Primitivni tetraedri u trodimenzionalnoj cjelobrojnoj rešeci

Marin, Nataša

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Nataša Marin

PRIMITIVNI TETRAEDRI U TRODIMENZIONALNOJ CJELOBROJNOJ REŠECI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, srpanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Osnovne definicije **2**

2 Unimodularna preslikavanja **7**

3 Primitivni poligoni u rešeci $\mathbb{Z}^2$ **11**

4 Primitivni tetraedri u rešeci $\mathbb{Z}^3$ **22**

Bibliografija **32**

Uvod

Primitivni politop u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru E^n je politop čiji vrhovi pripadaju cjelobrojnoj rešeci $\mathbb{Z}^n$, ali nema drugih točaka rešetke u unutrašnjosti ili na rubu.
U radu su prikazani neki rezultati o primitivnim tetraedrima u rešeci $\mathbb{Z}^3$, a posebno prebrojavanje klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara zadanog volumena.
Osim toga, u radu je pokazano da se rezultati koji vrijede u trodimenzionalnoj rešeci bitno razlikuju od ravninskog slučaja. Primitivan politop u rešeci $\mathbb{Z}^2$ ima najviše 4 vrha pa iz Pickovog teorema slijedi da to može biti ili trokut površine $\frac{1}{2}$ ili paralelogram površine 1. Dakle, površina primitivnih politopa u $\mathbb{Z}^2$ je ograničena. Za volumen primitivnih politopa u $\mathbb{Z}^3$ ne postoji gornja granica pa stoga ne možemo poopćiti Pickov teorem.
Bitnu ulogu u radu ima unimodularno preslikavanje. U ravnini vrijedi da su svaka dva primitivna trokuta unimodularno ekvivalentna, ali u tri dimenzije odgovarajuća tvrdnja za tetraedre ne vrijedi. No, za dani volumen primitivnog tetraedra možemo izračunati broj klasa ekvivalencije.

Poglavlje 1

Osnovne definicije

Promatrat ćemo neke posebne skupove točaka u euklidskom prostoru E^n, dakle realnom unitarnom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa standardnom metrikom.
Podskup $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ nazivamo cjelobrojna rešetka u $\mathbb{R}^n$. Algebarski, to je modul nad prstenom $\mathbb{Z}$ cijelih brojeva.

Definicija 1.1. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan prirodan broj i neka su $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$. Linearnu kombinaciju $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$ gdje su $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ i $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ zovemo konveksna kombinacija točaka $x_1, ..., x_m$.*

Podsjetimo da se podskup K euklidskog prostora naziva konveksnim skupom ako je za svake dvije točke $v_1, v_2 \in K$ cijeli segment $[v_1, v_2] = \{\lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2 : \lambda \in [0, 1]\}$ sadržan u K. Presjek bilo koje familije konveksnih skupova također je konveksan skup.

Ako je S bilo koji podskup euklidskog prostora, skup svih konveksnih kombinacija točaka iz S naziva se konveksna ljuska skupa S i označava se s $conv(S)$. Konveksna ljuska je najmanji konveksni podskup koji sadrži S, to jest to je presjek svih konveksnih podskupova prostora $\mathbb{R}^n$ koji sadrže S.

Definicija 1.2. *Neka je $S = \{v_1, ..., v_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ konačan skup. Skup*

$$P = conv(S) = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in S, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

zovemo politop razapet točkama $v_1, ..., v_m$.

Napomena. *U skladu s ovom definicijom, promatrat ćemo samo konveksne politope.*

Definicija 1.3. *Točka v politopa P je vrh tog politopa ako se ne može prikazati kao konveksna kombinacija preostalih točaka skupa P.*

U našem razmatranju politopa u rešetkama $\mathbb{Z}^2$ i $\mathbb{Z}^3$ možemo bez gubitka općenitosti pretpostaviti da je skup točaka koje razapinju politop upravo skup njegovih vrhova. Zato ćemo daljnje definicije iskazati uzimajući tu pretpostavku.

Točka $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$ nalazi se na rubu politopa P ako postoji barem jedan $i \in \{1, ..., m\}$ takav da je $\lambda_i = 0$, tj.

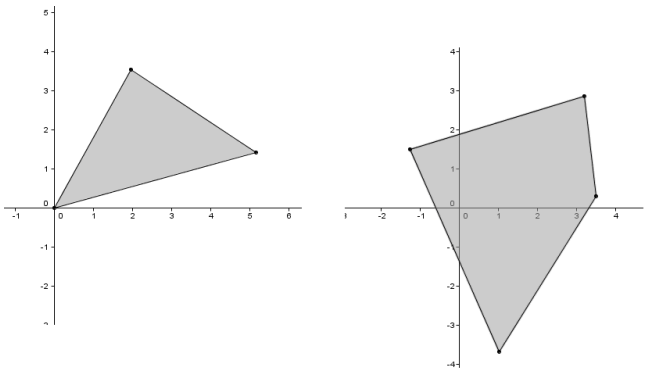
$$\partial P = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \lambda_i = 0 \text{ za neko } i \in \{1, ..., m\} \right\}$$

Točka $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$ nalazi se u unutrašnjosti politopa P ako je $\lambda_i > 0$ za svako $i \in \{1, ..., m\}$. Drugim riječima,

$$int(P) = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m > 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$$

Definicija 1.4. *Za politop* $P = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$ *kažemo da se nalazi u cjelobrojnoj rešeci. Takav politop je primitivan ako osim vrhova* $v_1, ..., v_m$ *ne sadrži niti jednu drugu točku iz* $\mathbb{Z}^n$ *niti na rubu niti u unutrašnjosti.*

Primjer 1.1. *Politopi razapeti s tri i četiri točke u* $\mathbb{R}^2$.



Slika 1.1: Primjeri politopa

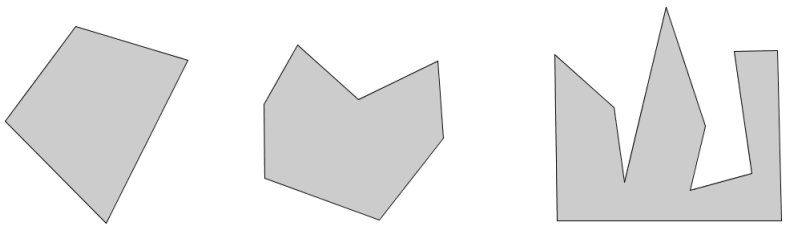
Teorem 1.1. *Primitivan politop u $\mathbb{R}^n$ ima najviše 2^n vrhova.*

Dokaz. Pretpostavimo da primitivan politop P u $\mathbb{R}^n$ ima više od 2^n vrhova.
S obzirom da svaku koordinatu n-dimenzionalne točke možemo izabrati na dva načina (paran ili neparan broj) slijedi da postoji točno 2^n različitih mogućnosti za odabir vrha ovisno o parnosti njegovih koordinata.
Stoga ako primitivan politop ima više od 2^n vrhova onda postoje vrhovi $v = \{v_1, ..., v_n\}$, $w = \{w_1, ..., w_n\}$ takvi da je $v_i + w_i \equiv 0 \pmod 2$ za svako $i = 1, ..., n$.
No politop P sadrži točku $\frac{1}{2}(v + w)$ koja nije vrh jer se može prikazati kao linearna kombinacija dva vrha. Vrijedi $\frac{1}{2}(v + w) \in \mathbb{Z}^n$ pa slijedi da P nije primitivan što je kontradikcija.
Dakle, P ima najviše 2^n vrhova.

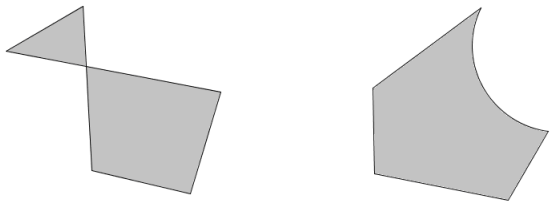
□

Definicija 1.5. *Poligon u $\mathbb{R}^2$ je unija zatvorene izlomljene linije i njene unutrašnjosti.*

Primjer 1.2. *Na prvoj slici su prikazani likovi koji su poligoni, a na drugoj nisu poligoni.*



Slika 1.2: Poligoni



Slika 1.3: Nisu poligoni

Podsjetimo da se skup točaka $\{T_0, T_1, ...T_m\}$ prostora E^n naziva linearno nezavisnim ako je skup vektora $\left\{\overrightarrow{T_0T_1}, ..., \overrightarrow{T_0T_m}\right\}$ linearno nezavisan u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definicija 1.6. *Neka su $T_0, T_1, ..., T_m \in \mathbb{R}^n$ linearno nezavisne točke te za svako $j = 1, ..., m$ označimo sa $v_j = \overrightarrow{T_0T_j}$. Tada skup*

$$P = P(v_1, ..., v_m) = \{T_0 + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : 0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_m \leq 1\}$$

zovemo m-dimenzionalni paralelotop prostora $\mathbb{R}^n$ razapet vektorima $v_1, ..., v_m$.

