rekurzivno prebrojiv, dakle S je rekurzivno prebrojiv. □

Korolar 1.5.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je skup $\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) < g(x)\}$ rekurzivno prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada je

$$f(x) < g(x) \Longleftrightarrow g(x) - f(x) > 0.$$

Funkcija $g - f$ je rekurzivna prema propoziciji 1.5.3 pa iz prethodne propozicije slijedi tvrdnja korolara. □

Neka je x realan broj. Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ interval $\langle x - 2^{-i}, x + 2^{-i}\rangle$ sadrži racionalan broj pa odaberimo racionalan broj q_i iz tog intervala.
Slijedi $|x - q_i| < 2^{-i}$. Dakle, postoji funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(i)| < 2^{-i}, \forall i \in \mathbb{N}$.

Definicija 1.5.6. *Za realan broj x kažemo da je* ***rekurzivan*** *ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(i)| < 2^{-i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Propozicija 1.5.7. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je a rekurzivan broj ako i samo ako je a u slici neke rekurzivne funkcije $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, za $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je a rekurzivan broj.
Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ takva da je $|x - f(i)| < 2^{-i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{N}$.
Tvrdimo da je g rekurzivna.
Definirajmo $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $G(x, i) = f(i)$. Očito je G rekurzivna funkcija te za sve $x, i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|g(x) - G(x, i)| = |a - f(i)| < 2^{-i}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je g rekurzivna funkcija.
Jasno je da je a u slici od g.

Obratno, neka je a u slici rekurzivne funkcije $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, za neki $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Tada postoji $x_0 \in \mathbb{N}^k$ takav da je $g(x_0) = a$.
Neka je $G : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od g i neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s $f(i) = G(x_0, i)$.
Očito je f rekurzivna. Vrijedi

$$|g(x_0) - G(x_0, i)| < 2^{-i} , \forall i \in \mathbb{N} ,$$

pa je

$$|a - f(i)| < 2^{-i} , \forall i \in \mathbb{N}.$$

Prema tome, a je rekurzivan broj. □

Primjer 1.5.8. **1)** *Svaki racionalan broj je rekurzivan.*
Naime, ako je $a \in \mathbb{Q}$, onda je konstantna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$, $f(x) = a$ očito rekurzivna, pa je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Iz prethodne propozicije slijedi da je a rekurzivan broj.

2) *$\sqrt{x}$ je rekurzivan broj za svaki $x \in \mathbb{N}$. To slijedi iz primjera 1.5.2 i prethodne propozicije.*

Primjer 1.5.9. *Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija definirana s $\alpha(i) = (-1)^{e(i,2)} \cdot \frac{e(i,0)}{e(i,1)+1}$.*
Očito je α rekurzivna funkcija.
Nadalje, ako je $r \in \mathbb{Q}$, onda je $r = (-1)^c \cdot \frac{a}{b+1}$, za neke $a, b, c \in \mathbb{N}$, pa je $\alpha(2^a \cdot 3^b \cdot 5^c) = (-1)^c \cdot \frac{a}{b+1} = r$.
Prema tome, α je surjekcija.

Propozicija 1.5.10. *Neka je $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ funkcija iz prethodnog primjera. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je x rekurzivan broj ako i samo ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da vrijedi*

$$|x - \alpha(f(i))| < 2^{-i}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da postoji funkcija s navedenim svojstvom. Neka je

$$g = \alpha \circ f$$

.
Tada je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija te za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|x - g(i)| < 2^{-i}.$$

Stoga je x rekurzivan broj.
Obratno, pretpostavimo da je x rekurzivan broj. Tada postoji rekurzivna funkcija $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ takva da vrijedi

$$|x - h(i)| < 2^{-i} , \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $\alpha(j) = h(i)$.
Neka je

$$S = \{(i, j) \mid h(i) = \alpha(j)\}.$$

Prema korolaru 1.4.4 S je rekurzivan skup.
Budući da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in S$ prema korolaru 1.1.28 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $(i, f(i)) \in S, \forall i \in \mathbb{N}$.
Stoga je $h(i) = \alpha(f(i))$, $\forall i \in \mathbb{N}$ pa je

$$|x - \alpha(f(i))| < 2^{-i} , \ \forall i \in \mathbb{N},$$

čime je tvrdnja propozicije dokazana. □

Poglavlje 2

Izračunljivi metrički prostori

2.1 Metrički prostori

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

1. *(nenegativnost)* $d(x, y) \geq 0 \ , \ \forall x, y \in X$,
2. *(pozitivna definitnost)* $d(x, y) = 0 \iff x = y \ , \forall x, y \in X$,
3. *(simetričnost)* $d(x, y) = d(y, x) \ , \ \forall x, y \in X$,
4. *(nejednakost trokuta)* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ , \ \forall x, y, z \in X$.

Tada za d kažemo da je ***metrika na skupu*** X*, a za uređeni par (X, d) kažemo da je* ***metrički prostor****.*

Primjer 2.1.2. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Tada je d metrika na $\mathbb{R}$.
Prva tri svojstva iz definicije su očita, dokažimo četvrto.
Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tada je

$$d(x, y) = |x - y| = |x + z - z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Za d kažemo da je ***euklidska metrika na*** $\mathbb{R}$*.*

Primjer 2.1.3. *Neka je V realni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ te neka je $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ norma na V. Neka je $d : V \times V \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Tada je d metrika na V, što dobivamo na isti način kao u prethodnom primjeru.
Za d kažemo da je ***metrika inducirana normom*** $\|\cdot\|$.

Primjer 2.1.4. *Neka je* $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ *te neka je* $\|\cdot\|$ *euklidska norma na* $\mathbb{R}^n$ *, tj.*

$$\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

Neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ *inducirana ovom normom.*
Tada za $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ *vrijedi*

$$d(x,y)) = \|x-y\|,$$

pa je

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

Za d kažemo da je ***euklidska metrika na*** $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.1.5. *Neka je* (X,d) *metrički prostor te neka je* $A \subseteq X$. *Za A kažemo da je* ***gust skup*** *u metričkom prostoru* (X,d) *ako za svaki* $x \in X$ *i svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $a \in A$ *takav da je* $d(x,a) < \epsilon$.

Primjer 2.1.6. *Neka je d euklidska metrika na* $\mathbb{R}$. *Tada je* $\mathbb{Q}$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathbb{R},d)$.
Naime, ako su $x \in \mathbb{R}$ *i* $\epsilon > 0$, *tada je* $x < x+\epsilon$ *pa postoji* $a \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$x < a < x+\epsilon$$

iz čega slijedi

$$0 < a-x < \epsilon.$$

Stoga je

$$d(a,x) = |a-x| = a-x < \epsilon.$$

Primjer 2.1.7. *Općenitije, ako je* $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ *te d euklidska metrika na* $\mathbb{R}^n$, *onda je* $\mathbb{Q}^n$ *gust skup u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}^n,d)$. *Dokažimo to.*
Neka je $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\dots,x_n)$. *Neka je* $\epsilon > 0$.
Neka je $i \in \{1,\dots,n\}$.
Iz prethodnog primjera slijedi da postoji $q_i \in \mathbb{Q}$ *takav da je*

$$|x_i - q_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \,.$$

Neka je $q = (q_1,\dots,q_n)$. *Tada je*

$$d(x,q) = \sqrt{(x_1-q_1)^2+\cdots+(x_n-q_n)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n}+\cdots+\frac{\epsilon^2}{n}} = \epsilon \,.$$

2.2 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te (x_n) niz u X. Za niz (x_n) kažemo da je **gust** u metričkom prostoru (X, d) ako je njegova slika, tj. skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gust skup u (X, d).*

Definicija 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $\alpha = (\alpha_i)$ gust niz u (X, d) takav da je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$(i, j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$$

*rekurzivna. Tada za uređenu trojku (X, d, α) kažemo da je **izračunljiv metrički prostor**.*

Definicija 2.2.3. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 **izračunljiva točka** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je $d(x_0, \alpha_{f(i)}) < 2^{-i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Primjer 2.2.4. *Neka je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$ te neka je α niz u $\mathbb{R}$ definiran sa $\alpha_i = (-1)^{e(i,2)} \cdot \frac{e(i,0)}{e(i,1)+1}$.*
Niz (α_i) je gust u $(\mathbb{R}, d)$ jer je $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$.
Nadalje, promotrimo funkciju $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$\gamma(i, j) = d(\alpha_i, \alpha_j).$$

Neka su $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ funkcije definirane sa

$$F(i, j) = \alpha(i), \quad G(i, j) = \alpha(j).$$

Očito je da su F i G rekurzivne funkcije te da vrijedi

$$\gamma(i, j) = |F(i, j) - G(i, j)| \, , \ \forall i, j \in \mathbb{N} \, .$$

Iz ovoga slijedi da je γ rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ pa je rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$.
Prema tome, $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ je izračunljiv metrički prostor.
Neka je $x \in \mathbb{R}$. Tada je prema propoziciji 1.5.10 x rekurzivan broj ako i samo ako je x izračunljiva točka u $(\mathbb{R}, d, \alpha)$.

Definicija 2.2.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je (x_n) niz u X. Za (x_n) kažemo da je **izračunljiv niz** u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$d(x_n, \alpha_{F(n,i)}) < 2^{-i} \, , \ \forall n, i \in \mathbb{N} \, .$$

Uočimo sljedeće: Ako je (x_n) izračunljiv niz u (X, d, α) , onda je za svaki $n \in \mathbb{N}$ točka x_n izračunljiva u (X, d, α).

Primjer 2.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je α izračunljiv niz u (X, d, α). Čak štoviše, ako je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija onda je $(\alpha_{f(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ izračunljiv niz u (X, d, α).*
Naime, ako je $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $F(i, k) = f(i)$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$, onda je

$$d(\alpha_{f(i)}, \alpha_{F(i,k)}) = 0 < 2^{-k} \ , \ \forall i, k \in \mathbb{N} \ .$$

Lema 2.2.7. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ funkcija te $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija takva da je*

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i} \ , \ \forall x \in \mathbb{N}^k \ , \ \forall i \in \mathbb{N} \ .$$

Tada je f rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $F' : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od F.
Tada je

$$|F(x, i) - F'(x, i, j)| < 2^{-j} \ , \ \forall x \in \mathbb{N}^k \ , \ \forall i, j \in \mathbb{N} \ .$$

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$,$i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|F(x, i + 1) - F'(x, i + 1, i + 1)| < \frac{2^{-i}}{2}$$

te također iz pretpostavke leme zaključujemo

$$|f(x) - F(x, i + 1)| < \frac{2^{-i}}{2} \ .$$

Koristeći posljednje dvije nejednakosti dobivamo

$$|f(x)-F'(x, i+1, i+1)| \leq |f(x)-F(x, i+1)|+|F(x, i+1)-F'(x, i+1, i+1)| < \frac{2^{-i}}{2}+\frac{2^{-i}}{2} = 2^{-i} \ .$$

Dakle,

$$|f(x) - F'(x, i + 1, i + 1)| < 2^{-i} \ .$$

Iz ovoga i iz činjenice da je funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $(x, i) \mapsto F'(x, i+1, i+1)$ rekurzivna slijedi da je f rekurzivna. □

Propozicija 2.2.8. *Neka su $k, i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ i $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije. Tada je $f \circ g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$ rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna aproksimacija od f.
Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$|f(g(x)) - F(g(x), i)| < 2^{-i} \ .$$

Iz ovoga je jasno da je funkcija $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$, $(x, i) \mapsto F(g(x), i)$ rekurzivna aproksimacija od $f \circ g$. □

Propozicija 2.2.9. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su (x_i) i (y_i) izračunljivi nizovi u tom prostoru. Tada je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$(i, j) \mapsto d(x_i, y_j)$$

rekurzivna.

Dokaz. Neka su $a, b, a', b' \in X$ te $\epsilon > 0$ takvi da je $d(a, a') < \frac{\epsilon}{2}$ i $d(b, b') < \frac{\epsilon}{2}$.
Tada je

$$|d(a, b) - d(a', b')| < \epsilon \, . \tag{2.1}$$

Dokažimo to. Imamo

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, a') + a(a', b) \\ &\leq d(a, a') + d(a', b') + d(b', b) \\ &< \epsilon + d(a', b') \, , \end{aligned}$$

dakle

$$d(a, b) < d(a', b') + \epsilon$$

pa je

$$d(a, b) - d(a', b') < \epsilon \, .$$

Analogno dobivamo da je

$$d(a', b') - d(a, b) < \epsilon$$

pa zaključujemo da vrijedi (2.1).
Neka su $F, G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\begin{aligned} &d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k} \\ &d(y_j, \alpha_{G(j,k)}) < 2^{-k} \, , \ \forall i, j, k \in \mathbb{N} \, . \end{aligned}$$

Neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$. Tada je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k+1)}) < \frac{2^{-k}}{2} \, , \ d(y_j, \alpha_{G(j,k+1)}) < \frac{2^{-k}}{2} \, .$$

Stoga je prema (2.1) za $a = x_i, a' = \alpha_{F(i,k+1)}, b = y_j, b' = \alpha_{G(j,k+1)}$ i $\epsilon = 2^{-k}$

$$|d(x_i, y_j) - d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)})| < 2^{-k} \, . \tag{2.2}$$

Neka su $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ i $H : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ funkcije definirane sa

$$f(i, j) = d(x_i, y_j) \, , H(i, j, k) \quad = d(\alpha_{F(i,k+1)}, \alpha_{G(j,k+1)}) \, .$$

Prema (2.2) vrijedi

$$|f(i,j) - H(i,j,k)| < 2^{-k}, \ \forall i,j,k \in \mathbb{N}.$$

Želimo dokazati da je f rekurzivna (to je tvrdnja propozicije).
Prema lemi 2.2.7 dovoljno je dokazati da je H rekurzivna.
No, H je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$, $(i,j,k) \mapsto (F(i,k+1), G(j,k+1))$ i funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto d((\alpha_u, \alpha_v))$ pa prema prethodnoj propoziciji zaključujemo da je H rekurzivna funkcija. □

Definicija 2.2.10. *Neka je (X,d) metrički prostor. Neka je $x_0 \in X$ te $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Neka je*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

*Za $K(x_0, r)$ kažemo da je **otvorena kugla oko x_0 radijusa** r.*

Propozicija 2.2.11. *Neka je (X,d) metrički prostor, $x_0, y_0 \in X$ te $r, s > 0$. Pretpostavimo da je $d(x_0, y_0) \geq r + s$. Tada je $K(x_0, r) \cap K(y_0, s) = \emptyset$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in X$ takav da je $z \in K(x_0, r) \cap K(y_0, s)$.
Tada je $d(x_0, z) < r$ i $d(y_0, z) < s$ pa je

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &\leq d(x_0, z) + d(z, y_0) \\ &< r + s. \end{aligned}$$

tj.

$$d(x_0, y_0) < r + s$$

što je kontradikcija s pretpostavkom propozicije.
Time je tvrdnja dokazana. □

Primjer 2.2.12. *Neka je X neprazan skup te neka je $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } x \neq y, \\ 0 & \text{ako je } x = y. \end{cases}$$

Tada je d metrika na X. Dokažimo to.
Jedino netrivijalno svojstvo je nejednakost trokuta. Neka su $x, y, z \in X$.
Ako je $x = y$, tada je očito $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.
Ako je $x \neq y$, onda je $z \neq x$ ili $z \neq y$ pa je $d(x,z) = 1$ ili $d(z,y) = 1$ te je

$$d(x,y) = 1 \leq d(x,z) + d(z,y).$$

*Za d kažemo da je **diskretna metrika** na skupu X.*

Primjer 2.2.13. *Neka je X neprazan skup i d diskretna metrika na X. Neka je $x_0 \in X$ i $r > 0$.*
Ako je $r \leq 1$, onda je $K(x_0, r) = \{x_0\}$, a ako je $r > 1$, onda je $K(x_0, r) = X$.

