

# Laguerreova geometrija

---

Martić, Jelena

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:252218>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-12**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



Sveučilište u Zagrebu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Matematički odsjek

Jelena Martić

# **Laguerreova geometrija**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof.dr.sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred  
ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_ , predsjednik

2. \_\_\_\_\_ , član

3. \_\_\_\_\_ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

1	Uvod	1
2	Definicija Laguerreove ravnine	2
2.1	Modeli Laguerreove ravnine . . . . .	4
3	Laguerreov model	9
4	Laguerreov model u koordinatnom sustavu	16
5	Blaschkeovo preslikavanje	23
6	Model s pomoću parabola	25
	Literatura	29
	Sažetak	30
	Summary	31
	Životopis	32

# 1 Uvod

Laguerreova geometrija ima svoje podrijetlo u radu francuskog matematičara Edmonda Laguerrea (1834.-1886.). Zasniva se na orijentiranim pravcima i kružnicama te njihovom dodiru koji je također uvjetovan orijentacijom. O ovoj vrsti geometrije pisano je dosta u starijim radovima s početka 20. stoljeća, no ona je i dalje aktivno područje moderne geometrije. U ovom radu objasniti ćemo osnove Laguerreove geometrije te prikazati nekoliko modela Laguerreove ravnine. U prvom poglavlju definiramo Laguerreovu ravninu i elemente od kojih se sastoji. Navodimo četiri aksioma koja mora zadovoljavati model da bi bio Laguerreova ravnina. U nastavku prvog poglavlja navodimo tri modela za koja dokazujemo da zadovoljavaju dane aksiome Laguerreove ravnine. Dva modela su konačna, a jedan je beskonačan. Minimalni model i model oktaedra predstavljaju konačne modele. Ta dva modela su izomorfni te to i dokazujemo. Treći model je model na cilindru, on je beskonačni model te je jedan od najizravnijih modela Laguerreove ravnine. U sljedećem poglavlju bavimo se originalnim Laguerreovim modelom, modelom orijentiranih pravaca i kružnica ili kako ćemo ih odsada zvati, kopljima i ciklusima. U idućem poglavlju smještamo Laguerreov model u koordinatni sustav te definiramo koordinatni prikaz koplja i ciklusa. Taj koordinatni prikaz koristimo u poglavlju Blaschkeovo preslikavanje kako bismo dokazali da su Laguerreov i cilindrični model Laguerreove ravnine izomorfni. U zadnjem poglavlju govorimo o još jednom beskonačnom modelu Laguerreove ravnine, o modelu pomoću parabola. Taj model se često naziva klasična realna Laguerreova ravnina. Dokazujemo da model pomoću parabola zadovoljava sva četiri aksioma Laguerreove ravnine. Zamjenom polja  $\mathbb{R}$  nekim drugim poljem dobiva se također primjer Laguerreove ravnine. Na kraju iskazujemo Miquelov teorem, koji karakterizira model pomoću parabola nad proizvoljnim poljem.

## 2 Definicija Laguerreove ravnine

Laguerreova ravnina je vrsta incidencijske strukture. Elemente od kojih se sastoji Laguerreova ravnina nazivamo točkama i ciklusima. Laguerreovu ravninu definiraju ta dva skupa te relacija incidencije (pripadnosti) među elementima ta dva skupa. Relaciju incidencije i ostala svojstva objašnjavamo na sljedeći način. Razmotrimo incidencijsku strukturu  $(\mathcal{T}, \mathcal{C}, I)$ , gdje  $\mathcal{T}$  označava skup točaka,  $\mathcal{C}$  skup ciklusa, a  $I \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{C}$  relaciju incidencije.

**Definicija 2.1.** *Dvije točke su paralelne ako se podudaraju ili ako ne pripadaju niti jednom zajedničkom ciklusu. Inače nisu paralelne.*

**Definicija 2.2.** *Dva ciklusa se dodiruju ako se podudaraju ili ako imaju točno jednu zajedničku točku. Ako dva ciklusa imaju zajedničku samo točku  $P$  kažemo da se dodiruju u toj točki.*

**Definicija 2.3.** *Incidencijska struktura se naziva Laguerreova ravnina ako zadovoljava sljedeće aksiome:*

- **Aksiom 1.** *Tri u parovima neparalelne točke spojene su jedinstvenim ciklusom.*
- **Aksiom 2.** *Za svaki ciklus  $c$  i za svake dvije neparalelne točke  $PIc$  i  $QIc$ , postoji jedinstveni ciklus  $d$  kroz  $Q$  koji dodiruje ciklus  $c$  u točki  $P$ .*
- **Aksiom 3.** *Za svaku točku  $P$  i ciklus  $c$ , postoji jedinstvena točka na  $c$  paralelna s  $P$ .*
- **Aksiom 4.** *Postoji ciklus koji sadrži najmanje tri, ali ne i sve točke.*

Sad ćemo dokazati tri propozicije koje slijede direktno iz prethodno navedena četiri aksioma.

**Propozicija 2.4.** *Paralelnost točaka je relacija ekvivalencije.*

*Dokaz.* Dokazujemo tri svojstva relacije paralelnosti: refleksivnost, simetričnost te tranzitivnost.

- Refleksivnost: prema definiciji 2.1. točke su paralelne ako se podudaraju, tj. točka je paralelna sama sebi.
- Simetričnost: različite točke su paralelne kad ne leže na zajedničkom ciklusu. Ako je  $P$  paralelna s  $Q$ , tada je i  $Q$  paralelna s  $P$ .

- Tranzitivnost: izaberimo točke  $P$ ,  $Q$  i  $R$  takve da je  $P$  paralelna s  $Q$ , a  $Q$  paralelna s  $R$ . Pretpostavimo da  $P$  i  $R$  nisu paralelne, tada  $P$  i  $R$  leže na nekom zajedničkom ciklusu  $c$ . Po aksiomu 3, ciklus  $c$  može sadržavati samo jednu točku paralelnu s  $Q$ , time smo došli do kontradikcije. Stoga,  $P$  mora biti paralelna s  $R$  i paralelnost je tranzitivna.

□

**Propozicija 2.5.** *Bilo koja dva ciklusa imaju najviše dvije zajedničke točke.*

*Dokaz.* Budući da bilo koje tri neparalelne točke leže na jedinstvenom ciklusu, nemoguće je da dva različita ciklusa imaju tri ili više zajedničkih točaka.

□

**Propozicija 2.6.** *Ako se ciklusi  $c$  i  $d$  dodiruju u točki  $P$  te ako ciklus  $d$  također dodiruje i ciklus  $e$  u  $P$ , tada se  $c$  i  $e$  dodiruju u  $P$ .*

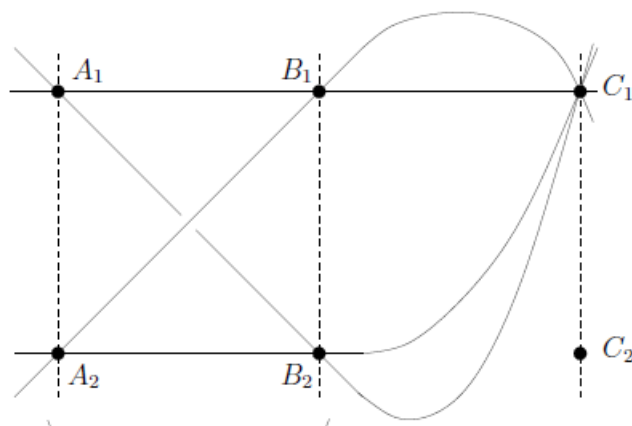
*Dokaz.* Pretpostavimo da se  $c$  i  $d$  dodiruju u točki  $P$  ( $c \cap d = P$ ) te da se  $d$  i  $e$  također dodiruju u  $P$ , ali  $c$  i  $e$  se ne dodiruju u  $P$ . Budući da  $c$  i  $e$  oba sadrže točku  $P$ , kad se oni ne bi dodirivali u  $P$ , onda bi imali još jednu zajedničku točku,  $Q$ . Ako  $d$  sadrži  $Q$ , tad bi on imao dvije zajedničke točke s  $c$  i  $e$  i tad ne bi dodirivao niti  $c$  niti  $e$ . S obzirom da su  $P$  i  $Q$  dvije neparalelne točke, po aksiomu 2 postoji jedinstveni ciklus kroz  $Q$  koji dodiruje  $d$  u  $P$ . Međutim,  $c$  i  $e$  su ciklusi kroz  $Q$  koji dodiruju  $d$  u  $P$ , što je kontradikcija. Dakle, ciklusi  $c$  i  $e$  nemaju drugu zajedničku točku i dodiruju se u  $P$ . □

U nastavku navodimo modele Laguerreove ravnine za koje ćemo dokazati da zadovoljavaju četiri navedena aksioma.

## 2.1 Modeli Laguerreove ravnine

- **Primjer 1.** Minimalni model

Incidencijska struktura zadana skupom točaka  $\mathcal{T} := \{A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2\}$ , skupom ciklusa  $\mathcal{C} := \{\{A_i, B_j, C_k\} | i, j, k = 1, 2\}$  pri čemu je incidencija  $I$  relacija pripadanja  $\in$  je minimalni model Laguerreove ravnine.



Slika 1: Minimalni model

Dokazujemo da ovaj model zadovoljava četiri aksioma Laguerreove ravnine.