Napomena 1.1. *n-dimenzionalni paralelotop $P \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan skup jer se može prikazati kao presjek zatvorenih poluprostora, koji su konveksni skupovi, pa je i njihov presjek konveksan.*

Definicija 1.7. *Neka su $T_0, T_1, ..., T_m \in \mathbb{R}^n$ linearno nezavisne točke. Konveksno zatvorenje skupa $\{T_0, T_1, ..., T_m\}$ zovemo m-dimenzionalni simpleks razapet vrhovima $T_0, T_1, ..., T_m$.*

Napomena 1.2. *n-dimenzionalni simpleks $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksan skup jer se može prikazati kao presjek $n + 1$ zatvorenih poluprostora.*

Tetraedar $T \subseteq \mathbb{R}^3$ je konveksno zatvorenje skupa svojih vrhova, dakle zapravo je 3-simpleks.
(vidi [9], 55 - 59)

Definicija 1.8. *Preslikavanje $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je linearno ako za proizvoljne vektore $x, y \in \mathbb{R}^m$ te za skalar $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $L(x + y) = L(x) + L(y)$ i $L(ax) = aL(x)$.*

Linearno preslikavanje nam je poznato i kao linearni operator. Svaki linearni operator $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ u potpunosti je određen djelovanjem na (bilo kojoj) bazi prostora $\mathbb{R}^m$. Iz toga slijedi da postoji matrica $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ koja u potpunosti određuje linearan operator L. Matricu M zovemo matrica operatora.

Definicija 1.9. *Preslikavanje $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je afino ako postoje linearno preslikavanje $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i vektor $b \in \mathbb{R}^n$ takvi da za svako $x \in \mathbb{R}^m$ vrijedi $A(x) = L(x) + b$.*

Afino preslikavanje je kompozicija linearnog preslikavanja i translacije. Ako je $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ afino, onda postoje matrica operatora M koja u potpunosti određuje linearno preslikavanje i vektor $b \in \mathbb{R}^n$ takvi da za svako $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $A(x) = Mx + b$.

Poglavlje 2

Unimodularna preslikavanja

Volumen paralelotopa P u $\mathbb{R}^n$ razapetog točkama $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ definiramo s

$$vol(P) = |det\,[v_1\ v_2\ ...\ v_n]\,|$$

pri čemu je $[v_1\ v_2\ ...\ v_n]$ kvadratna matrica reda n čije stupce čine n-torke koordinata vrhova paralelotopa.

Ova definicija volumena preko determinante proizlazi iz toga što se pokazuje da je determinanta jedinstvena funkcija s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ koja ispunjava uobičajena svojstva volumena u euklidskom prostoru.
Volumen simpleksa jednak je $\frac{1}{n!}$ volumena pripadnog paralelotopa jer se svaki n- dimenzionalni paralelotop može rastaviti na $\frac{1}{n!}$ simpleksa.
(vidi [9], 100 - 108)

Ako je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(u) = Mu$ linearno preslikavanje određeno matricom $M \in M_n(\mathbb{R})$ tada vrijedi

$$vol(g(P)) = |detM| \cdot vol(P) \tag{2.1}$$

Naime, primjenom Binet - Cauchyjevog teorema dobivamo

$$\begin{aligned} vol(g(P)) &= |det\,[Mv_1\ Mv_2\ ...\ Mv_n]\,| = |det\,(M \cdot [v_1\ v_2\ ...\ v_n])\,| = \\ &= |detM| \cdot |det\,[v_1\ v_2\ ...\ v_n]\,| = |detM| \cdot vol(P) \end{aligned}$$

Volumen paralelotopa P bit će jednak volumenu njegove slike pod djelovanjem preslikavanja g ako i samo ako vrijedi $detM = \pm 1$, tj.

$$vol(P) = vol(g(P)) \iff detM = \pm 1 \tag{2.2}$$

Definicija 2.1. *Preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je unimodularno ako vrijedi*

(u1) *f je afino*

(u2) *f čuva volumen*

(u3) *$f(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Z}^n$*

Napomena 2.1. *Skup $M_n(\mathbb{Z})$ svih kvadratnih matrica reda n s cjelobrojnim koeficijentima asocijativan je grupoid s jedinicom s obzirom na množenje matrica. Podskup svih regularnih matrica iz $M_n(\mathbb{Z})$ kojima se i inverz nalazi u $M_n(\mathbb{Z})$ očito je grupa.*
Nužan i dovoljan uvjet da bi za $A \in M_n(\mathbb{Z})$ postojala inverzna matrica A^{-1} koja se također nalazi u $M_n(\mathbb{Z})$ dobivamo pomoću determinante. Iz $det(AA^{-1}) = detA \cdot detA^{-1} = 1$ i pretpostavke da A i A^{-1} imaju cjelobrojne koeficijente slijedi da je $detA = detA^{-1} \in \{-1, 1\}$. Uvjet $detA \in \{-1, 1\}$ također je dovoljan da bi A^{-1} imala cjelobrojne koeficijente jer $A^{-1} = \frac{1}{detA}\widetilde{A} = \pm\widetilde{A}$, a očito je adjunkta $\widetilde{A} \in M_n(\mathbb{Z})$.
Dakle, skup $\{A \in M_n(\mathbb{Z}) : detA \in \{-1, 1\}\}$ je grupa svih cjelobrojnih regularnih matrica čiji su inverzi također cjelobrojne matrice. Tu grupu označavat ćemo s $GL_n(\mathbb{Z})$.

Teorem 2.1. *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i neka je P politop u rešeci $\mathbb{Z}^n$. Tada vrijedi*

(i) *f je unimodularno ako i samo ako je $f(u) = Mu + v$ gdje su $v \in \mathbb{Z}^n$ i $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, tj. M je cjelobrojna $n \times n$ matrica i $det(M) = \pm 1$*

(ii) *ako je f unimodularno onda je f invertibilno i f^{-1} je unimodularno*

(iii) *ako je f unimodularno onda su $f(P)$ i $f^{-1}(P)$ politopi u rešeci. Osim toga, f preslikava točke iz unutrašnjosti od P u unutrašnjost od $f(P)$ i vrhove od P u vrhove od $f(P)$*

(iv) *ako je P primitivan politop onda su i $f(P)$ i $f^{-1}(P)$ primitivni*

Dokaz. (i) Ako je f afino slijedi $f(u) = Mu + v$ gdje su $u, v \in \mathbb{R}^n$ i $M \in M_n(\mathbb{R})$.
Obratno, ako je $f(u) = Mu + v$ onda je f afino jer je vektor v translacija, a preslikavanje $u \mapsto Mu$, $M \in M_n(\mathbb{R})$ je linearno.
Iz definicije preslikavanja f slijedi $f(\mathbb{Z}^n) \subseteq \mathbb{Z}^n$ ako i samo ako je $v \in \mathbb{Z}^n$ i $M \in M_n(\mathbb{Z})$.
Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ izmjeriv skup i $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(u) = Mu$ linearno preslikavanje određeno matricom $M \in M_n(\mathbb{R})$.
Iz formule (2.2) te zato što translacija ne utječe na volumen slijedi da preslikavanje f čuva volumen ako i samo ako je $detM = \pm 1$.

(ii) Neka je f unimodularno, $f(u) = Mu + v$, $v \in \mathbb{Z}^n$, $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, $detM = \pm 1$. Preslikavanje f je invertibilno jer je matrica M regularna i vrijedi
$f^{-1}(u) = M^{-1}u - w$, gdje je $w = M^{-1}v$. Dakle, $w \in \mathbb{Z}^n$, $detM^{-1} = \pm 1$, $M^{-1} \in GL_n(Z)$ pa je f^{-1} unimodularno.

(iii) Neka je $P = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$ politop u rešeci $\mathbb{Z}^n$ i neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unimodularno preslikavanje, $f(u) = Mu + v$, $v \in \mathbb{Z}^n$, $M \in GL_n(\mathbb{Z}^n)$, $detM = \pm 1$.
Tada je $f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m) = M(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m) + v = \lambda_1(Mv_1) + ... + \lambda_m(Mv_m) + v$.
Označimo s $s_i = Mv_i \in \mathbb{Z}^n$.
Tada je $f(P)$ politop $\left\{ \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_m s_m : s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$ translatiran za vektor $v \in \mathbb{Z}^n$. Dakle, $f(P)$ je politop u rešeci.
Točke $v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n$ su vrhovi politopa P.
Vrijedi $f(v_i) = Mv_i + v = s_i + v$ za svako $i = 1, ...m$.
Dakle, f preslikava vrhove politopa P u vrhove politopa $f(P)$.
Neka je $z \in \mathbb{Z}^n$ točka iz unutrašnjosti politopa P. Tada se z može prikazati kao linearna kombinacija točaka $v_1, ..., v_m$, tj. $z = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m$ pri čemu je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $\lambda_i > 0$ za svako $i = 1, ..., m$. Vrijedi $f(z) = \lambda_1(Mv_1) + ... + \lambda_m(Mv_m) + v$ pri čemu je $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $\lambda_i > 0$ za svako $i = 1, ..., m$, tj. $f(z)$ se nalazi u unutrašnjosti politopa $f(P)$.
Ako je f unimodularno preslikavanje onda iz (ii) slijedi da je i f^{-1} unimodularno pa stoga vrijedi tvrdnja za f^{-1}.

(iv) Neka je $P = \left\{ \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m : v_1, ..., v_m \in \mathbb{Z}^n, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}$ primitivan politop i neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ unimodularno preslikavanje, $f(u) = Mu + v$, $v \in \mathbb{Z}^n$, $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, $detM = \pm 1$.
Iz (iii) slijedi da je $f(P)$ politop i pretpostavimo da nije primitivan. Tada postoji točka iz cjelobrojne rešetke $f(z) \in f(P)$ koja nije vrh politopa $f(P)$, tj. $f(z) = \lambda_1(Mv_1) + ... + \lambda_m(Mv_m) + v \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_m < 1$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Vrijedi $M \in GL_n(\mathbb{Z}^n)$, $v \in \mathbb{Z}^n$ iz čega slijedi $z = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_m v_m \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leq \lambda_1, ..., \lambda_m < 1$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Dakle, $z \in \mathbb{Z}^n$ je točka politopa P koja nije vrh, a to je kontradikcija s primitivnošću politopa P. Slijedi da je $f(P)$ primitivan politop.
Ako je f unimodularno preslikavanje, iz (ii) slijedi da je f^{-1} unimodularno pa je $f^{-1}(P)$ primitivan politop.