Primjer 2.2.14. *Neka je X neprazan skup i d diskretna metrika na X. Neka su $x_0, y_0 X$, $x_0 \neq y_0$. Neka je $r = 1$, $s = 1$.*
Tada je

$$K(x_0, r) \cap K(y_0, s) = \emptyset$$

jer je

$$K(x_0, r) = \{x_0\} \text{ i } K(y_0, s) = \{y_0\} .$$

No,

$$d(x_0, y_0) = 1 < 2 = r + s .$$

Dakle, općenito ne vrijedi obrat propozicije 2.2.11.

Definicija 2.2.15. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je r pozitivan racionalan broj. Za $K(\alpha_i, r)$ kažemo da je* ***racionalna otvorena kugla*** *u (X, d, α).*

Definicija 2.2.16. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka fiksirana rekurzivna funkcija (niz) takva da je*

$$\mathrm{Im}(q) = \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{Q} \quad (npr.\ q_i = \frac{e(i, 0) + 1}{e(i, 1) + 1}) .$$

Nadalje, neka su τ_1, $\tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fiksirane rekurzivne funkcije takve da je

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2 \quad (npr.\ \tau_1(i) = e(i, 1) , \tau_2(i) = e(i, 2) .$$

Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo

$$\mathbb{I}_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) .$$

Očito je $\mathbb{I}_i$ racionalna otvorena kugla u (X, d, α) za svaki $i \in \mathbb{N}$, ali vrijedi i obratno, svaka racionalna otvorena kugla u (X, d, α) je oblika $\mathbb{I}_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$.
Neka je (λ_i) niz u X definiran s

$$\lambda_i = \alpha_{\tau_1(i)}$$

te neka je (ρ_i) niz u $\mathbb{Q}$ definiran s

$$\rho_i = q_{\tau_2(i)} .$$

Očito je (λ_i) izračunljiv niz u (X, d, α) te je (ρ_i) rekurzivan niz u $\mathbb{Q}$, tj. rekurzivna funkcija $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{I}_i = K(\lambda_i, \rho_i) .$$

Definicija 2.2.17. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$* ***formalno disjunktni*** *ako je*

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j \ .$$

Uočimo da je formalna disjunktnost relacija između brojeva i i j, a ne između skupova $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$.
Ako su $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$ formalno disjunktni, onda je

$$\mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_j = \emptyset \ .$$

To je direktna posljedica propozicije 2.2.11.

Propozicija 2.2.18. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je*

$$\Omega = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathbb{I}_i \ i \ \mathbb{I}_j \ \text{formalno disjunktni}\} \ .$$

Tada je Ω rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^2$.

Dokaz. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$.
Tada je

$$(i, j) \in \Omega \Longleftrightarrow d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j \ . \tag{2.3}$$

Prema propoziciji 2.2.9 funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto d(\lambda_i, \lambda_j)$ je rekurzivna, a funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i, j) \mapsto \rho_i + \rho_j$ je rekurzivna kao zbroj dviju rekurzivnih funkcija.
Stoga, iz (2.3) i korolara 1.5.5 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. □

Propozicija 2.2.19. *Neka je (X, d) metrički prostor. Neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoji $r > 0$ takav da je*

$$K(x, r) \cap K(y, r) = \emptyset \ .$$

Dokaz. Ovo slijedi direktno iz propozicije 2.2.11, naime dovoljno je uzeti pozitivan broj r takav da je

$$r \leq \frac{d(x, y)}{2} \ ,$$

što možemo jer je $d(x, y) > 0$.
Tada je

$$r + r \leq d(x, y) \ .$$

□

Propozicija 2.2.20. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoje $i, j \in \mathbb{N}$ takvi da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$ formalno disjunktni te takvi da su $x \in \mathbb{I}_i$ i $y \in \mathbb{I}_j$.*

Dokaz. Neka je $r \in \mathbb{Q}$ takav da vrijedi

$$0 < r < \frac{d(x,y)}{4} .$$

Budući da je α gust niz u (X,d) zaključujemo da postoje $v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$d(x, \alpha_v) < r \ \text{ i } \ d(y, \alpha_w) < r .$$

Neka je $v \in \mathbb{N}$ takav da je $q_u = r$.
Očito je $x \in K(\alpha_v, q_u)$ i $y \in K(\alpha_w, q_u)$.
Odaberimo $i, j \in \mathbb{N}$ takve da je

$$(\tau_1(i), \tau_2(i)) = (v, u) ,$$
$$(\tau_1(j), \tau_2(j)) = (w, u) .$$

Tada je $\alpha_v = \lambda_i$, $q_u = \rho_i$, $\alpha_w = \lambda_j$ i $q_u = \rho_j$.
Stoga je $x \in \mathbb{I}_i$, $y \in \mathbb{I}_j$.
Tvrdimo da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$ formalno disjunktni, tj. da je

$$d(\lambda_i, \lambda_j) > \rho_i + \rho_j .$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $d(\lambda_i, \lambda_j) \leq \rho_i + \rho_j$.
Tada je

$$d(\alpha_u, \alpha_w) \leq 2r .$$

Imamo

$$d(x,y) \leq d(x, \alpha_v) + d(\alpha_v, \alpha_w) + d(y, \alpha_w) < r + 2r + r = 4r ,$$

dakle

$$d(x,y) < 4r ,$$

tj.

$$\frac{d(x,y)}{4} < r .$$

Ovo je u kontradikciji s odabirom broja r. Prema tome, $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j$ su formalno disjunktni. □

Propozicija 2.2.21. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka su $x_0, y_0 \in X$ i $r, s \in \langle 0, +\infty \rangle$ takvi da je $d(x_0, y_0) + s \leq r$. Tada je $K(y_0, s) \subseteq K(x_0, r)$.*

Dokaz. Neka je $a \in K(y_0, s)$. Tada je $d(y_0, a) < s$.
Vrijedi

$$d(x_0, a) \leq d(x_0, y_0) + d(y_0, a) < d(x_0, y_0) + s < r ,$$

tj.

$$d(x_0, a) < r$$

pa je $a \in K(x_0, r)$.
Time je tvrdnja dokazana. □

Definicija 2.2.22. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathbb{I}_i$* ***formalno sadržana*** *u $\mathbb{I}_j$ i pišemo $\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j$ ako vrijedi*

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j \ .$$

Uočimo da je ovo relacija između brojeva i i j, a ne skupova.
Iz propozicije 2.2.21 slijedi da $\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j$ povlači $\mathbb{I}_i \subseteq \mathbb{I}_j$.

Lema 2.2.23. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $i \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in \mathbb{I}_i$. Tada postoji pozitivan racionalan broj r takav da za $j \in \mathbb{N}$ vrijedi implikacija*

$$x \in \mathbb{I}_j \ , \ \rho_j \leq r \Rightarrow \mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_i \ .$$

Dokaz. Iz $x \in \mathbb{I}_i$ slijedi

$$d(\lambda_i, x) < \rho_i \ .$$

Stoga postoji pozitivan racionalan broj r takav da je

$$d(\lambda_i, x) + 2r < \rho_i \ .$$

Neka je $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_j$ i $\rho_j \leq r$.
Tada je

$$d(\lambda_j, x) < \rho_j \ .$$

Imamo

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_j \leq d(\lambda_i, \lambda_j) + r \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \lambda_j) + r < d(\lambda_i, x) + 2r < \rho_i \ .$$

Dakle,

$$d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_j < \rho_i \ .$$

Prema tome, $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_i$ i time je tvrdnja leme dokazana. □

Propozicija 2.2.24. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka su $i, i' \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in \mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_i'$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_j$, $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_{i'}$.*

Dokaz. Imamo $x \in \mathbb{I}_i$ i $x \in \mathbb{I}_{i'}$ pa iz prethodne leme slijedi da postoje pozitivni racionalni brojevi r i r' takvi da vrijede implikacije

$$x \in \mathbb{I}_j \text{ i } \rho_j \leq r \Rightarrow \mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_i \ ,$$
$$x \in \mathbb{I}_j \text{ i } \rho_j \leq r' \Rightarrow \mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_{i'} \ .$$

Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$q_k \leq \min\{r, r'\} \ .$$

Nadalje, odaberimo $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_l) < q_k \ .$$

Odaberimo $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(l, k) = (\tau_1(j), \tau_2(j)) \ .$$

Tada je $x \in \mathbb{I}_j$ i $\rho_j = q_k$, dakle $\rho_j \leq r$ i $\rho_j \leq r'$ pa slijedi $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_{i'}$. □

Propozicija 2.2.25. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je skup*

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka su $i, j \in \mathbb{N}$. Tada je po definiciji

$$\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j \Longleftrightarrow d(\lambda_i, \lambda_j) + \rho_i < \rho_j \ ,$$

pa tvrdnja propozicije slijedi iz korolara 1.5.5. □

Propozicija 2.2.26. *Neka su $n, k \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivna funkcija. Neka je Ω rekurzivno prebrojiv skup u $\mathbb{N}^n$. Tada je $f^{-1}(\Omega)$ rekurzivno prebrojiv u $\mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Ako je $\Omega = \emptyset$, onda je $f^{-1}(\Omega) = \emptyset$, pa je tvrdnja jasna. Pretpostavimo da je $\Omega \neq \emptyset$. Tada postoji rekurzivna funkcija $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $\Omega = g(\mathbb{N})$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$.
Tada je

$$x \in f^{-1}(\Omega) \Longleftrightarrow f(x) \in \Omega \Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \ , \ f(x) = g(y) \ .$$

Prema tome,

$$x \in f^{-1}(\Omega) \Longleftrightarrow \exists y \in \mathbb{N} \ , \ (x, y) \in T \ ,$$

gdje je

$$T = \{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f(x_1, \ldots, x_k) = g(y)\} \ .$$

Iz prethodne ekvivalencije i teorema 1.1.41 slijedi da je dovoljno pokazati da je T rekurzivno prebrojiv skup.
Neka su $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $g_1, \ldots, g_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f i g.
Za $i \in \{1, \ldots, n\}$ neka je

$$T_i = \{(x_1, \ldots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid f_i(x_1, \ldots, x_k) = g_i(y)\} \ .$$

Tada je

$$T = T_1 \cap \cdots \cap T_n \ .$$

Skupovi $T_1, \ldots, T_n$ su rekurzivni prema propoziciji 1.4.4 pa je T rekurzivan skup. □

Na isti način kao što smo u prethodnom dokazu dobili da je T rekurzivan skup dokazujemo sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.2.27. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije. Tada je skup*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid f(x) = g(x)\}$$

rekurzivan.

2.3 Izračunljivo prebrojivi skupovi

Definicija 2.3.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $S \subseteq X$. Za S kažemo da je* ***izračunljivo prebrojiv*** *u (X, d, α) ako je*

$$\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Uočimo da su $\emptyset$ i X izračunljivo prebrojivi skupovi u (X, d, α).
Dokažimo da definicija izračunljivo prebrojivog skupa u (X, d, α) ne ovisi o izboru funkcija τ_1 τ_2 i q (koje su potrebne za definiciju skupova $\mathbb{I}_i$).
Neka su $\tau_1', \tau_2' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\mathbb{N}^2 = \{(\tau_1'(i), \tau_2'(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} .$$

Neka je $q' : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija čija slika je $\mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty\rangle$.
Za $i \in \mathbb{N}$ neka je

$$\mathbb{I}_i' = K(\alpha_{\tau_1'(i)}, q'_{\tau_2'(i)}) .$$

Neka je

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap S = \emptyset\}$$

te neka je

$$\Omega' = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i' \cap S = \emptyset\} .$$

Želimo dokazati da je Ω rekurzivno prebrojiv ako i samo ako je Ω' rekurzivno prebrojiv.
Neka je $i \in \mathbb{N}$.
Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\tau_1'(i) = \tau_1(j) ,$$
$$q'_{\tau_2'(i)} = q_{\tau_2(j)} .$$

Neka je T skup svih $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ takvih da vrijede prethodne dvije jednakosti.
Skup T je rekurzivan kao presjek dva rekurzivna skupa. Znamo da za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je $(i, j) \in T$.
Prema korolaru 1.1.28 postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(i, f(i)) \in T , \ \forall i \in \mathbb{N} .$$

Uočimo da iz definicije skupa T slijedi da za sve $i, j \in \mathbb{N}$, $(i, j) \in T$ povlači $\mathbb{I}_i' = \mathbb{I}_j$.
Prema tome, $\mathbb{I}_i' = \mathbb{I}_{f(i)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Stoga je

$$\Omega' = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i' \cap S \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_{f(i)} \cap S \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in \Omega\} = f^{-1}(\Omega) .$$

Dakle,

$$\Omega' = f^{-1}(\Omega) \ .$$

Stoga, ako je Ω rekurzivno prebrojiv onda iz propozicije 2.2.26 slijedi da je Ω' rekurzivno prebrojiv.
Posve analogno dobivamo da rekurzivna prebrojivost od Ω' povlači rekurzivnu prebrojivost od Ω.