1. Točke označene istim slovom ( $A_1$  i  $A_2$ ,  $B_1$  i  $B_2$ ,  $C_1$  i  $C_2$ ) su paralelne. Bilo koje tri neparalelne točke formiraju jedinstven ciklus, npr. ciklus  $\{A_1, B_2, C_1\}$ .
2. Dovoljno je dokazati ovaj aksiom za jedan par neparalelnih točaka. Izmjenom oznaka vidimo da vrijedi jednako za sve neparalelne točke. Uzmimo točke  $A_1$  i  $B_1$  i ciklus  $\{A_1, B_2, C_1\}$ . Točka  $A_1$  pripada tom ciklusu, a  $B_1$  ne. Ciklus  $\{A_1, B_1, C_2\}$  je jedinstveni ciklus kroz  $B_1$  koji dodiruje ciklus  $\{A_1, B_2, C_1\}$  u točki  $A_1$ . Analogno za ciklus  $\{A_1, B_2, C_2\}$ , jedinstveni ciklus kroz  $B_1$  koji ga dodiruje u  $A_1$  je ciklus  $\{A_1, B_1, C_1\}$ .
3. Uzmimo npr. ciklus  $\{A_1, B_1, C_1\}$  i bilo koju od točaka koje nisu na tom ciklusu, a to su  $A_2, B_2$  i  $C_2$ . Znamo da vrijedi  $A_1 \parallel A_2$ ,  $B_1 \parallel B_2$ ,  $C_1 \parallel C_2$ . Za točku  $A_2$  postoji jedinstvena njoj paralelna točka na ciklusu  $\{A_1, B_1, C_1\}$ , a to je  $A_1$ . Očigledno isto možemo napraviti

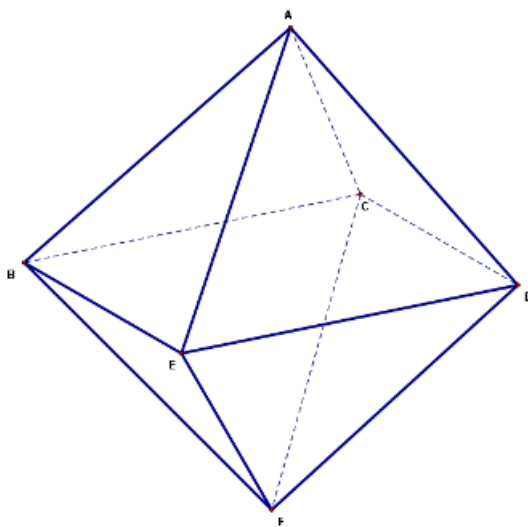


za ostale točke i bilo koji ciklus. Ako točka pripada ciklusu, po definiciji 2.1 vrijedi da je paralelna sama sebi.

4. Ciklus  $\{A_2, B_2, C_2\}$  sadrži tri, ali ne i sve točke.

• **Primjer 2.** Model oktaedra

Model oktaedra je također minimalni model. Imamo šest točaka, vr-



Slika 2: Oktaedar

hova oktaedra i osam ciklusa. Svaka strana oktaedra je jedan ciklus koji sadrži neke tri od danih šest točaka. Neka je  $ABCDEF$  oktaedar u  $\mathbb{R}^3$  kako je prikazano na slici 2. Neka su točke šest vrhova oktaedra  $A, B, C, D, E, F$ , a ciklusi osam strana oktaedra:  $ABC, AED$  itd. Definicija 2.1 kaže da su paralelne točke one koje ne leže na istom ciklusu, a ovdje su to nasuprotne točke oktaedra. Točka  $A$  je paralelna s  $F$ ,  $B$  s  $D$  i  $C$  s  $E$  (naravno, svaka je točka paralelna i sama sebi).

Umjesto dokazivanja da model oktaedra zadovoljava aksiome Laguerreove ravnine, pokazati ćemo da je izomorfan minimalnom modelu iz primjera 1.

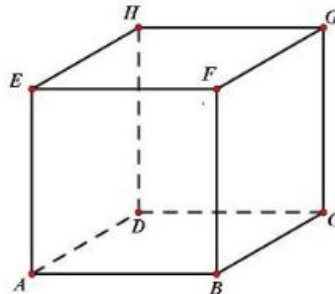
**Definicija 2.7.** *Neka su  $L_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{C}_1, I_1)$  i  $L_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{C}_2, I_2)$  incidencijske strukture. Kažemo da su one izomorfne ako postoje bijekcije  $\rho : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$  i  $\psi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  takve da vrijedi:  $A I_1 c \iff \rho(A) I_2 \psi(c)$ , za sve  $A \in \mathcal{T}_1, c \in \mathcal{C}_1$ . Uređeni par  $(\rho, \psi)$  nazivamo izomorfizmom incidencijskih struktura  $L_1$  i  $L_2$ .*

Neka je  $L_1 = (\mathcal{T}_1, \mathcal{C}_1, I_1)$  model oktaedra, a  $L_2 = (\mathcal{T}_2, \mathcal{C}_2, I_2)$  minimalni model Laguerreove ravnine iz primjera 1. Definiramo funkciju  $\rho$  na slijedeći način:  $\rho(A) = A_1$ ,  $\rho(F) = A_2$ ,  $\rho(B) = B_1$ ,  $\rho(D) = B_2$ ,  $\rho(C) = C_1$  i  $\rho(E) = C_2$ . Funkciju  $\psi$  definiramo na slijedeći način  $\psi(ACD) = A_1C_1B_2$ ,  $\psi(ABC) = A_1B_1C_1$ ,  $\psi(ADE) = A_1B_2C_2$ ,  $\psi(ABE) = A_1B_1C_2$ ,  $\psi(BCF) = B_1C_1A_2$ ,  $\psi(BEF) = B_1C_2A_2$ ,  $\psi(CDF) = C_1B_2A_2$  i  $\psi(DEF) = B_2C_2A_2$ .

Očito su  $\rho : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$  i  $\psi : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  bijekcije. Ako točka  $A$  incidira sa ciklusom  $ACD$  te ciklusima  $ABC$ ,  $ADE$ ,  $ABE$ , onda točka  $\rho(A) = A_1$  incidira sa ciklusima  $A_1C_1B_2$ ,  $A_1B_1C_1$ ,  $A_1B_2C_2$  i  $A_1B_1C_2$ . Analogno vrijedi za točke  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  i  $F$ .

Dokazali smo da postoji izomorfizam između prvog i drugog primjera modela Laguerreove ravnine te stoga vrijede i aksiomi Laguerreove ravnine u modelu oktaedra.

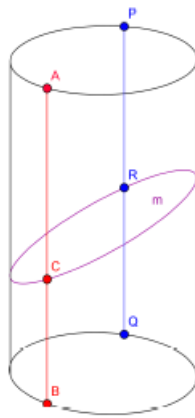
Još jedan analogni primjer mogao bi biti heksaedar, tj. kocka. Budući je kocka dualna oktaedru (oni su ekvivalentni ako strane zamijenimo vrhovima), možemo formirati minimalni model Laguerreove ravnine uzimajući strane kocke kao točke, a vrhove kao cikluse.



Slika 3: Heksaedar

- **Primjer 3.** Model na cilindru

Možda najizravniji model Laguerreove ravnine koristi jedinični cilindar  $S^1 \times \mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}^3$ . Skup  $\mathcal{T}$  sastoji se od točaka na cilindru, a skup  $C$  od kružnica i elipsa koji nastaju presijecanjem cilindra s bilo kojom nevertikalnom ravninom. Točke i ciklusi su incidentni na standardni način. U ovom modelu točke su paralelne ako leže na istom vertikalnom pravcu. Pokazati ćemo da i ovaj model također zadovoljava aksiome



Slika 4: Model na cilindru (slika preuzeta iz [4])

Laguerreove ravnine.

1. Uzmimo neke tri nekolinearne točke iz  $\mathcal{T}$ . Budući su te točke u  $\mathbb{R}^3$  one određuju jedinstvenu ravninu  $\pi$ . Ravnina  $\pi$  je nevertikalna ako i samo ako nikoje dvije točke ne leže na istom vertikalnom pravcu, tj. ako nisu paralelne. U tom slučaju presjek ravnine  $\pi$  s jediničnim cilindrom je jedinstveni ciklus određen s te tri točke. Stoga, tri u parovima neparalelne točke određuju jedinstveni ciklus.
2. Odaberimo dvije neparalelne točke  $P$  i  $Q$  i ciklus  $c$  tako da  $P \in c, Q \notin c$ . Neka je  $\pi$  ravnina koja sadrži ciklus  $c$ . S obzirom da točka  $P$  leži na  $c$ , ona je također sadržana u  $\pi$ . Neka je  $l$  jedinstveni (euklidski) pravac u  $\pi$  koji je tangenta ciklusa  $c$  u točki  $P$ . Točka  $Q$  nije u  $\pi$ . Neka se jedinstvena ravnina koja sadrži  $Q$  i  $l$  zove  $\rho$ . Ravnina  $\rho$  je nevertikalna zato što su točke  $P$  i  $Q$  neparalelne, a pravac  $l$  nije vertikalan. Neka je  $d$  presjek ravnine  $\rho$  s jediničnim