□

Definicija 2.2. *Politopi $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ su unimodularno ekvivalentni ako postoji unimodularno preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takvo da je $f(P_1) = P_2$. Ako su P_1 i P_2 unimodularno ekvivalentni pišemo $P_1 \cong P_2$.*

Primjer 2.1. *Neka je P_1 politop razapet točkama $(3, 1)$, $(-4, 0)$ i $(-1, 2)$ te neka je P_2 politop razapet točkama $(28, 5)$, $(-39, -10)$ i $(-4, -2)$. Tada su P_1 i P_2 unimodularno ekvivalentni, a unimodularno preslikavanje f takvo da je $f(P_1) = P_2$ dano je sa*
$f((v_1, v_2)) = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Pokažimo da je $\cong$ relacija ekvivalencije.

- Refleksivnost
  Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^n$ politop. Identiteta $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(u) = u$ je unimodularno preslikavanje pa je $P \cong P$.

- Simetričnost
  Neka su $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ politopi takvi da je $P_1 \cong P_2$. Tada postoji unimodularno preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takvo da je $f(P_1) = P_2$. No, f^{-1} je također unimodularno i vrijedi $f^{-1}(P_2) = P_1$. Dakle, $P_2 \cong P_1$.

- Tranzitivnost
  Neka su $P_1, P_2, P_3 \subseteq \mathbb{R}^n$ politopi takvi da je $P_1 \cong P_2$ i $P_2 \cong P_3$. Tada postoje unimodularna preslikavanja $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ takva da je $f(P_1) = P_2$ i $g(P_2) = P_3$. Kompozicija unimodularnih preslikavanje je unimodularno preslikavanje pa vrijedi $g(f(P_1)) = g(P_2) = P_3$. Dakle, $P_1 \cong P_2$.

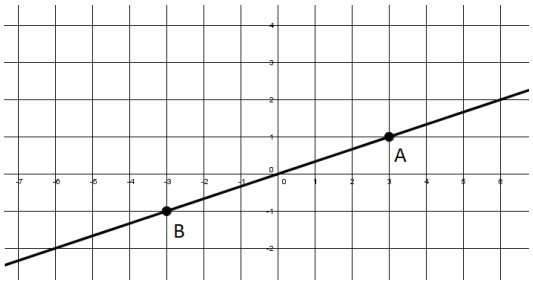
Poglavlje 3

Primitivni poligoni u rešeci $\mathbb{Z}^2$

U ovome poglavlju koristeći vidljive točke u rešeci pokazujemo da su svaka dva primitivna trokuta unimodularno ekvivalentna. Pomoću tog rezultata dokazat ćemo Pickov teorem koji nam daje vrlo elegantan način za izračunati površinu poligona u rešeci $\mathbb{Z}^2$. Iz teorema 1.1 slijedi da primitivan politop u ravnini može imati najviše 4 vrha, a iz Pickovog teorema zaključujemo da je primitivan politop u rešeci $\mathbb{Z}^2$ ili trokut površine $\frac{1}{2}$ ili paralelogram površine 1. Nakon toga slijede još neki interesantni rezultati dobiveni prebrojavanjem točaka rešetke koje poligon sadrži na rubu ili u unutrašnjosti.

Definicija 3.1. *Pravac u cjelobrojnoj rešeci je pravac koji prolazi kroz barem dvije točke rešetke. Segment u cjelobrojnoj rešeci je segment kojemu su početna i krajnja točka točke rešetke.*

Definicija 3.2. *Neka je dan pravac u cjelobrojnoj rešeci koji prolazi kroz ishodište. Točke rešetke koje se nalaze na danom pravcu i čija udaljenost od ishodišta je minimalna zovemo vidljive točke.*



Slika 3.1: Točke *A* i *B* su vidljive

U dokazima nekoliko sljedećih teorema koristit ćemo poznatu tvrdnju iz elementarne teorije brojeva.

Lema 3.1. *Neka su* $m, n \in \mathbb{Z}$ *i neka je* $g = m(m, n)$. *Tada postoje* $s, t \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $g = sm + nt$. *Posebno, ako su* m *i* n *relativno prosti tada vrijedi* $sm + nt = 1$.

Teorem 3.1. *Točka rešetke* $T = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$ *je vidljiva ako i samo ako su* m *i* n *relativno prosti.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $T = (m, n)$ vidljiva točka. Iz definicije vidljive točke slijedi da segment $[0, T]$ ne sadrži niti jednu drugu točku rešetke.
Pretpostavimo da m i n nisu relativno prosti i neka je $k > 1$ njihova mjera. Slijedi $\frac{m}{k}, \frac{n}{k} \in \mathbb{Z}$. Jednadžba pravca koji sadrži segment $[0, T]$ jednaka je $y = \frac{n}{m}x$ pa slijedi da segment $[0, T]$ sadrži točku $(\frac{m}{k}, \frac{n}{k})$ koja je bliže ishodištu od točke (m, n) što je kontradikcija s time da je (m, n) vidljiva točka. Dakle, $k = 1$, tj. m i n su relativno prosti.
Obratno, pretpostavimo da su m i n relativno prosti. Neka je $T' = (m', n')$ točka rešetke koja se nalazi na segmentu $[0, T]$ i različita je od ishodišta. Treba pokazati da je $T = T'$. Promatramo tri slučaja:

(i) Neka je $m' = 0$. Tada $[0, T]$ leži na y-osi pa je $T = (0, n)$. No, $m = 0$ i n su relativno prosti pa slijedi $n = 1$. S obzirom da je točka T' različita od ishodišta i jer se nalazi na segmentu $[0, T]$ slijedi $T = T'$.

(ii) Neka je $n' = 0$. Tada $[0, T]$ leži na x-osi pa je $T = (m, 0)$. Opet, m i $n = 0$ su relativno prosti pa slijedi $m = 1$. S obzirom da je točka T' različita od ishodišta i jer se nalazi na segmentu $[0, T]$ slijedi $T = T'$.

(iii) Neka su sada $m', n' \neq 0$. S obzirom da točke T i T' leže na istom pravcu koji prolazi kroz ishodište slijedi $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ pa je $nm' = n'm$ iz čega zaključujemo da $m|m'n$.
Jer su m i n relativno prosti te $m|m'n$ slijedi $m|m'$. Na isti način dobijemo da $n|n'$. Točka T se nalazi na segmentu $[0, T]$ pa mora vrijediti $|m'| < |m|$ i $|n'| < |n|$. Slijedi $T = T'$.

□

Propozicija 3.1. *Površina primitivnog paralelograma jednaka je 1.*

Dokaz. Neka je dan primitivan paralelogram. Translatiramo ga tako da dobijemo paralelogram P u prvom kvadrantu čiji vrhovi su točke $(0, 0)$, $A = (m, n)$, $B = (i, j)$ i $A + B = (m + i, n + j)$.
P je primitivan pa je točka A vidljiva. Iz teorema 3.1 slijedi da su m i n relativno prosti.

Stoga postoje $p, q \in \mathbb{Z}$ takvi da je $mp + nq = 1$.
Stavimo da je $M = \begin{pmatrix} p & q \\ -n & m \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$.
Definiramo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Mx$. Vrijedi $detM = mp + nq = 1$ pa je f unimodularno preslikavanje.
f preslikava vrhove paralelograma P u točke $(0,0)$, $(pi + qj, -ni + mj)$, $(1,0)$ i $(pi + qj - 1, -ni + mj)$.
Neka su $u = pi + qj$, $v = -ni + mj$. Tada su vrhovi paralelograma $f(P)$ točke $(0,0)$, (u,v), $(1,0)$, $(u+1,v)$.
Ako je $v = 0$ onda su vrhovi od $f(P)$ kolinearni pa $f(P)$ nije paralelogram. Dakle, $|v| \geq 1$.
Pretpostavimo da je $|v| > 1$ i da je v pozitivan. Tada dvije stranice paralelograma $f(P)$ sijeku pravac $y = 1$ u točkama $p_1, p_2 \notin \mathbb{Z}^2$. Udaljenost točaka p_1 i p_2 jednaka je 1. Osim toga, one leže na pravcu $y = 1$ pa slijedi da postoji točka rešetke koja se nalazi na pravcu $y = 1$ i između točaka p_1 i p_2. No, ta točka rešetke se nalazi u unutrašnjosti paralelograma $f(P)$ što je kontradikcija s primitivnošću paralelograma $f(P)$.
Analognim zaključivanjem dobije se kontradikcija ako pretpostavimo $|v| > 1$, v negativan (promatramo pravac $y = -1$).
Dakle, $v = 1$.
Slijedi da su vrhovi paralelograma $f(P)$ točke $(0,0)$, $(u,1)$, $(1,0)$, $(u+1,1)$. Duljina jedne stranice jednaka je 1, isto kao i duljina visine na tu stranicu pa je površina paralelograma $f(P)$ jednaka 1. Preslikavanje f je unimodularno pa čuva volumen.
Dakle, površina primitvnog paralelograma P je 1.