Teorem 2.3.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je Ω rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}^{k+n}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji $y \in \mathbb{N}^n$ takav da je $(x, y) \in \Omega$. Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ takva da je $(x, f(x)) \in \Omega$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.*

Dokaz. Očito je Ω neprazan pa postoji rekurzivna funkcija $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{k+n}$ takva da je $\Omega = \omega(\mathbb{N})$.
Neka su $\omega' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ i $\omega'' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ rekurzivne funkcije takve da je $\omega(i) = (\omega'(i), \omega''(i)), \forall i \in \mathbb{N}$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$.
Tada postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x, i) \in T \ ,$$

pri čemu je T skup svih (x, i) , gdje su $x \in \mathbb{N}^k$, $i \in \mathbb{N}$ takvih da je $x = \omega'(i)$.
Iz prethodne propozicije slijedi da je T rekurzivan skup pa iz korolara 1.1.28 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(x, \varphi(x)) \in T \ , \ \forall x \in \mathbb{N}^k \ .$$

Stoga je $x = \omega'(\varphi(x))$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$. Iz ovoga slijedi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(x, \omega''(\varphi(x)) = (\omega'(\varphi(x)), \omega''(\varphi(x))) = \omega(\varphi(x)) \in \Omega \ .$$

Dakle, $(x, f(x)) \in \Omega$, $\forall x \in \mathbb{N}^k$ pri čemu je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$ definirana s $f(x) = \omega''(\varphi(x))$. □

Propozicija 2.3.3. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su S i T rekurzivno prebrojivi podskupovi od $\mathbb{N}^k$. Tada su i skupovi $S \cup T$ i $S \cap T$ rekurzivno prebrojivi.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$ ili $T = \emptyset$, tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da su S i T neprazni.
Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takve da je $\mathrm{Im}(f) = S$ i $\mathrm{Im}(g) = T$.
Neka je

$$\Omega = \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x = f(i)\}$$

i

$$\Gamma = \{(x, i) \in \mathbb{N}^{k+1} \mid x = g(i)\} \ .$$

Prema propoziciji 2.2.27 skupovi Ω i Γ su rekurzivni.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$.Tada je

$$\begin{aligned} x \in S \cup T &\Longleftrightarrow x \in S \text{ ili } x \in T \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } x = f(i) \text{ ili } x = g(i) \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i) \in \Omega \cup \Gamma. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x \in S \cup T \Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i) \in \Omega \cup \Gamma.$$

Iz teorema o projekciji slijedi da je $S \cup T$ rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je

$$\Omega' = \{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = f(i)\}$$

i

$$\Gamma' = \{(x, i, j) \in \mathbb{N}^{k+2} \mid x = g(j)\} .$$

Tada su Ω' i Γ' rekurzivni skupovi prema propoziciji 2.2.27 te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\begin{aligned} x \in S \cap T &\Longleftrightarrow x \in S \text{ i } x \in T \\ &\Longleftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } x = f(i) \text{ i } x = g(j) \\ &\Longleftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (x, i, j) \in \Omega' \cap \Gamma'. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x \in S \cap T \Longleftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \text{ takvi da je } (x, i, j) \in \Omega' \cap \Gamma'.$$

Iz teorema o projekciji slijedi da je $S \cap T$ rekurzivno prebrojiv skup. □

Teorem 2.3.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka je $x \in X$. Tada je x izračunljiva točka u (X, d, α) ako i samo ako je $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv skup u (X, d, α) .*

Dokaz. Pretpostavimo da je x izračunljiva točka u (X, d, α) .
Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k} , \ \forall k \in \mathbb{N} .$$

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$x \in \mathbb{I}_i \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} < \rho_i . \tag{2.4}$$

Dokažimo to.
Pretpostavimo da je $x \in \mathbb{I}_i$ .Tada je $d(x, \lambda_i) < \rho_i$, pa postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \lambda_i) + 2 \cdot 2^{-k} < \rho_i .$$

Vrijedi

$$d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} \leq d(\lambda_i, x) + d(x, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} < d(\lambda_i, x) + 2^{-k} + 2^{-k} < \rho_i \ .$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} < \rho_i$. Tada je

$$d(\lambda_i, x) \leq d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + d(\alpha_{f(k)}, x) < d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} < \rho_i \ .$$

Prema tome, $x \in \mathbb{I}_i$.
Time je (2.4) dokazana.
Neka je

$$T = \{(i, k) \in \mathbb{N}^2 \mid d(\lambda_i, \alpha_{f(k)}) + 2^{-k} < \rho_i\}$$

Nadalje, neka je

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap \{x\} \neq \emptyset\} \ .$$

Uočimo da je $i \in S \iff x \in \mathbb{I}_i$. Stoga, prema (2.4) vrijedi

$$i \in S \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, k) \in T \ .$$

Iz definicije skupa T je jasno da je rekurzivno prebrojiv pa iz prethodne ekvivalencije slijedi da je S rekurzivno prebrojiv. To znači da je $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv.

Obratno, pretpostavimo da je $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv skup, tj. skup

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap \{x\} \neq \emptyset\}$$

je rekurzivno prebrojiv.
Primjetimo,

$$S = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{I}_i\} \ .$$

Neka je

$$\Omega = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in \mathbb{I}_i \text{ i } \rho_i < 2^{-k}\} \ .$$

Primjetimo,

$$\Omega = S' \cap \Omega'$$

gdje je

$$S' = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in \mathbb{I}_i\}$$
$$\Omega' = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid \rho_i < 2^{-k}\}.$$

Skup Ω' je rekurzivan prema korolaru 1.4.4 pa je i rekurzivno prebrojiv, a S' je rekurzivno prebrojiv prema propoziciji 2.2.26.
Naime

$$S' = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in S\} = \{(k, i) \in \mathbb{N}^2 \mid I_2^2(k, i) \in S\} = (I_2^2)^{-1}(S) \ .$$

Stoga je Ω rekurzivno prebrojiv skup prema prethodnoj propoziciji.
Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x, \alpha_j) < 2^{-k-1} .$$

Odaberimo $i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(\alpha_j, 2^{-k-1}) = (\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) = (\lambda_i, \rho_i) ,$$

takav i sigurno postoji.
Vrijedi

$$d(x, \lambda_i) = d(x, \alpha_j) < 2^{-k-1} = \rho_i ,$$

dakle $x \in \mathbb{I}_i$.
Očito je $\rho_i < 2^{-k}$. Prema tome, $(k, i) \in \Omega$.
Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(k, i) \in \Omega$.
Prema teoremu 2.3.2 postoji rekurzivna funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(k, \varphi(k)) \in \Omega \ , \ \forall k \in \mathbb{N} .$$

Dakle, za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $x \in \mathbb{I}_{\varphi(k)}$ i $\rho_{\varphi(k)} < 2^{-k}$, tj.

$$d(x, \alpha_{\tau_1(\varphi(k))}) < \rho_{\varphi(k)} < 2^{-k} .$$

Definirajmo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(k) = \tau_1(\varphi(k))$.
Očito je f rekurzivna funkcija i

$$d(x, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k} \ , \ \forall k \in \mathbb{N} .$$

Prema tome, x je izračunljiva točka u (X, d, α). □

Definicija 2.3.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Kažemo da je U* ***otvoren skup*** *u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Propozicija 2.3.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada vrijedi*

1. *$\emptyset$ i X su otvoreni skupovi u (X, d).*

2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d) , onda je $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ otvoren skup u (X, d).*

3. *Ako su U i V otvoreni skupovi u (X, d), onda je $U \cap V$ otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. **1.** Tvrdnja očito vrijedi.

2. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija otvorenih skupova u (X, d).
Neka je $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.
Tada postoji $\alpha' \in A$ takav da je $x \in U_{\alpha'}$ pa postoji $r > 0$ takav da je

$$K(x, r) \subseteq U_{\alpha'} \ .$$

Stoga je

$$K(x, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \ .$$

Time je tvrdnja dokazana.

3. Neka su U i V otvoreni skupovi u (X, d).
Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$ pa postoje $r_1, r_2 > 0$ takvi da je

$$K(x, r_1) \subseteq U \text{ i } K(x, r_2) \subseteq V \ .$$

Uzmimo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tada je

$$K(x, r) \subseteq U \text{ i } K(x, r) \subseteq V$$

pa je

$$K(x, r) \subseteq U \cap V \ .$$

Time je tvrdnja dokazana.

□

Propozicija 2.3.7. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je svaka otvorena kugla otvoren skup u (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in X$ i $r > 0$. Dokažimo da je $K(x, r)$ otvoren skup u (X, d).
Neka je $y \in K(x, r)$. Uzmimo $r_1 = r - d(x, y)$. Očito je $r_1 > 0$.
Pokažimo da je $K(y, r_1) \subseteq K(x, r)$.
Neka je $y' \in K(y, r_1)$.
Tada je

$$d(y', x) \leq d(y', y) + d(y, x) < r_1 + d(x, y) = r \ .$$

Dakle,

$$y' \in K(x, r)$$

pa vrijedi

$$K(y, r_1) \subseteq K(x, r) \ .$$

Time je dokazano da je $K(x, r)$ otvoren skup. □

Propozicija 2.3.8. *Neka je (X,d) metrički prostor te neka je $U \subseteq X$. Tada je U otvoren skup u (X,d) ako i samo ako postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ otvorenih kugla u (X,d) takvih da je $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$.*

Dokaz. Ako je $U = \bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$, gdje je $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija otvorenih kugla u (X,d), onda je U otvoren skup prema prethodne dvije propozicije.
Obratno, neka je U otvoren skup u (X,d). Tada za svaki $x \in U$ postoji $r_x > 0$ takav da je

$$K(x,r_x) \subseteq U\ .$$

Tada je

$$U = \bigcup_{x\in U} K(x,r_x)\ .$$

□

Primjer 2.3.9. *Neka je X neprazan skup te neka je d diskretna metrika na X. Vidjeli smo ranije da su svi jednočlani skupovi otvorene kugle pa iz propozicije 2.3.7 slijedi da je svaki jednočlan podskup od X otvoren u (X,d) . Budući da se svaki podskup od X može napisati kao unija jednočlanih skupova zaključujemo da je svaki podskup od X otvoren.*
Nadalje, neka je $d' : X\times X \to \mathbb{R}$ funkcija definirana sa

$$d'(x,y) = \begin{cases} 2 & ako\ \ je\ \ x \neq y\ , \\ 0 & ako\ \ je\ \ x = y\ . \end{cases}$$

Posve analogno kao u slučaju diskretne metrike vidimo da je d' također metrika na X.
Nadalje, za svaki $x \in X$ vrijedi da je kugla oko x radijusa 1 u metričkom prostoru (X,d') jednaka $\{x\}$.
Iz ovoga zaključujemo da je svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X,d').
Dakle, metrike d i d' "daju" iste otvorene skupove iako su te metrike općenito različite.

Definicija 2.3.10. *Neka je (X,d) metrički prostor. Neka je (x_n) niz u X i $L \in X$. Kažemo da niz (x_n) teži prema L u metričkom prostoru (X,d) i pišemo $x_n \to L$ ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je za $n \geq n_0$ $d(x_n,L) < \epsilon$.*

Propozicija 2.3.11. *Neka je (X,d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $L \in X$. Tada $x_n \to L$ ako i samo ako za svaki otvoren skup U u (X,d) takav da je $L \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki otvoren skup U u (X,d) takav da je $L \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$.
Neka je $\epsilon > 0$. Uzmimo $U = K(L,\epsilon)$.

Očito je $L \in U$ i U je otvoren skup. Stoga postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$, tj.

$$d(x_n, L) < \epsilon \ .$$

Dakle, $x_n \to L$.

Obratno, pretpostavimo da $x_n \to L$.
Neka je U otvoren skup u (X, d) takav da je $L \in U$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je

$$K(L, \epsilon) \subseteq U \ .$$

Budući da $x_n \to L$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x_n, L) < \epsilon$, tj. $x_n \in K(L, \epsilon)$.
Prema tome, za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U$. □

Definicija 2.3.12. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija te neka je $x_0 \in X$. Za funkciju f kažemo da je* ***neprekidna u točki*** x_0 ***s obzirom na metrike*** p ***i*** q *ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da $p(x, x_0) < \delta$ povlači $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.*

Propozicija 2.3.13. *Neka su (X, p) i (Y, q) metrički prostori, $f : X \to Y$ funkcija te $x_0 \in X$. Tada je f neprekidna u točki x_0 ako i samo ako za svaki otvoren skup V u (Y, q) takav da je $f(x_0) \in V$ postoji otvoren skup U u (X, p) takav da je $x_0 \in U$ te takav da je $f(U) \subseteq V$.*

Dokaz. Neka je f neprekidna u točki x_0. Neka je V otvoren skup u (Y, q) takav da je $f(x_0) \in V$. Tada postoji $\epsilon > 0$ takav da je $K(f(x_0), \epsilon) \subseteq V$.
Budući da je f neprekidna u x_0 postoji $\delta > 0$ takav da $p(x, x_0) < \delta$ povlači $q(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
Neka je

$$U = K(x_0, \delta).$$

Očito je U otvoren skup u (X, d) koji sadrži x_0.
Imamo sljedeće implikacije:

$$x \in U \Rightarrow p(x, x_0) < \delta \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \epsilon \Rightarrow f(x) \in K(f(x_0), \epsilon) \Rightarrow f(x) \in V.$$

Dakle,

$$f(U) \subseteq V.$$

Obratno, pretpostavimo da za svaki otvoren skup V u (Y, q) takav da je $f(x_0) \in U$ postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ i $f(U) \in V$.
Neka je $\epsilon > 0$ i neka je $V = K(f(x_0), \epsilon)$. Očito je V otvoren skup u (Y, q) koji sadrži $f(x_0)$.
Stoga postoji otvoren skup U u (X, d) takav da je $x_0 \in U$ i $f(U) \subseteq V$.
Slijedi da postoji $\delta > 0$ takav da je

$$K(x_0, \delta) \subseteq U.$$

Imamo sljedeće implikacije:

$$p(x_0, x) < \delta \Rightarrow x \in K(x_0, \delta) \Rightarrow x \in U \Rightarrow f(x) \in V \Rightarrow q(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Prema tome, f je neprekidna u točki x_0. □

Poglavlje 3

Izračunljivi topološki prostori

3.1 Topološki prostori

Definicija 3.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

2. *Ako je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$ onda je* $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$,

3. *Ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

*Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je **topologija na skupu** X, a za uređeni par $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **topološki prostor**.*
*Za podskup U od X kažemo da je **otvoren skup u topološkom prostoru** $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Neka je (X, d) metrički prostor. Označimo sa $\mathcal{T}_d$ familiju svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Prema propoziciji 2.3.6 $\mathcal{T}_d$ je topologija na skupu X.
*Za $\mathcal{T}_d$ kažemo da je **topologija inducirana metrikom** d.*
Uočimo sljedeće:
Ako je (X, d) metrički prostor i $U \subseteq X$, onda je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Definicija 3.1.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **metrizabilan topološki prostor** ako postoji metrika d na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$, tj. takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.*

Primjer 3.1.3. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$, tj. partitivni skup od X očito topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je **diskretna topologija na** X.*
Primjetimo da je diskretna topologija na X inducirana diskretnom metrikom na X. Naime,

ako je d diskretna metrika na X, onda je svaki podskup od X otvoren u metričkom prostoru (X, d), tj. $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$.

Primjer 3.1.4. *Neka je X neprazan skup. Tada je $\{\emptyset, X\}$ topologija na skupu X.*
*Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je **indiskretna topologija na** X.*
Pretpostavimo da X ima bar dva elementa. Tvrdimo da topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije metrizabilan, tj. da ne postoji metrika na X koja inducira topologiju $\{\emptyset, X\}$.
Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji metrika d na X takva da je

$$\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d.$$

Odaberimo $a, b \in X$ takve da je $a \neq b$.
Tada je $d(a, b) > 0$ te imamo da je $K(a, d(a, b))$ otvoren skup u (X, d) koji ne sadrži točku b, a očito sadrži a.
Dakle, $K(a, d(a, b))$ nije niti prazan skup niti X. No, $K(a, d(a, b)) \in \mathcal{T}_d$.
Prema tome, postoji element u $\mathcal{T}_d$ različit od $\emptyset$ i X, tj. to je u kontradikciji s $\{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_d$.