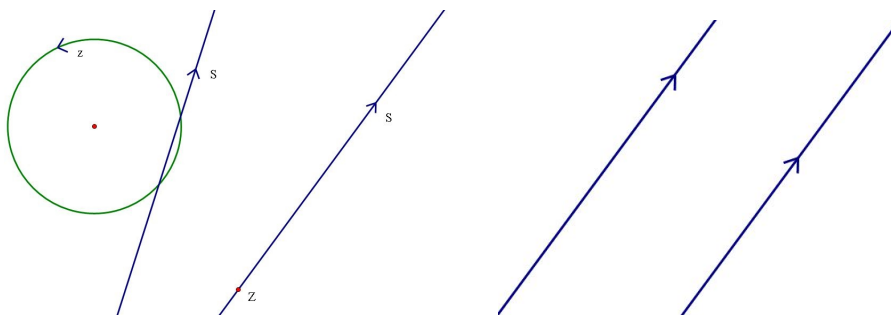
cilindrom. Sad je  $d$  ciklus u našem modelu. Budući je  $\rho \cap \pi = \{l\}$  i  $l$  je tangenta na  $c$ ,  $d \cap c = \{P\}$ . Slijedi da je  $d$  ciklus kroz točku  $Q$  koji dodiruje ciklus  $c$  u točki  $P$ . Neka je  $d'$  neki drugi ciklus kroz točku  $Q$  koji dodiruje ciklus  $c$  u točki  $P$ . Tada  $d'$  leži u nekoj ravnini  $\rho'$  koja sadrži točku  $P$ . Ravnina  $\rho'$  presijeca ravninu  $\pi$  u pravcu i taj pravac mora sadržavati točku  $P$ . Budući jedino  $d'$  presijeca ciklus  $c$  u  $P$ , pravac presjeka mora biti  $l$ , jedinstveni pravac kroz točku  $P$  te tangenta na ciklus  $c$  u ravnini  $\pi$ . Ravnina  $\rho'$  sadrži i pravac  $l$  i točku  $Q$  te je stoga identična ravnini  $\rho$ , vrijedi  $d = d'$ . Dokazali smo da je ciklus  $d$  jedinstven.

3. Aksiom 3 je ekvivalentan s tim da svaki ciklus sadrži točno jednu točku svakog vertikalnog pravca. Neka je  $l$  jedan takav vertikalni pravac, a  $c$  ciklus. Postoji jedinstvena nevertikalna ravnina  $\pi$  koje je  $c$  podskup. Budući da  $l$  nije sadržan niti paralelan (u euklidskom smislu) s  $\pi$ , njihov presjek je jedinstvena točka pravca  $l$  sadržana u  $c$ .
4. Model ima beskonačan broj točaka u svakom ciklusu, a niti jedan ciklus ne sadrži sve točke.

### 3 Laguerreov model

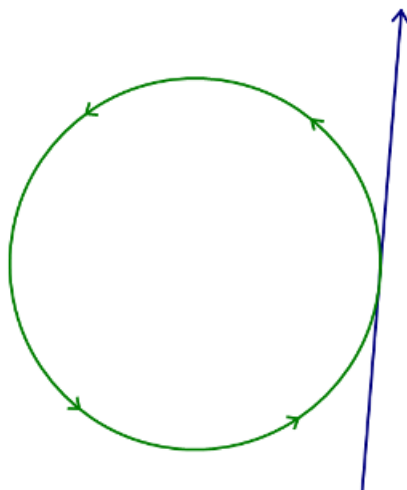
U euklidskoj ravnini definiramo koplje kao orijentirani pravac. Svaki euklidski pravac obuhvaća dva koplja suprotnog smjera. Koplje možemo shvatiti i kao par koji se sastoji od pravca i jedne strane tog pravca. Osnovni, euklidski pravac koplja nazvat ćemo pravac nositelj, odnosno nositelj koplja. Svaki euklidski pravac je nositelj točno dva različita koplja. Naprimjer, pravac  $y = x$  je nositelj koplja usmjerenog u pravcu "sjeveroistoka" te još jednog koplja koje pokazuje "jugozapad". Što se tiče ciklusa u euklidskoj ravnini to su orijentirane kružnice, gdje također razmatramo i kružnice radijusa 0. Ekvivalentno kao i kod orijentiranog pravca, ciklus možemo shvatiti kao par koji se sastoji od kružnice i jedne njene orijentacije. Osnovnu, euklidsku kružnicu nazvati ćemo nositeljem ciklusa. Svaka euklidska kružnica je nositelj točno dva ciklusa, jednog orijentiranog u pozitivnom smjeru (obrnuto od smjera kazaljki na satu) i drugog orijentiranog u negativnom smjeru (smjeru kazaljki na satu).

Laguerreov model je incidencijska struktura  $(\mathcal{T}, \mathcal{C}, I)$  gdje je skup  $\mathcal{T}$  skup

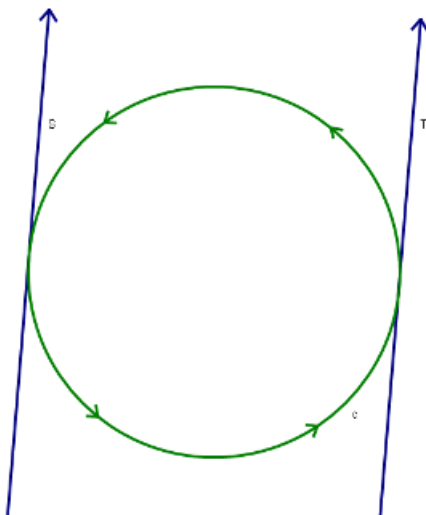


Slika 5: Koplja i ciklusi

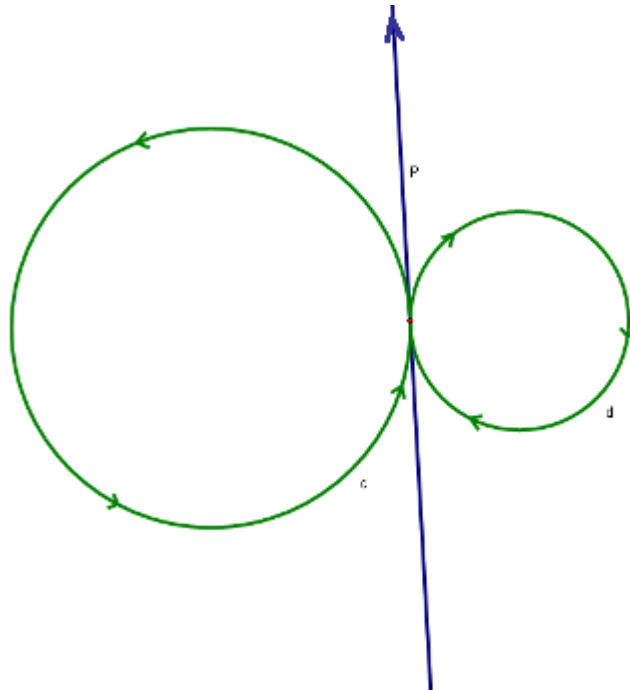
koplja,  $\mathcal{C}$  skup ciklusa i  $I$  relacija incidencije. Kažemo da je koplje incidentno s ciklusom kada je pravac nositelj koplja tangenta na euklidsku kružnicu, nositelja ciklusa te kad se u točki dodira orijentacija koplja i ciklusa podudara (slika 6). U slučaju da je kružnica nositelj ciklusa radijusa 0, tj. točka, tad koplje incidira s tim ciklusom ako on pripada ciklusu, tj. leži na njemu. Koplja su paralelna ako i samo ako su im paralelni pravci nositelji i iste su orijentacije (slika 5). Niti jedan ciklus ne može dodirivati oba takva koplja (slika 7). Koplja  $S$  i  $T$  su paralelna i oba su tangente na kružnicu nositelja ciklusa. Međutim, ciklus  $c$  dodiruje samo koplje  $S$  jer se orijentacija ciklusa  $c$  ne podudara s orijentacijom koplja  $T$  u točki dodira te oni ne incidiraju. U ovom modelu ciklusi se dodiruju ako i samo ako su odgovarajuće orijentacije u točki dodira (slika 8).



Slika 6: Koplje incidentno s ciklusom



Slika 7:  $S$  i  $T$  su paralelna koplja



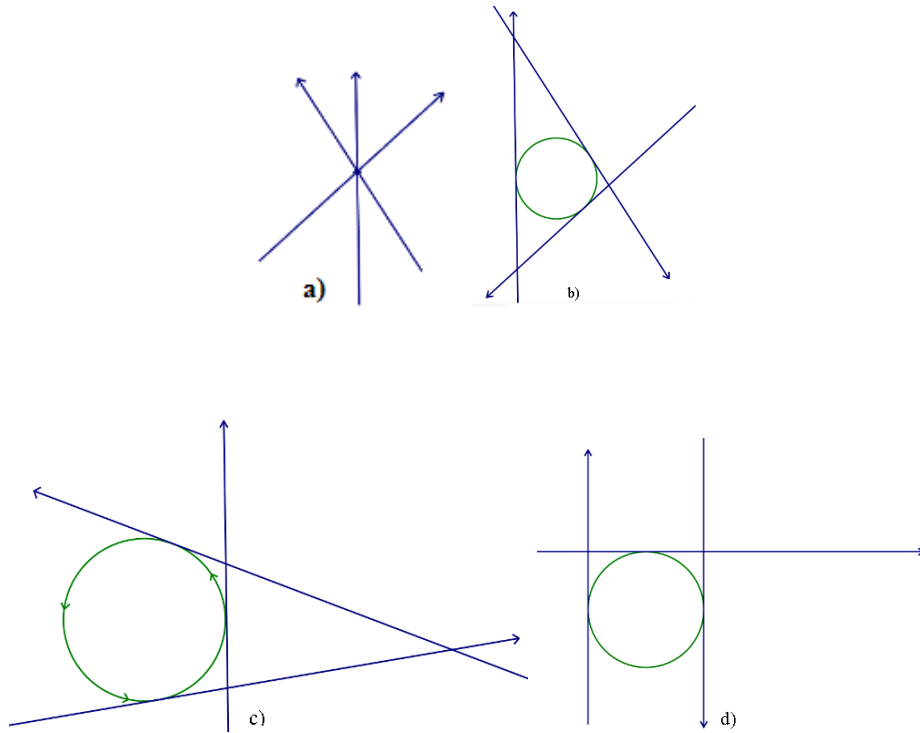
Slika 8: Ciklusi  $c$  i  $d$  se dodiruju u koplju  $P$

Dokazati ćemo da vrijede aksiomi Laguerreove ravnine za ovaj model.