□

Propozicija 3.2. *Svaka dva primitivna trokuta u rešeci* $\mathbb{Z}^2$ *unimodularno su ekvivalentna.*

Dokaz. Dokazat ćemo da je svaki primitivan trokut unimodularno ekvivalentan trokutu T_{0,e_1,e_2} čiji su vrhovi točke $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i koji je primitivan.
Neka je dan proizvoljan primitivan trokut i neka je T taj trokut translatiran tako da mu se jedan vrh nalazi u ishodištu. Neka su točke $(0,0)$, (s_1,s_2), (t_1,t_2) vrhovi trokuta T.
Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(u) = Mu$, $M \in GL_2(\mathbb{R})$ takvo da je $f((0,0)) = (0,0)$, $f((0,1)) = (s_1,s_2)$, $f((1,0)) = (t_1,t_2)$.
Ako stavimo da je $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tada slijedi $b = s_1$, $d = s_2$ i $a = t_1$, $c = t_2$. Dakle, matrica M je dana s $M = \begin{pmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \end{pmatrix}$ i $detM = t_1 s_2 - s_1 t_2$.
No, vektori stupci matrice M razapinju paralelogram i površina tog paralelograma je jednaka $detM$. Osim toga, taj paralelogram je primitivan pa mu je površina jednaka 1, tj. $detM = 1$. Slijedi da je f unimodularno preslikavanje.
Dakle, za svaki primitivan trokut T vrijedi $T \cong T_{0,e_1,e_2}$ pa zbog toga što je $\cong$ relacija ekvi-

valencije slijedi da su svaka dva primitivna trokuta unimodularno ekvivalentna.

□

Teorem 3.2 (Pick)**.** *Neka je P poligon u rešeci* $\mathbb{Z}^2$*. Ako P u unutrašnjosti ima I točaka iz* $\mathbb{Z}^2$*, te ako P na rubu ima B točaka iz* $\mathbb{Z}^2$*, tada je površina poligona P jednaka*

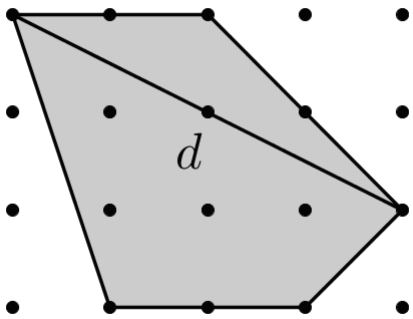
$$area(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po broju $n = I + B$, tj. po broju točaka rešetke koje poligon P sadrži.
Baza indukcije: $n = I + B = 3$
Tada je $B = 3, I = 0$, tj. P je primitivan trokut. No, svaki primitivan trokut unimodularno je ekvivalentan trokutu $T((0,0),(1,0),(0,1))$ čija je površina jednaka $\frac{1}{2}$. Stoga formula vrijedi za $n = 3$.
Pretpostavka indukcije: pretpostavimo da formula vrijedi za sve $B + I < n$ i dokažimo da vrijedi za $B + I = n$.
Promatramo sljedeća dva slučaja:

(i) $B \geq 4$

(ii) $B = 3, I \geq 1$

Neka je $B \geq 4$. Tada P možemo podijeliti na dva poligona.
Neka je d dužina koja spaja dva vrha od P i dijeli ga na poligone Q_1 i Q_2. Primjer takve podjele prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 3.2

Označimo s $area(Q_j)$ površinu poligona Q_j, s B_j broj točaka rešetke na rubu od Q_j te s I_j broj točaka rešetke u unutrašnjosti od Q_j, za $j = 1, 2$.
Za d neka je I_d broj točaka rešetke na dužini te $B_d = 2$.
Za poligone Q_j vrijedi $B_j + I_j < n$ pa po pretpostavci indukcije za $j = 1, 2$ vrijedi

$$area(Q_j) = I_j + \frac{1}{2}B_j - 1$$

Osim toga, vrijedi

$$I = I_1 + I_2 + I_d$$

te

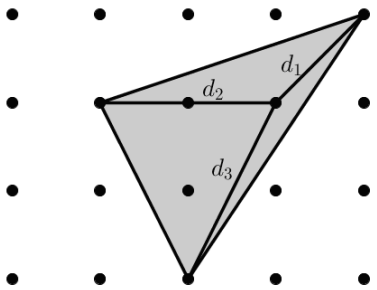
$$B = B_1 + B_2 - 2I_d - 2$$

Dakle,

$$\begin{aligned} area(P) = area(Q_1) + area(Q_2) &= I_1 + I_2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2) - 2 = \\ &= I - I_d + \frac{1}{2}(B + 2I_d + 2) - 2 = I - I_d + \frac{1}{2}B + I_d + 1 - 2 = \\ &= I + \frac{1}{2}B - 1 \end{aligned}$$

pa vrijedi Pickova formula.

Neka je sada $B = 3$, $I \geq 1$. Odaberemo jednu točku rešetke iz unutrašnjosti od P te tu točku spojimo s tri proizvoljna vrha od P. Na taj način pomoću tri dužine koje označimo s d_1, d_2, d_3 poligon P podijelimo na poligone Q_1, Q_2 i Q_3.Primjer takve podjele prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 3.3

Ta tri novodobivena poligona sadrže manje točaka rešetke od P pa zadovoljavaju pretpostavku indukcije.
Označimo s $area(Q_j)$ površinu poligona Q_j, s B_j broj točaka rešetke na rubu od Q_j te s I_j broj točaka rešetke u unutrašnjosti od Q_j, $j = 1, 2, 3$. Za d_j neka je I_{d_j} broj točaka rešetke na dužini te $B_{d_j} = 2$, $j = 1, 2, 3$.
Za politope Q_j vrijedi $B_j + I_j < n$ pa po pretpostavci indukcije za $j = 1, 2, 3$ vrijedi

$$area = (Q_j) = I_j + \frac{1}{2}B_j - 1$$

Osim toga, vrijedi

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_{d_1} + I_{d_2} + I_{d_3} + 1$$

te

$$B = B_1 + B_2 + B_3 - 2I_{d_1} - 2I_{d_2} - 2I_{d_3} - 3 - 3$$

Dakle,

$$\begin{aligned} area(P) &= area(Q_1) + area(Q_2) + area(Q_3) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2 + B_3) - 3 = \\ &= I - I_{d_1} - I_{d_2} - I_{d_3} - 1 + \frac{1}{2}(B + 2(I_{d_1} + I_{d_2} + I_{d_3}) + 6) - 3 = \\ &= I + \frac{1}{2}B - 1 \end{aligned}$$

□

Neka je P primitivan politop u $\mathbb{Z}^2$. Tada P može imati najviše 4 vrha, tj. P je ili trokut ili paralelogram. Iz Pickovog teorema slijedi da je površina primitivnog trokuta jednaka $\frac{1}{2}$ ($I = 0$, $B = 3$), a površina primitivnog paralelograma je jednaka 1 ($I = 0$,$B = 4$).

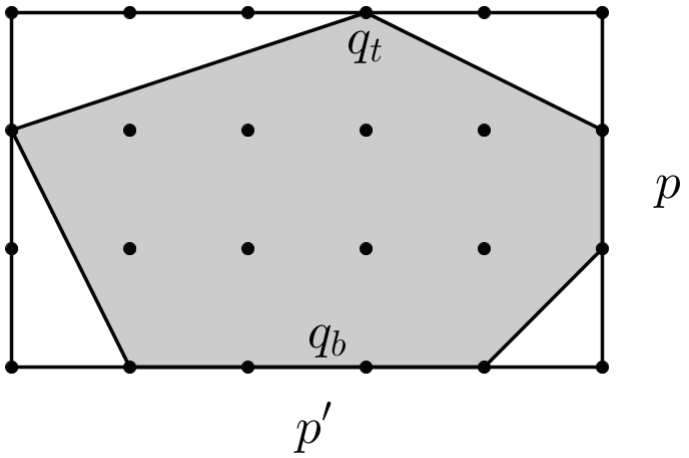
Teorem 3.3 (Scott)**.** *Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^2$ poligon u rešeci koji sadrži $I \geq 1$ točaka rešetke u unutrašnjosti, te neka je area(P) površina tog poligona. Tada vrijedi jedna od sljedeće dvije tvrdnje*

(1) $P = T((0,0),(3,0),(0,3))$ pri čemu je $I = 1$ te je $area(P) = \frac{9}{2}$

(2) $area(P) \leq 2(I + 1)$

Dokaz. Ako je $I = 1$ i $P = T((0,0),(3,0),(0,3))$ tada je $B = 9$ i $area(P) = \frac{9}{2}$.
U suprotnom, treba pokazati $area(P) \leq 2(I + 1)$ za $I \geq 1$.
Iz Pickove formule imamo $I = area(P) - \frac{1}{2}B + 1$ pa je $area(P) \leq 2(I + 1)$ ekvivalentno s

$B \leq area(P) + 4$.
Poligon P translatiramo tako da bude sadržan u pravokutniku s vrhovima $(0,0)$, $(p',0)$, $(0,p)$, (p',p) pri čemu su $p, p' \in \mathbb{N}$ minimalni.
Zbog $I \geq 1$ bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $2 \leq p \leq p'$. Primjer takvog poligona sadržanog u pravokutniku prikazan je na sljedećoj slici.