Propozicija 3.1.5. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka su $x, y \in X$, $x \neq y$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $x \in U, y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je

$$r = \frac{d(x, y)}{2}.$$

Očito je $r > 0$. Neka je $U = K(x, r), V = K(y, r)$.
Tada su U i V otvoreni skupovi u (X, d) koji sadrže točke x i y redom. Koristeći nejednakost trokuta lako zaključujemo da je $U \cap V = \emptyset$. □

Definicija 3.1.6. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **Hausdorffov** ako za sve $x, y \in X$ postoje otvoreni skupovi U i V iz $(X, \mathcal{T})$ takvi da je $x \in U$ i $y \in V$ te $U \cap V = \emptyset$.*

Primjer 3.1.7. *Neka je X skup koji ima bar dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.*

Propozicija 3.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ metrizabilan topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka je d metrika na X takva da je $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$. Neka su $x, y \in X$, $x \neq y$.
Tada prema prethodnoj propoziciji postoje otvoreni skupovi U i V u (X, d) takvi da je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. No, tada su U i V otvoreni u $(X, \mathcal{T}_d)$, tj. u $(X, \mathcal{T})$. □

Definicija 3.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, (x_n) niz u X te $L \in X$. Kažemo da niz (x_n) **teži prema** L u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ i pišemo $x_n \to L$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ takav da je $L \in U$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$ za svaki $n \geq n_0$.*

Uočimo sljedeće:
Ako je (X, d) metrički prostor, x_n niz u X te $L \in X$, onda $x_n \to L$ u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako $x_n \to L$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$ (propozicija 2.3.11).

Primjer 3.1.10. *Neka je X neprazan skup, (x_n) niz u X te $L \in X$. Tada niz $x_n \to L$ u topološkom prostoru $(X, \{\emptyset, X\})$.*
Dakle, u ovom topološkom prostoru svaki niz teži prema svakoj točki.

Propozicija 3.1.11. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov topološki prostor, neka je (x_n) niz X te neka su $L_1, L_2 \in X$ takvi da $x_n \to L_1, x_n \to L_2$. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $L_1 \neq L_2$.
Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $L_1 \in U$ i $L_2 \in V$ te $U \cap V = \emptyset$.
Iz $x_n \to L_1$ slijedi da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in U$, za svaki $n \geq n_1$.
Također, iz $x_n \to L_2$ slijedi da postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_n \in V$ za svaki $n \geq n_2$.
Neka je
$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}.$$
Tada za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in U, x_n \in V$.
Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $U \cap V = \emptyset$.
Prema tome, $L_1 = L_2$. □

Korolar 3.1.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, (x_n) niz u X te $L_1, L_2 \in X$ takvi da $x_n \to L_1$, $x_n \to L_2$. Tada je $L_1 = L_2$.*

Dokaz. Budući da $x_n \to L_1$ i $x_n \to L_2$ u metričkom prostoru (X, d) imamo da $x_n \to L_1$ i $x_n \to L_2$ u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$ koji je očito metrizabilan pa je i Hausdorffov.
Iz prethodne propozicije slijedi $L_1 = L_2$. □

Definicija 3.1.13. *Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. *$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$,*

2. *Svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ se može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$.*

*Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je **baza topologije** $\mathcal{T}$.*

Primjer 3.1.14. **1)** *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $\mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$,*

2) *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$.*

Napomena 3.1.15. *Ako je X skup, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologije na X te $\mathcal{B}$ familija podskupova od X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$, onda je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*
Naime, ako je $U \in \mathcal{T}_1$, onda je U unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, stoga je U unija nekih elemenata od $\mathcal{T}_2$ (jer je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$) pa je $U \in \mathcal{T}_2$.
Dakle, $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Analogno dobivamo $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

Primjer 3.1.16. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Neka je*

$$\mathcal{B} = \{K(x, r) \mid x \in X \ , \ r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}_d$.
Ovo slijedi iz propozicije 2.3.8 i činjenice da je svaka kugla otvoren skup.

Propozicija 3.1.17. *Neka je* (X, d) *topološki prostor te neka je* $\mathcal{B}$ *familija podskupova od* X*. Tada je* $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$ *ako i samo ako vrijedi sljedeće:*

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$,

2. *Za svaki* $U \in \mathcal{T}$ *i svaki* $x \in U$ *postoji* $B \in \mathcal{B}$ *takav da je* $x \in B \subseteq U$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.
Jasno je da vrijedi 1.
Neka je $U \in \mathcal{T}$ te neka je $x \in U$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{T}$, vrijedi

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha$$

gdje je $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{B}$.
Iz $x \in U$ slijedi da postoji $\alpha_0 \in A$ takav da je $x \in B_{\alpha_0}$.
Imamo $x \in B_{\alpha_0} \subseteq U$.
Prema tome, vrijedi 2.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi 1. i 2.
Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$.
Za svaki $x \in U$ postoji (prema 2.) $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je

$$x \in B_x \subseteq U.$$

Tada je

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

Propozicija 3.1.18. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* A *gust skup u* (X, d)*. Neka je*

$$\mathcal{B} = \{K(a, r) \mid a \in A \ , \ r \in \mathbb{Q} \ , \ r > 0\}.$$

Tada je $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}_d$.

Dokaz. Očito je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Neka je $U \in \mathcal{T}_d$ te neka je $x \in U$. Tada činjenica da je U otvoren u (X, d) povlači da postoji $s > 0$ takav da je

$$K(x, s) \subseteq U.$$

Možemo odabrati $r \in \mathbb{Q}$ takav da je $0 < r < \frac{s}{2}$.
S obzirom da je A gust skup postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < r$.
Dakle,

$$x \in K(a, r).$$

Tvrdimo da je $K(a, r) \subseteq U$.
Neka je $y \in K(a, r)$. Tada je

$$d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < r + r < s$$

pa zaključujemo da je $y \in K(x, s) \subseteq U$, tj. $y \in U$.
Prema tome, $K(a, r) \subseteq U$. Prema prethodnoj propoziciji $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}_d$. □

Korolar 3.1.19. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Tada je*

$$\{\mathbb{I}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

baza topologije $\mathcal{T}_d$.

Propozicija 3.1.20. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j$ i $\mathbb{I}_j \subseteq_F \mathbb{I}_k$. Tada je $\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_k$.*

Dokaz. Vrijedi

$$d(\lambda_k, \lambda_i) + \rho_i \leq d(\lambda_k, \lambda_j) + d(\lambda_j, \lambda_i) + \rho_i < d(\lambda_k, \lambda_j) + \rho_j < \rho_k.$$

Dakle,

$$\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_k.$$

□

Propozicija 3.1.21. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor te neka su $i, j, k \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{I}_i \subseteq_F \mathbb{I}_j$ i $\mathbb{I}_j$ i $\mathbb{I}_k$ formalno disjunktni. Tada su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_k$ formalno disjunktni.*

Dokaz. Imamo

$$\rho_j + \rho_k < d(\lambda_j, \lambda_k)\ ,\ d(\lambda_j, \lambda_k) \leq d(\lambda_j, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_k)$$

pa je

$$\rho_j + \rho_k \leq d(\lambda_j, \lambda_i) + d(\lambda_i, \lambda_k).$$

Dodavanjem ρ_i s obje strane nejednakosti dobivamo

$$\rho_j + \rho_k + \rho_i \leq d(\lambda_j, \lambda_i) + \rho_i + d(\lambda_i, \lambda_k) < \rho_j + d(\lambda_i, \lambda_k),$$

tj.

$$\rho_k + \rho_i < d(\lambda_i, \lambda_k).$$

Dakle, $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{I}_k$ su formalno disjunktni. $\square$

3.2 Izračunljivi topološki prostori

Definicija 3.2.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $(\mathbb{I}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *niz otvorenih skupova u* $(X, \mathcal{T})$ *takav da je*

$$\{\mathbb{I}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

baza topologije $\mathcal{T}$ *te takav da postoje rekurzivno prebrojivi podskupovi* FD *i* FS *od* $\mathbb{N}^2$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. *Ako su* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FD$*, onda je* $\mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_j = \emptyset$ *;*

2. *Ako su* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FS$*, onda je* $\mathbb{I}_i \subseteq \mathbb{I}_j$ *;*

3. *(tranzitivnost relacije* FS*) Ako su* $i, j, k \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FS$ *i* $(j, k) \in FS$*, onda je* $(i, k) \in FS$ *;*

4. *(simetričnost relacije* FD*) Ako su* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FD$*, tada je i* $(j, i) \in FD$ *;*

5. *Ako su* $i, j, k \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FS$ *i* $(j, k) \in FD$*, onda je* $(i, k) \in FD$ *;*

6. *Ako su* $x, y \in X$ *takvi da je* $x \neq y$*, onda postoje* $i, j \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $(i, j) \in FD$ *i* $x \in \mathbb{I}_i$ *,* $y \in \mathbb{I}_j$ *;*

7. *Ako su* $i, i' \in \mathbb{N}$ *i* $x \in X$ *takvi da je* $x \in \mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_{i'}$*, onda postoji* $j \in \mathbb{N}$ *takav da je* $x \in \mathbb{I}_j$ *,* $(j, i) \in FS$ *i* $(j, i') \in FS$ *.*

Tada za uređenu trojku $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *kažemo da je* ***izračunljiv topološki prostor****.*

Primjer 3.2.2. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor. Tada je* $(X, \mathcal{T}_d, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor.*

Propozicija 3.2.3. *Postoje rekurzivne funkcije* $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *i* $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takve da za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i sve* $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ *postoji* $i \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$(a_0, \ldots, a_k) = (\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))).$$

Dokaz. Definirajmo $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ na sljedeći način:

$$\sigma(i, j) = e(i, j) \;\dot{-}\; 1$$
$$\eta(i) = f(i),$$

gdje je f funkcija iz propozicije 1.1.33.
Tada su σ i η rekurzivne funkcije.
Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka su $a_o, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Definiramo

$$i = p_0^{a_0+1} \cdots p_k^{a_k+1}.$$

Tada je $\eta(i) = k$ te je

$$(\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, \eta(i))) = (\sigma(i, 0), \ldots, \sigma(i, k)) = ((a_0 + 1) - 1, \ldots, (a_k + 1) - 1) = (a_0, \ldots, a_k).$$

□

Neka su $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neke fiksirane rekurzivne funkcije sa svojstvom iz prethodne propozicije. Za $i, j \in \mathbb{N}$ umjesto $\sigma(i, j)$ ćemo pisati $(i)_j$, a umjesto $\eta(i)$ ćemo pisati $\bar{i}$.
Dakle, svaki konačan niz u $\mathbb{N}$ je oblika

$$((i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}),$$

za neki $i \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.2.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$. Za U kažemo da je **racionalan otvoren skup** u (X, d, α) ako je U unija konačno mnogo racionalnih kugla.*

Uočimo sljedeće: U je racionalan otvoren skup u (X, d, α) ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ i $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$U = \mathbb{I}_{a_0} \cup \dots \cup \mathbb{I}_{a_k}.$$

Prema tome, U je racionalan otvoren skup u (X, d, α) ako i samo ako postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$U = \mathbb{I}_{(j)_0} \cup \dots \cup \mathbb{I}_{(j)_{\bar{j}}}.$$

Definicija 3.2.5. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$\mathbb{J}_j = \mathbb{I}_{(j)_0} \cup \dots \cup \mathbb{I}_{(j)_{\bar{j}}}.$$

Uočimo da je $(\mathbb{J}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ familija svih racionalnih otvorenih skupova u (X, d, α).

Definicija 3.2.6. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $K \subseteq X$. Za $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač** skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $\mathcal{U} \neq \emptyset$ te ako je $K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$.*

Definicija 3.2.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $K \subseteq X$. Za K kažemo da je **kompaktan skup u topološkom prostoru** $(X, \mathcal{T})$ ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je*

$$K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Napomena 3.2.8. *Pojmove otvorenog pokrivača skupa i kompaktnog skupa analogno definiramo u metričkom prostoru. Uočimo da tada vrijedi sljedeće:*
Ako je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$, onda je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.
Nadalje, K je kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako i samo ako je kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d)$.

Primjer 3.2.9. *Neka je* (X, d) *metrički prostor,* K *kompaktan skup u tom metričkom prostoru te* A *gust skup u* (X, d).
Tada za svaki $\epsilon > 0$ *postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_0, \dots, a_n \in A$ *takvi da je*

$$K \subseteq K(a_0, \epsilon) \cup \cdots \cup K(a_n, \epsilon).$$

Naime,

$$\mathcal{U} = \{K(a, \epsilon) \mid a \in A\}$$

je otvoreni pokrivač skupa K *u* (X, d) *pa budući da je* K *kompaktan postoji konačno mnogo članova od* $\mathcal{U}$ *koji prekrivaju* K.

Primjer 3.2.10. *Neka je* (X, d, α) *izračunljiv metrički prostor te* K *kompaktan skup u* (X, d).
Odaberimo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$.
Prema prethodnom primjeru postoje $n \in \mathbb{N}$ *i* $a_0, \dots, a_n \in \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *takvi da je*

$$K \subseteq K(a_0, \epsilon) \cup \cdots \cup K(a_n, \epsilon).$$

Očito je unija ovih kugli racionalan otvoren skup.
Prema tome, postoji $j \in \mathbb{N}$ *takav da je* $K \subseteq \mathbb{J}_j$.

Definicija 3.2.11. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $A \subseteq X$. *Za* A *kažemo da je* ***zatvoren skup*** *u* $(X, \mathcal{T})$ *ako je njegov komplement otvoren u* $(X, \mathcal{T})$, *tj. ako je* $X \backslash A \in \mathcal{T}$.

Napomena 3.2.12. *Analogno definiramo zatvorenost skupa u metričkom prostoru.*

Primjer 3.2.13. *Neka je* X *skup koji ima bar dva elementa. Odaberimo* $K \subseteq X$ *takav da je* $K \neq \emptyset$ *i* $K \neq X$.
Tada je K *kompaktan skup u topološkom prostoru* $(X, \{\emptyset, X\})$.
No, K *nije zatvoren u* $(X, \{\emptyset, X\})$.

Napomena 3.2.14. *Općenito, ako je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor takav da je* $\mathcal{T}$ *konačan skup, onda je svaki podskup od* X *kompaktan u* $(X, \mathcal{T})$.

Teorem 3.2.15. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *Hausdorffov prostor te neka je* K *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$. *Tada je* K *zatvoren u* $(X, \mathcal{T})$.

Dokaz. Očito tvrdnja vrijedi za $K = \emptyset$.
Pretpostavimo da je $K \neq \emptyset$.
Dokažimo da za svaki $x \in K^C$ postoji otvoren skup U_x takav da je

$$x \in U_x \subseteq K^C.$$

Ako to dokažemo, onda smo gotovi jer tada vrijedi

$$K^C = \bigcup_{x \in K^C} U_x$$

pa je K^C otvoren skup kao unija otvorenih skupova.
Neka je $x \in K^C$.
Za svaki $y \in K$ vrijedi $y \neq x$ pa budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov postoje disjunktni otvoreni skupovi V_y i W_y takvi da je $y \in V_y$ i $x \in W_y$.
Neka je

$$\mathcal{U} = \{V_y \mid y \in K\}.$$

Tada je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K pa postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_0, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_0} \cup \cdots \cup V_{y_n}.$$

Očito je da su skupovi $V_{y_0} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ i $W_{y_0} \cap \cdots \cap W_{y_n}$ disjunktni pa su i skupovi K i $W_{y_0} \cap \cdots \cap W_{y_n}$ disjunktni, tj.

$$W_{y_0} \cap \cdots \cap W_{y_n} \subseteq K^C.$$

Jasno je da je $W_{y_0} \cap \cdots \cap W_{y_n}$ otvoren skup koji sadrži x i time je tvrdnja dokazana. □

Definicija 3.2.16. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$\mathbb{J} = \mathbb{I}_{(j)_0} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{(j)_{\overline{j}}}.$$

3.3 Izračunljivi i poluizračunljivi skupovi

Definicija 3.3.1. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor. Neka je* S *kompaktan skup u* $(X, \mathcal{T})$*. Za* S *kažemo da je* ***poluizračunljiv skup*** *u* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *ako je*

$$\{j \in \mathbb{N} \mid S \subseteq \mathbb{J}_j\}$$

rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Na isti način definiramo pojam poluizračunljivog skupa u izračunljivom metričkom prostoru.

Definicija 3.3.2. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor te neka je* $S \subseteq X$*. Za* S *kažemo da je* ***izračunljivo prebrojiv skup*** *u* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *ako je*

$$\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap S \neq \emptyset\}$$

rekurzivno prebrojiv podskup od $\mathbb{N}$.

Definicija 3.3.3. *Ako je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor te* $S \subseteq X$*, onda za* S *kažemo da je* ***izračunljiv skup*** *u* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *ako je poluizračunljiv i izračunljivo prebrojiv.*

Na isti način definiramo pojam izračunljivog skupa u izračunljivom metričkom prostoru.

Propozicija 3.3.4. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor te neka je* $x \in X$ *točka takva da je* $\{x\}$ *poluizračunljiv. Tada je* $\{x\}$ *izračunljiv.*

Dokaz. Neka je

$$\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid x \in \mathbb{J}_j\}.$$

Skup Γ je očito rekurzivno prebrojiv.
Neka je

$$\Omega = \{i \in \mathbb{N} \mid \{x\} \cap \mathbb{I}_i \neq \emptyset\}.$$

Ako dokažemo da je Ω rekurzivno prebrojiv, to će značiti da je $\{x\}$ izračunljivo prebrojiv, tj. da je $\{x\}$ izračunljiv.
Neka je $i \in \mathbb{N}$. Tada postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$((j)_0, \ldots, (j)_{\overline{j}}) = (i),$$

tj.

$$(j)_0 = i \text{ i } \overline{j} = 0.$$

Neka je
$$\Omega' = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid (j)_0 = i\ ,\ \overline{j} = 0\}.$$
Tada za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je
$$(i, j) \in \Omega'.$$
Očito je Ω' rekurzivan skup pa postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je
$$(i, f(i)) \in \Omega'\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$
Imamo
$$\mathbb{J}_{f(i)} = \mathbb{I}_{(f(i))_0} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{(f(i))_{\overline{f(i)}}} = \mathbb{I}_i,$$
dakle
$$\mathbb{I}_i = \mathbb{J}_{f(i)}\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$
Neka je $i \in \mathbb{N}$. Vrijedi
$$i \in \Omega \Longleftrightarrow x \in \mathbb{I}_i \Longleftrightarrow x \in \mathbb{J}_{f(i)} \Longleftrightarrow f(i) \in \Gamma \Longleftrightarrow i \in f^{-1}(\Gamma).$$
Prema tome,
$$\Omega = f^{-1}(\Gamma)$$
pa je Ω rekurzivno prebrojiv. □

Definicija 3.3.5. *Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo*
$$[j] = \{(j)_0, \ldots, (j)_{\overline{j}}\}.$$

Uočimo da ako je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor, onda za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\mathbb{J}_j = \bigcup_{i \in [j]} \mathbb{I}_i.$$

Napomena 3.3.6. *Kada govorimo o izračunljivom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}, (I_i))$ onda ćemo pod FD i FS podrazumijevati skupove iz definicije 3.2.1.*

Definicija 3.3.7. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Kažemo da su $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_b$ FD* ***disjunktni*** *ako je $(i, i') \in FD$ za svaki $i \in [a]$ i $i' \in [b]$.*

Uočimo sljedeće:
Ako su $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni, onda je
$$\mathbb{J}_a \cap \mathbb{J}_b = \emptyset.$$

Propozicija 3.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$, $i_0, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{I}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_{i_n}$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_k$ te $(k, i_0), \ldots, (k, i_n) \in FS$.*

Dokaz. Dokažimo tvrdnju indukcijom po n.

Za $n = 0$ imamo $x \in \mathbb{I}_{i_0}$, tj. $x \in \mathbb{I}_{i_0} \cap \mathbb{I}_{i_0}$. Iz svojstava relacije FS slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_k$ i $(k, i_0) \in FS$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $i_0, \ldots, i_{n+1} \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in \mathbb{I}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_{i_n} \cap \mathbb{I}_{i_{n+1}}$.
Tada je

$$x \in \mathbb{I}_{i_0} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_{i_n}$$

pa prema pretpostavci indukcije slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_k$ te $(k, i_0), \ldots, (k, i_n) \in FS$.
Imamo

$$x \in \mathbb{I}_k \cap \mathbb{I}_{i_{n+1}}$$

pa iz svojstava relacije FS slijedi da postoji $k' \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_{k'}$ i (k', k) , $(k', i_{n+1}) \in FS$.
Iz tranzitivnosti relacije FS slijedi

$$(k', i_0), \ldots, (k', i_n) \in FS.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$. □

Definicija 3.3.9. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $i, b \in \mathbb{N}$. Kažemo da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_b$ FD* ***disjunktni*** *ako je $(i, i') \in FD$ za svaki $i' \in [b]$.*

Primjetimo da za $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi da su $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni ako i samo ako su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni za svaki $i \in [a]$.

Propozicija 3.3.10. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor, neka je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ i $x \in X$ točka takva da $x \notin K$. Tada postoje $i, a \in \mathbb{N}$ takvi da je $x \in \mathbb{I}_i$, $K \subseteq \mathbb{J}_a$ te takvi da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni.*

Dokaz. Neka je $y \in K$.
Tada je $x \neq y$ pa prema svojstvima relacije FD postoje $i_y, j_y \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x \in \mathbb{I}_{i_y} \ \text{ i } \ y \in \mathbb{I}_{j_y}$$

te

$$(i_y, j_y) \in FD.$$

Promotrimo skup

$$\{\mathbb{I}_{jy} \mid y \in K\}.$$

To je otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$ pa kompaktnost skupa K povlači da postoje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $y_0, \ldots, y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq \mathbb{I}_{j_{y_0}} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{j_{y_n}}.$$

Vrijedi

$$x \in \mathbb{I}_{i_{y_0}} \cap \cdots \cap \mathbb{I}_{j_{i_n}}$$

pa prema prethodnoj propoziciji slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in \mathbb{I}_k \ , \ (k, i_{y_0}), \ldots, (k, i_{y_n}) \in FS.$$

Znamo da je $(i_{y_0}, j_{y_0}), \ldots, (i_{y_n}, j_{y_n}) \in FD$. Iz svojstava skupova FD i FS slijedi da je

$$(k, j_{y_0}), \ldots, (k, j_{y_n}) \in FD.$$

Neka je $a \in \mathbb{N}$ takav da je

$$((a)_0, \ldots, (a)_{\overline{a}}) = (j_{y_0}, \ldots, j_{y_n}).$$

Tada iz $(k, j_{y_0}), \ldots, (k, j_{y_n}) \in FD$ slijedi da su $\mathbb{I}_k$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni.
Prema $K \subseteq \mathbb{I}_{j_{y_0}} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{j_{y_n}}$ vrijedi $K \subseteq \mathbb{J}_a$. $\square$

3.4 Svojstva skupova FS i FD

Definicija 3.4.1. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor te $i, a \in \mathbb{N}$. Kažemo da je $\mathbb{I}_i$ FS* ***sadržan u*** *$\mathbb{J}_a$ ako postoji $i' \in [a]$ takav da je $(i, i') \in FS$. Nadalje, ako su $b, a \in \mathbb{N}$ onda za $\mathbb{J}_b$ kažemo da je FS* ***sadržano u*** *$\mathbb{J}_a$ ako za svaki $i \in [b]$ vrijedi da je $\mathbb{I}_i$ FS sadržan u $\mathbb{J}_a$.*

Dakle, $\mathbb{J}_b$ je FS sadržano u $\mathbb{J}_a$ ako i samo ako za svaki $i \in [b]$ postoji $i' \in [a]$ takav da je $(i, i') \in FS$.

Propozicija 3.4.2. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor.*

1. *Ako su $i, a, b \in \mathbb{N}$ takvi da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni te da je $\mathbb{J}_b$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$, onda su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni.*

2. *Ako su $a, b, c \in \mathbb{N}$ takvi da su $\mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni te $\mathbb{J}_b$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$, onda su $\mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni.*

3. *Ako su $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ takvi da su $\mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni, $\mathbb{J}_b$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_d$ FS sadržano u $\mathbb{J}_c$ tada su i $\mathbb{J}_b$ i $\mathbb{J}_d$ FD disjunktni.*

4. *Ako su $a, b, c \in \mathbb{N}$ takvi da je $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_b$ i $\mathbb{J}_b$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$, onda je i $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$.*

5. *Ako je K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq \mathbb{J}_a \cap \mathbb{J}_b$, onda postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \mathbb{J}_c$ te takav da je $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_b$.*

Dokaz. **1.** Neka je $i' \in [b]$. Tada postoji $i'' \in [a]$ takav da je $(i', i'') \in FS$. S druge strane, iz $i'' \in [a]$ slijedi $(i, i'') \in FD$. Iz svojstava skupova FD i FS slijedi

$$(i, i') \in FD.$$

Prema tome, $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_b$ su FD disjuntkni.

2. Neka je $i \in [c]$. Tada su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni pa iz tvrdnje 1. slijedi da su $\mathbb{I}_i$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni.
Time smo dokazali tvrdnju 2.

3. Iz 2. slijedi da su $\mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni. Relacija "FD disjunktnosti" je očito simetrična pa slijedi da su $\mathbb{J}_b$ i $\mathbb{J}_a$ FD disjunktni te ponovnom primjenom 2. tvrdnje dobivamo da su $\mathbb{J}_d$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni.

4. Neka je $i \in [c]$. Tada postoji $i' \in [b]$ takav da je $(i, i') \in FS$. Nadalje, postoji $i'' \in [a]$ takav da je $(i', i'') \in FS$.
Slijedi da je $(i, i'') \in FS$.
Prema tome, $\mathbb{J}_c$ je FS sadržano u $\mathbb{J}_a$.

5. Neka je $x \in K$.
Tada je $x \in \mathbb{J}_a$ i $x \in \mathbb{J}_b$ pa postoje $i \in [a]$ i $j \in [b]$ takvi da je $x \in \mathbb{I}_i$ i $x \in \mathbb{I}_j$.
Dakle,

$$x \in \mathbb{I}_i \cap \mathbb{I}_j.$$

Stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in \mathbb{I}_k$ te

$$(k, i), (k, j) \in FS.$$

Ovo znači da je $\mathbb{I}_k$ FS sadržan i u $\mathbb{J}_a$ i u $\mathbb{J}_b$. Dakle, za svaki $x \in K$ postoji $k_x \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x \in \mathbb{I}_{k_x}$$

te takav da je $\mathbb{I}_{k_x}$ FS sadržan i u $\mathbb{J}_a$ i u $\mathbb{J}_b$.
Familija $\{\mathbb{I}_{k_x} \mid x \in K\}$ je otvoreni pokrivač skupa K pa slijedi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \dots, x_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq \mathbb{I}_{k_{x_0}} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{k_{x_n}}.$$

Neka je $c \in \mathbb{N}$ takav da je

$$((c)_0, \dots, (c)_{\overline{c}}) = (k_{x_0}, \dots, k_{x_n}).$$

Tada je

$$K \subseteq \mathbb{J}_c$$

te je $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_b$.

□

Korolar 3.4.3. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor, K neprazan kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$K \subseteq \mathbb{J}_{a_0} \cap \cdots \cap \mathbb{J}_{a_n}.$$

Tada postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{a_i}$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po n.
Ako je $a_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \mathbb{J}_{a_0}$, onda je

$$K \subseteq \mathbb{J}_{a_0} \cap \mathbb{J}_{a_0}$$

pa iz 5. tvrdnje prethodne propozicije slijedi da postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \mathbb{J}_c$ i $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{a_0}$.
Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = 0$.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K \subseteq \mathbb{J}_{a_0} \cap \cdots \cap \mathbb{J}_{a_{n+1}}.$$

Tada je $K \subseteq \mathbb{J}_{a_0} \cap \cdots \cap \mathbb{J}_{a_n}$ pa prema induktivnoj pretpostavci postoji $c' \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K \subseteq \mathbb{J}_{c'}$$

i $\mathbb{J}_{c'}$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{a_i}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Imamo

$$K \subseteq \mathbb{J}_{c'} \cap \mathbb{J}_{a_{n+1}}$$

pa iz 5. tvrdnje prethodne propozicije slijedi da postoje $c \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq \mathbb{J}_c$ te $\mathbb{J}_c$ FS sadržano i u $\mathbb{J}_{c'}$ i u $\mathbb{J}_{a_{n+1}}$.
Iz 4. tvrdnje prethodne propozicije slijedi da je $\mathbb{J}_c$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{a_i}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$.
□

Propozicija 3.4.4. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka su K i L neprazni disjunktni i kompaktni skupovi u $(X, \mathcal{T})$. Tada postoje $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $K \subseteq \mathbb{J}_a, L \subseteq \mathbb{J}_b$ te takvi da su $\mathbb{J}_a$ i $\mathbb{J}_b$ FD disjunktni.*

Dokaz. Neka je $x \in L$. Tada $x \notin K$ pa prema propoziciji 3.3.10 postoje $i_x, a_x \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x \in \mathbb{I}_{i_x}\ ,\ K \subseteq \mathbb{J}_{a_x}$$

te takvi da su $\mathbb{I}_{i_x}$ i $\mathbb{J}_{a_x}$ FD disjunktni.
Kompaktnost od L povlači da postoji $n \in \mathbb{N}$ i $x_0, \ldots, x_n \in L$ takvi da je

$$L \subseteq \mathbb{I}_{i_{x_0}} \cup \cdots \cup \mathbb{I}_{i_{x_n}}.$$

S druge strane, vrijedi

$$K \subseteq \mathbb{J}_{a_{x_0}} \cap \cdots \cap \mathbb{J}_{a_{x_n}}$$

pa prema prethodnom korolaru postoji $c \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K \subseteq \mathbb{J}_c$$

i $\mathbb{J}_c$ FS sadržan u $\mathbb{J}_{a_{x_l}}$ za svaki $l \in \{0, \ldots, n\}$.
Neka je $l \in \{0, \ldots n\}$.
Imamo da su $\mathbb{I}_{i_{x_l}}$ i $\mathbb{J}_{a_{x_l}}$ FD disjunktni pa iz prethodne propozicije slijedi da su $\mathbb{I}_{i_{x_l}}$ i $\mathbb{J}_c$ FD disjunktni.
Odaberimo $b \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[b] = \{i_{x_0}, \ldots, i_{x_n}\}.$$

Tada je

$$L \subseteq \mathbb{J}_b$$

te vrijedi da su $\mathbb{J}_b$ i $\mathbb{J}_c$ FD disjunktni.
Time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.4.5. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka su $K_0, \dots, K_n$ kompaktni neprazni skupovi te neka su $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{N}$ takvi da je*

$$K_0 \subseteq \mathbb{J}_{b_0}, \dots, K_n \subseteq \mathbb{J}_{b_n}.$$

Tada postoje $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $K_i \subseteq \mathbb{J}_{a_i}$ te $\mathbb{J}_{a_i}$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{b_i}$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ te takvi da su $\mathbb{J}_{a_i}$ i $\mathbb{J}_{a_j}$ FD disjunktni za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je $K_i \cap K_j = \emptyset$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n.

Za $n = 0$ tvrdnja je jasna ($K_0 \subseteq \mathbb{J}_{b_0} \cap \mathbb{J}_{b_0}$ pa primjenimo korolar 3.4.3).

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$.
Neka su $K_0, \dots, K_{n+1}$ kompaktni neprazni skupovi u $(X, \mathcal{T})$ te neka su $b_0, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K_i \subseteq \mathbb{J}_{b_i}$$

za svaki $i \in \{0, \dots, n+1\}$.
Prema induktivnoj pretpostavci postoje $a'_0, \dots, a'_n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K_i \subseteq \mathbb{J}_{a'_i}$$

te $\mathbb{J}_{a'_i}$ FS sadržan u $\mathbb{J}_{b_i}$ za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ te takvi da su $\mathbb{J}_{a'_i}$ i $\mathbb{J}_{a'_j}$ FD disjunktni za sve $i, j \in \{0, \dots, n\}$ takve da je

$$K_i \cap K_j = \emptyset.$$

Neka je $i \in \{0, \dots, n\}$.
Ako je $K_i \cap K_{n+1} \neq \emptyset$ neka je $a_i = a'_i$ te neka je $v_i \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_{n+1} \subseteq \mathbb{J}_{v_i}$$

i $\mathbb{J}_{v_i}$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{b_{n+1}}$.
Ako je $K_i \cap K_{n+1} = \emptyset$, tada postoje $u, w \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$K_i \subseteq \mathbb{J}_u \ , \ K_{n+1} \subseteq \mathbb{J}_w$$

te takvi da su $\mathbb{J}_u$ i $\mathbb{J}_w$ FD disjunktni.
Prema korolaru 3.4.3 postoji $a_i \in \mathbb{N}$ takav da je $K_i \subseteq \mathbb{J}_{a_i}$ te takav da je $\mathbb{J}_{a_i}$ FS sadržano i u $\mathbb{J}_{a'_i}$ i u $\mathbb{J}_u$.
Isto tako, postoji $v_i \in \mathbb{N}$ takav da je $K_{n+1} \subseteq \mathbb{J}_{v_i}$ te takav da je $\mathbb{J}_{v_i}$ sadržan i u $\mathbb{J}_w$ i u $\mathbb{J}_{b_{n+1}}$.
Slijedi da su $\mathbb{J}_{a_i}$ i $\mathbb{J}_{v_i}$ FD disjunktni.
Dakle, imamo brojeve $a_0, \dots, a_n, v_0, \dots, v_n$ koji imaju sljedeća svojstva:

- $K_i \subseteq \mathbb{J}_{a_i}$, $\mathbb{J}_{a_i}$ FS sadržano u $\mathbb{J}_{a_i'}$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$,
- $\mathbb{J}_{v_i}$ FS sadržan u $\mathbb{J}_{b_{n+1}}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$,
- ako je $i \in \{0, \ldots, n\}$ takav da je $K_i \cap K_{n+1} = \emptyset$, onda su $\mathbb{J}_{a_i}$ i $\mathbb{J}_{v_i}$ FD disjunktni.

Prema korolaru 3.4.3 postoji $a_{n+1} \in \mathbb{N}$ takav da je

$$K_{n+1} \subseteq \mathbb{J}_{a_{n+1}}$$

te takav da je $\mathbb{J}_{a_{n+1}}$ FS sadržan u $\mathbb{J}_{v_i}$ za svaki $i \in \{0, \ldots, n\}$.
Lako se provjeri da su $a_0, \ldots, a_{n+1}$ traženi brojevi.
Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$ i time je tvrdnja teorema dokazana. □

Definicija 3.4.6. *Za $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ neka je*

$$\mathbb{N}^n_m = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \{0, \ldots, m\}\}.$$

Lema 3.4.7. *Neka je $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Tada postoje rekurzivne funkcije $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\mathbb{N}^n_m \subseteq \{h(i) \mid i \in \{0, \ldots, g(m)\}\}.$$

Dokaz. Definirajmo funkciju $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ s

$$h(i) = (e(i, 1), \ldots, e(i, n)).$$

Očito je h rekurzivna funkcija.
Nadalje, neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$g(m) = (p_1 \cdots p_n)^m.$$

Tada je g rekurzivna funkcija.
Tvrdimo da su h i g tražene funkcije.
Neka je $m \in \mathbb{N}$ te neka je $x \in \mathbb{N}^n_m$.
Imamo

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

te

$$x_1 \leq m , \ldots , x_n \leq m.$$

Neka je

$$i = p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}.$$

Tada je

$$i \leq g(m),$$

a

$$h(i) = x.$$

Prema tome

$$x \in \{h(i) \mid i \leq g(m)\}.$$

Time je lema dokazana. $\square$

3.5 Rro-funkcije

Definicija 3.5.1. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$, pri čemu je $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ partitivni skup od $\mathbb{N}^n$.*
Definirajmo funkciju $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} \to \mathbb{N}$ s

$$\overline{\Phi}(x, y) = \chi_{\Phi(x)}(y)\ ,\ x \in \mathbb{N}^k\ ,\ y \in \mathbb{N}^n.$$

Nadalje, ako je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da je $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, onda za φ kažemo da je ***rekurzivna međa*** *od Φ.*

Definicija 3.5.2. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$. Za Φ kažemo da je* ***rekurzivna rekurzivno omeđena funkcija*** *ili* ***rro-funkcija*** *ako vrijedi sljedeće:*

1. $\overline{\Phi} : \mathbb{N}^{k+n} :\to \mathbb{N}$ *je rekurzivna funkcija,*

2. Φ *ima rekurzivnu među.*

Primjer 3.5.3. *Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Phi(x) = \{0, \dots, x\}$.*
Tada se lako provjeri da je Φ rro-funkcija.

Propozicija 3.5.4. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcije. Tada su Λ_1 , Λ_2 , $\Lambda_3 : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ definirane s*

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(x) &= \Phi(x) \cup \Psi(x), \\
\Lambda_2(x) &= \Phi(x) \cap \Psi(x), \\
\Lambda_3(x) &= \Phi(x) \setminus \Psi(x)
\end{aligned}$$

rro-funkcije.

Dokaz. Neka su φ , $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe od Φ i Ψ.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^n$.
Imamo

$$\begin{aligned}
\overline{\Lambda_1}(x, y) &= \chi_{\Lambda_1(x)}(y) \\
&= \chi_{\Phi(x)\cup\Psi(x)}(y) \\
&= \mathrm{sg}(\chi_{\Phi(x)}(y) + \chi_{\Psi(x)}(y)) \\
&= \mathrm{sg}(\overline{\Phi}(x, y) + \overline{\Psi}(x, y)).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\overline{\Lambda_1}(x, y) = \mathrm{sg}(\overline{\Phi}(x, y) + \overline{\Psi}(x, y))$$

iz čega zaključujemo da je $\overline{\Lambda_1}$ rekurzivna funkcija.

Neka je $\lambda : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\lambda(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}.$$

Očito je λ rekurzivna funkcija te za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\varphi(x) \leq \lambda(x),$$
$$\psi(x) \leq \lambda(x)$$

pa je

$$\mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$$

i

$$\mathbb{N}^n_{\psi(x)} \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}.$$

Prema tome,

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$$

i

$$\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}$$

pa slijedi da je

$$\Lambda_1(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\lambda(x)}.$$

Prema tome, λ je rekurzivna međa od Λ_1 pa zaključujemo da je Λ_1 rro-funkcija.

Analogno dobivamo da su i Λ_2 i Λ_3 rro-funkcije. □

Propozicija 3.5.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka je $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ s*

$$g(y, x) = \sum_{i=0}^{y} f(i, x)\ ,\ y \in \mathbb{N}\ ,\ x \in \mathbb{N}^k.$$

Tada je g rekurzivna funkcija.

Dokaz. Vrijedi

$$g(0, x) = f(0, x),$$
$$g(y + 1, x) = g(y, x) + f(y + 1, x).$$

Prema tome,

$$g(0, x) = F(x),$$
$$g(y + 1, x) = G(g(y, x), y, x)$$

pri čemu su $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s

$$F(x) = f(0, x),$$
$$G(a, y, x) = a + f(y + 1, x)\ ,\ a, y \in \mathbb{N}\ ,\ x \in \mathbb{N}^k.$$

Funkcije F i G su rekurzivne, a g je dobivena primitivnom rekurzijom od F i G pa slijedi da je g rekurzivna funkcija. □

Propozicija 3.5.6. *Neka je $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka su $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ i $\alpha : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Neka je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$h(x) = \sum_{i=0}^{\alpha(x)} f(i, x).$$

Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je g funkcija iz prethodne propozicije.
Tada za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$h(x) = g(\alpha(x), x).$$

Prema tome, h je rekurzivna funkcija. □

Teorem 3.5.7. *Neka su $k, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ te neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcija. Neka je*

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \emptyset\}.$$

Tada je S rekurzivan skup.

Dokaz. Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna međa od Φ.
Neka su $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije takve da je

$$\mathbb{N}^n_m \subseteq \{h(i) \mid i \leq g(m)\}$$

za svaki $m \in \mathbb{N}$ (takve funkcije postoje prema lemi 3.4.7).
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)} \subseteq \{h(i) \mid i \leq g(\varphi(x))\}.$$

Dakle,

$$\Phi(x) \subseteq \{h(i) \mid i \leq g(\varphi(x))\}.$$

Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Koristeći prethodnu inkluziju dobivamo sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} x \in S &\iff \Phi(x) = \emptyset \\ &\iff \forall y \in \{h(i) \mid i \leq g(\varphi(x))\}\ ,\ y \notin \Phi(x) \\ &\iff \forall i \in \{0, \ldots, g(\varphi(x))\}\ ,\ h(i) \notin \Phi(x) \\ &\iff \forall i \in \{0, \ldots, g(\varphi(x))\}\ ,\ \overline{\Phi}(x, h(i)) = 0 \\ &\iff \sum_{i=0}^{g(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, h(i)) = 0. \end{aligned}$$

Dakle,

$$x \in S \iff \sum_{i=0}^{g(\varphi(x))} \overline{\Phi}(x, h(i)) = 0$$

pa koristeći propoziciju 3.5.6 zaključujemo da postoji rekurzivna funkcija $G : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takva da je

$$x \in S \iff G(x) = 0.$$

Iz ovoga slijedi da je

$$\chi_S(x) = \overline{\mathrm{sg}}(G(x))$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ pa slijedi da je S rekurzivan skup. □

Korolar 3.5.8. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te $\Phi, \Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcije. Tada su skupovi*

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

i

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\}$$

rekurzivni.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \Psi(x) \iff \Phi(x) \setminus \Psi(x) = \emptyset.$$

Stoga je

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\} = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \setminus \Psi(x) = \emptyset\}$$

pa iz propozicije 3.5.4 i prethodnog teorema slijedi da je

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\}$$

rekurzivan skup.

Nadalje,

$$\{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) = \Psi(x)\} = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(x)\} \cap \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Psi(x) \subseteq \Phi(x)\}$$

pa slijedi tvrdnja korolara. □

Lema 3.5.9. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je funkcija $\vartheta : \mathbb{N}^{2n} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$\vartheta(x, y) = \begin{cases} 1 & ako\ \ je\ \ x = y \\ 0 & ako\ \ je\ \ x \neq y\,. \end{cases}$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}^n$. Tada je ϑ rekurzivna funkcija.

Dokaz. Primjetimo da je

$$\vartheta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \overline{\mathrm{sg}}(|x_1 - y_1|) \cdot \ldots \cdot \overline{\mathrm{sg}}(|x_n - y_n|),$$

za sve $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{N}$.
Stoga je ϑ očito rekurzivna. $\square$

Teorem 3.5.10. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^m$ rekurzivna funkcija.*
Tada je funkcija $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ definirana s

$$\Psi(x) = f(\Phi(x))$$

rro-funkcija.

Dokaz. Neka je φ rekurzivna međa od Φ.
Neka su $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije iz leme 3.4.7.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ tada vrijedi

$$\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\varphi(x)} \subseteq \{h(i) \mid 0 \leq i \leq g(\varphi(x))\}. \tag{3.1}$$

Neka su $f_1, \dots, f_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f.
Nadalje, neka je $\overline{f} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\overline{f}(y) = f_1(y) + \cdots + f_m(y).$$

Očito je $\overline{f}$ rekurzivna funkcija.
Nadalje, neka je $\psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$\Psi(x) = \sum_{i=0}^{g(\varphi(x))} \overline{f}(h(i)).$$

Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$.
Tvrdimo da je tada

$$f(y) \in \mathbb{N}^m_{\psi(x)}.$$

Iz $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ i (3.1) slijedi da je

$$y = h(i)$$

za neki $i \in \{0, \dots, g(\varphi(x))\}$.
Stoga je

$$f(y) = f(h(i)) = (f_1(h(i)), \dots, f_m(h(i))) \in \mathbb{N}^m_{\overline{f}(h(i))} \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}.$$

Dakle,

$$f(y) \in \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$.
Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(\mathbb{N}^n_{\varphi(x)}) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}$$

pa zbog $\Phi(x) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(x)}$ imamo

$$f(\Phi(x)) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)},$$

tj.

$$\Psi(x) \subseteq \mathbb{N}^m_{\psi(x)}.$$

Dakle, ψ je rekurzivna međa od Ψ.

Neka je $\vartheta : \mathbb{N}^{2m} \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija takva da za sve $z, z' \in \mathbb{N}^m$ vrijedi

$$\vartheta(z, z') > 0 \Longleftrightarrow z = z'.$$

Takva funkcija postoji prema prethodnoj lemi.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$ i $z \in \mathbb{N}^m$.
Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
z \in \Psi(x) &\Longleftrightarrow z \in f(\Phi(x)) \\
&\Longleftrightarrow \exists y \in \Phi(x) \text{ takav da je } z = f(y) \\
&\Longleftrightarrow \exists y \in \{h(i) \mid 0 \leq i \leq g(\varphi(x))\} \text{ takav da je } z = f(y) \text{ i } y \in \Phi(x) \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \{0, \ldots, g(\varphi(x)\} \text{ takav da je } z = f(h(i)) \text{ i } h(i) \in \Phi(x) \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \{0, \ldots, g(\varphi(x)\} \text{ takav da je } \vartheta(z, f(h(i))) > 0 \text{ i } \overline{\Phi}(h(i), x) > 0 \\
&\Longleftrightarrow \exists i \in \{0, \ldots, g(\varphi(x)\} \text{ takav da je } \vartheta(z, f(h(i))) \cdot \overline{\Phi}(h(i), x) > 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{g(\varphi(x))} \vartheta(z, f(h(i))) \cdot \overline{\Phi}(h(i), x) > 0.
\end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $G : \mathbb{N}^{k+m} \to \mathbb{N}$ s

$$G(x, z) = \sum_{i=0}^{g(\varphi(x)} \vartheta(z, h(i)) \cdot \overline{\Phi}(h(i), x) \; \forall x \in \mathbb{N}^k \;, \; \forall z \in \mathbb{N}^m.$$

Iz propozicije 3.5.6 slijedi da je G rekurzivna funkcija, a vrijedi

$$z \in \Psi(x) \Longleftrightarrow G(x, z) > 0.$$

Stoga je

$$\overline{\Psi} = \mathrm{sg} \circ G$$

pa je $\overline{\Psi}$ rekurzivna funkcija i time je tvrdnja teorema dokazana. □

Propozicija 3.5.11. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcija te neka je $f : \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}^k$ rekurzivna funkcija.*
Tada je

$$\Phi \circ f : \mathbb{N}^l \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$$

rro-funkcija.

Dokaz. Neka su $x \in \mathbb{N}^l$ i $y \in \mathbb{N}^n$.
Tada je

$$\begin{aligned} \overline{\Phi \circ f}(x, y) &= \chi_{\Phi \circ f(x)}(y) \\ &= \chi_{\Phi(f(x))}(y) \\ &= \overline{\Phi}(f(x), y) \end{aligned}$$

pa slijedi da je $\overline{\Phi \circ f}$ rekurzivna funkcija.

Neka je $\varphi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna međa od Φ.
Za svaki $x \in \mathbb{N}^l$ vrijedi

$$(\Phi \circ f)(x) = \Phi(f(x)) \subseteq \mathbb{N}^n_{\varphi(f(x))} = \mathbb{N}^n_{(\varphi \circ f)(x)}.$$

Stoga je $\varphi \circ f$ rekurzivna međa od $\Phi \circ f$. □

Teorem 3.5.12. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, neka je $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ rro-funkcija te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$ rekurzivno prebrojiv skup.*
Tada je skup

$$T = \{x \in \mathbb{N}^k \mid \Phi(x) \subseteq S\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja očito slijedi.

Pretpostavimo da je S neprazan.
Tada postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^n$ takva da je $\mathrm{Im}(f) = S$.
Definirajmo funkciju $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ s

$$\Psi(i) = \{f(0), \ldots, f(i)\}.$$

Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\Psi(i) = f(\{0, \dots, i\})$$

pa iz činjenice da je funkcija $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $i \mapsto \{0, \dots, i\}$ rro i teorema 3.5.10 slijedi da je Ψ rro-funkcija.
Uočimo da je

$$S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi(i)$$

te da je svaki konačan podskup od S sadržan u $\Psi(i)$ za neki $i \in \mathbb{N}$.
Neka je $x \in \mathbb{N}^k$. Tada vrijedi

$$x \in T \iff \Phi(x) \subseteq S \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } \Phi(x) \subseteq \Psi(i).$$

Dakle,

$$x \in T \iff \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (x, i) \in \Omega,$$

gdje je

$$\Omega = \{(x, i) \mid \Phi(x) \subseteq \Psi(i)\}.$$

Iz korolara 3.5.8 slijedi da je Ω rekurzivan skup pa iz teorema o projekciji slijedi da je T rekurzivno prebrojiv skup. □

Primjer 3.5.13. *Funkcija* $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\Psi(i) = [i]$ *je rro.*

Naime, za svaki $i \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \{(i)_0, \dots, (i)_{\bar{i}}\} \\ &= \{\sigma(i, 0), \dots, \sigma(i, \bar{i})\} \\ &= \sigma(\Phi(i)), \end{aligned}$$

gdje je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$*,*

$$\Phi(i) = \{(i, 0), \dots, (i, \bar{i})\}.$$

Lako se provjeri da je Φ *rro-funkcija.*
Imamo

$$\Psi(x) = \sigma(\Phi(i))$$

pa iz teorema 3.5.10 slijedi da je Ψ *rro-funkcija.*

Propozicija 3.5.14. *Neka su $k, n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ te neka su $\Phi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ i $\Psi : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^m)$ rro-funkcije. Tada je i $\Lambda : \mathbb{N}^k \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^{n+m})$ definirana s*

$$\Lambda(x) = \Phi(x) \times \Psi(x)$$

rro-funkcija.

Dokaz. Neka su $\varphi, \psi : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne međe od Φ i Ψ.
Tada je $\varphi + \psi$ rekurzivna međa od Λ.
Neka su $x \in \mathbb{N}^k$, $y \in \mathbb{N}^n$ i $z \in \mathbb{N}^m$.
Imamo

$$\begin{aligned}\overline{\Lambda}(x, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } (y, z) \in \Lambda(x) \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{ako je } y \in \Phi(x)\ ,\ z \in \Psi(x) \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \\ &= \overline{\Phi}(x, y) \cdot \overline{\Psi}(x, z)\end{aligned}$$

pa slijedi da je $\overline{\Lambda}$ rekurzivna funkcija.

Prema tome, Λ je rro-funkcija. □

Propozicija 3.5.15. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je*

$$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathbb{J}_a \text{ i } \mathbb{J}_b \text{ } FD \text{ disjunktni}\}.$$

Tada je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}(a, b) \in \Omega &\Longleftrightarrow (i, j) \in FD\ ,\ \forall i \in [a]\ ,\ \forall j \in [b] \\ &\Longleftrightarrow [a] \times [b] \subseteq FD.\end{aligned}$$

Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ s

$$\Phi(a, b) = [a] \times [b].$$

Iz prethodnog primjera i prethodne propozicije slijedi da je Φ rro-funkcija.
Imamo

$$(a, b) \in \Omega \Longleftrightarrow \Phi(a, b) \subseteq FD.$$

Dakle,

$$\Omega = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(a, b) \subseteq FD\}.$$

Iz teorema 3.5.12 slijedi da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.5.16. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor te neka je*

$$\Omega' = \{(i, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathbb{I}_i \ FS \ \textit{sadržano u} \ \mathbb{J}_b\}.$$

Tada je Ω' *rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka su $i, b \in \mathbb{N}$. Imamo

$$\begin{aligned}(i, b) \in \Omega' &\Longleftrightarrow \exists j \in [b] \text{ takav da je } (i, j) \in FS \\ &\Longleftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, j) \in FS \text{ i } j \in [b].\end{aligned}$$

Neka je

$$\begin{aligned}T &= \{(i, b, j) \in \mathbb{N}^3 \mid (i, j) \in FS\} \\ T' &= \{(i, b, j) \mid j \in [b]\}.\end{aligned}$$

Imamo

$$T = f^{-1}(FS)$$

pri čemu je $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}^2$ funkcija definirana s

$$f(i, b, j) = (i, j).$$

Dakle, T je rekurzivno prebrojiv skup.
Neka je $\Phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ funkcija definirana s

$$\Phi(b) = [b].$$

Prema prethodnom primjeru slijedi da je Φ rekurzivna funkcija, a imamo

$$\chi_{T'}(i, b, j) = \chi_{[b]}(j) = \chi_{\Phi(b)}(j) = \overline{\Phi}(b, j).$$

Stoga je $\chi_{T'}$ rekurzivna funkcija, tj. T' je rekurzivan skup.
Slijedi da je $T \cap T'$ rekurzivno prebrojiv skup.

Imamo

$$(i, b) \in \Omega' \Longleftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \text{ takav da je } (i, b, j) \in T \cap T'.$$

Iz teorema o projekciji slijedi da je Ω' rekurzivno prebrojiv skup. □

Propozicija 3.5.17. *Neka je* $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ *izračunljiv topološki prostor te neka je*

$$\Gamma = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathbb{J}_a \ FS \ \textit{sadržano u} \ \mathbb{J}_b\}.$$

Tada je Γ *rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je Ω' skup iz prethodne leme.
Neka su $a, b \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}(a,b) \in \Gamma &\iff \forall i \in [a]\ \mathbb{I}_i \text{ je } FS \text{ sadržan u } \mathbb{J}_b \\ &\iff \forall i \in [a]\ (i,b) \in \Omega' \\ &\iff [a] \times \{b\} \subseteq \Omega' \\ &\iff \Phi(a,b) \subseteq \Omega'\end{aligned}$$

gdje je $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$,

$$\Phi(a,b) = [a] \times \{b\}.$$

Funkcija Φ je rro i vrijedi

$$\Gamma = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \Phi(a,b) \subseteq \Omega'\}$$

pa iz teorema 3.5.12 slijedi da je Γ rekurzivno prebrojiv skup. $\square$

3.6 Povezanost

Definicija 3.6.1. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $A \subseteq X$. Za A kažemo da je **omeđen skup** u (X, d) ako je A sadržan u nekoj otvorenoj kugli u (X, d).*

Pretpostavimo da je A omeđen skup u (X, d). Tada postoje $x_0 \in A$ i $r > 0$ takvi da je

$$A \subseteq K(x_0, r).$$

Iz ovoga slijedi da za sve $x, y \in A$ vrijedi

$$d(x, y) < 2r.$$

Definicija 3.6.2. *Neka je A neprazan omeđen skup u (X, d). Definiramo*

$$diam\, A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

*Za $diam\, A$ kažemo da je **dijametar** skupa A.*

Definicija 3.6.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka su $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ i $U \cup V = X$.*
*Tada za (U, V) kažemo da je **separacija** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 3.6.4. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **povezan** ako nema separaciju.*

Analogno definiramo pojam separacije metričkog prostora te pojam povezanog metričkog prostora.

Definicija 3.6.5. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je **kompaktan** ako je X kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$.*

Definicija 3.6.6. *Ako je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač skupa X u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ onda za $\mathcal{U}$ kažemo da je **otvoreni pokrivač** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

Uočimo:
Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$X = U_0 \cup \cdots \cup U_n.$$

Analogno definiramo pojam kompaktnog metričkog prostora te pojam otvorenog pokrivača metričkog prostora.

Propozicija 3.6.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je Y neprazan podskup od X. Definiramo*
$$\S = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}.$$
Tada je $\S$ topologija na Y.

Dokaz. Očito su $\emptyset$, $Y \in \S$.

Neka je $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\S$. Tada za svaki $\alpha \in A$ postoji $U_\alpha \in \mathcal{T}$ takav da je
$$V_\alpha = U_\alpha \cap Y.$$

Imamo
$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap Y.$$

Budući da je $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ (jer je $\mathcal{T}$ topologija) imamo
$$\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \in \S.$$

Neka su V_1 , $V_2 \in \S$.
Tada je
$$V_1 = U_1 \cap Y$$
i
$$V_2 = U_2 \cap Y,$$
gdje su U_1 , $U_2 \in \mathcal{T}$.
Imamo
$$V_1 \cap V_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = U_1 \cap U_2 \cap Y = (U_1 \cap U_2) \cap Y.$$

S obzirom da je $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ zaključujemo da je $V_1 \cap V_2 \in \S$.
Dakle, $\S$ je topologija na Y. □

*Za $\S$ kažemo da je **relativna topologija** na Y (određena topologijom $\mathcal{T}$).*
*Za topološki prostor $(Y, \S)$ kažemo da je **potprostor** topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$.*

3.7 Lančasti kontinuum

Definicija 3.7.1. *Neka su $m \in \mathbb{N}$ i X skup te neka je $C_0, \ldots, C_m$ konačan niz podskupova od X takav da za sve $i, j \in \{0, \ldots, n\}$ vrijedi*

$$C_i \cap C_j \neq \emptyset \Longleftrightarrow |i - j| \leq 1.$$

*Tada za konačan niz $C_0, \ldots, C_m$ kažemo da je **lanac** u X.*

Definicija 3.7.2. *Neka je X skup, $S \subseteq X$, $m \in \mathbb{N}$ te $C_0, \ldots, C_m$ konačan niz podskupova od X takav da je*

$$S \subseteq C_0 \cup \cdots \cup C_m.$$

*Tada kažemo da konačan niz $C_0, \ldots, C_m$ **pokriva** S.*

Definicija 3.7.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je $C = (C_0, \ldots, C_m)$ lanac u X. Ako je C_i kompaktan skup u (X, d) za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$, onda za C kažemo da je **kompaktan lanac** u (X, d).*
*Ako je $\epsilon > 0$ te $\operatorname{diam} C_i < \epsilon$, za svaki $i \in \{0, \ldots, m\}$, onda za C kažemo da je **ϵ-lanac** u (X, d).*

Definicija 3.7.4. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je **kontinuum** ako je (X, d) kompaktan i povezan.*

Definicija 3.7.5. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da je **lančasti kontinuum** ako je (X, d) kontinuum i ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan ϵ-lanac u (X, d) koji pokriva X.*
*Neka su $a, b \in X$. Za (X, d) kažemo da je **kontinuum lančast od** a **do** b ako je (X, d) kontinuum te ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji kompaktan ϵ-lanac $C_0, \ldots, C_m$ koji pokriva X te takav da je $a \in C_0$ i $b \in C_m$.*

Definicija 3.7.6. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je $x_0 \in X$. Kažemo da je x_0 **izračunljiva točka** u $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ ako je skup*

$$\{i \in \mathbb{N} \mid x_0 \in \mathbb{I}_i\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Uočimo da je x_0 izračunljiva točka u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α) ako i samo ako je x_0 izračunljiva točka u pripadnom topološkom prostoru $(X, \mathcal{T}_d, (\mathbb{I}_i))$. (teorem 2.3.4)

Lema 3.7.7. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je x_0 izračunljiva točka u tom prostoru.*
Neka je
$$\Omega = \{j \in \mathbb{N} \mid x_0 \in \mathbb{J}_j\}.$$
Tada je Ω rekurzivno prebrojiv skup.

Dokaz. Neka je
$$\Gamma = \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 \in \mathbb{I}_i\}.$$

Tada je Γ rekurzivno prebrojiv te za svaki $j \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\begin{aligned} j \in \Omega &\Longleftrightarrow x_0 \in \mathbb{J}_j \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in [j] \text{ takav da je } x_0 \in \mathbb{I}_i \\ &\Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ takav da je } i \in \Gamma \text{ i } i \in [j]. \end{aligned}$$
Definiramo
$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in \Gamma\}, \\ \Omega_2 &= \{(j, i) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in [j]\}. \end{aligned}$$
Tada imamo
$$j \in \Omega \Longleftrightarrow \exists i \in \mathbb{N}\ ,\ (j, i) \in \Omega_1 \cap \Omega_2.$$

Stoga je prema teoremu o projekciji dovoljno pokazati da su Ω_1 i Ω_2 rekurzivno prebrojivi skupovi.
Imamo
$$\Omega_1 = (I_2^2)^{-1}(\Gamma)$$
pa slijedi da je Ω_1 rekurzivno prebrojiv skup.
Vrijedi
$$\chi_{\Omega_2} = \chi_{[j]}(i)$$
pa iz činjenice da je funkcija $\mathbb{N} \mapsto \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $j \mapsto [j]$ rekurzivna slijedi da je χ_{Ω_2} rekurzivna funkcija, tj. Ω_2 rekurzivan skup.
Time je tvrdnja leme dokazana. □

Definicija 3.7.8. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je* ***kontinuum lančast od*** *a* ***do*** *b, gdje su $a, b \in X$ ako postoji metrika d na X koja inducira topologiju $\mathcal{T}$ takva da je metrički prostor (X, d) kontinuum lančast od a do b.*

Lema 3.7.9. *Neka je $(Y, \S)$ potprostor topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$. Neka je K kompaktan skup u (Y, S). Tada je K kompaktan skup u (X, T).*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ otvoreni pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$.
Neka je
$$\mathcal{V} = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}\}.$$
Tada je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od K u $(Y, \S)$.
Naime, ako je $U \in \mathcal{U}$, onda je $U \in \mathcal{T}$ pa je
$$U \cap Y \in \S.$$
Dakle,
$$\mathcal{V} \subseteq \S.$$
Nadalje, neka je $x \in K$. Tada postoji $U \in \mathcal{U}$ takav da je $x \in U$.
Očito je $x \in Y$ pa slijedi
$$x \in U \cap Y.$$
Dakle, postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $x \in V$.
Time smo dokazali da je
$$K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$
Zaključujemo da je $\mathcal{V}$ otvoreni pokrivač od K u $(Y, \S)$.
Budući da je K kompaktan, postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_0, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ takvi da je
$$K \subseteq V_0 \cup \cdots \cup V_n.$$

Za svaki $i \in \{0, \dots, n\}$ postoji $U_i \in \mathcal{U}$ takav da je
$$V_i = U_i \cap Y.$$
Slijedi
$$K \subseteq (U_0 \cap Y) \cup \cdots \cup (U_n \cap Y) = (U_0 \cup \cdots \cup U_n) \cap Y$$
tj.
$$K \subseteq U_0 \cup \cdots \cup U_n.$$
Prema tome, K je kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. □

Propozicija 3.7.10. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{T})$ povezan ako i samo ako ne postoji $U \subseteq X$ takav da je U i zatvoren i otvoren te $U \neq \emptyset$ i $U \neq X$.*

Dokaz. Uzmimo da je (X, T) povezan.
Pretpostavimo da postoji skup U s navedenim svojstvom.
Tada je (U, U^C) separacija topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$, što je nemoguće.

Obratno, uzmimo da ne postoji takav skup U.
Pretpostavimo da $(X, \mathcal{T})$ nije povezan.
Tada postoji separacija (U, V) od $(X, \mathcal{T})$ iz čega slijedi da je U i otvoren i zatvoren (jer je $U^C = V$), $U \neq \emptyset$ i $U \neq X$, no to je nemoguće prema pretpostavci.

Dakle, $(X, \mathcal{T})$ je povezan. □

Lema 3.7.11. *Neka je (X, d) povezan metrički prostor takav da X ima bar dva elementa. Tada niti jedan neprazan konačan podskup od X nije otvoren.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $x \in X$ takav da je $\{x\}$ otvoren skup u (X, d).
No, $\{x\}$ je i zatvoren skup u (X, d) (to možemo zaključiti iz činjenice da je očito kompaktan).

Ovo je u kontradikciji s prethodnom propozicijom.

Pretpostavimo da je $l \geq 2$ te da su $x_1, \ldots, x_l \in X$ takvi da je $\{x_1, \ldots, x_l\}$ otvoren skup u (X, d).
Uočimo prije svega da je
$$\{x_1, \ldots, x_l\} \subset X.$$
U suprotnom bi skupovi $\{x_1\}, \{x_2, \ldots, x_l\}$ činili separaciju od (X, d)(oba skupa su očito kompaktna pa time i zatvorena, a onda i otvorena jer su jedan drugom komplementi).
Stoga je $\{x_1, \ldots, x_l\}$ i otvoren i zatvoren, neprazan i različit od X, što je kontradikcija s prethodnom propozicijom. □

Propozicija 3.7.12. *Neka je $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor te neka je K poluizračunljiv skup u tom topološkom prostoru.*
Tada je skup
$$\Omega = \{(u, v, w) \in \mathbb{N}^3 \mid K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w\}$$
rekurzivno prebrojiv.

Dokaz. Neka je
$$\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \mathbb{J}_j\}.$$

Tada je Γ rekurzivno prebrojiv skup.
Definirajmo funkciju $\Phi : \mathbb{N}^3 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sa
$$\Phi(u, v, w) = [u] \cup [v] \cup [w].$$

Iz propozicije 3.5.4 slijedi da je Φ rro-funkcija.
Uočimo sljedeće:
Za sve $u, v, w \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$[u] \cup [v] \cup [w] = [j],$$

tj.

$$\Phi(u, v, w) = [j].$$

Neka je

$$\Gamma' = \{(u, v, w, j) \in \mathbb{N}^4 \mid \Phi(u, v, w) = [j]\}.$$

Iz korolara 3.5.8 slijedi da je Γ' rekurzivan skup.
Za sve $u, v, w \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(u, v, w, j) \in \Gamma'.$$

Iz teorema 2.3.2 slijedi da postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$(u, v, w, f(u, v, w)) \in \Gamma' , \ \forall u, v, w \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga slijedi da za sve $u, v, w \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$[u] \cup [v] \cup [w] = [f(u, v, w)].$$

Imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w &= \bigcup_{i \in [u]} \mathbb{I}_i \cup \bigcup_{i \in [v]} \mathbb{I}_i \cup \bigcup_{i \in [w]} \mathbb{I}_i \\ &= \bigcup_{i \in [u] \cup [v] \cup [w]} \mathbb{I}_i \\ &= \bigcup_{i \in [f(u,v,w)]} \mathbb{I}_i \\ &= \mathbb{J}_{f(u,v,w)}, \end{aligned}$$

dakle,

$$\mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w = \mathbb{J}_{f(u,v,w)}.$$

Neka su $u, v, w \in \mathbb{N}$.
Imamo

$$(u, v, w) \in \Omega \iff K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w \iff K \subseteq \mathbb{J}_{f(u,v,w)} \iff f(u, v, w) \in \Gamma \iff (u, v, w) \in f^{-1}(\Gamma).$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$\Omega = f^{-1}(\Gamma)$$

pa zaključujemo da je Ω rekurzivno prebrojiv skup. □

Lema 3.7.13. *Neka je $(X, T, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Tada postoji rekurzivna funkcija $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$\mathbb{I}_i = \mathbb{J}_{\omega(i)}\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\{i\} = [j].$$

S obzirom da je skup

$$\{(i, j) \mid \{i\} = [j]\}$$

rekurzivan, postoji rekurzivna funkcija $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je

$$\{i\} = [\omega(i)]\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Tada je

$$\mathbb{J}_{\omega(i)} = \mathbb{I}_i\ ,\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

□

Teorem 3.7.14. *Neka je $(X, T, (\mathbb{I}_i))$ izračunljiv topološki prostor. Neka je K poluizračunljiv skup u ovom prostoru. Neka je § relativna topologija na K određena s $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $(K, \S)$ kontinuum lančast od a do b, gdje su a i b izračunljive točke u $(X, T, (\mathbb{I}_i))$.*
Tada je K izračunljiv skup u $(X, T, (\mathbb{I}_i))$.

Dokaz. Neka je d metrika na K takva da je

$$\S = \mathcal{T}_d$$

te da je metrički prostor (K, d) kontinuum lančast od a do b.
Promotrimo prvo slučaj kada je K jednočlan skup.

Neka je ω funkcija iz leme 3.7.13.
Neka je
$$\Gamma = \{j \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \mathbb{J}_j\}.$$

Imamo
$$\begin{aligned}\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap K = \emptyset\} &= \{i \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \mathbb{I}_i\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid K \subseteq \mathbb{J}_{\omega(i)}\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid \omega(i) \in \Gamma\} \\ &= \omega^{-1}(\Gamma).\end{aligned}$$
Prema tome, K je izračunljivo prebrojiv skup, tj. K je izračunljiv skup.

Pretpostavimo da K ima barem dva elementa.
Neka je ω funkcija iz leme 3.7.13.
Pretpostavimo da je $i \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset.$$

Uočimo da je $\mathbb{I}_i \cap K \in \S$ (jer je $\mathbb{I}_i \in \mathcal{T}$), stoga je $\mathbb{I}_i \cap K$ otvoren skup u metričkom prostoru (K, d).
Iz leme 3.7.11 slijedi da $\mathbb{I}_i \cap K$ nije konačan skup.
Stoga postoji $x \in K$, $x \neq a$, $x \neq b$ takav da je $x \in \mathbb{I}_i$.

Imamo
$$x \in \mathbb{I}_i \cap K$$
i
$$\mathbb{I}_i \cap K \text{ otvoren u } (K, d)$$
pa postoji $r > 0$ takav da je
$$K(x, r) \subseteq \mathbb{I}_i \cap K.$$

Neka je
$$\lambda = \min\{r, d(x, a), d(x, b)\}.$$

Budući da je (K, d) kontinuum lančast od a do b, postoji kompaktan λ-lanac $C_0, \dots, C_m$ u (K, d) koji pokriva K te takav da je $a \in C_0$ i $b \in C_m$.
Tada postoji $l \in \{0, \dots, m\}$ takav da je
$$x \in C_l.$$

Primjetimo da je $0 < l$.
U suprotnom imamo

$$C_0 = C_l \Rightarrow a, x \in C_l \Rightarrow d(a, x) \leq \operatorname{diam} C_l < \lambda \leq d(a, x)$$

što je nemoguće.
Analogno zaključujemo da je $l < m$.

Tvrdimo da je $C_l \subseteq \mathbb{I}_i$.
Neka je $y \in C_l$. Tada je

$$d(y, x) \leq \operatorname{diam} C_l < \lambda \leq r \Rightarrow y \in K(x, r) \Rightarrow y \in \mathbb{I}_i.$$

Dakle, vrijedi $C_l \subseteq \mathbb{I}_i$.
Definirajmo

$$A = C_0 \cup \cdots \cup C_{l-1}$$

i

$$B = C_{l+1} \cup \cdots \cup C_m.$$

Očito je $A \cap B = \emptyset$.

Nadalje, A i B su kompaktni skupovi u (K, d) (općenito se lako vidi da je unija dva kompaktna skupa kompaktan skup pa i unija konačno mnogo kompaktnih skupova).
Stoga slijedi da su A, B, C_l kompaktni u $(K, \S)$ pa su prema lemi 3.7.9 kompaktni u $(X, \mathcal{T})$.

Postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ i vrijedi sljedeće:

$$A \subseteq \mathbb{J}_u\ ,\ C_r \subseteq \mathbb{J}_v\ ,\ B \subseteq \mathbb{J}_w\ ,\ \mathbb{J}_v\ FS\ \text{ sadržan u } \mathbb{J}_{\omega(i)}\ ,\ \mathbb{J}_u \text{ i } \mathbb{J}_w\ FD \text{ disjunktni.}$$

Uočimo da je $a \in A$, $b \in B$ te da je

$$K = A \cup C_r \cup B.$$

Imamo sljedeći zaključak:
Ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je

1) $a \in \mathbb{J}_u$,

2) $b \in \mathbb{J}_w$,

3) $\mathbb{J}_v$ FS sadržan u $\mathbb{J}_{\omega(i)}$,

4) $\mathbb{J}_u$ i $\mathbb{J}_w$ FD disjunktni ,

5) $K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w$.

Neka je Ω skup svih $(i, u, v, w) \in \mathbb{N}^4$ za koje vrijede svojstva 1)-5).
Dokazali smo sljedeće:
Ako je $i \in \mathbb{N}$ takav da je $\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset$, onda postoje $u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(i, u, v, w) \in \Omega.$$

Iz leme 3.7.7, teorema 3.4.5 i propozicije 3.7.12 slijedi da je Ω kao presjek konačno mnogo rekurzivno prebrojivih skupova rekurzivno prebrojiv.

Pretpostavimo sada da su $i, u, v, w \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$(i, u, v, w) \in \Omega.$$

Tvrdimo da je $\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset$.
Pretpostavimo suprotno, tj. $\mathbb{I}_i \cap K = \emptyset$.
Stoga je

$$\mathbb{J}_{\omega(i)} \cap K = \emptyset.$$

Iz svojstva 3) slijedi

$$\mathbb{J}_v \subseteq \mathbb{J}_{\omega(i)}$$

pa je stoga

$$\mathbb{J}_v \cap K = \emptyset.$$

Iz ovoga i

$$K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_v \cup \mathbb{J}_w$$

slijedi

$$K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_w.$$

Skupovi $\mathbb{J}_u$ i $\mathbb{J}_w$ su disjunktni prema svojstvu 4), stoga su i $K \cap \mathbb{J}_u$ i $K \cap \mathbb{J}_w$ disjunktni.

Iz $\mathbb{J}_u, \mathbb{J}_w \in \mathcal{T}$ slijedi

$$K \cap \mathbb{J}_u \, , K \cap \mathbb{J}_w \in \S.$$

Prema $K \subseteq \mathbb{J}_u \cup \mathbb{J}_w$ je očito
$$(K \cap \mathbb{J}_u) \cup (K \cap \mathbb{J}_w) = K.$$

Iz svojstva 1) i 2) slijedi da su skupovi $K \cap \mathbb{J}_u$ i $K \cap \mathbb{J}_w$ neprazni.

Dakle, $(K \cap \mathbb{J}_u, K \cap \mathbb{J}_w)$ je separacija od $(K, \S)$.
No, to je nemoguće jer je $(K, \S)$ povezan.
Prema tome,
$$\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset.$$

Zaključak:
Za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi
$$\mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists (u, v, w) \in \mathbb{N}^3 \ , \ (i, u, v, w) \in \Omega.$$

Stoga je
$$\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset\} = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists (u, v, w) \in \mathbb{N}^3 \ , \ (i, u, v, w) \in \Omega\}.$$

Iz teorema o projekciji slijedi da je
$$\{i \in \mathbb{N} \mid \mathbb{I}_i \cap K \neq \emptyset\}$$
rekurzivno prebrojiv skup.
Stoga je K izračunljivo prebrojiv u $(X, \mathcal{T}, (\mathbb{I}_i))$ i time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Bibliografija

- Z.Iljazovic: *Rekurzivnost lančastih i cirkularno lančastih kontinuuma*, doktorska disertacija, PMF-MO, Zagreb, 2009.
- V.Brattka, G.Presser: *Computability on subsets of metric spaces*, Theoretical Computer Science, 305:43-76, 2003.
- K.Weihrauch: *Computable Analysis*, Springer, Berlin, 2000.
- M.B.Pour-El, I.Richards: *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag, Berlin-Heielberg-New York, 1989.
- K.Weihrauch, T.Grubba: *Elementary Computable Topology*, Journal of University Computer Science, 15(6), 1381-1422, 2009.
- M.Vukovic: *Izračunljivost*, skripta, 2009.

Sažetak

U ovom diplomskom radu smo uveli pojam rekurzivne funkcije i to kada je kodomena skup prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva. Promatrali smo svojstva istih i primjenili ih u sklopu metričkih i topoloških prostora te došli do definicije izračunljivog metričkog i izračunljivog topološkog prostora. U trećem dijelu rada smo se bazirali na definiranju i svojstvima izračunljivih i poluizračunljivih skupova te smo zaključno odredili dovoljne uvjete da za neki skup možemo reći da je izračunljiv.

Summary

In this thesis we introduced the notion of a recursive function in case when the codomain is the set of natural numbers, integers, rational and real numbers. We examined properties of these functions and we applied them in the context of metric and topological spaces. We defined computable metric spaces and computable topological spaces. In the third part of the thesis we defined and studied properties of computable and semi-computable sets and we found sufficient conditions for some set to be computable.

Životopis

Rođen sam 12.studenog 1990. godine u Zagrebu. Završio sam osnovnu školu u Odri 2005. godine, IV. gimnaziju u Utrinama 2009. godine te preddiplomski studij Matematika;nastavnički smjer 2013. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.