1. Dana su tri međusobno neparalelna koplja. Postoje tri slučaja za razmotriti (slika 9):
  - **Slučaj 1** Ako su tri koplja incidentna s točkom, tada je točka incidencije jedinstvena. Ta točka je ciklus radijusa 0, koji je incidentan sa sva tri koplja.
  - **Slučaj 2** Ako pravci nositelji dana tri koplja formiraju trokut, tada postoje četiri euklidske kružnice koje dodiruju sva tri pravca. Jedna kružnica je upisana u trokut te imamo još po jednu sa svake strane trokuta. Budući da uvjet dodira ovisi o orijentaciji koplja i ciklusa, točno jedna orijentacija točno jedne od ovih kružnica će dirati sva tri koplja.
  - **Slučaj 3** Ako su dva pravca nositelja od tri koplja paralelna tada će postojati dvije euklidske kružnice koje dodiruju sva tri pravca

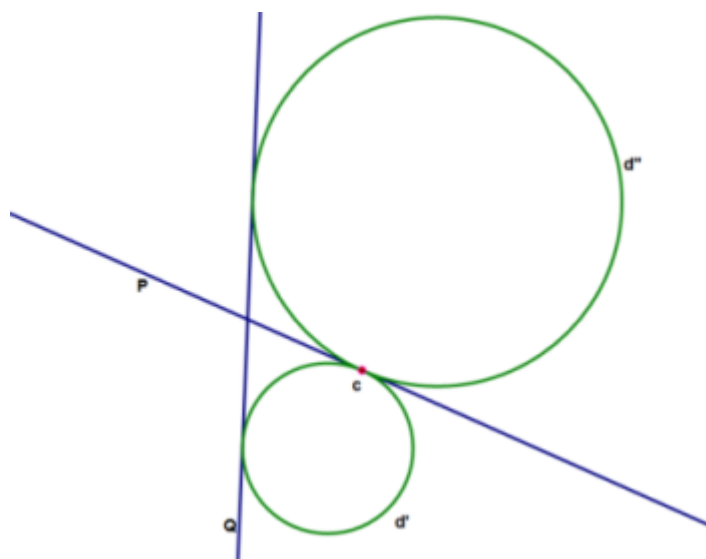
nositelja. Ovisno o orijentaciji koplja točno jedna orijentacija jedne od kružnica biti će jedinstveni ciklus koji dodiruje sva tri koplja.

Kad su tri koplja incidentna, točka incidencije je ciklus radijusa 0 određen pravcima nositeljima koplja (slika 9.a). Tri koplja mogu formirati trokut, a jedinstveni ciklus koji dodiruje tri koplja može biti unutar trokuta (slika 9.b) ili s vanjske strane trokuta (slika 9.c). Ako su dva pravca nositelja koplja paralelna ciklus može biti na jednom od dva mjesta, s jedne ili druge strane koplja koje čiji pravac nositelj nije paralelan s ostala dva (slika 9.d)



Slika 9: Tri koplja određuju jedinstveni ciklus





Slika 10: Ciklus  $c$  je radijusa 0 koji dodiruje koplje  $P$ , ali ne i  $Q$ .

2. Neka su  $P$  i  $Q$  dva koplja, a  $c$  je ciklus incidentan s kopljem  $P$ . Želimo pokazati da postoji jedinstveni ciklus  $d$  incidentan s kopljem  $Q$  koji dodiruje ciklus  $c$  u  $P$ . Ako je ciklus  $c$  radijusa 0 (slika 10) tada će postojati dvije euklidske kružnice koje dodiruju koplje  $P$  u ciklusu  $c$ . Ovisno o orijentaciji koplja  $P$ , točno jedna orijentacija od euklidskih kružnica biti će jedinstveni ciklus koji dodiruje sva tri elementa. Ako ciklus  $c$  nije radijusa 0, nego orijentirana kružnica tada je točka dodira s kopljem ciklus radijusa 0. Jedinstveni ciklus biti će onaj koji dodiruje ciklus radijusa 0 i oba koplja (slika 10).
3. Moramo pokazati da za dano koplje  $P$  i ciklus  $c$ , postoji jedinstveno koplje koje dodiruje ciklus  $c$  i paralelno je s kopljem  $P$ . Ako koplje  $P$  dodiruje ciklus  $c$ , u tom slučaju on sam je to jedinstveno koplje koje tražimo, tj. koplje  $P$  je paralelno samo sebi. Pretpostavimo da  $P$  nije incidentno s ciklusom  $c$ . U euklidskoj ravnini, kružnica će imati dva tangentna pravca koji su paralelni s pravcem nositeljem koplja  $P$ . Točno jedno koplje koje leži na tim pravcima biti će tangenta na ciklus  $c$  i paralelno s kopljem  $P$ , tj. imati će odgovarajuću orijentaciju. Ako je ciklus  $c$  radijusa 0, tj. točka tada će u euklidskoj ravnini, postojati točno jedan pravac koji prolazi tom točkom, u ovom slučaju ciklusom radijusa 0, taj pravac je nositelj dva koplja i jedno od njih je paralelno koplju  $P$ .
4. Laguerreov model je beskonačan model koji zadovoljava četvrti aksiom.



Slika 11: Edmond Nicolas Laguerre (slika preuzeta iz [8])

**Edmond Nicolas Laguerre**, francuski matematičar, rođen 1834. godine u Bar-le-Duc, preminuo 1886. godine u istom gradu. Edmond Laguerre je odmalena bio lošeg zdravlja, što se odrazilo na njegovo školovanje i rad. No bez obzira na to uspio je upisati *École Polytechnique* u Parizu 1852. Godine 1853. izdan je njegov prvi rad "O teoriji žarišta" u kojem istražuje kut među pravcima u kompleksnoj projektivnoj ravni što dokazuje da je već i tada bio talentiran matematičar. Nakon što stječe diplomu na *École Polytechnique* 1854., odlučuje se na vojnu karijeru. Dodijeljeno mu je mjesto topničkog časnika na proizvodnji naoružanja u blizini Strasbourga gdje ostaje slijedećih deset godina. Od vojnog čina odustaje 1864. godine i vraća se u *École Polytechnique* kao učitelj, a kasnije kao ispitivač te na tom mjestu ostaje do kraja života. Joseph Louis François Bertrand, francuski matematičar, koji je bio veliki poštivatelj Laguerreova djela podržao je njegov izbor u Akademiju znanosti te njegovo imenovanje 1883. godine za profesora matematičke fizike na College de France. No, njegovo zdravlje koje nikad nije bilo dobro, posve se pogoršalo u veljači 1886. Tad se vratio u rodni Bar-le-Duc gdje šest mjeseci kasnije umire. Osim matematike, u njegovom životu jedino je njegova obitelj imala veliku ulogu. Bio je oženjen i imao je

dvije kćeri, na čije je obrazovanje posvetio mnogo vremena i energije. Laguerre je od svojih suvremenika opisan kao tih i nježan muškarac koji je bio strastveno posvećen svom istraživanju, podučavanju i svojim kćerima. Laguerreov najvažniji rad bio je na području analize i geometrije. Proučavao je metode aproksimiranja te ga se najviše pamti po specijalnoj funkciji nazvanoj Laguerreovi polinomi koji su rješenja Laguerreove diferencijalne jednadžbe. Laguerreovi polinomi su proizašli iz njegovog rada izdanog 1879. godine gdje je ispitivao  $\int \frac{\exp(-x)}{x} dx$  gdje je integral od 0 do  $\infty$ . Pronašao je divergentne nizove koji su davali dobru aproksimaciju integrala. Također je pronasao prošireni verižni razlomak za integral, konvergente koji su uključivali Laguerreove polinome. Postavio je i temelje geometrije, kasnije nazvane po njemu, geometrije orijentiranih pravaca i kružnica u euklidskoj ravnini, koju je koristio kako bi riješio slavni problem Apolonija iz Perge (treba pronaći sve kružnice koje dodiruju tri dane kružnice). Klasična Laguerreova teorija je teorija orijentiranih pravaca i kružnica. Iako je njegov rad u geometriji bio važan u to vrijeme, nadmašila ga je teorija Liejevih grupa te Cayleyev i Kleinov rad. Laguerre je također napisao 140 članaka koje je izdao u vodećim časopisima tog vremena stoga se postavlja pitanje zašto je poznat samo po rezultatima spomenutim prethodno. Iako je očito da je Laguerre bio brilijantan i inovativan te je u svom kratkom radnom životu od 22 godine proizveo veliku količinu prvorazrednih radova, njegovo ime je malo poznato, a njegov rad rijetko citiran. Odgovor je možda u tome što je Laguerre radio samo na detaljima - značajnim detaljima, ali ipak detaljima. Ni u jednom trenutku nije pokušao pokupiti te razne "komadiće" i složiti ih u jedinstvenu teoriju. Rezultat toga je da se njegov rad svodi na razne zanimljive specijalne slučajeve nekih općenitijih teorija koje su otkrili drugi. No, usprkos ovoj procjeni i dalje postoji veliki interes za rad ovog francuskog matematičara.