Slika 3.4

Označimo s q_b duljinu presjeka poligona P i donje stranice pravokutnika, te s q_t duljinu presjeka poligona P s gornjom stranicom pravokutnika. Tada vrijedi

$$B \leq q_b + q_t + 2p \tag{3.1}$$

$$area(P) \geq \frac{p(q_b + q_t)}{2} \tag{3.2}$$

Ako u Pickovoj formuli $area(P) = I + \frac{1}{2}B - 1$ uzmemo u obzir $I \geq 1$ dobivamo $area(P) \geq \frac{1}{2}B$.
Promatramo sljedeća četiri slučaja:

(i) $p = q_b + q_t = 3$
Tada iz (3.1) slijedi $B \leq 9$.
Ako je $B \leq 8$ tada je $\frac{1}{2}B \leq 4$ i znamo da vrijedi $\frac{1}{2}B \leq area(P)$ pa zbrajanjem te dvije nejednakosti dobivamo $B \leq area(P) + 4$.
Pretpostavimo sada da je $B = 9$. Tada je $area(P) \geq \frac{9}{2}$. Ako je $area(P) \geq 5$ onda odmah slijedi $B \leq area(P) + 4$. Ako je $area(P) = \frac{9}{2}$ onda slijedi da je $I = 1$. Do na unimodularno preslikavanje, jedini poligon koji zadovoljava $B = 9$, $I = 1$, $p = q_b + q_t = 3$ je $T((0,0),(3,0),(0,3))$.

(ii) $p = 2$ ili $q_b + q_t \geq 4$
Iz (3.1) i (3.2) slijedi

$$\begin{aligned} 2B - 2area(P) &\leq 2q_b + 2q_t + 4p - pq_b - pq_t = \\ &= 2(q_b + q_t - 4) + 8 - p(q_b + q_t - 4) = \\ &= (2 - p)(q_b + q_t - 4) + 8 \end{aligned}$$

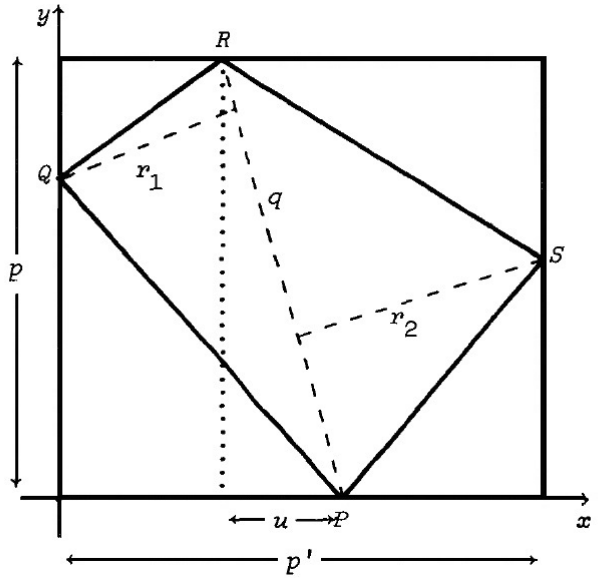
Ako je $p = 2$ onda je $2B - 2area(P) \leq 8$ pa vrijedi $B \leq area(P) + 4$.
Ako je $q_b + q_t \geq 4$ onda je $(2 - p)(q_b + q_t - 4) \leq 0$ zbog $p \geq 2$ pa opet vrijedi $2B - 2area(P) \leq 8$, tj. $B \leq area(P) + 4$.

(iii) $p = 3$ i $q_b + q_t \leq 2$
Iz (3.1) slijedi $B \leq 8$ pa tvrdnja slijedi kao i u (i).

(iv) $p \geq 4$ i $q_b + q_t \leq 2$
Izaberemo točke $P(x_b, 0)$ i $R(x_t, p)$ koje se nalazi u presjeku poligona i donje, odnosno gornje stranice pravokutnika i to tako da je $u = |x_b - x_t|$ najmanji mogući.
Promatramo preslikavanje
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x, y)^T = (x + ky, y)$, gdje je $k \in \mathbb{Z}$.
f je unimodularno preslikavanje.
Slijedi da je površina poligona $f(P)$ jednaka $area(P)$, te je broj točaka rešetke koje se nalaze na rubu poligona $f(P)$ jednak B.
Osim toga, f ne mijenja drugu koordinatu vektora na kojeg djeluje pa sve točke na pravcu $y = p$ oblika (x, p) translatira u $(x + kp, p)$, a one na x-osi ostanu iste.
Stoga $q_b + q_t$ nakon djelovanja preslikavanja f ostane nepromijenjen.
Može se desiti da p' postanje manji od p, ali u tom slučaju im zamijenimo uloge.
Dakle, možemo pretpostaviti da vrijedi

$$u \leq \frac{p - q_b - q_t}{2} \tag{3.3}$$

(ako ta nejednakost ne vrijedi za poligon P onda postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da vrijedi za $f(P)$).
Sada izaberemo točke Q i S iz presjeku poligona i lijeve, odnosno desne stranice pravokutnika. Označimo s r_1 visinu iz vrha Q na stranicu $\overline{PR}$, s r_2 visinu iz vrha S na stranicu $\overline{PR}$, te neka je $q = |PR|$.



Slika 3.5

Četverokut $PQRS$ je sadržan u poligonu P i vrijedi

$$area(PQRS) = \frac{1}{2}q(r_1 + r_2)$$

Redom koristeći da vrijedi $q \geq p$; $u = 0 \Rightarrow r_1 + r_2 = p' = p' - u$; $p' \geq p$; te (3.3) dobivamo

$$area(P) \geq area(PQRS) = \frac{1}{2}q(r_1 + r_2) \geq \frac{1}{2}p(r_1 + r_2) \geq \frac{1}{2}p(p' - u) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}p(p - u) \geq \frac{1}{2}p(p - \frac{p - q_b - q_t}{2}) = \frac{1}{4}p(p + q_b + q_t)$$

Vrijedi $4area(P) \geq p(p + q_b + q_t)$ pa iz toga i iz (3.1) slijedi

$$4(b - area(P)) \leq 4(q_b + q_t + p) - p(p + q_b + q_t) =$$
$$= p(8 - p) + (q_b + q_t)(4 - p) \leq p(8 - p) \leq 16$$

jer je $(q_b + q_t)(4 - p) \leq 0$ zbog pretpostavke, a $p(8 - p) \leq 16$ jer je $p(8 - p)$ konkavna parabola s tjemenom u točki $(4, 16)$.
Dakle, $b \leq area(P) + 4$ što je i trebalo dokazati.

□

Neka je $k \in \mathbb{N}$, neka su P i $kP = \{kx : x \in P\}$ poligoni u rešeci $\mathbb{Z}^2$, te označimo s

$$L(P) = |P \cap \mathbb{Z}^2|,\ L(kP) = |kP \cap \mathbb{Z}^2|$$

Iz Pickovog teorema dobivamo

$$I(P) = area(P) - \frac{1}{2}B(P) + 1,\ I(kP) = area(kP) - \frac{1}{2}B(kP) + 1$$

pa slijedi

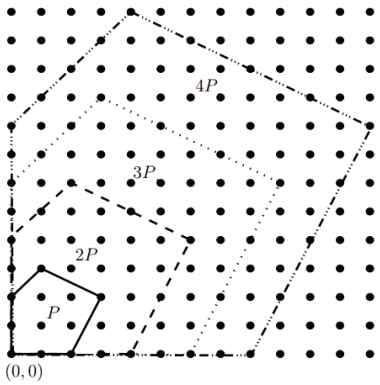
$$L(P) = area(P) + \frac{1}{2}B(P) + 1,\ L(kP) = area(kP) + \frac{1}{2}B(kP) + 1$$

Pretpostavimo da znamo vrijednosti $I(P)$ i $B(P)$ te želimo izračunati $L(P)$ i $L(kP)$.
Očito je $L(P) = I(P) + B(P)$, ali da bismo izračunali $L(kP)$ moramo odrediti $area(kP)$ i $B(kP)$, a to može biti poprilično komplicirano.
No, postoji puno jednostavnije rješenje opisanog problema, a ono je dano sljedećim teoremom. (J. Garbett, Lattice Point Geometry: Pick's Theorem and Minkowski's Theorem, Kenyon College (2010), 28)

Teorem 3.4 (Ehrhartov teorem za dimenziju dva)**.** *Neka je P poligon u rešeci $\mathbb{Z}^2$, $k \in \mathbb{N}$ i $kP = \{kx : x \in P\}$. Ako s $L(kP)$ označimo broj točaka rešetke sadržane u poligonu kP tada je*

$$L(kP) = area(P) \cdot k^2 + \frac{1}{2}B(P) \cdot k + 1$$

Primjer 3.1. *Neka je P peterokut prikazan na slici i neka je $k = 2, 3, 4$. Ovim primjerom ćemo prikazati način računanja vrijednosti $L(kP)$ tako da odredimo $area(kP)$ i $B(kP)$, te pomoću teorema 3.4.*



Slika 3.6

Sa slike lako vidimo da je $I(P) = 4$ *i* $B(P) = 7$.
Iz Pickovog teorema slijedi $area(P) = 4 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{13}{2}$.

(1) Računamo $L(kP)$ *određivanjem* $area(kP)$ *i* $B(kP)$. *No, da bismo pomoću Pickovog teorema izračunali površinu poligona* kP *trebamo odrediti* $I(kP)$, *tako da zapravo* $L(kP) = I(kP) + B(kP)$ *dobijemo prebrojavanjem točaka rešetke koje poligon* kP *sadrži. Dobiveni rezultati su*

$$L(2P) = 34,\ L(3P) = 70,\ L(4P) = 119$$

(2) Računamo $L(kP)$ *pomoću teorema 3.4. Slijedi* $L(kP) = \frac{13}{2}k^2 + \frac{7}{2}k + 1$. *Uvrštavanjem vrijednosti broja k dobivamo*

$$L(2P) = \frac{13}{2} \cdot 4 + \frac{7}{2} \cdot 2 + 1 = 34$$

$$L(3P) = \frac{13}{2} \cdot 9 + \frac{7}{2} \cdot 3 + 1 = 70$$

$$L(4P) = \frac{13}{2} \cdot 16 + \frac{7}{2} \cdot 4 + 1 = 119$$

Iako je ovaj primjer poprilično jednostavan, ipak ilustrira eleganciju računanja vrijednosti $L(kP)$ *dobivenu teoremom 3.4.*

Poglavlje 4

Primitivni tetraedri u rešeci $\mathbb{Z}^3$

U trodimenzionalnoj rešeci promatramo primitivne tetraedre. Na početku navodimo nužan i dovoljan uvjet da bi tetraedar bio primitivan. Svaki tetraedar s vrhovima $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(1,1,n)$ je primitivan za svako $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Stoga ne postoji gornja granica za volumen primitivnog tetraedra pa generalizacija Pickovog teorema nije moguća. No, pomoću unimodularnog preslikavanja, za dani volumen možemo odrediti broj klasa ekvivalencije primitvnih tetredara.

U daljnjem tekstu ćemo s $T_{a,b,n}$ označavati tetraedar čiji su vrhovi $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(a,b,n) \in \mathbb{Z}^3$, $n \neq 0$.

Teorem 4.1. *Tetraedar T je primitivan ako i samo ako vrijedi $T \cong T_{0,0,1}$ ili $T \cong T_{1,b,n}$ pri čemu je $1 \leq b < n$, $(b,n) = 1$.*

S obzirom da unimodularno preslikavanje čuva volumen slijedi da je broj klasa ekvivalencija primitivnih tetraedara beskonačan.

Teorem 4.2. *Neka su b, b^{-1}, n, $x \in \mathbb{Z}$ takvi da je $1 \leq x, b, b^{-1} < n$, $(b,n) = (x,n) = 1$ i $bb^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Primitivni tetraedri $T_{1,b,n}$ i $T_{1,x,n}$ su unimodularno ekvivalentni ako i samo ako je $x \in \{b, n-b, b^{-1}, n-b^{-1}\}$.*

Napomena 4.1. *b^{-1} je cijeli broj i ne označava multiplikativni inverz broja b u polju $\mathbb{Q}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $T_{1,b,n}$ i $T_{1,x,n}$ unimodularno ekvivalentni. Tada postoji unimodularno preslikavanje koje preslikava $T_{1,b,n}$ u $T_{1,x,n}$, te to preslikavanje možemo promatrati

kao preslikavanje između vrhova ta dva tetraedra. Slijedi da postoji $4! = 24$ različitih unimodularnih preslikavanja koja preslikavaju tetraedar $T_{1,b,n}$ u $T_{1,x,n}$.

(1) Pretpostavimo da vrijedi $(0,0,0) \longmapsto (1,0,0)$, $(1,0,0) \longmapsto (0,0,0)$, $(0,1,0) \longmapsto (0,1,0)$ i $(1,b,n) \longmapsto (1,x,n)$. Tada slijedi da je djelovanje unimodularnog preslikavanja na točku (v_1, v_2, v_3) dano s

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{1+b}{n} \\ 0 & 1 & \frac{x-b}{n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slijedi $b \equiv -1 \pmod{n}$ i $x - b \equiv 0 \pmod{n}$ pa zbog $1 \leq x < n$ dobivamo $x = b$.

(2) Pretpostavimo da vrijedi $(0,0,0) \longmapsto (0,1,0)$, $(1,0,0) \longmapsto (0,0,0)$, $(0,1,0) \longmapsto (1,x,n)$ i $(1,b,n) \longmapsto (1,0,0)$. Tada slijedi da je djelovanje unimodularnog preslikavanja na točku (v_1, v_2, v_3) dano s

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1-b}{n} \\ -1 & x-1 & \frac{b(1-x)}{n} \\ 0 & n & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slijedi $b \equiv 1 \pmod{n}$ i $b(x-1) \equiv 0 \pmod{n}$ pa zbog $1 \leq x < n$ dobivamo $x = b^{-1}$.

(3) Pretpostavimo da vrijedi $(0,0,0) \longmapsto (1,0,0)$, $(1,0,0) \longmapsto (1,x,n)$, $(0,1,0) \longmapsto (0,1,0)$ i $(1,b,n) \longmapsto (0,0,0)$. Tada slijedi da je djelovanje unimodularnog preslikavanja na točku (v_1, v_2, v_3) dano s

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{b-1}{n} \\ x & 1 & \frac{-x-b}{n} \\ n & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slijedi $b \equiv 1 \pmod{n}$ i $x + b \equiv 0 \pmod{n}$ pa zbog $1 \leq x < n$ dobivamo $x = n - b$.

(4) Pretpostavimo da vrijedi $(0,0,0) \longmapsto (1,0,0)$, $(1,0,0) \longmapsto (0,1,0)$, $(0,1,0) \longmapsto (1,x,n)$ i $(1,b,n) \longmapsto (0,0,0)$. Tada slijedi da je djelovanje unimodularnog preslikavanja na točku (v_1, v_2, v_3) dano s

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & x & \frac{-1-bx}{n} \\ 0 & n & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Slijedi $bx \equiv -1 \pmod{n}$ pa zbog $1 \leq x < n$ dobivamo $x = n - b^{-1}$.

Raspisivanjem preostalih preslikavanja dolazimo do zaključka da mora vrijediti $x \in \{b, n-b, b^{-1}, n-b^{-1}\}$.
Obratno, pretpostavimo da vrijedi $x \in \{b, n-b, b^{-1}, n-b^{-1}\}$.
Da bi dokazali da su $T_{1,b,n}$ i $T_{1,x,n}$ unimodularno ekvivalentni treba dokazati da postoji unimodularno preslikavanje koje $T_{1,b,n}$ preslikava u $T_{1,x,n}$.
Promatramo svaki od četiri moguća slučaja.

(1) Neka je $x = b$. Tada je identiteta traženo unimodularno preslikavanje te vrijedi $T_{1,b,n} \cong T_{1,b,n}$.

(2) Neka je $x = n - b$.
Tada je s
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
definirano traženo unimodularno preslikavanje i ono redom vrhove $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,b,n)$ preslikava u $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,x,n)$.

(3) Neka je $x = b^{-1}$.
Tada je s
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & \frac{1-bb^{-1}}{n} \\ 0 & n & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
definirano traženo unimodularno preslikavanje i ono redom vrhove $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,b,n)$ preslikava u $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,x,n)$, $(0,1,0)$.

(4) Neka je $x = n - b^{-1}$.
Tada je s
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & n-b^{-1} & \frac{b(b^{-1}-n)+1}{n} \\ 0 & n & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
definirano traženo unimodularno preslikavanje i ono redom vrhove $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,b,n)$ preslikava u $(1,0,0)$, $(0,0,0)$, $(1,x,n)$, $(0,1,0)$.

□

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada iz teorema 4.1 slijedi da je tetraedar $T_{1,b,n}$ primitivan ako i samo ako je $1 \leq b < n$ te $(b,n) = 1$. Volumen tog tetraedra jednak je $\frac{n}{6}$.
Primjenom teorema 4.2 za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ možemo odrediti broj klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara čiji volumen je upravo $\frac{n}{6}$.

Primjer 4.1. *Za različite vrijednost broja $n \in \mathbb{N}$, koristeći teorem 4.2, odredimo broj klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara čiji volumen je jednak $\frac{n}{6}$.*

(1) Neka je $n = 5$.
Slijedi da je $b \in \{1, 2, 3, 4\}$ pa promatramo tetraedre $T_{1,1,5}$, $T_{1,2,5}$, $T_{1,3,5}$, $T_{1,4,5}$.

- *Ako je $b = 1$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 5) te $1 \leq b^{-1} < 5$ slijedi $b^{-1} = 1$.*
  Dakle, $x \in \{1, 4\}$.
  Dobili smo $T_{1,1,5} \cong T_{1,4,5}$
- *Ako je $b = 2$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 5) te $1 \leq b^{-1} < 5$ slijedi $b^{-1} = 3$.*
  Dakle, $x \in \{2, 3\}$.
  Dobili smo $T_{1,2,5} \cong T_{1,3,5}$

Dakle, postoje dvije klase ekvivalencije primitivnih tetraedara volumena $\frac{5}{6}$.

(2) Neka je $n = 6$.
Slijedi da je $b \in \{1, 5\}$ pa promatramo tetraedre $T_{1,1,6}$, $T_{1,5,6}$. Ako je $b = 1$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 6) te $1 \leq b^{-1} < 6$ slijedi $b^{-1} = 1$.
Dakle, $x \in \{1, 5\}$.
Dobili smo $T_{1,1,6} \cong T_{1,5,6}$. Dakle, postoji samo jedna klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara čiji volumen je jednak 1. Drugim riječima, svi primitivni tetraedri volumena 1 su međusobno unimodularno ekvivalentni.

(3) Neka je $n = 13$.
Slijedi da je $b \in \{1, 2, ..., 11, 12\}$ pa promatramo tetraedre $T_{1,1,13}$, $T_{1,2,13}$, ... , $T_{1,12,13}$.