## 4 Laguerreov model u koordinatnom sustavu

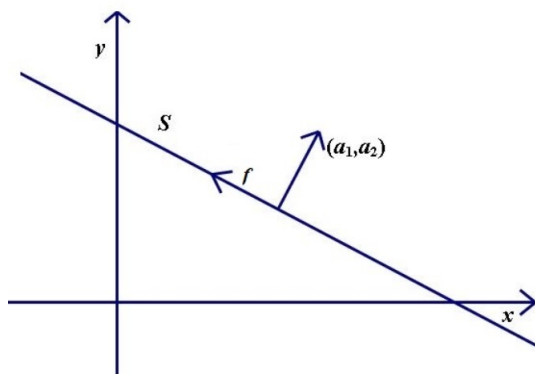
U  $\mathbb{R}^2$  je zadan kartezijev koordinatni sustav. Neka su  $a$  i  $b$  dva međusobno okomita vektora kojima je hvatište u ishodištu koordinatnog sustava. Uređeni par vektora  $(a, b)$  je orijentiran koordinatni sustav. Neka su  $(a_1, a_2)$  i  $(b_1, b_2)$  koordinate vektora  $a$  i  $b$  u koordinatnom sustavu. Ako vrijedi da je  $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$  tada je  $(a, b)$  desni koordinatni sustav, odnosno lijevi ako je  $D < 0$ . Koplju  $S$  dodjeljujemo četiri komponente koje predstavljaju njegov koordinatni prikaz. Jednadžba pravca  $s$ , nositelja koplja  $S$  ima sljedeći oblik u zadanom kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$a_0 + a_1x + a_2y = 0. \quad (1)$$

Iz implicitne jednadžba pravca  $s$  dobivamo prve tri komponente koordinatnog prikaza koplja  $S$ , a to su  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$ . Neka je vektor  $n \equiv (a_1, a_2)$  vektor normale pravca  $s$ , a vektor  $f$ , vektor smjera tog pravca koji se poklapa sa smjerom koplja  $S$ . Četvrtu komponentu koordinatnog prikaza koplja  $S$  određujemo pomoću vektora normale. Apsolutna vrijednost četvrte komponente je euklidska norma vektora  $n$ :

$$|a_3| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \quad (2)$$

koja je sigurno različita od 0. U slučaju kad uređeni par vektora  $(n, f)$  gradi desni sustav tada je  $a_3 = -\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , a kad uređeni par vektora  $(n, f)$  gradi lijevi sustav, tad je  $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  (slika 12), odnosno smjer koplja ovisi koji sustav, desni ili lijevi, čini normala s vektorom smjera pravca.



Slika 12:

Koplju dodijeljujemo komponente povezane u homogene četvorke

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

koje nazivamo koordinate koplja  $S$  u zadanom koordinatnom sustavu.

**Propozicija 4.1.** *Za svaki  $\lambda \neq 0$  koordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $\lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$  određuju isto koplje. Obratno, ako su  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  koordinate istog koplja, onda postoji  $\lambda \neq 0$  takav da je  $(b_0, b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$ .*

*Dokaz.* Koordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $\lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$  predstavljaju isto koplje. Dva koplja se podudaraju kad im se podudaraju pravci nositelji te su jednake orijentacije. Pokažimo da su im pravci nositelji jednaki; jednadžba pravca nositelja prvog koplja je  $a_0 + a_1x + a_2y = 0$ , a nositelja drugog koplja je  $\lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2y = 0 \iff \lambda(a_0 + a_1x + a_2y) = 0$ . Budući je  $\lambda \neq 0$  vrijedi da je  $a_0 + a_1x + a_2y = 0$ . Dokazali smo da oba koplja imaju isti pravac nositelj. Treba još pokazati da imaju i istu orijentaciju. Orijehtacija koplja ovisi o njegovoj četvrtoj komponenti koordinatnog prikaza, tj. ovisi o tome da li vektori normale i smjera određuju lijevi ili desni sustav. Neka je  $n = (a_1, a_2)$  vektor normale prvog koplja, a  $n' = (\lambda a_1, \lambda a_2) = \lambda(a_1, a_2)$  vektor normale drugog koplja te neka je  $a_3$  četvrta komponenta prvog koplja, a  $a'_3$  četvrta komponenta drugog koplja. Isto vrijedi za  $f$  i  $f'$ , vekore smjera. Prisjetimo se, kad je  $a_3 > 0$  vektori  $(n, f)$  grade lijevi sustav, a kad je  $a_3 < 0$  grade desni sustav. Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je  $\lambda > 0$ , vektori  $n$  i  $n'$  imaju istu orijentaciju, a  $a_3$  i  $a'_3$  su istog predznaka, onda vektori smjera  $f$  i  $f'$  imaju istu orijentaciju.
2. Ako je  $\lambda < 0$ , vektori  $n$  i  $n'$  su suprotne orijentacije, ali su i  $a_3$  i  $a'_3$  suprotnog predznaka pa vrijedi da vektori smjera  $f$  i  $f'$  imaju istu orijentaciju.

Dokazali smo da koordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $\lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$  za  $\lambda \neq 0$  određuju isto koplje.

Ako koordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  predstavljaju isto koplje, onda postoji  $\lambda \neq 0$  takav da je  $(b_0, b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$ . Pravci nositelji ova dva koplja su isti, iz implicitnih jednadžbi pravaca  $a_0 + a_1x + a_2y = 0$  i  $b_0 + b_1x + b_2y = 0$  vidimo da postoji  $\lambda \neq 0$  tako da je  $(b_0, b_1, b_2) = \lambda(a_0, a_1, a_2)$ . Također i orijentacija se mora podudarati. Mora vrijediti  $|b_3| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda||a_3|$ . Razlikujemo dva slučaja:

1. Ako je  $\lambda > 0$  vektori normale  $n$  i  $n'$  su iste orijentacije, kao i vektori smjera  $f$  i  $f'$ . Zaključujemo da koordinate  $a_3$  i  $b_3$  imaju isti predznak i vrijedi  $b_3 = \lambda a_3$ .

2. Ako je  $\lambda < 0$  vektori normale  $n$  i  $n'$  su suprotne orijentacije, a vektori smjera  $f$  i  $f'$  su iste orijentacije pa su  $a_3$  i  $b_3$  suprotnog predznaka. U ovom slučaju također vrijedi  $b_3 = \lambda a_3$

Očito ako koordinate  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  određuju isto koplje, postoji  $\lambda \neq 0$  tako da je  $(b_0, b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_0, a_1, a_2, a_3)$ . □

**Teorem 4.2.** *Koplja s koordinatama  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  su paralelna ako i samo ako se vektori*

$$\left( \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3} \right) \quad i \quad \left( \frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3} \right)$$

*podudaraju.*

*Dokaz.* ( $\implies$ ) Neka su koplja s koordinatama  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  paralelna. Dokazujemo da vrijedi  $\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right) = \left(\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3}\right)$ . Koplja su paralelna ako su im pravci nositelji paralelni te su iste orijentacije. Za vektore normale zadana dva koplja tada vrijedi  $\lambda(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$  za  $\lambda \neq 0$ . Pogledajmo što je s četvrtom koordinatom:  $|a_3| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ,  $|b_3| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(a_1^2 + a_2^2)} = |\lambda| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda a_3|$ . Vidimo da je  $|\lambda| = \left|\frac{b_3}{a_3}\right|$ . Vektori smjera paralelnih koplja su isto orijentirani. Ako je  $\lambda < 0$ , vektori normale su suprotno orijentirani pa su  $a_3$  i  $b_3$  suprotnog predznaka. Tada je razlomak  $\frac{b_3}{a_3}$  negativan i vrijedi  $\lambda = \frac{b_3}{a_3}$ . Ako je  $\lambda > 0$ , vektori normale su isto orijentirani,  $a_3$  i  $b_3$  su istog predznaka, razlomak  $\frac{b_3}{a_3}$  je pozitivan i ponovo vrijedi  $\lambda = \frac{b_3}{a_3}$ . Iz  $\lambda(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$  i  $\lambda = \frac{b_3}{a_3}$  slijedi jednakost  $\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right) = \left(\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3}\right)$ .

( $\impliedby$ ) Neka vrijedi  $\left(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}\right) = \left(\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3}\right)$ . Dokazujemo da su koplja s koordinatama  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  paralelna. Iz tvrdnje vidimo

$$\left( \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3} \right) = \left( \frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3} \right)$$

$$\frac{1}{a_3}(a_1, a_2) = \frac{1}{b_3}(b_1, b_2)$$

$$(b_1, b_2) = \frac{b_3}{a_3}(a_1, a_2).$$

Dakle,  $(a_1, a_2)$  i  $(b_1, b_2)$  su vektori normale, a  $\lambda = \frac{b_3}{a_3} \neq 0$ . Obzirom da su vektori normale proporcionalni, pravci nositelji koplja su paralelni. Moramo još provjeriti orijentaciju. Imamo dva slučaja:

1. Ako je  $\frac{b_3}{a_3} > 0$ ,  $a_3$  i  $b_3$  su istog predznaka, vektori normale i vektori smjera oba koplja imaju istu orijentaciju.
2. Ako je  $\frac{b_3}{a_3} < 0$ ,  $a_3$  i  $b_3$  su suprotnog predznaka, vektori normale su suprotne orijentacije, a vektori smjera imaju istu orijentaciju.