- *Ako je $b = 1$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 13) te $1 \leq b^{-1} < 13$ slijedi $b^{-1} = 1$.*
  Dakle, $x \in \{1, 12\}$.
  Dobili smo $T_{1,1,13} \cong T_{1,12,13}$
- *Ako je $b = 2$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 13) te $1 \leq b^{-1} < 13$ slijedi $b^{-1} = 7$.*
  Dakle, $x \in \{2, 6, 7, 11\}$.
  Dobili smo $T_{1,2,13} \cong T_{1,6,13} \cong T_{1,7,13} \cong T_{1,11,13}$
- *Ako je $b = 3$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 13) te $1 \leq b^{-1} < 13$ slijedi $b^{-1} = 9$.*
  Dakle, $x \in \{3, 4, 9, 10\}$.
  Dobili smo $T_{1,3,13} \cong T_{1,4,13} \cong T_{1,9,13} \cong T_{1,10,13}$
- *Ako je $b = 4$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 13) te $1 \leq b^{-1} < 13$ slijedi $b^{-1} = 10$.*
  Dakle, $x \in \{3, 4, 9, 10\}$.
  Dobili smo $T_{1,3,13} \cong T_{1,4,13} \cong T_{1,9,13} \cong T_{1,10,13}$
- *Ako je $b = 5$ onda iz uvjeta $bb^{-1} \equiv 1$ (mod 13) te $1 \leq b^{-1} < 13$ slijedi $b^{-1} = 8$.*
  Dakle, $x \in \{5, 8\}$.
  Dobili smo $T_{1,5,13} \cong T_{1,8,13}$

Dakle, postoje četiri klase ekvivalencije primitivnih tetraedara volumena $\frac{13}{6}$.

(4) Neka je $n = 30$.
Slijedi da je $b \in \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ *pa promatramo tetraedre* $T_{1,1,30}$, $T_{1,7,30}$, $T_{1,11,30}$, $T_{1,13,30}$, $T_{1,17,30}$, $T_{1,19,30}$, $T_{1,23,30}$, $T_{1,29,30}$.

- *Ako je* $b = 1$ *onda iz uvjeta* $bb^{-1} \equiv 1$ *(mod* 30*) te* $1 \leq b^{-1} < 30$ *slijedi* $b^{-1} = 1$.
  Dakle, $x \in \{1, 29\}$.
  Dobili smo $T_{1,1,30} \cong T_{1,29,30}$
- *Ako je* $b = 7$ *onda iz uvjeta* $bb^{-1} \equiv 1$ *(mod* 30*) te* $1 \leq b^{-1} < 30$ *slijedi* $b^{-1} = 13$.
  Dakle, $x \in \{7, 13, 17, 23\}$.
  Dobili smo $T_{1,7,30} \cong T_{1,13,30} \cong T_{1,17,30} \cong T_{1,23,30}$
- *Ako je* $b = 11$ *onda iz uvjeta* $bb^{-1} \equiv 1$ *(mod* 30*) te* $1 \leq b^{-1} < 30$ *slijedi* $b^{-1} = 11$.
  Dakle, $x \in \{11, 19\}$.
  Dobili smo $T_{1,11,30} \cong T_{1,19,30}$

Dakle, postoje tri klase ekvivalencije primitivnih tetraedara volumena 5.

No, što je n veći to je teže izračunati broj klasa ekvivalencije, tako da ovaj način baš i nije operativan.

Definicija 4.1. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. *Eulerova funkcija* $\phi(n)$ *je broj pozitivnih cijelih brojeva koji su relativno prosti s n.*

Napomena 4.2. *Ako je* $n \in \mathbb{N}$ *prost, onda je* $\phi(n) = n - 1$.

Teorem 4.3. *Eulerova funkcija je multiplikativna, tj.* $\phi(1) = 1$ *te za sve* $a, b \in \mathbb{N}$ *takve da je* $(a, b) = 1$ *vrijedi* $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.
(vidi [8], 18)

Definicija 4.2. *Neka grupa G djeluje na skup X i neka je* $x \in X$. *Stabilizator elementa x je skup* $G_x = \{g \in G : gx = x\} \subseteq G$. *Orbita elementa x je skup* $x^G = \{gx : g \in G\} \subseteq X$.

Korolar 4.1. *Neka grupa G djeluje na skup X i neka je* $x \in X$. *Tada je* $|x^G| \cdot |G_x| = |G|$.

Lema 4.1 (Cauchy-Frobenius-Burnside)**.** *Neka grupa G djeluje na skup X. Označimo s $f(g) = |\{x \in X : gx = x\}|$ broj točaka iz X fiksiranih elementom $g \in G$. Broj orbita pri djelovanju G na X jednak je prosječnom broju točaka koje fiksiraju elementi iz G,*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)$$

Dokaz. Na dva načina prebrojimo parove $\{(g, x) \in G \times X : gx = x\}$.
Za fiksni $g \in G$ broj parova je $f(g)$ pa je ukupan broj parova $\sum_{g\in G} f(g)$.
Za fiksni $x \in X$ broj parova jednak je redu stabilizatora $|G_x|$ koji je prema korolaru 4.1 jednak $\frac{|G|}{|x^G|}$.
Ukupan broj parova je stoga $|G| \sum_{x\in X} \frac{1}{|x^G|}$.
Rezultat slijedi izjednačavanjem, ako primijetimo da suma $\sum_{x\in X} \frac{1}{|x^G|}$ daje broj orbita pri djelovanju G na X.
Za svaki x sumiramo recipročnu vrijednost veličine orbite kojoj pripada, pa u sumi dobivamo po jednu jedinicu za svaku orbitu.

□

Definicija 4.3. *S $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, 2 + n\mathbb{Z}, ..., n - 1 + n\mathbb{Z}\}$ označavamo prsten ostataka modulo n.*

Definicija 4.4. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $f(x) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$. Tada s $N(f(x) \equiv 0$ (mod n)) označavamo broj rješenja kongruencije $f(x) \equiv 0$ (mod n) u $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

U daljnjem radu će nam značajan biti broj rješenja kongruencija $f(x) \equiv 0 \pmod{n}$ za $f(x) = x^2 - 1$ i $f(x) = x^2 + 1$. Sljedeći teorem iz teorije brojeva daje nam vrijednosti $N(x^2 \pm 1 \equiv 0 \pmod{n})$. Osim toga, za primjenu teorema potrebno je samo rastaviti broj n na proste faktore što ga čini lako primjenjivim te nam je njegov značaj samim time još i veći. (vidi [10], poglavlja 2 i 3)

Teorem 4.4. *Neka je $n = 2^k m$, pri čemu je $n \geq 2$ i $(m, 2) = 1$. Ako je $m > 1$ onda s $p_1, ..., p_t$ označimo proste faktore od m, a u suprotnom stavimo $t = 0$. Tada je*

$$N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ n)) = \begin{cases} 2^t & , za\ k = 0, 1 \\ 2^{t+1} & , za\ k = 2 \\ 2^{t+2} & , za\ k \geq 3 \end{cases}$$

$$N(x^2+1 \equiv 0\,(mod\ n)) = \begin{cases} 2^t & , \textit{ako je } k \leq 1 \textit{ i } p_i \equiv 1 \pmod 4 \textit{ za svako } i \in \{1,...,t\} \\ 0 & , \textit{ako je } k \geq 2 \textit{ ili postoji } i \in \{1,...,t\} \textit{ takav da je } p_i \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Teorem 4.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ te označimo s $T(n)$ broj različitih klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara volumena $\frac{n}{6}$. Neka je $f(x) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ i neka je $N(f(x) \equiv 0$ (mod n)) broj rješenja kongruncije $f(x) \equiv 0$ (mod n) u $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Tada je*

$$T(n) = \frac{\phi(n) + N(x^2 - 1 \equiv 0\,(mod\ n)) + N(x^2 + 1 \equiv 0\,(mod\ n))}{4} \tag{4.1}$$

Ako je n prost, onda je

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n+3}{4} & , \textit{za } n \equiv 1 \pmod 4 \\ \frac{n+1}{4} & , \textit{za } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $U = \{x : 1 \leq x < n, (x,n) = 1\}$ i neka je $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ skup bijekcija na U, gdje su $g_1(x) = x$, $g_2(x) = n - x$, $g_3(x) = x^{-1}$ i $g_4(x) = n - x^{-1}$, pri čemu je x^{-1} takav da je $xx^{-1} \equiv 1$ (*mod n*), za svaki $x \in U$.
Iz definicije funkcije ϕ slijedi $|U| = \phi(n)$.
Po lemi 4.1 slijedi da je $T(n)$ jednak broju orbita od U pod djelovanjem grupe G.
Neka je $U_i = \{x \in U : g_i(x) = x\}$, za $i = 1, 2, 3, 4$.

- g_1 je identiteta pa su sve točke iz U fiksne, tj. vrijedi $|U_1| = |U| = \phi(n)$.
- Iz $g_2(x) = x$ slijedi $n - x = x$ pa je $x = \frac{n}{2}$. Ako je n neparan onda $x \notin \mathbb{N}$, a ako je n paran onda je $(x, n) \neq 1$. Dakle, funkcija g_2 nema fiksnih točaka pa je $|U_2| = 0$.
- Ako je $g_3(x) = x$ onda je $x^{-1} = x$ pa slijedi $x^2 = xx^{-1} \equiv 1$ (*mod n*). Stoga je $|U_3| = N(x^2 - 1 \equiv 0\,(mod\ n))$.
- Množenjem $g_4(x) = x$ s x dobivamo $x^2 = nx - xx^{-1} \equiv 0 - 1$ (*mod n*) pa je $x^2 + 1 \equiv 0$ (*mod n*). Dakle, $|U_4| = N(x^2 + 1 \equiv 0\,(mod\ n))$.