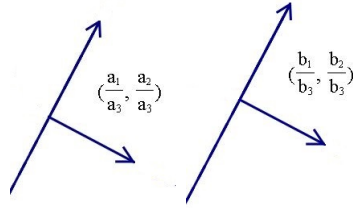
Zaključujemo da ako vrijedi jednakost  $(\frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3}) = (\frac{b_1}{b_3}, \frac{b_2}{b_3})$ , koplja  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  i  $(b_0, b_1, b_2, b_3)$  su paralelna.  $\square$

Sada ćemo definirati koordinate ciklusa. To su također uređene četvorke realnih brojeva  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  samo što sada zahtijevamo da je prva koordinata različita od nule ( $x_0 \neq 0$ ). Ciklus s tim koordinatama ima kružnicu nositelja sa središtem  $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$  i polumjerom  $r = |\frac{x_3}{x_0}|$ . Ako je  $r = 0$ , radi se o točki. Ciklus je pozitivno orijentiran (suprotno od kazaljki na satu) kad je  $\frac{x_3}{x_0} < 0$ , a negativno (u smjeru kazaljki na satu) kad je  $\frac{x_3}{x_0} > 0$ . Vidimo da koordinate jednoznačno određuju ciklus. Kao i za koplja, koordinate zadanog ciklusa određene su do na proporcionalnost.

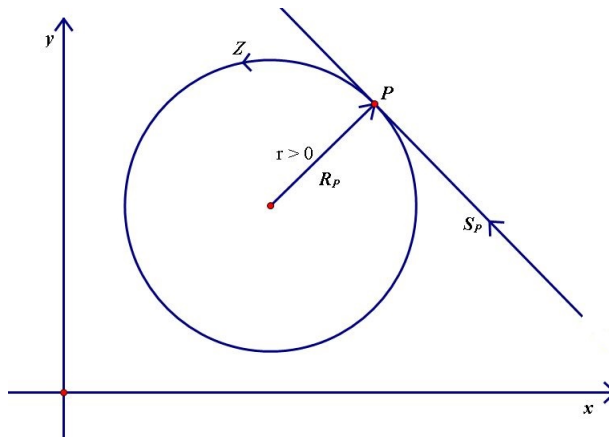
**Propozicija 4.3.** *Za svaki  $\lambda \neq 0$  koordinate  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  i  $\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$  određuju isti ciklus. Obratno, ako su  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  i  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  koordinate istog ciklusa, onda postoji  $\lambda \neq 0$  takav da je  $(y_0, y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$ .*

*Dokaz.* Prvo dokazujemo da koordinate  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  i  $\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$  određuju isti ciklus. Ciklusi se podudaraju ako imaju isto središte, polumjer te su iste orijentacije. Jednadžba kružnice nositelja prvog ciklusa je  $(x - \frac{x_1}{x_0})^2 + (y - \frac{x_2}{x_0})^2 = (\frac{x_3}{x_0})^2$ , drugog ciklusa je  $(x - \frac{\lambda x_1}{\lambda x_0})^2 + (y - \frac{\lambda x_2}{\lambda x_0})^2 = (\frac{\lambda x_3}{\lambda x_0})^2$ . Očigledno su ove dvije jednadžbe jednake, što znači da ciklusi zadani koordinatama  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  i  $\lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$  imaju isto središte i jednak polumjer. Trebamo utvrditi podudaraju li se i u orijentaciji. Orijetacija ciklusa ovisi o četvrtoj komponenti koordinatnog prikaza. S obzirom da je  $\frac{x_3}{x_0} = \frac{\lambda x_3}{\lambda x_0}$ , orijentacije oba ciklusa su jednake za bilo koji  $\lambda \neq 0$ .

Sada dokazujemo obrat: ako koordinate  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  i  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  određuju isti ciklus, onda postoji  $\lambda \neq 0$  takav da je  $(y_0, y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$ . Središte tog ciklusa je  $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = (\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0})$ , a polumjer je  $|\frac{x_3}{x_0}| = |\frac{y_3}{y_0}|$ . Zadnja jednakost vrijedi i bez apsolutne vrijednosti jer  $\frac{x_3}{x_0}$  i  $\frac{y_3}{y_0}$  moraju biti istog predznaka. Iz toga vidimo da za  $\lambda = \frac{y_0}{x_0}$  vrijedi  $(y_0, y_1, y_2, y_3) = \lambda(x_0, x_1, x_2, x_3)$ .  $\square$



Slika 13:



Slika 14:

**Teorem 4.4.** Koplja  $S$  s koordinatama  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  je incidentno s ciklusom  $c$  s koordinatama  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , ako i samo ako vrijedi:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0. \quad (3)$$

*Dokaz.* Nuždan uvjet incidentnosti koplja  $S$  i ciklusa  $c$  je da su njihovi nositelji tangenti. Pravac nositelj koplja  $S$  ima jednadžbu  $a_0 + a_1x + a_2y = 0$ , a kružnica nositelj ciklusa  $c$  ima jednadžbu

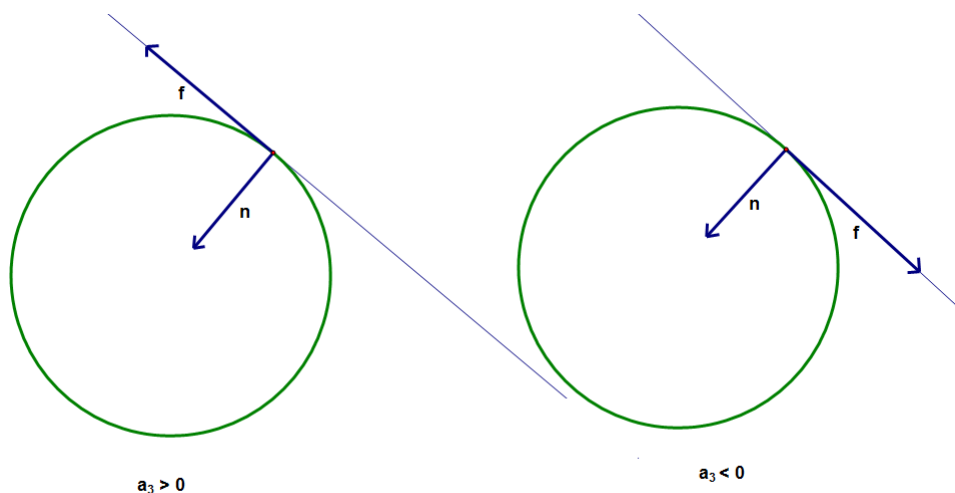
$$\left(x - \frac{x_1}{x_0}\right)^2 + \left(y - \frac{x_2}{x_0}\right)^2 = \left(\frac{x_3}{x_0}\right)^2.$$

Oni su tangenti ako i samo ako je udaljenost središta kružnice od pravca jednaka polumjeru kružnice. Prema ([5], propozicija 2.3.3) taj uvjet možemo zapisati kao

$$\frac{|a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \left|\frac{x_3}{x_0}\right| \iff \frac{|a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}|}{|a_3|} = \left|\frac{x_3}{x_0}\right|. \quad (4)$$



Razmotrit ćemo predznake izraza u apsolutnim vrijednostima i pokazati da je ova jednadžba ekvivalentna sa (3) točno onda kad se orijentacije koplja  $S$  i ciklusa  $c$  podudaraju u točki dodira. Predznak izraza  $a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}$  ovisi o tome jesu li vektor normale  $n = (a_1, a_2)$  i središte kružnice  $(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$  s iste ili s različitih strana pravca nositelja. Pretpostavimo da su s iste strane; tada je izraz pozitivan, tj.  $|a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}| = a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}$ . Predznak od  $a_3$  ovisi o tome je li  $(n, f)$  desna ili lijeva baza (vidi sliku 15). Ako je baza



Slika 15:

desna, vidimo da ciklus treba biti orijentiran pozitivno ( $\frac{x_3}{x_0} < 0$ ), a ako je lijeva negativno ( $\frac{x_3}{x_0} > 0$ ). U prvom slučaju dobivamo jednadžbu

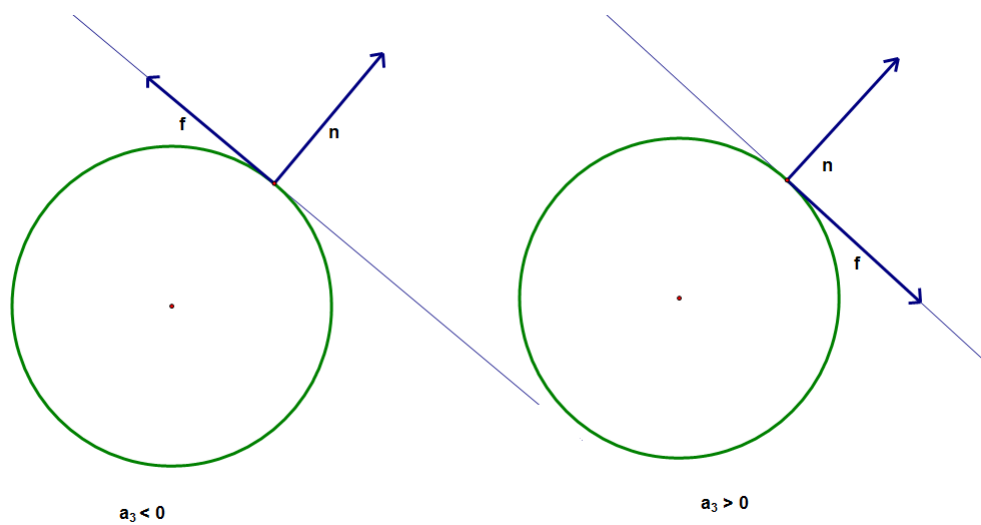
$$\frac{a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}}{a_3} = -\frac{x_3}{x_0},$$

a u drugom slučaju

$$\frac{a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}}{-a_3} = \frac{x_3}{x_0}.$$

Vidimo da je u oba slučaja jednadžba (4) ekvivalentna s (3). Sada pretpostavimo da su normala  $n$  i središte kružnice s različitih strana pravca nositelja, tada je izraz  $|a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0}| = -(a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0})$ . Ponovo predznak od  $a_3$  ovisi o tome je li  $(n, f)$  lijeva ili desna baza (vidi sliku 16). Ako je baza desna, vidimo da ciklus treba biti orijentiran negativno ( $\frac{x_3}{x_0} > 0$ ), a ako je lijeva pozitivno ( $\frac{x_3}{x_0} < 0$ ). U prvom slučaju dobivamo jednadžbu

$$\frac{-(a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0})}{a_3} = \frac{x_3}{x_0},$$



Slika 16:

a u drugom slučaju

$$\frac{-(a_0 + a_1 \frac{x_1}{x_0} + a_2 \frac{x_2}{x_0})}{-a_3} = -\frac{x_3}{x_0}.$$

Vidimo da je u oba slučaja jednačba (4) ekvivalentna s (3).

□

## 5 Blaschkeovo preslikavanje

Blaschkeovo preslikavanje je izomorfizam između Laguerreovog modela i cilindričnog modela Laguerreove ravnine. Neka je  $L_1$  Laguerreov model, a  $L_2$  cilindrični model Laguerreove ravnine. Skup  $\mathcal{T}_1$  je skup koplja, a  $\mathcal{T}_2$  skup točaka cilindra dok skup  $\mathcal{C}_1$  predstavlja cikluse, a skup  $\mathcal{C}_2$  nevertikalne ravninske presjeke cilindra.

Definirat ćemo funkciju  $\rho: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$  koja će biti "točkovna komponenta" izomorfizma (vidi definiciju 2.7). Funkcija  $\rho$  koplju  $S$  pridružuje točku cilindra na sljedeći način: Bez smanjenja općenitosti, uzmimo da koplje  $S$  ima koordinate  $(a_0, a_1, a_2, 1)$ , tada vrijedi  $\rho: (a_0, a_1, a_2, 1) \mapsto (-a_2, a_1, -a_0)$ . Dokažimo da je točka  $(-a_2, a_1, -a_0)$  točka sa cilindra  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Uvrstimo koordinate točke u jednadžbu cilindra  $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (-a_2)^2 + a_1^2 = 1$ , očito točka  $(-a_2, a_1, -a_0)$  zadovoljava jednadžbu cilindra zbog  $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$ . Želimo pokazati da je funkcija  $\rho$  bijekcija, tj. da ima inverznu funkciju. Neka je  $(x, y, z)$  točka na cilindru kojoj je pridruženo koplje s koordinatama  $(-z, y, -x, 1)$ . Vidimo da su to valjane koordinate koplja jer je  $x^2 + y^2 = 1$ . To je inverzno preslikavanje od  $\rho$  pa zaključujemo da je  $\rho$  bijekcija.

Sada definiramo funkciju  $\psi: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  koja ciklusima pridružuje ravninske presjeke cilindra. Ako je ciklus dan koordinatama  $(1, x_1, x_2, x_3)$  neka je  $\psi(1, x_1, x_2, x_3)$  presjek cilindra ravninom  $-(x_2)x + x_1y - z + x_3 = 0 \iff x_2x - x_1y + z = x_3$ . Ta ravnina nije vertikalna jer njezin vektor normale  $(x_2, -x_1, 1)$  nije okomit na vektor  $(0, 0, 1)$ . Dakle, preslikavanje  $\psi$  je dobro definirano. Za funkciju  $\psi$  također mora vrijediti da je bijekcija. Funkcija  $\psi^{-1}$  ravninskom presjeku cilindra treba pridruživati ciklus. Neka je  $Ax + By + Cz = D$  ravninski presjek, bez smanjenja općenitosti uzmimo da je  $C = 1$ . Tad je ravninskom presjeku  $Ax + By + z = D$  pridružen ciklus  $(1, -B, A, D)$ . Vidimo da su to valjane koordinate ciklusa jer je prva koordinata različita od 0. Očito je to inverzno preslikavanje od  $\psi$  pa zaključujemo da je  $\psi$  bijekcija.

Treba još dokazati da funkcije  $\rho$  i  $\psi$  čuvaju incidenciju, tj.

$$(a_0, a_1, a_2, 1)I(1, x_1, x_2, x_3) \iff \rho(a_0, a_1, a_2, 1)I\psi(1, x_1, x_2, x_3).$$

Prema teoremu 4.4 vrijedi

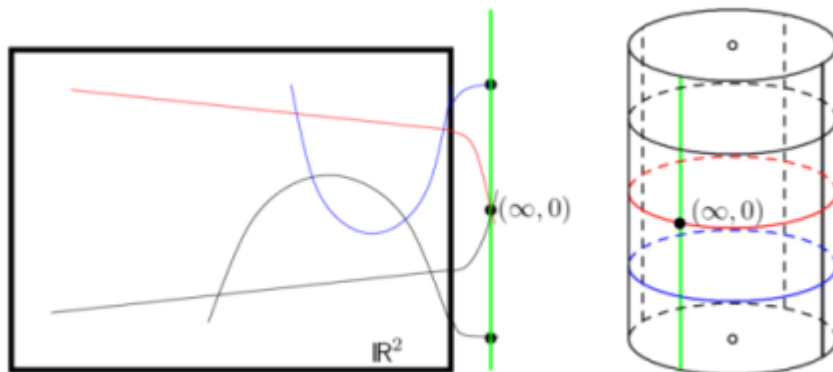
$$(a_0, a_1, a_2, 1)I(1, x_1, x_2, x_3) \iff a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + x_3 = 0.$$

Moramo dokazati da je to ekvivalentno s incidentnosti točke cilindra  $(-a_2, a_1, -a_0)$  s ravninskim presjekom  $x_2x - x_1y + z = x_3$ . Uvrstimo li koordinate točke u jednadžbu ravnine dobijemo  $x_2(-a_2) - x_1a_1 - a_0 = x_3$ ,

sređivanjem izraza vidimo da je  $-a_2x_2 - a_1x_1 - a_0 = x_3$ , tj. ekvivalentan je s jednadžbom koju smo dobili iz teorema 4.4. Dakle, funkcije  $\rho$  i  $\psi$  čuvaju incidenciju.

Pokazali smo da je Blaschkeovo preslikavanje dobro definiran izomorfizam između Laguerreovog i cilindričnog modela Laguerreove ravnine.

## 6 Model s pomoću parabola



Slika 17: (slika preuzeta iz [9])

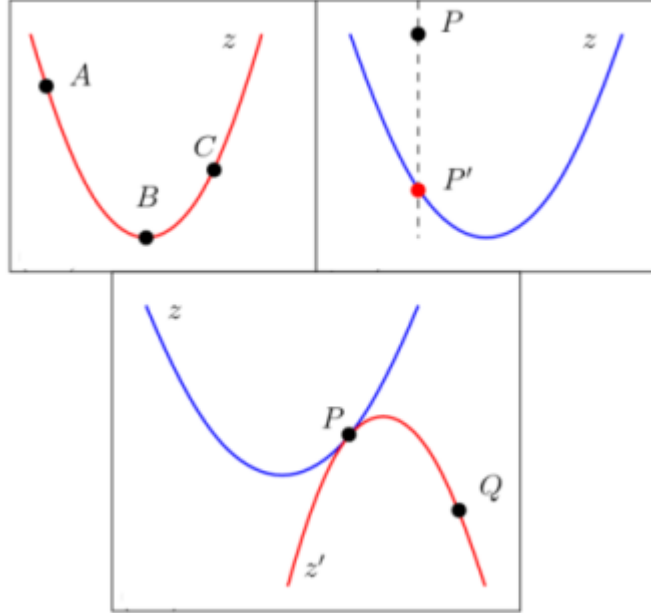
Ovdje ćemo razmatrati model klasične Laguerreove ravnine u kojem cikluse čine parabole. Točnije, model opisuje incidenciju krivulja  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , parabola u slučaju  $a \neq 0$  i pravaca ako je  $a = 0$ , s točkama realne afine ravnine. Incidencijska struktura je u ovom modelu definirana na sljedeći način: skup točaka je  $\mathcal{T} := \mathbb{R}^2 \cup (\{\infty\} \times \mathbb{R})$ ,  $\infty \notin \mathbb{R}$ , skup ciklusa je  $\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\} \cup \{(\infty, a)\} \mid a, b, c \in \mathbb{R}$ , a relacija incidencije je relacija pripadanja  $\in$ . Svakoj paraboli i pravcu je dodana točka  $(\infty, a)$  radi pojednostavljenja strukture (slika 17). Incidencijska struktura  $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = (\mathcal{T}, \mathcal{C}, I)$  iz ovog modela naziva se klasična Laguerreova ravnina. Točke koje imaju istu  $x$ -koordinatu su paralelne, jer očito ne pripadaju istoj krivulji s jednadžbom  $y = ax^2 + bx + c$ .

Ovaj model Laguerreove ravnine izomorfan je cilindričnom modelu. Dokažat ćemo aksiome Laguerreove ravnine za ovaj model:

1. Uzmimo neke tri neparalelne točke iz  $\mathcal{T}$ . Neka su to točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  s koordinatama  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  i  $(x_3, y_3)$ . Točke su međusobno neparalelne što znači  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 \neq x_3$  i  $x_2 \neq x_3$ . Te tri točke su spojene ciklusom, parabolom ili pravcem. Trebamo dokazati da taj ciklus postoji i jedinstven je. Pretpostavimo da točke pripadaju ciklusu koji ima jednadžbu  $y = ax^2 + bx + c$ . Sve tri točke zadovoljavaju tu jednadžbu, tj. vrijedi

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c,$$



Slika 18: Aksiomi Laguerreove ravnine (slika preuzeta iz [9])

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c.$$

Imamo sustav tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Kako bismo dokazali da ciklus koji sadrži te tri točke postoji i jedinstven je, pokazat ćemo da ovaj sustav ima jedinstveno rješenje. To vrijedi ako je determinanta sustava različita od 0:

$$D = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3).$$

Determinantu ovog sustava smo prepoznali kao Vandermondeovu determinantu. Očito je  $D \neq 0$  zbog  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 \neq x_3$  i  $x_2 \neq x_3$ . Dokazali smo da za bilo koje u parovima neparalelne točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  postoji jedinstveni ciklus  $c$  koji ih sadrži.

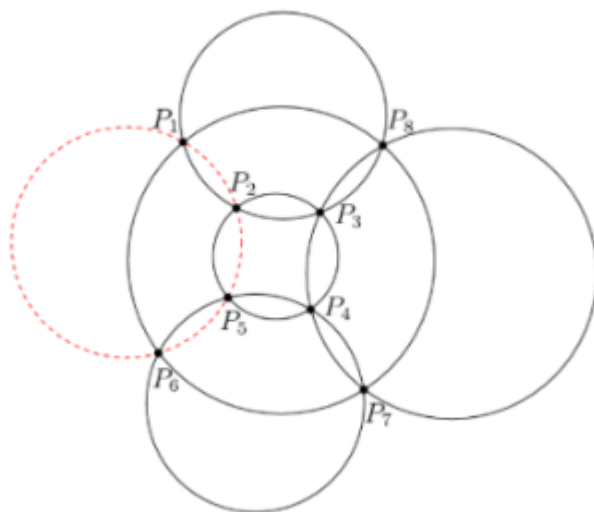
2. Imamo zadan jedan ciklus  $c$  i dvije točke  $P$  i  $Q$ . Točka  $P$  je na ciklusu, a  $Q$  nije. U [2, cjelina 4.3.2] dokazano je da grupa automorfizama Laguerreove ravnine  $\mathcal{L}(\mathbb{R})$  djeluje tranzitivno na točkama. Zato se u dokazu drugog aksioma možemo ograničiti na slučaj kad je  $P = (\infty, 0)$ . Tada je ciklus  $c$  pravac s jednadžbom  $y = bx + c$ , a  $Q$  je neka točka koja

ne pripada tom pravcu. Trebamo dokazati da postoji jedinstveni ciklus  $d$  koji prolazi kroz  $Q$  i dodiruje ciklus  $c$  u točki  $P$ . Po Euklidovom petom postulatu postoji jedinstveni pravac koji prolazi kroz  $Q$  i paralelan je s pravcem  $y = bx + c$ . Taj pravac je traženi ciklus  $d$ .

3. Neka je  $P$  neka točka iz skupa  $\mathcal{T}$ , a  $c$  neki ciklus iz skupa  $\mathcal{C}$ . Ako točka  $P$  leži na ciklusu  $c$ , onda je sama ta točka paralelna sebi. Ako točka  $P$  ne pripada ciklusu  $c$ , točkom  $P$  moguće je povući vertikalni pravac koji će sjeći dani ciklus u nekoj točki. Ta točka ne pripada ciklusu  $c$  i paralelna je s  $P$ .
4. Model pomou parabola je još jedan beskonačan model koji zadovoljava četvrti aksiom Laguerreove ravnine.

Četiri točke  $A, B, C$  i  $D$  su konciklične ako postoji ciklus  $c$  za koji vrijedi da su  $A, B, C, D \in c$ . Ako generaliziramo klasični model Laguerreove ravnine, tj. zamjenimo polje  $\mathbb{R}$  proizvoljnim poljem  $K$  opet imamo primjer Laguerreove ravnine koji označavamo s  $\mathcal{L}(K)$ . Sljedeći teorem nećemo dokazivati, samo ćemo ga iskazati i ilustrirati.

**Teorem 6.1** (Miquelov teorem). *Za Laguerreovu ravninu  $\mathcal{L}(K)$  vrijedi sljedeće: ako za bilo kojih osam u parovima neparalnih točaka  $P_1, \dots, P_8$  koje mogu biti dodjeljene vrhovima kocke vrijedi da vrhovi na pet stranica odgovaraju koncikličnim četvorkama, onda su i vrhovi šeste stranice također konciklični.*



Slika 19: Miquelov teorem (slika preuzeta iz [2])

Teorem možemo opisati i preko slike 19, na kojoj su radi preglednosti nacrtane kružnice umjesto parabola ili pravaca. Ako su točke  $(P_1, P_2, P_3, P_8)$ ,  $(P_3, P_4, P_7, P_8)$ ,  $(P_4, P_5, P_6, P_7)$ ,  $(P_2, P_3, P_4, P_5)$  i  $(P_1, P_6, P_7, P_8)$  konciklične, onda su i točke  $(P_1, P_2, P_5, P_6)$  također konciklične. Pokazuje se da Miquelov teorem karakterizira Laguerreove ravnine dobivene preko modela  $\mathcal{L}(K)$  za neko polje  $K$ . Točnije, ako u Laguerreovoj ravnini  $L$  vrijedi Miquelov teorem, onda postoji polje  $K$  takvo da je  $L$  izomorfna modelu  $\mathcal{L}(K)$ .



## Literatura

- [1] W. Benz, *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [2] E. Hartmann, *Planar Circle Geometries, an Introduction to Möbius, Laguerre and Minkowski planes*, skripta, Department of Mathematics, Darmstadt University of Technology. Dostupno na: [www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/circlegeom.pdf](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~ehartmann/circlegeom.pdf)
- [3] H. Havlicek, *Divisible designs, Laguerre Geometry, and Beyond*, Summer School on Combinatorial Geometry and Optimisation "Giuseppe Tallini", Brescia, Italija, 2004.
- [4] T. Knox, *Laguerre Planes: A Basic Introduction*, 2009. Dostupno na: [math.usdenver.edu/~tvis/Teaching/4220spring09/Assignments/Tam-Knox.pdf](http://math.usdenver.edu/~tvis/Teaching/4220spring09/Assignments/Tam-Knox.pdf)
- [5] Ž. Milin Šipuš, M. Bombardelli *Analitička geometrija*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2008. Dostupno na: [web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/predavanja.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/predavanja.pdf)
- [6] J. J. O'Connor, E. F. Robertson, *Edmond Nicolas Laguerre*. Dostupno na: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Laguerre.html> (rujan 2015.)
- [7] J. Šiftar, V. Krčadinac, *Konačne geometrije*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, 2012. Dostupno na: [web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf](http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kg/kg-skripta.pdf)
- [8] Wikipedija, *Edmond Laguerre*. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Edmond\\_Laguerre](https://en.wikipedia.org/wiki/Edmond_Laguerre) (rujan 2015.)
- [9] Wikipedija, *Laguerre plane*. Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre\\_plane](https://en.wikipedia.org/wiki/Laguerre_plane) (rujan 2015.)

## Sažetak

U ovom radu bavimo se Laguerreovom geometrijom. Navodimo više modela koji zadovoljavaju aksiome Laguerreove ravnine te ih posebno dokazujemo za svaki od modela. Aksiomi Laguerreove ravnine su:

- **Aksiom 1.** Tri u parovima neparalelne točke spojene su jedinstvenim ciklusom.
- **Aksiom 2.** Za svaki ciklus  $c$  i za svake dvije neparalelne točke  $PIc$  i  $QIc$ , postoji jedinstveni ciklus  $d$  kroz  $Q$  koji dodiruje ciklus  $c$  u točki  $P$ .
- **Aksiom 3.** Za svaku točku  $P$  i ciklus  $c$ , postoji jedinstvena točka na  $c$  paralelna s  $P$ .
- **Aksiom 4.** Postoji ciklus koji sadrži najmanje tri, ali ne i sve točke.

Prikazujemo neke od modela u koordinatnom sustavu. Dokazujemo da postoji izomorfizam među konačnim minimalnim modelima i isto tako među dva beskonačna modela. Na kraju pokazujemo kako možemo definirati Laguerreovu ravninu nad bilo kojim poljem.

## Summary

In this thesis we are dealing with Laguerre's geometry. We give a several models that satisfy the axioms of Laguerre's plane. We prove the axioms for each of the given models. The axioms of Laguerre plane:

- **Axiom 1.** Three pairwise non-parallel points can be joined by a unique cycle.
- **Axiom 2.** For any cycle  $c$  and any two non-parallel points  $PIc$  and  $QIc$ , there is exactly one cycle  $d$  through  $Q$  touching  $c$  in  $P$ .
- **Axiom 3.** For any point  $P$  and any cycle  $c$  there is exactly one point on  $c$  parallel with  $P$ .
- **Axiom 4.** There is a cycle containing at least three, but not all points.

We demonstrate some of the models in coordinate system. We prove that there is an isomorphism between the minimal models and between two of the infinite models. At the end we indicate the way to define Laguerre's plane over an arbitrary field.

## Životopis

Zovem se Jelena Martić. Rođena sam 14.02.1986. godine u Vinkovcima. Osnovnu školu Stjepana Cvrkovića pohađala sam u Starim Mikanovcima. Nakon završene osnovne škole, upisala sam Opću gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima. Preddiplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, matematika - smjer nastavnički, upisala sam nakon završene srednje škole. Diplomski studij na istom fakultetu upisala sam 2010. godine.