Sada, primjenom leme 4.1 dobivamo $T(n) = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g_i \in G} |\ \{x \in U : g_i(x) = x\}\ |$, tj.

$$T(n) = \frac{\phi(n) + N(x^2 - 1 \equiv 0\,(mod\ n)) + N(x^2 + 1 \equiv 0\,(mod\ n))}{4}$$

Posebno, ako je n prost tada je $\phi(n) = n-1$ te iz teorema 4.3 slijedi $N(x^2-1 \equiv 0\ (mod\ n)) = 2$. Osim toga, također iz teorema 4.3 slijedi $N(x^2+1 \equiv 0\ (mod\ n)) = 2$ ako je $n \equiv 1\ (mod\ 4)$ tj. $N(x^2+1 \equiv 0\ (mod\ n)) = 0$ ako je $n \equiv 3\ (mod\ 4)$. Dakle, vrijedi i druga tvrdnja.

□

Primjer 4.2. *Koristeći teoreme 4.3 i 4.4 izračunajmo broj klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara čiji volumen je $\frac{n}{6}$. Za $n \in \mathbb{N}$ uzet ćemo iste brojeve kao i u primjeru 4.1.*

(1) Neka je $n = 5$. Tada je $\phi(5) = 4$. Iz teorema 4.3, za $k = 0$ i $t = 1$, slijedi $N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 5)) = 2$ i $N(x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 5)) = 2$. Iz teorema 4.4 slijedi $T(n) = 2$.

(2) Neka je $n = 6$. Tada je $\phi(6) = 2$. Iz teorema 4.3, za $k = 1$ i $t = 1$, slijedi $N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 6)) = 2$ i $N(x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 6)) = 0$. Iz teorema 4.4 slijedi $T(n) = 1$.

(3) Neka je $n = 13$. Tada je $\phi(13) = 12$. Iz teorema 4.3, za $k = 0$ i $t = 1$, slijedi $N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 13)) = 2$ i $N(x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 13)) = 2$. Iz teorema 4.4 slijedi $T(n) = 4$.

(4) Neka je $n = 30$. Tada je $\phi(30) = 8$. Iz teorema 4.3, za $k = 1$ i $t = 2$, slijedi $N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 30)) = 4$ i $N(x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 30)) = 0$. Iz teorema 4.4 slijedi $T(n) = 3$.

(5) Neka je $n = 3640$. Tada je $\phi(3640) = \phi(8)\phi(5)\phi(7)\phi(13) = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1152$. Iz teorema 4.3, za $k = 3$ i $t = 3$, slijedi $N(x^2 - 1 \equiv 0\ (mod\ 3640)) = 2^5 = 32$ i $N(x^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 3640)) = 0$. Iz teorema 4.4 slijedi $T(n) = \frac{1152+32+0}{4} = 296$.

Kao što vidimo, puno je jednostavnije izračunati broj klasa primitivnih tetraedara koristeći teoreme 4.3 i 4.4 nego koristeći teorem 4.2. No, ovako smo izračunali samo broj klasa ekvivalencije, a ne i koji tetraedar se nalazi u kojoj od klasa. Osim što je ovaj način jednostavniji za računanje, probleme nam ne stvara niti veća vrijednost broja n.

Iako ne možemo generalizirati Pickov teorem na tetraedre u $\mathbb{Z}^3$ postoji način kako možemo povezati volumen tetraedra i broj točaka rešetke.

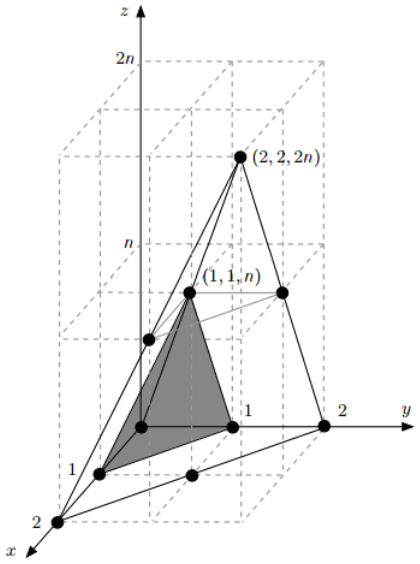
Neka je T primitivan tetraedar u trodimenzionalnoj cjelobrojnoj rešeci, neka je $k \in \mathbb{N}$, $kT = \{kx : x \in T\}$ te označimo s $L(kT) = |kT \cap \mathbb{Z}^3|$. Tada postoje $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$L(kT) = a_3k^3 + a_2k^2 + a_1k + 1 \tag{4.2}$$

pri čemu je $a_3 = vol(T)$.

Postoji generalizacija formule (4.2) koja se odnosi na politope u d-dimenzionalnoj rešeci, no mi se u ovome radu nećemo baviti tom tzv. Ehrhartovom teorijom. (J. Kepler, Counting Lattice Points in Polytopes: The Ehrhart Theory)

Primjer 4.3. *Neka je T primitivan tetraedar u trodimenzionalnoj cjelobrojnoj rešeci čiji su vrhovi točke* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,n)$. *U ovome primjeru odredit ćemo koeficijente $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tako da za tetraedar T vrijedi formula (4.2).*
Za $k = 1$ i $k = 2$, pomoću sljedeće slike odredit ćemo $L(T)$ i $L(2T)$.



Slika 4.1

Vrijedi

$$L(T) = 4 = a_3 + a_2 + a_1 + 1$$

$$L(2T) = 9 + n = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1$$

No, znamo da je $a_3 = vol(T) = \frac{n}{6}$ pa slijedi

$$4 = \frac{n}{6} + a_2 + a_1 + 1$$

$$9 + n = \frac{8n}{6} + 4a_2 + 2a_1 + 1$$

Rješavajući gornji sustav dobivamo $a_2 = 1$ *i* $a_1 = 2 - \frac{n}{6}$.

Dakle, za tetraedar T *vrijedi*

$$L(kT) = \frac{n}{6}k^3 + k^2 + \left(2 - \frac{n}{6}\right)k + 1$$

Bibliografija

1. M. R. Khan, A Counting Formula for Primitive Tetrahedra in $\mathbb{Z}^3$, Amer. Math. Monthly 106 (6) (1999), 515-533.
2. B. Reznick, Lattice Point Simplices, Discrete Math. 60 (1986), 219-242.
3. C. Haase, B. Nill, A. Paffenholz, Lecture Notes on Lattice Polytopes, TU Darmstadt (2012), 20-26.
4. J. Garbett, Lattice Point Geometry: Pick's Theorem and Minkowski's Theorem, Kenyon College (2010), 12-14
5. P.R. Scott, On convex lattice polygons, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 15 (1976), 395-399.
6. J. Šiftar, V. Krčadinac, Konačne geometrije, skripta, PMF-Matematički odsjek, 2013.
7. B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Tehnička knjiga, 1992
8. A. Dujella, Uvod u teoriju brojeva, skripta, PMF-Matematički odsjek
9. M. Polonijo i ostali, Euklidski prostori, skripta, PMF-Matematički odsjek
10. H. Loo Keng, Introduction to Number Theory, translated from the Chinese by Peter Shiu, Springer-Verlag, 1982

Sažetak

U ovome radu promatramo primitivne tetraedre u trodimenzionalnoj cjelobrojnoj rešeci. Tetraedar je primitivan ako su mu vrhovi točke rešetke, ali se sadrži niti jednu drugu točku rešetke, niti na rubu niti u unutrašnjosti. Koristimo unimodularno preslikavanje kao glavni alat pomoću kojeg ćemo dokazati većinu rezultata, a naročito je bitno za klasifikaciju primitivnih tetraedara, koja se temelji na unimodularnoj ekvivalenciji.
Zatim, radi potpunosti i usporedbe s trodimenzionalnim slučajem, razmatramo poligone u rešeci $\mathbb{Z}^2$. Ovdje ključnu ulogu za karakterizaciju primitivnih poligona ima glasoviti Pickov teorem koji daje vezu između površine poligona i broja točaka rešetke koje taj poligon sadrži na rubu, odnosno u unutrašnjosti.
U trodimenzionalnoj rešeci najprije dajemo karakterizaciju primitivnih tetraedara u terminima unimodularne ekvivalencije. S obzirom da volumen primitivnog tetraedra nije ograničen, ne možemo generalizirati Pickov teorem u tri dimenzije, ali možemo naći formulu za prebrojavanje klasa ekvivalencije primitivnih tetraedara danog volumena.

Summary

In this paper we study primitive tetrahedra in a three dimensional integer lattice. A tetrahedron is primitive if its vertices are lattice points but it does not contain any other lattice points in its interior or on its boundary. We use unimodular maps as a main mathematical tool to prove most of the results, and especially for classification of primitive tetrahedra, based on unimodular equivalence.
Further, we investigate primitive polygons in $\mathbb{Z}^2$ so that a comparison could be made with the three dimensional case. A crucial part in this chapter belongs to the famous Pick's theorem, which gives the relationship between the area of a lattice polygon and the number of lattice points on its boundary and in its interior.
In the three dimensional integer lattice, first of all we state a characterization of primitive tetrahedra in terms of unimodular equivalence. Considering that there is no boundary on the volume of a primitive tetrahedron, a generalization of Pick's theorem to dimension three is impossible, but there is a simple formula that counts the number of equivalence classes of primitive tetrahedra of a given volume.

Životopis

Rođena sam 27. travnja 1989. godine u Zagrebu. Od 1996. do 1998. godine pohađala sam OŠ Ivana Cankara, a od 1998. do 2004. godine OŠ Otona Ivekovića. Nakon završene osnovne škole upisala sam V. gimnaziju u Zagrebu, te 2008. godine maturirala s odličnim uspjehom. Te iste godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka Preddiplomskog studija 2013. godine upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu.