

# Numeričko rješavanje Navier-Stokeosve jednadžbe 'operator splitting' metodom

---

Galić, Marija

Master's thesis / Diplomski rad

2014

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:745939>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-08-16**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Marija Galić

**NUMERIČKO RJEŠAVANJE**  
**NAVIER-STOKESOVIH JEDNADŽBI**  
**”OPERATOR-SPLITTING” METODOM**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, rujan, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iii</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Navier-Stokesove jednačbe</b>	<b>2</b>
1.1 $L^p$ prostori i prostori Soboljeva . . . . .	2
1.2 Izvod Navier-Stokesovih jednačbi . . . . .	7
1.3 Egzistencija rješenja . . . . .	14
<b>2 Operator-splitting metode</b>	<b>24</b>
2.1 Uvod . . . . .	24
2.2 Peaceman-Rachfordova shema . . . . .	26
2.3 $\theta$ -shema . . . . .	30
<b>3 Primjena <math>\theta</math>-sheme na Navier-Stokesove jednačbe</b>	<b>36</b>
3.1 Vremenska diskretizacija . . . . .	36
3.2 Prostorna diskretizacija . . . . .	38
3.3 Potpuna diskretizacija Navier-Stokesovih jednačbi . . . . .	40
<b>4 Implementacija <math>\theta</math>-sheme</b>	<b>42</b>
4.1 FreeFEM . . . . .	42
4.2 Numerički eksperimenti . . . . .	43
<b>5 Prilozi</b>	<b>55</b>
5.1 Prilog 1 . . . . .	55
5.2 Prilog 2 . . . . .	58
<b>Bibliografija</b>	<b>62</b>

# Uvod

Navier-Stokesove jednađbe poznate su duže od stoljeća i još uvijek predstavljaju najzas-tupljeniji matematički model koji opisuje i proučava gibanje viskoznih fluida, uključujući i fenomene poput turbulentnog toka. No, one opisuju i fiziku mnogih problema akadem-skog i ekonomskog interesa, kao što su modeliranje vremena, oceanskih struja, i tok zraka oko krila. Navier-Stokesove jednađbe u svojoj punoj i pojednostavljenoj formi predstav-ljaju važan alat u dizajnu zrakoplova, automobila, proučavanju toka krvi, analizi polucije i mnogih drugi stvari. Također su i od ogromnog interesa u čistom matematičkom smislu. Naime, još uvijek nije dokazana egzistencija rješenja u trodimenzionalnom slučaju, niti glatkoća takvih rješenja, naravno ako postoje.

*Operator-splitting* metode su metode za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednađbi. Kao što i samo ime govori, ideja kod tih metoda je razdvojiti diferencijalni operator vezan uz jednađbu na dva ili više operatora. Time se rješavanje početnog težeg problema svodi na rješavanje više jednostavnijih potproblema.

U ovom diplomskom radu ćemo numerički rješavati Navier-Stokesove jednađbe tako da nakon prostorne diskretizacije napravimo vremensku diskretizaciju jednom *operator-splitting* metodom. U prvom poglavlju izvodimo navedene jednađbe i navodimo teorem o egzistenciji. U drugom poglavlju opisujemo neke *operator-splitting* metode, a zatim u trećem poglavlju primjenjujemo jednu metodu ( $\theta$ -shema) na numeričko rješavanje Navier-Stokesovih jednađbi. U preposljednjem poglavlju implementiramo tu metodu i prezenti-ramo rezultate u FreeFEM-u, a u zadnjem poglavlju kao priloge dajemo kodove koje smo koristili.

# Poglavlje 1

## Navier-Stokesove jednačbe

### 1.1 $L^p$ prostori i prostori Soboljeva

Neka je  $n \in \mathbb{N}$  i neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otvoren i povezan skup, tj. *domena*, čija je granica  $\partial\Omega$  *Lipschitzova*. To znači da je granica "dovoljno regularna" u smislu da se lokalno može prikazati kao graf Lipschitz neprekidne funkcije. Preciznije, u okolini bilo koje točke  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega$  se može prikazati kao hiperploha  $y_n = \theta(y_1, \dots, y_{n-1})$  gdje je  $\theta$  Lipschitzova funkcija, a  $(y_1, \dots, y_n)$  su pravokutne koordinate u  $\mathbb{R}^n$  koje se mogu razlikovati od koordinata proizašlih iz kanonske baze  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Definicija 1.1.1.** Za  $1 \leq p < +\infty$  definiramo prostor  $L^p(\Omega)$  kao prostor svih realnih funkcija definiranih na  $\Omega$  čija je  $p$ -ta potencija apsolutno integrabilna u odnosu na Lebesgueovu mjeru  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ , odnosno

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je izmjeriva i } \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty\}. \quad (1.1)$$

Za  $p = +\infty$  imamo prostor svih esencijalno ograničenih realnih funkcija na  $\Omega$ , tj.

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ je izmjeriva i } \exists C \text{ t.d. } |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ s.s.}\}, \quad (1.2)$$

gdje *s.s.* znači *skoro svuda*, tj. tvrdnja vrijedi svugdje osim eventualno na skupu mjere nula.

Uvedeni prostori su *Banachovi*, tj. potpuni normirani vektorski prostori, s normama

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.3)$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C : |f(\mathbf{x})| \leq C \text{ s.s.}\}. \quad (1.4)$$

**Napomena 1.1.2.** Ako je  $f$  neprekidna funkcija, onda je  $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|$ .

Za  $p = 2$ ,  $L^2(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.5)$$

**Definicija 1.1.3.** Za funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je lokalno integrabilna ako je integrabilna na svakom kompaktnom podskupu od  $\Omega$ . Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija na  $\Omega$  označavamo s  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

**Definicija 1.1.4.**  $n$ -dimenzionalni multiindeks  $\alpha$  je  $n$ -torka  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  nenegativnih cijelih brojeva.

Koristimo oznake:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
- $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$
- $\partial^\alpha f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}}$

**Definicija 1.1.5.** Nosač funkcije  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definira se kao zatvarač skupa na kojem funkcija poprima vrijednosti različite od nule, odnosno

$$\text{supp}(f) = \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Uvedimo još neke funkcijske prostore:

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ neprekidna}\}$$

$$C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \partial^\alpha f \in C(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(f) \text{ kompaktan}\}$$

Prostor  $\mathcal{D}(\Omega)$  nazivamo *prostorom test funkcija*, a kompaktnost nosača znači da postoji kompaktan skup  $K \subset \Omega$  t.d. je  $f(\mathbf{x}) = 0$  za sve  $\mathbf{x} \in \Omega \setminus K$ . Gornje definicije smo naveli kako bi u potpunosti bio razjašnjen pojam slabe derivacije.

**Definicija 1.1.6.** Neka je  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  proizvoljna funkcija. Kažemo da je  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  slaba derivacija od  $f$  po  $x_i$ , i pišemo  $g = \frac{\partial f}{\partial x_i}$  ako vrijedi

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.6)$$

Za funkciju  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  kažemo da ima slabu parcijalnu derivaciju  $\partial^\alpha f$  ako postoji funkcija  $g \in L^1_{loc}(\Omega)$  t.d. vrijedi

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \partial^\alpha \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.7)$$

Pišemo  $g = \partial^\alpha f$ .

Sada možemo definirati prostore Soboljeva.

**Definicija 1.1.7.** Za  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  je prostor svih  $L^p$  funkcija čije su slabe derivacije isto u  $L^p$ , tj.

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, \dots, n\}. \quad (1.8)$$

To su Banachovi prostori s normama

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad (1.9)$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} = \max_{i=1,\dots,n} \{ \|f\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \}, \quad p = +\infty. \quad (1.10)$$

Za  $p = 2$ ,  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\begin{aligned} (f, g)_{H^1(\Omega)} &= (f, g)_{L^2(\Omega)} + (\nabla f, \nabla g)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

**Definicija 1.1.8.** Definiramo prostor  $H^1_0(\Omega)$  kao upotpunjenje prostora  $\mathcal{D}(\Omega)$  u normi prostora  $H^1(\Omega)$ , tj.

$$H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$



$H_0^1(\Omega)$  je zatvoren potprostor od  $H^1(\Omega)$  pa je Hilbertov s naslijeđenom normom i skalarnim produktom. Nadalje, za prostor  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  vrijedi da je gust u  $H^1(\Omega)$ , tj.

$$H^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\overline{\Omega})}^{H^1(\Omega)}.$$

Važno svojstvo funkcija iz  $H^1(\Omega)$  je da imaju *trag* na  $\partial\Omega$ .

**Teorem 1.1.9.** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lipschitzova domena. Tada preslikavanje  $T$  koje svakoj funkciji iz  $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$  pridružuje njenu restrikciju na  $\partial\Omega$  ima jedinstveno proširenje do linearnog i neprekidnog operatora*

$$T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

Operator  $T$  se naziva operator traga i vrijedi

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : Tf = 0\}. \quad (1.12)$$

*Dokaz.* Dokaz teorema o tragu se može pronaći u [5]. □

Uočimo da neprekidnost operatora traga znači da postoji konsanta  $C > 0$  t.d.  $\forall f \in H^1(\Omega)$  vrijedi

$$\|Tf\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}. \quad (1.13)$$

Pisat ćemo  $Tf = f$  s obzirom da je operator traga generalizacija operatora restrikcije. Na prostoru  $H^1(\Omega)$  definiramo *polunormu*  $|f|_{H^1(\Omega)}$  kao:

$$|f|_{H^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla f|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Primijetimo da je  $|f|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}$ .

**Teorem 1.1.10.** *Pretpostavimo da je  $\Omega$  ograničena barem u jednom smjeru. Tada vrijedi Poincaréova nejednakost, tj. postoji konstanta  $C = C(\Omega)$  t.d. vrijedi*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq C|f|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall f \in H_0^1(\Omega). \quad (1.14)$$

*Dokaz.* Dokaz se može pronaći u [8], str. 290. □

Iz Poincaréove nejednakosti slijedi da je  $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$  norma na  $H_0^1(\Omega)$  ekvivalentna normi naslijeđenoj iz  $H^1(\Omega)$ . Naime,

$$\begin{aligned} |f|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|f\|_{H^1(\Omega)}^2, \\ \|f\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + |f|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C^2|f|_{H^1(\Omega)}^2 + |f|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (C^2 + 1)|f|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Dosad uvedeni prostori su zapravo specijalan slučaj općenitije familije Soboljevjevih prostora  $W^{m,p}$ , gdje je  $m \geq 0$  cijeli broj, a  $p \geq 1$  realan broj. Ako je  $m = 0$ , prostor  $W^{m,p}(\Omega)$  definiramo kao

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega), \quad (1.15)$$

inače

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\}. \quad (1.16)$$

To su također Banachovi prostori s normama

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}, \quad p = +\infty.$$

Za  $p = 2$ ,  $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$  je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$(f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^\alpha f \partial^\alpha g \, dx.$$

Nadalje, prostor  $W_0^{m,p}(\Omega)$  definiramo kao

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

Karakteriziramo ga pomoću sljedećeg teorema.

**Teorem 1.1.11.** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lipschitzova domena. Tada vrijedi:*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega) : \partial^\alpha f = 0 \text{ na } \partial\Omega, \forall |\alpha| \leq m - 1\}. \quad (1.17)$$

*Dokaz.* Dokaz se može pogledati u [8], str. 273. □

Ovo poglavlje ćemo zaključiti definicijom i svojstvima još jedne klase funkcijskih prostora koji su korisni u analizi vremenski ovisnih problema, tj. prostora  $L^p(0, T; X)$ , gdje je  $1 \leq p \leq +\infty$ , a  $X$  je Banachov prostor opskrbljen normom  $\|\cdot\|$ .

**Definicija 1.1.12.** *Funkcija  $f : (0, T) \rightarrow X$  pripada prostoru  $L^p(0, T; X)$  ako je funkcija  $t \rightarrow \|f(t)\|$  izmjeriva na  $(0, T)$  i ako je*

$$\begin{cases} \int_0^T \|f(t)\|^p \, dt < +\infty, & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{t \in (0, T)} \|f(t)\| < +\infty, & p = +\infty. \end{cases} \quad (1.18)$$

Definirani prostori su Banachovi s normama

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|f(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \|f(t)\|, & p = +\infty. \end{cases} \quad (1.19)$$

U specijalnom slučaju kada je  $X$  Hilbertov sa skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot)$ , onda je  $L^2(0, T; X)$  Hilbertov prostor sa skalarnim produktom

$$\{f, g\} \rightarrow \int_0^T (f(t), g(t)) dt, \quad \forall f, g \in L^2(0, T; X). \quad (1.20)$$

## 1.2 Izvod Navier-Stokesovih jednadžbi

### Jednadžba kontinuiteta

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  Lipschitzova domena, koja je ispunjena fluidom. Želimo opisati gibanje tog fluida. Neka je  $\mathbf{x} \in \Omega$  proizvoljna točka i promatrajmo česticu fluida koja prolazi kroz  $\mathbf{x}$  u trenutku  $t$ . Brzina te čestice je funkcija  $\mathbf{u}$  koja ovisi o  $\mathbf{x}$  i  $t$ . Dakle, za svako fiksirano vrijeme,  $\mathbf{u}$  je vektorsko polje na  $\Omega$ . Pretpostavljamo da fluid ima dobro definiranu *gustoću mase*  $\rho(\mathbf{x}, t)$  u svakom trenutku  $t$ .

Fiksirajmo  $D \subset \Omega$ . Masa fluida sadržanog u  $D$  u trenutku  $t$  iznosi

$$m(D, t) = \int_D \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

*Princip očuvanja mase* kaže da je povećanje mase u  $D$  jednako masi koja ulazi u  $D$  kroz  $\partial D$ , tj.

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho d\mathbf{x} = - \int_{\partial D} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.21)$$

Uočimo da je s desne strane predznak minus jer je  $\mathbf{n}$  jedinična vanjska normala. Područje integracije ne ovisi o  $t$  pa derivacija i integral mogu zamijeniti mjesta. Stoga je lijeva strana jednaka

$$\int_D \frac{\partial}{\partial t} \rho d\mathbf{x}.$$

Desna strana je prema *teoremu o divergenciji* jednaka

$$- \int_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Konačno, dobivamo jednakost

$$\int_D \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

koja vrijedi za svaki  $D \subset \Omega$ . Iz osnovne leme varijacijskog računa slijedi jednadžba

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.22)$$

koju zovemo *jednadžba kontinuiteta*.

### Jednadžba gibanja

Za  $\mathbf{x} \in \Omega$  neka  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  opisuje trajektoriju čestice koja se nalazi u točki  $\mathbf{x}$  u trenutku  $t = 0$ . Pretpostavljamo da je  $\varphi$  dovoljno glatka da se račun može provesti i da je, za fiksirani  $t$ ,  $\varphi$  invertibilna. Neka  $\varphi_t$  označava preslikavanje  $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$ , tj. za fiksirani  $t$ ,  $\varphi_t$  preslikava česticu iz pozicije u trenutku  $t = 0$  u njezinu poziciju u trenutku  $t$ . Ako je  $D \subset \Omega$  fiksirana poddomena, tada je  $D_t = \varphi_t(D)$  položaj od  $D$  u trenutku  $t$ .

*Newtonov zakon gibanja* kaže da je promjena količine gibanja tijela jednaka sili koja djeluje na tijelo. Količina gibanja je vektorska fizikalna veličina koja je definirana kao umnožak mase tijela i njegove brzine. Primjenom spomenutog zakona na našu fiksiranu poddomenu  $D \subset \Omega$  koja se giba dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} \mathbf{q} dS, \quad (1.23)$$

gdje je  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  gustoća volumnih sila po jediničnoj masi, a  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$  gustoća površinskih sila po jediničnoj površini. Za daljnji račun treba nam *drugi Reynoldsov transportni teorem*. Prije teorema navodimo lemu čiji dokaz ispuštamo (dokaz se može se pronaći u [3]).

**Lema 1.2.1.** *Neka je  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dovoljno glatko preslikavanje koje opisuje gibanje fluida. Tada za  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \det(\nabla \varphi(\mathbf{x}, t))$  vrijedi*

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t). \quad (1.24)$$

**Teorem 1.2.2** (Prvi Reynoldsov transportni teorem). *Neka je  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibanje,  $D \subset \Omega$  i  $g : \Omega_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija. Tada vrijedi:*

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} g d\mathbf{x} = \int_{D_t} (\partial_t g + \operatorname{div}(g \mathbf{u})) d\mathbf{x}. \quad (1.25)$$

*Dokaz.* Zamjenom varijabli lijevu stranu možemo drugačije zapisati:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} g \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_D g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}.$$

S obzirom da područje integracije ne ovisi o vremenu, derivacija i integral mogu zamijeniti mjesta. Sada imamo:

$$\begin{aligned} & \int_D \frac{\partial}{\partial t} (g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_D \left( \frac{\partial}{\partial t} (g(\varphi(\mathbf{x}, t), t)) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_D \left( \nabla g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \cdot \partial_t \varphi(\mathbf{x}, t) + \partial_t g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) + g(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t), t) \right) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D_t} (\nabla g \cdot \mathbf{u} + \partial_t g + g \operatorname{div} \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D_t} (\partial_t g + \operatorname{div}(g\mathbf{u})) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Primijetimo da smo u drugoj jednakosti iskoristili Lemu 1.2.1. □

**Teorem 1.2.3** (Drugi Reynoldsov transportni teorem). *Neka je  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibanje,  $D \subset \Omega$ ,  $\rho : \Omega_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gustoća i  $g : \Omega_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija. Tada vrijedi:*

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho g \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho (\partial_t g + \nabla g \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.26)$$

*Tvrdnja vrijedi i za glatku funkciju  $\mathbf{g} : \Omega_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tj.*

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{g} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho (\partial_t \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{g}) \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.27)$$

*Dokaz.* Iz prvog transportnog teorema slijedi da je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho g \, d\mathbf{x} &= \int_{D_t} (\partial_t(\rho g) + \nabla(\rho g) \cdot \mathbf{u} + \rho g(\operatorname{div} \mathbf{u})) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D_t} (\partial_t \rho g + \rho \partial_t g + (g \nabla \rho + \rho \nabla g) \cdot \mathbf{u} + \rho g(\operatorname{div} \mathbf{u})) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D_t} ((\partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u}) g + \rho (\partial_t g + \nabla g \cdot \mathbf{u})) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{D_t} \rho (\partial_t g + \nabla g \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili jednadžbu (1.22). Slično se dokaže i za vektorsku funkciju  $\mathbf{g} : \Omega_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . □

Koristeći drugi transportni teorem imamo da je lijeva strana u (1.23) jednaka:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) \, d\mathbf{x}.$$

Trebamo još transformirati posljednji integral u (1.23).

**Teorem 1.2.4** (Cauchyjev teorem). *Neka je gustoća volumnih sila  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidna funkcija i neka je gustoća površinskih sila  $\mathbf{q} : \Omega \times \partial K(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidno diferencijabilna po prvoj varijabli,  $\forall \mathbf{n} \in \partial K(0, 1)$ , i neprekidna po drugoj varijabli,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ . Tada postoji neprekidno diferencijabilan tenzor  $\mathbf{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  takav da  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  i  $\forall \mathbf{n} \in \partial K(0, 1)$  vrijedi*

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}. \quad (1.28)$$

**Napomena 1.2.5.**  $\mathbf{T}$  je i simetričan, i zovemo ga Cauchyjev tenzor naprezanja. Dokaz Cauchyjevog teorema može se naći u [4], str. 62.

Primjenom Cauchyjevog teorema i teorema o divergenciji dobivamo jednakost

$$\int_{D_t} \rho (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \rho \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{D_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \, d\mathbf{x}$$

koja vrijedi za svaku poddomenu  $D_t$  koja se giba. Ponovno, primjenom osnovne leme varijacijskog računa dobijemo novu jednadžbu koju zovemo *jednadžba gibanja*

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f}. \quad (1.29)$$

## Neviskozni i viskozni fluidi

U slučaju *neviskoznog fluida*, tenzor naprezanja  $\mathbf{T}$  je oblika

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I},$$

gdje je  $p$  pritisak, a  $\mathbf{I}$  jedinični  $3 \times 3$  tenzor. Zbog  $\operatorname{div} \mathbf{T} = -\nabla p$  jednadžba (1.29) poprima oblik

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (1.30)$$

Jednadžba (1.30) je *Eulerova jednadžba* za neviskozne fluide. Ona dolazi u kompletu s jednažbom (1.22). Napomenimo da je sustav određen s te dvije jednadžbe nepotpun jer imamo tri nepoznanice  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  i  $p$ , a samo dvije jednadžbe. Da zatvorimo sustav moramo imati dodatne jednadžbe.

U slučaju *viskoznog fluida*, tenzor  $\mathbf{T}$  ima oblik

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' - p\mathbf{I},$$

gdje je  $\mathbf{T}'$  simetrični  $3 \times 3$  tenzor (poznat i kao *viskozni tenzor naprezanja*) koji je funkcija tenzora deformacije  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T).$$

Ako je fluid i *barotropan* (to znači da njegova gustoća ovisi samo o tlaku, a ne npr. i o temperaturi),  $T'$  poprima oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= 2\mu \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))\mathbf{I} \\ &= 2\mu \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) + \lambda \text{tr}(\text{sym}(\nabla \mathbf{u}))\mathbf{I} \\ &= 2\mu \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) + \lambda (\text{div} \mathbf{u})\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Primijetimo da  $T'$  linearno ovisi o  $\nabla \mathbf{u}$ . Fluide s tim svojstvom nazivamo *Newtonovim fluidima*. Koeficijenti  $\mu$  i  $\lambda$  su koeficijenti viskoznosti i općenito su funkcije temperature. Ako je tok *izotermalan*, tj. temperatura je uniformno konstantna u području toka  $\Omega$ , jednadžba gibanja (1.29) poprima oblik

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u}) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla(\text{div} \mathbf{u}) - \nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (1.31)$$

Naime,

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{T}' &= 2\mu \text{div}(\text{sym}(\nabla \mathbf{u})) + \lambda \text{div}((\text{div} \mathbf{u})\mathbf{I}) \\ &= \mu \text{div}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda \nabla(\text{div} \mathbf{u}) \\ &= \mu \Delta \mathbf{u} + \mu \nabla(\text{div} \mathbf{u}) + \lambda \nabla(\text{div} \mathbf{u}). \end{aligned}$$

### Svojstvo inkompresibilnosti

*Inkompresibilni fluidi* su oni kod kojih je volumen svakog dijela fluida koji se giba konstantan u vremenu, tj.

$$\text{vol}(D_t) = \int_{D_t} d\mathbf{x} = \text{const}. \quad (1.32)$$

Dakle, inkompresibilnost je ekvivalentna

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{D_t} d\mathbf{x} = \int_{D_t} \text{div} \mathbf{u} d\mathbf{x}. \quad (1.33)$$

Primijetimo da smo za drugu jednakost iskoristili prvi Reynoldsov transportni teorem. Kako gornja jednakost vrijedi za svaku poddomenu  $D_t$  koja se giba, dobivamo uvjet inkompresibilnosti:

$$\text{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.34)$$

Uočimo da je taj uvjet ekvivalentan uvjetu  $\mathbf{J} = \det(\nabla\varphi) = 1$ .

Ako je gustoća mase  $\rho$  konstantna funkcija od  $\mathbf{x}$  i  $t$ , jednadžba kontinuiteta (1.22) se svodi na

$$0 = \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \nabla\rho \cdot \mathbf{u} + \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = \rho\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{div}\mathbf{u},$$

što očito povlači inkompresibilnost.

Od sada se koncentriramo na Newtonove fluide s konstantom gustoćom mase. Iz svega što smo dosad izveli, slijedi da je tok takvih fluida modeliran jednadžbama:

$$\begin{cases} \rho(\partial_t\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u}) - \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \rho\mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.35)$$

Jednadžbe (1.35) se zovu *Navier-Stokesove jednadžbe*. Ime su dobile po francuskom fizičaru i inženjeru Claude-Louis Navieru (1785.-1836.) i irskom matematičaru i fizičaru George Gabriel Stokesu (1819.-1903.). Glavni cilj ovog rada je numeričko rješavanje ovih jednadžbi upotpunjenih pogodno odabranim početnim i rubnim uvjetima.

Ako prvu jednadžbu u (1.35) podijelimo s  $\rho$  dobivamo

$$\partial_t\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{f}, \quad (1.36)$$

gdje je  $\nu = \mu/\rho$  koeficijent kinematičke viskoznosti.

Sada ćemo diskutirati neka skalirajuća svojstva Navier-Stokesovih jednadžbi s ciljem uvođenja parametra koji mjeri utjecaj viskoznosti na tok. Neka je  $L$  karakteristična duljina, a  $U$  karakteristična brzina. Ti brojevi se biraju ovisno o domeni na kojoj se problem promatra. Na primjer, ako promatramo tok kroz sferu,  $L$  može biti polumjer ili promjer sfere, a  $U$  norma brzine fluida u beskonačnosti. Njihov izbor određuje i karakteristično vrijeme  $T = \frac{L}{U}$ . Uvodimo nove bezdimenzionalne varijable:

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad \mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad t' = \frac{t}{T}. \quad (1.37)$$

Nadalje, neka je:

$$p' = \frac{p}{A}, \quad \mathbf{f}' = \frac{\mathbf{f}}{B}, \quad (1.38)$$

gdje su  $A$  i  $B$  neke konstante koje ćemo kasnije odrediti. Napomenimo da je  $\mathbf{u}$  funkcija od  $\mathbf{x}$  i  $t$ , dok je  $\mathbf{u}'$  funkcija od  $\mathbf{x}'$  i  $t'$ .

Pogledajmo koje jednadžbe zadovoljavaju  $\mathbf{u}'$  i  $p'$ .

- $\partial_r\mathbf{u}' = \partial_r\left(\frac{\mathbf{u}}{U}\right) = \partial_t\left(\frac{\mathbf{u}}{U}\right)\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{L}{U^2}\partial_t\mathbf{u}$



- $(\nabla' \mathbf{u}') \mathbf{u}' = \frac{1}{U^2} (\nabla' \mathbf{u}) \mathbf{u} = \frac{1}{U^2} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{L}{U^2} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}$
- $\Delta' \mathbf{u}' = \frac{1}{U} \Delta' \mathbf{u} = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i'^2} = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} \right)^2 = \frac{L^2}{U} \Delta \mathbf{u}$
- $\nabla' p' = \frac{1}{A} \nabla' p = \frac{1}{A} \nabla p \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{L}{A} \nabla p$
- $\operatorname{div}' \mathbf{u}' = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = \frac{1}{U} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_i'} = \frac{L}{U} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$

Sada je

$$\begin{aligned}
 \partial_t' \mathbf{u}' + (\nabla' \mathbf{u}') \mathbf{u}' &= \frac{L}{U^2} (\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u}) \\
 &= \frac{L}{U^2} (\nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}) \\
 &= \frac{L}{U^2} \left( \nu \frac{U}{L^2} \Delta' \mathbf{u}' - \frac{1}{\rho} \frac{A}{L} \nabla p' + B \mathbf{f}' \right) \\
 &= \frac{\nu}{LU} \Delta' \mathbf{u}' - \frac{A}{\rho U^2} \nabla p' + \frac{LB}{U^2} \mathbf{f}'.
 \end{aligned}$$

Ako stavimo  $A = \rho U^2$ ,  $B = U^2/L$ , slijedi

$$\partial_t' \mathbf{u}' + (\nabla' \mathbf{u}') \mathbf{u}' = \frac{\nu}{LU} \Delta' \mathbf{u}' - \nabla' p' + \mathbf{f}'.$$

Reynoldsov broj  $Re$  je bezdimenzionalni broj definiran kao

$$Re = \frac{LU}{\nu} = \frac{\rho LU}{\mu}. \quad (1.39)$$

Promatrajmo dva toka kroz dvije sfere različitih polumjera čiji su centri smješteni u ishodištu, jedan s fluidom čija je brzina  $U_\infty = 10$  km/h kroz sferu polumjera 10 m i drugi s istim fluidom čija je brzina  $U_\infty = 100$  km/h, ali kroz sferu polumjera 1 m. Ako izaberemo da  $L$  bude polumjer sfere, a  $U$  brzina  $U_\infty$  u beskonačnosti, tada je Reynoldsov broj jednak za oba toka. Stoga su jednadžbe koje zadovoljavaju bezdimenzionalne varijable jednake za oba toka. Za dva toka koja imaju istu geometriju i isti Reynoldsov broj kažemo da su *slična*. Ta ideja o sličnosti tokova se koristi prilikom dizajniranja eksperimentalnih modela. Konačno, imamo bezdimenzionalne Navier-Stokesove jednadžbe (maknuli smo crticu zbog ljepšeg zapisa):

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.40)$$

### 1.3 Egzistencija rješenja

#### Početni i rubni uvjeti

Promatramo izotermalni tok viskoznog inkompresibilnog Newtonovog fluida u  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tijekom vremenskog intervala  $[0, T]$ ,  $0 < T \leq +\infty$ . Navedeni tok je modeliran s

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} & \text{u } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.41)$$

Ove jednadžbe nisu dovoljne da odredimo  $\mathbf{u}$  i  $p$  jer imaju beskonačno mnogo rješenja. Da smanjimo broj rješenja, čak i dobijemo jedinstveno, moramo uzeti u obzir i neke uvjete. Na primjer, *početni uvjet*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{u } \Omega, \quad (1.42)$$

uz  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ , i *rubni uvjet*

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \quad (1.43)$$

gdje je  $\mathbf{g}$  funkcija od  $\mathbf{x}$  i  $t$  definirana na  $\partial\Omega \times (0, T)$ . S  $\mathbf{u}(t)$  označimo funkciju  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , analogno i  $\mathbf{g}(t)$ . Ako je  $\Omega$  ograničena, inkompresibilnost i teorem o divergenciji povlače da  $\forall t \in [0, T]$  vrijedi

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}(t) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

i to je nužan uvjet za egzistenciju rješenja.

Rubni uvjet (1.43) je Dirichletovog tipa. Može se promatrati i mješoviti rubni uvjet

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 \quad \text{na } \Gamma_0 \times (0, T), \quad \mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{g}_1 \quad \text{na } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (1.44)$$

gdje su  $\Gamma_0$  i  $\Gamma_1$  podskupovi od  $\partial\Omega$  koji zadovoljavaju  $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$  i  $\overline{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} = \partial\Omega$ ,  $\mathbf{g}_0$  i  $\mathbf{g}_1$  su zadane funkcije, a  $\mathbf{T}$  je tenzor naprezanja za inkompresibilni Newtonov fluid koji je dan s  $\mathbf{T} = 2\mu \operatorname{sym}(\nabla \mathbf{u}) - p\mathbf{I}$  (nema člana uz  $\lambda$  zbog inkompresibilnosti). Još jedan mješoviti rubni uvjet koji se često pojavljuje u primjenama je

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_0 \quad \text{na } \Gamma_0 \times (0, T), \quad \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p\mathbf{n} = \mathbf{g}_1 \quad \text{na } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (1.45)$$

gdje je  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = (\nabla u_1 \cdot \mathbf{n}, \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}, \nabla u_3 \cdot \mathbf{n})$ .

## Varijacijska formulacija

Naš sljedeći cilj je varijacijska formulacija jednadžbi (1.41) uz početni uvjet (1.42) i rubni uvjet (1.44). Definiramo novi funkcijski prostor

$$V_0 = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n : \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_0\}. \quad (1.46)$$

To je Hilbertov prostor sa skalarnim produktom i normom

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{V_0} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0,$$

$$\|\mathbf{v}\|_{V_0} = \left( \sum_{i=1}^n \|v_i\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0.$$

U specijalnom slučaju kad je  $\Gamma_0 \neq \emptyset$  (uz  $\int_{\Gamma_0} dS > 0$ ) i  $\Omega$  ograničena, na  $V_0$  možemo koristiti sljedeći skalarni produkt i normu

$$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{w} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla w_i \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \left( \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} |\nabla v_i|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pretpostavimo da su sve funkcije koje se pojavljuju u (1.41), (1.42) i (1.44) dovoljno glatke da možemo provesti račun. Skalarno pomnožimo prvu jednadžbu u (1.41) s proizvoljnom funkcijom  $\mathbf{v} \in V_0$  i integriramo po  $\Omega$ . Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}(t) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}(t) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_1} \nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}(t) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(p(t)\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(t) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_1} p(t)\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p(t) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Kad sve uvrstimo, dobijemo da za gotovo svaki  $t \in (0, T)$  vrijedi

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}(t) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p(t) \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Gamma_1} \nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_1} p(t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Gonju jednakost moramo još malo srediti da uvažimo rubni uvjet

$$\mathbf{Tn} = \left( 2\nu \operatorname{sym}(\nabla \mathbf{u}) - \frac{p}{\rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{n} = \mathbf{g}_1.$$

Sređujemo desnu stranu:

$$\begin{aligned}
 & \nu \int_{\Gamma_1} \nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \int_{\Gamma_1} p(t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \left( \nu \nabla \mathbf{u}(t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \frac{p(t)}{\rho} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \left( \nu \nabla \mathbf{u}(t) - \frac{p(t)}{\rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \left( \nu \nabla \mathbf{u}(t) + \nu \nabla \mathbf{u}(t)^T - \frac{p(t)}{\rho} \mathbf{I} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \nu \nabla \mathbf{u}(t)^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} \nu \nabla \mathbf{u}(t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial \Omega} \nu \nabla \mathbf{u}(t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nu \nabla \mathbf{u}(t) \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u}(t)^T : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}(t)^T) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u}(t)^T : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}(t)) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nu \nabla \mathbf{u}(t)^T : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Konačno imamo varijacijsku formulaciju Navier-Stokesovih jednadžbi

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + 2\nu \int_{\Omega} \text{sym}(\nabla \mathbf{u}(t)) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p(t) \text{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Neumannov rubni uvjet  $\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{g}_1$  na  $\Gamma_1 \times (0, T)$  je automatski ugrađen u formulaciju (1.47). Pretpostavimo sad da umjesto rubnog uvjeta (1.44) imamo rubni uvjet (1.45). Množenjem prve jednadžbe u (1.40) s  $\mathbf{v} \in V_0$ , integriranjem po  $\Omega$  i primjenom Greenove formule dobijemo da za gotovo svaki  $t \in (0, T)$  vrijedi

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}(t)) \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}(t) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \frac{1}{\rho} \int_{\Omega} p(t) \text{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Varijacijska formulacija druge jednadžbe u (1.41), odnosno uvjeta inkompresibilnosti glasi

$$\int_{\Omega} q \text{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \quad (1.49)$$

Ova formulacija bitna je za mješovitu formulaciju te aproksimaciju metodom konačnih elemenata. Mi ćemo uvjet  $\text{div} \mathbf{u} = 0$  ubaciti u funkcijski prostor.

## Teorem o egzistenciji

Na kraju želimo nešto reći o Navier-Stokesovim jednadžbama s homogenim Dirichletovim rubnim uvjetom. Najprije ćemo napraviti varijacijsku formulaciju, a zatim ćemo iskazati teorem o egzistenciji slabih rješenja za  $n \leq 4$ . Zbog jednostavnosti pretpostavljamo da je Lipschitzova domena  $\Omega$  ograničena. Također, bez smanjenja općenitosti odsad pa nadalje uzimamo da je  $\rho = 1$ . U svojoj klasičnoj formulaciji, inicijalno-rubni problem za Navier-Stokesove jednadžbe glasi ovako: naći funkcije  $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  i  $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{u } \Omega \times (0, T), \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} = 0 & \text{na } \partial\Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{uz } \text{div} \mathbf{u}_0 = 0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Funkcije  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{u}_0$  su zadane. Kako je  $\partial\Omega = \Gamma_0$ , prostor  $V_0$  je zapravo jednak  $H_0^1(\Omega)^n$ . Uvodimo i tri nova prostora:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

$$V = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

$$H = \{\mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ na } \partial\Omega\}.$$

Jer je  $\Omega$  ograničena, prostor  $V$  je Hilbertov sa skalarnim produktom

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

a  $H$  je Hilbertov sa skalaranim produktom  $(\cdot, \cdot)$  naslijeđenim iz  $L^2(\Omega)^n$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

**Teorem 1.3.1** (Riesz-Frechétov teorem o reprezentaciji). *Neka je  $H$  Hilbertov prostor sa skalarnim produktom  $(\cdot, \cdot)$  i  $\varphi \in H'$ , gdje je  $H'$  prostor linearnih i neprekidnih funkcionala na  $H$ . Tada postoji jedinstveni  $f \in H$  takav da je*

$$\langle \varphi, u \rangle_{H', H} = (f, u), \quad \forall u \in H. \quad (1.51)$$

*Dokaz.* Vidjeti [2], str. 135. □

**Napomena 1.3.2** (Gelfandova trojka). *Vratimo se sad na gore definirane prostore  $V$  i  $H$ .  $V$  je sadržan u  $H$ , štoviše gust je u  $H$  i injekcija je neprekidna, tj.  $\|\mathbf{v}\|_H \leq C\|\mathbf{v}\|_V, \forall \mathbf{v} \in V$ . Nadalje, postoji kanonsko preslikavanje  $T : H' \rightarrow V'$  koje je jednostavno restrikcija na  $V$  linearnih funkcionala  $\varphi$  s  $H$ , tj.  $\langle T\varphi, v \rangle_{V', V} = \langle \varphi, v \rangle_{H', H}$ .  $T$  je injekcija i slika od  $T$  je gusta u  $V'$ . Identificirajući  $H$  i  $H'$  možemo pisati*

$$V \subset H \equiv H' \subset V'.$$

*Stoga se dualni produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V', V}$  i skalarni produkt  $(\cdot, \cdot)$  podudaraju kad oba imaju smisla.*

Vratimo se na varijacijsku formulaciju. Množimo prvu jednadžbu u (1.50) s  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  i integriramo po  $\Omega$ . Kako  $\mathbf{v}$  iščezava prije ruba i kako je  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , ostane nam samo

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (1.52)$$

Zbog gustoće od  $\mathcal{V}$  u  $V$ , prethodna jednakost vrijedi i za svaki  $\mathbf{v} \in V$ . Primijetimo da je

$$\int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})).$$

Za svaki  $\mathbf{u} \in V$  forma  $\mathbf{v} \rightarrow ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))$  je linearna i neprekidna na  $V$ . Stoga postoji element duala  $V'$  kojeg označavamo s  $A\mathbf{u}$  takav da vrijedi

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = ((\mathbf{u}, \mathbf{v})), \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Prema napomeni 1.3.2, skalarni produkt funkcija  $\mathbf{f} \in H$  i  $\mathbf{v} \in V$

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})$$

možemo identificirati s dualnim produktom  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$  na  $V' \times V$ .

Definiramo novu formu na  $V_0 \times V_0 \times V_0$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla \mathbf{v})\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (\partial_i v_j) w_j \, d\mathbf{x}. \quad (1.53)$$

Forma  $b$  je trilinearna i neprekidna i lako se vidi da za  $\mathbf{u} \in V$  vrijedi

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V_0. \quad (1.54)$$

Naime,

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} u_i (\partial_i v_j) v_j \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_i \partial_i (v_j v_j) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} \partial_i (u_i v_j v_j) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\partial_i u_i) v_j v_j \, d\mathbf{x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{\partial\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i n_i}_{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0} \sum_{j=1}^n v_j v_j \, dS - \int_{\Omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n \partial_i u_i}_{\operatorname{div} \mathbf{u} = 0} \sum_{j=1}^n v_j v_j \, d\mathbf{x} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Za  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  s  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  označimo linearan funkcional na  $V$ , tj. element iz  $V'$  definiran s

$$\langle B(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in V \quad (1.55)$$

i stavimo  $B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \in V'$ ,  $\forall \mathbf{u} \in V$ .

Slaba formulacija problema (1.50) sada glasi: za zadane  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$  i  $\mathbf{u}_0 \in H$  treba naći

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \quad (1.56)$$

t.d. vrijedi

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad (1.57)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (1.58)$$

Ako je  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$ , uvjet (1.58) ne mora imati smisla. Ali, ako je  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$  i  $\mathbf{u}$  zadovoljava (1.57), pokazat ćemo da je tada  $\mathbf{u}$  skoro svuda jednaka neprekidnoj funkciji pa uvjet (1.58) ima smisla. Najprije navodimo lemu koja će nam reći nešto više o derivacijama funkcija koje imaju vrijednosti u Banachovim prostorima. Dokaz ispuštamo, a može se pronaći u [15], str. 250.

**Lema 1.3.3.** *Neka je  $X$  Banachov prostor i  $X'$  njegov dual i neka su  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{g}$  dvije funkcije koje pripadaju  $L^1(0, T; X)$ . Tada su sljedeća tri uvjeta ekvivalentna:*

1.  $\mathbf{u}$  je skoro svuda jednaka primitivnoj funkciji od  $\mathbf{g}$ , tj.

$$\mathbf{u}(t) = \xi + \int_0^t \mathbf{g}(s) ds, \quad \xi \in X, \quad \text{s.s. } t \in [a, b], \quad (1.59)$$

2. za svaku test funkciju  $\phi \in \mathcal{D}((a, b))$  vrijedi

$$\int_a^b \mathbf{u}(t)\phi'(t) dt = - \int_a^b \mathbf{g}(t)\phi(t) dt, \quad (1.60)$$

3. za svaki  $\eta \in X'$  vrijedi

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \eta \rangle = \langle \mathbf{g}, \eta \rangle, \quad (1.61)$$

u smislu distribucija na  $(a, b)$ .

Ako vrijede uvjeti,  $\mathbf{u}$  je s.s. jednaka neprekidnoj funkciji iz  $[a, b]$  u  $X$ .

**Lema 1.3.4.** *Pretpostavljamo da je dimenzija prostora  $n \leq 4$  i da  $\mathbf{u}$  pripada prostoru  $L^2(0, T; V)$ . Tada funkcija  $B(\mathbf{u})$  definirana pomoću*

$$\langle B(\mathbf{u}(t)), \mathbf{v} \rangle_{V', V} = b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \text{s.s. } t \in [0, T], \quad (1.62)$$

pripada prostoru  $L^1(0, T; V')$ .



*Dokaz.* Za skoro svaki  $t$ ,  $B(\mathbf{u}(t))$  je element iz  $V'$ , a izmjerivost funkcije

$$t \in [0, T] \rightarrow B(\mathbf{u}(t)) \in V'$$

lako se provjeri. Nadalje, kako je forma  $b$  trilinearna i neprekidna na  $V$ , slijedi

$$|\langle B(\mathbf{u}(t)), \mathbf{v} \rangle_{V', V}| = |b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}(t)\|_V^2 \|\mathbf{v}\|_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

pa je po definiciji norme linearnog operatora

$$\|B(\mathbf{u}(t))\|_{V'} \leq \|\mathbf{u}(t)\|_V^2.$$

Konačno je

$$\int_0^T \|B(\mathbf{u}(t))\|_{V'} dt \leq \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_V^2 dt < +\infty$$

čime je lema dokazana. □

Sada, ako je  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$  i ako zadovoljava (1.57) iz prethodnog računa i Leme 1.3.4 slijedi da (1.57) možemo pisati kao

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (1.63)$$

$A\mathbf{u}$  pripada prostoru  $L^2(0, T; V')$ , isto kao i  $\mathbf{f}$ , a jer je  $L^2(0, T; V') \subset L^1(0, T; V')$  posebno pripadaju i prostoru  $L^1(0, T; V')$ . Prema Lemi (1.3.4) je  $B\mathbf{u} \in L^1(0, T; V')$ . Zaključujemo da funkcija  $\mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u}$  pripada prostoru  $L^1(0, T; V')$ . Iz Leme 1.3.3 sada slijedi

$$\begin{cases} \mathbf{u}' \in L^1(0, T; V') \\ \mathbf{u}' = \mathbf{f} - \nu A\mathbf{u} - B\mathbf{u} \end{cases} \quad (1.64)$$

i da je  $\mathbf{u}$  skoro svuda jednaka neprekidnoj funkciji iz  $[0, T]$  u  $V'$ . Stoga uvjet (1.58) ima smisla. Alternativna formulacija problema (1.56)-(1.58) sada glasi: za zadane  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$  i  $\mathbf{u}_0 \in H$  treba naći funkciju  $\mathbf{u}$  koja zadovoljava

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T; V), \quad \mathbf{u}' \in L^1(0, T; V'), \quad (1.65)$$

$$\mathbf{u}' + \nu A\mathbf{u} + B\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{na } (0, T), \quad (1.66)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (1.67)$$

Vidjeli smo da je svako rješenje problema (1.56)-(1.58) ujedno i rješenje problema (1.65)-(1.67). Obrat se lako provjeri iz čega zaključujemo da su ova dva problema ekvivalentna. Egzistencija rješenja ovih problema osigurana je sljedećim teoremom.

**Teorem 1.3.5.** *Neka je dimenzija prostora  $n \leq 4$ . Neka su zadane funkcije  $\mathbf{f} \in L^2(0, T; V')$  i  $\mathbf{u}_0 \in H$ . Tada postoji barem jedna funkcija  $\mathbf{u}$  koja zadovoljava (1.65)-(1.67). Štoviše,  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$ .*

*Dokaz.* Dokaz se svodi na konstrukciju aproksimativnog rješenja Galerkinovom metodom, nakon čega se prelazi na limes. Dokaz izostavljamo, a može se pronaći u [15], str. 283.  $\square$

**Napomena 1.3.6.** *Teorem vrijedi i ako je  $\Omega$  neograničena.*

Vidimo da smo odabirom test funkcija koje zadovoljavaju  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , sveli klasični problem samo na traženje brzine, a o tlaku ne znamo ništa. Egzistenciju tlaka dat će nam propozicije koje navodimo nakon sljedeće napomene o dualnom prostoru od  $H_0^1(\Omega)$ .

**Napomena 1.3.7.** *S  $H^{-1}(\Omega)$  označavamo dualni prostor od  $H_0^1(\Omega)$ . Funkcija  $f \in L^2(\Omega)$  definira linearan funkcional  $F \in H^{-1}(\Omega)$  pomoću*

$$\langle F, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} = (f, v)_{L^2(\Omega)}.$$

*To znači da je  $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ , a ulaganje je i neprekidno. Identificiramo  $F$  i  $f$  i jednostavno pišemo  $f$ . No, ti linearni funkcionali nisu jedini elementi iz  $H^{-1}(\Omega)$ . Može se pokazati da se  $H^{-1}(\Omega)$  identificira s prostorom distribucija na  $\Omega$  koje su sume derivacija prvog reda u smislu distribucija funkcija iz  $L^2(\Omega)$ , odnosno,  $H^{-1}(\Omega)$  se sastoji od distribucija  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  koje zadovoljavaju*

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^n \partial_i f_i, \quad \text{gdje su } f_0, f_i \in L^2(\Omega).$$

*Dokaz se može pronaći u [8], str. 299.*

**Propozicija 1.3.8.** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  otvoren skup i  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Nužan i dovoljan uvjet da bude*

$$\mathbf{f} = \nabla p, \quad \text{za neki } p \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad (1.68)$$

*jest da je  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ .*

*Dokaz.* Vidjeti [15], str. 14.  $\square$

**Propozicija 1.3.9.** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ograničena Lipschitzova domena.*

1. *Ako distribucija  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ima sve derivacije prvog reda  $\partial_i p$ ,  $i = 1, \dots, n$  u  $L^2(\Omega)$ , onda je  $p \in L^2(\Omega)$  i*

$$\|p\|_{L_0^2(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.69)$$

*gdje je  $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0\}$ .*

2. Ako distribucija  $p \in \mathcal{D}'(\Omega)$  ima sve derivacije prvog reda  $\partial_i p, i = 1, \dots, n$  u  $H^{-1}(\Omega)$ , tada je  $p \in L^2(\Omega)$  i vrijedi

$$\|p\|_{L^2_0(\Omega)} \leq c(\Omega) \|\nabla p\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (1.70)$$

U oba slučaja, ako je  $\Omega$  proizvoljan otvoren skup u  $\mathbb{R}^n$ , onda je  $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ .

Dokaz. Vidjeti [15], str. 15. □

Prije primjene ovih propozicija, uvedimo neke nove oznake

$$U(t) = \int_0^t \mathbf{u}(s) ds, \quad \beta(t) = \int_0^t B\mathbf{u}(s) ds, \quad F(t) = \int_0^t \mathbf{f}(s) ds. \quad (1.71)$$

Ako je  $\mathbf{u}$  rješenje od (1.65)-(1.67), tada su za svaki  $n \leq 4$ ,  $U, \beta, F \in C([0, T]; V')$ . Integriranjem izraza (1.66)

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + \nu \langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle B\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad / \int_0^t$$

dobivamo

$$\nu \langle U(t), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{g}(t), \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad \forall t \in [0, T],$$

gdje je

$$\mathbf{g}(t) = F(t) - \beta(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{g} \in C([0, T]; V').$$

Kako je  $\nu \langle U(t), \mathbf{v} \rangle = -\nu \langle \Delta U(t), \mathbf{v} \rangle$ , primjenom Propozicija 1.3.8 i 1.3.9 dobijemo egzistenciju funkcije  $p(t) \in L^2(\Omega)$  koja zadovoljava

$$-\nu \Delta U(t) + \nabla p(t) = \mathbf{g}(t) \quad (1.72)$$

ili

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0 - \nu \Delta U(t) + \beta(t) + \nabla p(t) = F(t). \quad (1.73)$$

Kako je  $\nabla p = \mathbf{g} + \nu \Delta U$ , zaključujemo da je  $\nabla p \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)^n)$  pa je

$$p \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

To nam omogućuje deriviranje u smislu distribucija u (1.73); ako još stavimo

$$p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.74)$$

dobijemo

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{u} \quad \Omega \times (0, T). \quad (1.75)$$

# Poglavlje 2

## Operator-splitting metode

### 2.1 Uvod

Rješavanje prethodno uvedenih Navier-Stokesovih jednadžbi je netrivialan zadatak jer treba riješiti sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ( $n + 1$ , ako je  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ), uvažavajući uvjet inkompresibilnosti  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . U idućem dijelu ovog rada pokazat ćemo kako vremenska diskretizacija jednom *operator-splitting* metodom djelomično nadilazi ove probleme, zapravo ćemo razdvojiti poteškoće vezane uz nelinearnost s onima vezanim uz uvjet inkompresibilnosti.

No, prije svega, prisjetimo se nekih definicija i rezultata iz numeričke analize koji će nam biti korisni u nastavku.

Neka je zadan inicijalni problem za sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, tj. za zadane  $t_0 \in I$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval,  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  i  $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  treba naći funkciju  $\mathbf{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  koja zadovoljava

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), & t \geq t_0, \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Problem (2.1) ima jedinstveno rješenje ako je funkcija  $\mathbf{f}$  Lipschitzova po drugoj varijabli, odnosno ako postoji konstanta  $C > 0$  takva da  $\forall t \in \bar{I}$  i  $\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^n$  vrijedi

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq C \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|,$$

gdje je  $\|\cdot\|$  neka norma na  $\mathbb{R}^n$ . Riješiti problem (2.1) numerički znači izračunati aproksimacije  $\mathbf{y}_i$  vrijednosti  $\mathbf{y}(t_i)$  u konačno točaka  $t_1, \dots, t_m$  u zadanom intervalu  $[t_0, T]$ . Najosnovniji primjer eksplicitne metode je *Eulerova metoda* i u njoj je vrijednost izraza  $\mathbf{y}_{i+1}$  dobivena eksplicitnim izrazom koji koristi informaciju samo iz koraka  $t_i$ , odnosno

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(t_i, \mathbf{y}_i), \quad (2.2)$$

gdje je  $h$  korak metode,  $h = t_{i+1} - t_i, \forall i = 0, \dots, m - 1$ .

Još jedan osnovni primjer je *implicitna Eulerova metoda* koja se razlikuje od eksplicitne Eulerove metode po tome što se aproksimacija  $\mathbf{y}_{i+1}$  računa koristeći informaciju iz koraka  $t_{i+1}$ , odnosno

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + h\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}). \quad (2.3)$$

**Definicija 2.1.1.** *Lokalna greška diskretizacije numeričke metode je pogreška napravljena u jednom koraku metode, tj. razlika između aproksimativnog i egzaktnog rješenja u koraku  $t_{i+1}$  uz pretpostavku da u  $t_i$  imamo egzaktno rješenje.*

**Definicija 2.1.2.** *Za numeričku metodu kažemo da je  $p$ -tog reda točnosti ako za lokalnu grešku diskretizacije  $\varepsilon(t, h)$  vrijedi*

$$\|\varepsilon(t, h)\| \leq Ch^{p+1}, \quad (2.4)$$

gdje je konstanta  $C$  neovisna o  $t$  i  $h$ .

**Definicija 2.1.3.** *Globalna greška diskretizacije u trenutku  $t_i$  je definirana s*

$$\gamma_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}(t_i).$$

**Definicija 2.1.4.** *Za numeričku metodu kažemo da je reda konvergencije  $p$  ako postoji konstanta  $K$  t.d. za globalnu grešku diskretizacije vrijedi*

$$\max_{i=0, \dots, m} \|\gamma_i\| \leq Kh^p. \quad (2.5)$$

**Napomena 2.1.5.** *Obje Eulerove metode su reda 1, što znači da je lokalna greška diskretizacije proporcionalna s  $h^2$ , a globalna s  $h$ .*

Na kraju ovog ponavljajućeg dijela reći ćemo nešto o stabilnosti, odnosno nestabilnosti. *Kruta jednadžba* je diferencijalna jednadžba za koju su određene numeričke metode nestabilne, osim ako ne uzmemo ekstremno mali korak diskretizacije. Ponašanje numeričkih metoda na krutim problemima može se analizirati njihovom primjenom na inicijalni problem

$$\begin{cases} y'(t) = ky(t), & k \in \mathbb{C}, \quad t \geq 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

čije je rješenje  $y(t) = e^{kt}$ . Ako je  $\operatorname{Re}(k) < 0$ ,  $y(t)$  teži k nuli kad  $t \rightarrow \infty$ . Ako numerička metoda ima isto takvo ponašanje, tj. ako rješenje teži k nuli kad  $t \rightarrow \infty$  uz uvjet  $\operatorname{Re}(k) < 0$ , onda kažemo da je ona *A-stabilna*.

**Napomena 2.1.6.** *Eksplicitna Eulerova metoda nije A-stabilna, za razliku od implicitne Eulerove metode koja je A-stabilna.*

## 2.2 Peaceman-Rachfordova shema

Promatramo sljedeći inicijalni problem

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} + A(\varphi, t) = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

gdje je, za zadani  $t$ ,  $A(\cdot, t) : H \rightarrow H$  i  $\varphi_0 \in H$ , a  $H$  je Hilbertov prostor. Pretpostavimo sada da operator  $A$  ima netrivialnu dekompoziciju

$$A = A_1 + A_2. \quad (2.7)$$

Prirodno je sada rješavati problem (2.6) numeričkim metodama uvažavajući rastav (2.7). U tome će nam pomoći *operator-splitting* metode, a prva koju uvodimo je *Peaceman-Rachfordova* shema.

Neka je  $\Delta t$  korak vremenske diskretizacije, i s  $\varphi^{n+\alpha}$  označimo aproksimaciju od  $\varphi((n + \alpha)\Delta t)$ , gdje je  $\varphi$  rješenje problema (2.6). Glavna ideja u Peaceman-Rachfordovoj shemi je prilično jednostavna:

- podijelimo vremenski interval  $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$  u dva podintervala koristeći središnju točku  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  i pretpostavljajući da je poznato aproksimativno rješenje  $\varphi^n$  u trenutku  $t = n\Delta t$ ,
- izračunamo  $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$  koristeći implicitnu Eulerovu metodu za  $A_1$  i eksplicitnu Eulerovu metodu za  $A_2$  nad intervalom  $[n\Delta t, (n + \frac{1}{2})\Delta t]$ ,
- izračunamo  $\varphi^{n+1}$  koristeći implicitnu Eulerovu metodu za  $A_2$  i eksplicitnu Eulerovu metodu za  $A_1$  nad intervalom  $[(n + \frac{1}{2})\Delta t, (n + 1)\Delta t]$ .

Zapišimo to matematički

$$\begin{cases} \varphi^0 = \varphi_0, \\ \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\Delta t/2} + A_1(\varphi^{n+\frac{1}{2}}, (n + \frac{1}{2})\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + A_1(\varphi^{n+\frac{1}{2}}, (n + \frac{1}{2})\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1}, (n + 1)\Delta t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Konvergencija sheme (2.8) je dokazana u [13], uz pretpostavku monotonosti operatora  $A_1$  i  $A_2$ ;  $A_1$  i  $A_2$  mogu biti nelinearni, neograničeni ili imati neka druga nepoželjna svojstva. Sada ćemo proučiti točnost i stabilnost metode (2.8) pretpostavljajući trivijalnu situaciju

gdje je u (2.6)  $H = \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$  i  $A$  je simetrična, pozitivno definitna  $n \times n$  matrica koja je neovisna o  $t$ . Rješenje pripadnog autonomnog sustava (2.6) je

$$\varphi(t) = e^{-At} \varphi_0. \quad (2.9)$$

Ako su  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  svojstvene vrijednosti od  $A$  i  $\varphi_{01}, \dots, \varphi_{0n}$  pripadni svojstveni vektori, tada su linearno nezavisna rješenja sustava (2.6) dana s

$$\varphi_i(t) = e^{-\lambda_i t} \varphi_{0i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Kako bi mogli primijeniti shemu (2.8), promatramo rastav matrice  $A$

$$A = \alpha A + \beta A, \quad (2.11)$$

gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  koeficijenti koji zadovoljavaju  $\alpha + \beta = 1$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$ . Ako u (2.8) stavimo  $A_1 = \alpha A$  i  $A_2 = \beta A$  imamo

$$\begin{cases} \varphi^{n+\frac{1}{2}} = \varphi^n - \frac{\Delta t}{2} \alpha A \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \beta A \varphi^n, \\ \varphi^{n+1} = \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \alpha A \varphi^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \beta A \varphi^{n+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A) \varphi^{n+\frac{1}{2}} = (I - \frac{\Delta t}{2} \beta A) \varphi^n, \\ (I + \frac{\Delta t}{2} \beta A) \varphi^{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A) \varphi^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

što na kraju daje

$$\varphi^{n+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2} \beta A\right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A\right) \left(I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A\right)^{-1} \left(I - \frac{\Delta t}{2} \beta A\right) \varphi^n. \quad (2.12)$$

Kako svi članovi u prethodnoj jednadžbi komutiraju, diskretni analogoni od (2.9) i (2.10) dani su sljedećim izrazima

$$\varphi^n = \left(I + \frac{\Delta t}{2} \beta A\right)^{-n} \left(I - \frac{\Delta t}{2} \alpha A\right)^n \left(I + \frac{\Delta t}{2} \alpha A\right)^{-n} \left(I - \frac{\Delta t}{2} \beta A\right)^n \varphi_0, \quad (2.13)$$

$$\varphi_i^n = \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \alpha \lambda_i}\right)^n \left(\frac{1 - \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_i}{1 + \frac{\Delta t}{2} \beta \lambda_i}\right)^n \varphi_{0i}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.14)$$

respektivno. Kako je  $0 \leq \left|\frac{1 - \xi}{1 + \xi}\right| < 1$ ,  $\forall \xi > 0$  imamo da je  $|\varphi_i^n| \leq |\varphi_{0i}|$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall n \geq 1$ , što implicira bezuvjetnu stabilnost Peaceman-Rachfordove sheme (barem za jednostavan slučaj kao što je naš). Također imamo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_i^n = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , što je diskretni analogon

od  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Proučimo sada točnost gornje sheme. Motivirani s (2.14) uvodimo racionalnu funkciju

$$R_1(\xi) = \left( \frac{1 - \alpha \frac{\xi}{2}}{1 + \alpha \frac{\xi}{2}} \right) \left( \frac{1 - \beta \frac{\xi}{2}}{1 + \beta \frac{\xi}{2}} \right). \quad (2.15)$$

U okolini točke  $\xi = 0$  imamo

$$R_1(\xi) = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} - (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) \frac{\xi^3}{4} + O(1)\xi^4, \quad (2.16)$$

dok je s druge strane

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{6} + O(1)\xi^4. \quad (2.17)$$

Uspoređujući gornje dvije jednakosti zaključujemo da je shema (2.8) drugog reda točnosti za svaki par  $\alpha, \beta$  koji zadovoljava  $\alpha + \beta = 1, 0 < \alpha, \beta < 1$ . No, ako uzmemo  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , imamo  $(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)/4 = 3/16 = 1/6 + 1/48$ , što pokazuje da je u tom slučaju shema (2.8) "skoro" trećeg reda točnosti.

Relacija (2.10) pokazuje da veća  $\lambda_i$  implicira bržu konvergenciju  $\varphi_i(t)$  k nuli kad  $t \rightarrow \infty$ . Promatrajući diskretni analogon od (2.10), odnosno (2.14), vidimo da za velike vrijednosti od  $\lambda_i \Delta t$  imamo da je  $R_1(\lambda_i \Delta t) \sim 1$  što znači da u (2.14)  $\varphi_i^n$  konvergira sporo k nuli kad  $n \rightarrow \infty$ . Iz ovog svojstva očekujemo da shema (2.8) neće biti prikladna za prikazivanje brzih prolaznih fenomena i pronalaženje eventualnih stacionarnih rješenja (rješenja od  $A(\varphi, +\infty) = 0$ ) jednadžbe (2.6) ako je ona kruta.

Promotrimo sada poseban slučaj kada je u (2.6)

$$A(\varphi, t) = B(\varphi) - f(t), \quad (2.18)$$

i pretpostavimo da je  $B = B_1 + B_2$ . Ako želimo iskoristiti shemu (2.8) uvažavajući dekompoziciju od  $B$ , postavlja se pitanje kako u tom slučaju tretirati izraz  $f(t)$ . Stoga promotrimo situaciju kad je  $B = 0$ . Prirodno je rastaviti  $f$  kao

$$f = f_1 + f_2, \quad (2.19)$$

gdje je

$$f_1 = \alpha f, \quad f_2 = \beta f, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta = 1. \quad (2.20)$$

Primjenom sheme (2.8) na rješenje problema

$$\frac{d\varphi}{dt} = f, \quad \varphi(0) = \varphi_0,$$



dobijemo da je

$$\varphi^0 = \varphi_0 \quad (2.21)$$

i da za  $n \geq 0$  vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\Delta t/2} &= \alpha f((n + \frac{1}{2})\Delta t) + \beta f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} &= \alpha f((n + \frac{1}{2})\Delta t) + \beta f((n + 1)\Delta t), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\varphi^n = \varphi_0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{\beta}{2} (f(k\Delta t) + f((k+1)\Delta t)) + \alpha f((k + \frac{1}{2})\Delta t) \right]. \quad (2.22)$$

Iz (2.22) slijedi da je  $\varphi^n$  dobivena iz  $\varphi_0$  i  $f$  konveksnom kombinacijom *trapezne formule*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

i *Gauss-Legendreove formule*

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

na svakom podintervalu  $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ . Obje formule su drugog reda točnosti pa ako je  $f$  dovoljno glatka imamo

$$\|\varphi^n - \varphi(n\Delta t)\| = \mathcal{O}(\Delta t^2), \forall \alpha, \beta \in [0, 1], \alpha + \beta = 1.$$

Pitamo se postoje li neke vrijednosti od  $\alpha$  i  $\beta$  za koje bi imali točnost trećeg reda; ako uzmemo  $\alpha = \frac{2}{3}$  i  $\beta = \frac{1}{3}$  slijedi

$$\varphi^n = \varphi_0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{6} f(k\Delta t) + \frac{2}{3} f((k + \frac{1}{2})\Delta t) + \frac{1}{6} f((k+1)\Delta t) \right], \quad (2.23)$$

što pokazuje da je  $\varphi^n$  dobivena iz  $\varphi_0$  i  $f$  primjenom *Simpsonove formule*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

na svakom podintervalu. Kako je Simpsonova formula četvrtog reda točnosti, uz pretpostavku da je  $f$  dovoljno glatka imamo

$$\|\varphi^n - \varphi(n\Delta t)\| = \mathcal{O}(\Delta t^4), \text{ ako je } \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

Prethodni rezultati nam sugeriraju da shemu (2.8) primjenimo na rješenje problema

$$\frac{d\varphi}{dt} + B(\varphi) = f, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (2.24)$$

na sljedeći način:

$$\begin{cases} \varphi^0 = \varphi_0, \\ \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \varphi^n}{\Delta t/2} + B_1(\varphi^{n+\frac{1}{2}}) + B_2(\varphi^n) = \frac{2}{3}f((n + \frac{1}{2})\Delta t) + \frac{1}{3}f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + B_1(\varphi^{n+\frac{1}{2}}) + B_2(\varphi^{n+1}) = \frac{2}{3}f((n + \frac{1}{2})\Delta t) + \frac{1}{3}f((n + 1)\Delta t). \end{cases} \quad (2.25)$$

### 2.3 $\theta$ -shema

$\theta$ -shema koju sada opisujemo je varijanta Peaceman-Rachfordove sheme (2.8). Neka je  $\theta$  broj koji se nalazi u otvorenom intervalu  $(0, \frac{1}{2})$ . Neka je  $\Delta t$  korak vremenske diskretizacije, i neka je  $\varphi^{n+\alpha}$  aproksimacija od  $\varphi((n + \alpha)\Delta t)$ , gdje je  $\varphi$  rješenje problema (2.6). Ideja  $\theta$ -sheme je sljedeća:

- podijelimo vremenski interval  $[n\Delta t, (n + 1)\Delta t]$  u tri podintervala  $[n\Delta t, (n + \theta)\Delta t]$ ,  $[(n + \theta)\Delta t, (n + 1 - \theta)\Delta t]$ ,  $[(n + 1 - \theta)\Delta t, (n + 1)\Delta t]$ , i pretpostavljajući da je poznata aproksimacija  $\varphi^n$  u trenutku  $t = n\Delta t$ ,
- najprije računamo  $\varphi^{n+\theta}$  nad intervalom  $[n\Delta t, (n + \theta)\Delta t]$  koristeći implicitnu Eulerovu metodu za  $A_1$  i eksplicitnu Eulerovu metodu za  $A_2$ ,
- zatim računamo  $\varphi^{n+1-\theta}$  nad intervalom  $[(n + \theta)\Delta t, (n + 1 - \theta)\Delta t]$  koristeći eksplicitnu Eulerovu metodu za  $A_1$  i implicitnu Eulerovu metodu za  $A_2$ ,
- i na kraju računamo  $\varphi^{n+1}$  nad intervalom  $[(n + 1 - \theta)\Delta t, (n + 1)\Delta t]$  isto kao u prvom slučaju.

Zapišimo to matematički

$$\begin{cases} \varphi^0 = \varphi_0, \\ \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta)\Delta t) + A_2(\varphi^n, n\Delta t) = 0, \\ \frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(\varphi^{n+\theta}, (n+\theta)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) = 0, \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} + A_1(\varphi^{n+1}, (n+1)\Delta t) + A_2(\varphi^{n+1-\theta}, (n+1-\theta)\Delta t) = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

Promotrimo opet jednostavnu situaciju kad je  $H = \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  je simetrična pozitivno definitna  $n \times n$  matrica koja ne ovisi o  $t$  i gdje je  $A_1 = \alpha A$ ,  $A_2 = \beta A$  uz  $\alpha + \beta = 1$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ . Ako stavimo  $\theta' = 1 - 2\theta$ , (2.26) tada možemo zapisati kao

$$\varphi^{n+1} = (I + \alpha\theta\Delta t A)^{-2} (I - \beta\theta\Delta t A)^2 (I + \beta\theta'\Delta t A)^{-1} (I - \alpha\theta'\Delta t A) \varphi^n. \quad (2.27)$$

Diskretni analogoni od (2.9) i (2.10) sada su

$$\varphi^n = (I + \alpha\theta\Delta t A)^{-2n} (I - \beta\theta\Delta t A)^{2n} (I + \beta\theta'\Delta t A)^{-n} (I - \alpha\theta'\Delta t A)^n \varphi_0, \quad (2.28)$$

$$\varphi_i^n = \frac{(I - \beta\theta\Delta t \lambda_i)^{2n} (I - \alpha\theta'\Delta t \lambda_i)^n}{(I + \alpha\theta\Delta t \lambda_i)^{2n} (I + \beta\theta'\Delta t \lambda_i)^n} \varphi_{0i}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2.29)$$

Motivirani izrazom (2.29) definiramo racionalnu funkciju

$$R_2(\xi) = \frac{(I - \beta\theta\xi)^2 (I - \alpha\theta'\xi)}{(I + \alpha\theta\xi)^2 (I + \beta\theta'\xi)}. \quad (2.30)$$

Uočimo da je

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} |R_2(\xi)| = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (2.31)$$

Stoga je  $\alpha > \beta$  nužan uvjet za A-stabilnost  $\theta$ -sheme. Da bi imali bezuvjetnu stabilnost mora vrijediti

$$|R_2(\xi)| \leq 1, \quad \forall \xi > 0.$$

Pomnija analiza funkcije  $R_2$  bi pokazala sljedeće

$$|R_2(\xi)| < 1, \quad \forall \xi > 0, \quad \forall \theta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \quad \forall \alpha, \beta, \quad (2.32)$$

( $\alpha$  i  $\beta$  zadovoljavaju kao i dosad  $\alpha + \beta = 1$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ ), što implicira bezuvjetnu stabilnost sheme (2.26). Napomenimo da donja granica  $\frac{1}{4}$  nije optimalna za  $\theta$ , kasnije ćemo vidjeti

koja je optimalna vrijednost za  $\theta$ .

U okolini točke  $\xi = 0$  imamo

$$R_2(\xi) = 1 - \xi + [1 + (\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1)]\frac{\xi^2}{2} + O(1)\xi^3. \quad (2.33)$$

Uspoređujući (2.33) s

$$e^{-\xi} = 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2} + O(1)\xi^3. \quad (2.34)$$

zaključujemo da je  $\theta$ -shema drugog reda točnosti ako i samo ako je

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \quad (2.35)$$

i/ili

$$\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (2.36)$$

$\theta$ -shema je prvog reda točnosti ako ne vrijedi niti jedan od prethodnih uvjeta. Ako uzmemo  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  iz (2.29) i (2.30) slijedi bezuvjetna stabilnost  $\theta$ -sheme,  $\forall \theta \in (0, \frac{1}{2})$ . U tom slučaju je  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} |R_2(\xi)| = 1$  pa za tako odabrane  $\alpha$  i  $\beta$   $\theta$ -shema nije A-stabilna. No, i taj problem ima rješenje.

Promotrimo slučaj kada  $\alpha$  i  $\beta$  zadovoljavaju

$$\alpha\theta = \beta(1 - 2\theta),$$

tj. odabrani su tako da u svakom parcijalnom koraku  $\theta$ -sheme imamo istu matricu. Slijedi

$$\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta), \quad \beta = \theta/(1 - \theta). \quad (2.37)$$

Iz nužnog uvjeta za A-stabilnost, odnosno  $\alpha > \beta$ , slijedi da je

$$0 < \theta < \frac{1}{3}. \quad (2.38)$$

Ako je  $\theta = \frac{1}{3}$ , onda je  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  i taj slučaj smo već diskutirali. Ako je  $0 < \theta < \frac{1}{3}$  i ako su  $\alpha$  i  $\beta$  dani s (2.37), imamo da je  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} |R_2(\xi)| = \beta/\alpha = \theta/(1 - 2\theta) < 1$  što povlači A-stabilnost  $\theta$ -sheme pa je pogodna za računanje stacionarnih rješenja. Odabirom  $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$  dobijemo bezuvjetnu stabilnost i drugi red točnosti te je u tom slučaju  $\alpha = 2 - \sqrt{2}$  i  $\beta = \sqrt{2} - 1$ .

**Napomena 2.3.1.** Vidimo da u  $\theta$ -shemi operatori  $A_1$  i  $A_2$  imaju nesimetrične uloge. Za operator  $A_1$  su vezana dva, a za operator  $A_2$  jedan problem. Prirodno je za zaključiti da ćemo onda operator  $A_1$  odabrati tako da se odnosi na potprobleme koje je lakše riješiti, tj. koji zahtijevaju kraće vrijeme rješavanja.

Opet promatramo slučaj kada je u (2.6)

$$A(\varphi, t) = B(\varphi) - f(t), \quad B = B_1 + B_2.$$

Da bi primijenili  $\theta$ -shemu na inicijalni problem

$$\frac{d\varphi}{dt} + B(\varphi) = f, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad (2.39)$$

postupamo kao i prije. Pretpostavimo da je  $B = 0$  i rastavimo  $f$  kao

$$f = f_1 + f_2,$$

gdje je

$$f_1 = \alpha f, \quad f_2 = \beta f, \quad 0 \leq \alpha, \beta \leq 1, \quad \alpha + \beta = 1.$$

Primjenom  $\theta$ -sheme na rješenje problema

$$\frac{d\varphi}{dt} = f, \quad \varphi(0) = \varphi_0,$$

dobijemo da je

$$\varphi^0 = \varphi_0$$

i da za  $n \geq 0$  vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta \Delta t} &= \alpha f((n + \theta)\Delta t) + \beta f(n\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{\theta' \Delta t} &= \alpha f((n + \theta)\Delta t) + \beta f((n + 1 - \theta)\Delta t), \\ \frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} &= \alpha f((n + 1)\Delta t) + \beta f((n + 1 - \theta)\Delta t), \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned} \varphi^n &= \varphi_0 + \Delta t \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \beta \theta f(k\Delta t) + \alpha(1 - \theta)f((k + \theta)\Delta t) \right. \\ &\quad \left. + \beta(1 - \theta)f((k + 1 - \theta)\Delta t) + \alpha\theta f((k + 1)\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Kako je  $\beta\theta + \alpha(1 - \theta) + \beta(1 - \theta) + \alpha\theta = 1$ , formula za numeričku integraciju koja u (2.40) računa

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(s) ds$$

je najmanje prvog reda točnosti. Pogledajmo kada će biti drugog reda točnosti, odnosno kada će egzaktno integrirati polinome prvog stupnja. Vrijedi

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} s \, ds = \frac{s^2}{2} \Big|_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} = \frac{(2k+1)\Delta t^2}{2},$$

dok je s druge strane prema integracijskoj formuli

$$\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} s \, ds \approx \Delta t^2 (k + \alpha(1-\theta)\theta + \beta(1-\theta)^2 + \alpha\theta).$$

Dakle, integracijska formula iz (2.40) je drugog reda točnosti ako i samo ako vrijedi

$$\alpha(1-\theta)\theta + \beta(1-\theta)^2 + \alpha\theta = \frac{1}{2},$$

ili ekvivalentno

$$(\beta - \alpha)(2\theta^2 - 4\theta + 1) = 0.$$

Odavde opet dobivamo da je  $\theta$ -shema drugog reda točnosti ako i samo ako je

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

i/ili

$$\theta = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Prilikom primjene  $\theta$ -sheme na problem (2.39) postupamo na sljedeći način:

- Ako je  $\theta \neq 1 - 1/\sqrt{2}$ , koristimo

$$\varphi^0 = \varphi_0, \quad (2.41)$$

$$\frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) = \frac{1}{2}(f^{n+\theta} + f^n), \quad (2.42)$$

$$\frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = \frac{1}{2}(f^{n+\theta} + f^{n+1-\theta}), \quad (2.43)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^{n+1-\theta}). \quad (2.44)$$

- Ako je  $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ , možemo koristiti shemu kao i u prvom slučaju, ali jednostavniji izbor je

$$\varphi^0 = \varphi_0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) = f^{n+\theta}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = f^{n+\theta}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = f^{n+1}, \quad (2.48)$$

kad je  $\alpha = 1, \beta = 0$  ili

$$\varphi^0 = \varphi_0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\varphi^{n+\theta} - \varphi^n}{\theta\Delta t} + B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^n) = f^n, \quad (2.50)$$

$$\frac{\varphi^{n+1-\theta} - \varphi^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} B_1(\varphi^{n+\theta}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = f^{n+1-\theta}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} B_1(\varphi^{n+1}) + B_2(\varphi^{n+1-\theta}) = f^{n+1-\theta}, \quad (2.52)$$

kad je  $\alpha = 0, \beta = 1$ .

## Poglavlje 3

# Primjena $\theta$ -scheme na Navier-Stokesove jednadžbe

### 3.1 Vremenska diskretizacija

Sada ćemo diskutirati primjenu  $\theta$ -scheme na Navier-Stokesove jednadžbe:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{u} \quad \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{u} \quad \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

upotpunjene početnim uvjetom

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \text{uz} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0. \quad (3.3)$$

Pretpostavljamo da je rubni uvjet Dirichletovog tipa:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{na} \quad \partial\Omega \times (0, T). \quad (3.4)$$

Stoga je operator  $A$  u (2.6) dan s

$$A(\mathbf{u}, t) = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f} = B(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(t), \quad (3.5)$$

gdje je operator  $B$  rastavljen u obliku  $B = B_1 + B_2$ ,  $B_1 = -\alpha \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p$ ,  $B_2 = (\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} - \beta \nu \Delta \mathbf{u}$ ,  $0 < \alpha, \beta < 1$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . Za zadani  $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ , Navier-Stokesove jednadžbe rješavamo u sljedećim koracima:

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0, \quad (3.6)$$

i za  $n \geq 0$ , ako je poznata  $\mathbf{u}^n$ , dobijemo  $\mathbf{u}^{n+\theta}$ ,  $\mathbf{u}^{n+1-\theta}$  i  $\mathbf{u}^{n+1}$  kao rješenja od

$$\frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} + \nabla p^{n+\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} + \beta \nu \Delta \mathbf{u}^n - (\nabla \mathbf{u}^n)\mathbf{u}^n, \quad (3.7)$$



$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+\theta} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}^{n+\theta} = \mathbf{g}^{n+\theta}, \quad (3.9)$$

zatim od

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} + (\nabla \mathbf{u}^{n+1-\theta}) \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} + \alpha \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{g}^{n+1-\theta}, \quad (3.11)$$

i na kraju od

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1-\theta}}{\theta \Delta t} - \alpha \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} + \beta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} - (\nabla \mathbf{u}^{n+1-\theta}) \mathbf{u}^{n+1-\theta}, \quad (3.12)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1}. \quad (3.14)$$

Primjetimo da smo primjenom  $\theta$ -sheme razdvojili nelinearnost i inkompresibilnost u Navier-Stokesovim jednadžbama. Što se tiče izbora  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\theta$ , s obzirom na prethodna razmatranja i numeričke eksperimente biramo:

$$\theta = 1 - 1/\sqrt{2}, \quad (3.15)$$

$$\alpha = (1 - 2\theta)/(1 - \theta), \quad (3.16)$$

$$\beta = \theta/(1 - 2\theta). \quad (3.17)$$

**Napomena 3.1.1.** *Primijetimo da su  $\mathbf{u}^{n+\theta}$  i  $\mathbf{u}^{n+1}$  dobivene rješavanjem linearnih problema koji su bliski Stokesovom problemu:*

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & u \ \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & u \ \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{na } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.18)$$

**Napomena 3.1.2.** *Numerički eksperimenti pokazuju da praktički nema gubitka u točnosti i stabilnosti ako u (3.10) zamijenimo  $(\nabla \mathbf{u}^{n+1-\theta}) \mathbf{u}^{n+1-\theta}$  s  $(\nabla \mathbf{u}^{n+\theta}) \mathbf{u}^{n+1-\theta}$  (vidjeti [10], str. 73). Posljedica toga je da je problem*

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \mathbf{u}^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} - \beta \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1-\theta} + (\nabla \mathbf{u}^{n+\theta}) \mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{f}^{n+\theta} + \alpha \nu \Delta \mathbf{u}^{n+\theta} - \nabla p^{n+\theta}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{u}^{n+1-\theta} = \mathbf{g}^{n+1-\theta}, \quad (3.20)$$

*linaran, i stoga lakše rješiv od problema (3.10)-(3.11).*

Odsad pa nadalje koristimo  $\theta$ -shemu u kojoj je drugi parcijalni korak lineariziran.

## 3.2 Prostorna diskretizacija

U prethodnom dijelu diskutirali smo vremensku diskretizaciju jednom *operator-splitting* metodom ( $\theta$ -shema) Navier-Stokesovih jednadžbi za inkompresibilne viskozne fluide, pri čemu su te jednadžbe zadane s odgovarajućim početnim i rubnim uvjetima. Da bi na računalima mogli implementirati tu metodu, moramo napraviti i prostornu diskretizaciju. Fokusirat ćemo se na *metodu konačnih elemenata* s obzirom da ćemo  $\theta$ -shemu implementirati u FreeFEM-u koji je softver za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi baziran na metodi konačnih elemenata.

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ograničena poliedarska domena i neka je  $\mathcal{T}_h, h > 0$ , njena triangulacija, odnosno konačna familija podskupova od  $\bar{\Omega}$  koja ima sljedeća svojstva:

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K$ ;
2. Svaki  $K \in \mathcal{T}_h$  je zatvoren poliedarski skup i  $\text{Int}(K) \neq \emptyset$ ;
3. Za svaka dva različita  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$  vrijedi  $\text{Int}(K_1) \cap \text{Int}(K_2) = \emptyset$ ;
4. Svaka dva elementa  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$  za koje vrijedi  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$  imaju ili zajedničku stranicu ili zajednički vrh.

Triangulacija je dakle razbijanje domene na uniju disjunktih poliedarskih skupova (elemenata) koji je posve prekrivaju.

Neka  $P_k$  označava prostor polinoma u dvije varijable stupnja manjeg ili jednakog  $k$ . Uvodimo sljedeće diskretne prostore:

$$P_h = \{q_h \in C(\Omega) : q_h|_K \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.21)$$

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in C(\Omega)^2 : \mathbf{v}_h|_K \in (P_2)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.22)$$

Zbog zadanog Dirichletovog rubnog uvjeta, trebat će nam i prostor:

$$V_{0h} = \{\mathbf{v}_h \in V_h : \mathbf{v}_h = 0 \text{ na } \partial\Omega\}. \quad (3.23)$$

Uvedeni prostori konačnih elemenata zadovoljavaju sljedeće:

- $P_h \subset H^1(\Omega), \quad V_h \subset H^1(\Omega)^2, \quad \forall h,$
- $\forall q \in H^1(\Omega), \exists \{q_h\}_h$  t.d.  $q_h \in P_h$  i  $\lim_{h \rightarrow 0} \|q_h - q\|_{H^1(\Omega)} = 0,$
- $\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \exists \{\mathbf{v}_h\}_h$  t.d.  $\mathbf{v}_h \in V_{0h}$  i  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^2} = 0.$

Postoje i mnoge situacije u kojima domena  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  nije poliedarska. U takvim situacijama možemo  $\Omega$  aproksimirati poligonalnom domenom  $\Omega_h$  i definirati prostore konačnih elemenata za brzinu i tlak kao i prije. Time se nažalost gubi točnost u usporedbi s metodama koje uzimaju u obzir zakrivljenost granice. No, mi se nećemo baviti time, jer FreeFEM automatski radi najbolju triangulaciju domene bez obzira na njezin oblik.

Promatramo jednadžbe (3.1)-(3.3), zajedno s Dirichletovim rubnim uvjetom (3.4). Da bi imali dobro postavljen problem pretpostavljamo da je

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \text{na } (0, T)$$

i

$$\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}(0) \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } \partial\Omega.$$

Množimo jednadžbu (3.1) s  $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2$ , a jednadžbu (3.2) s  $q \in H^1(\Omega)$  i integriramo po  $\Omega$ . Koristeći parcijalnu integraciju dobijemo sljedeći problem: naći  $\{\mathbf{u}(t), p(t)\} \in H^1(\Omega)^2 \times H^1(\Omega)$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)^2, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{g}(t) \quad \text{na } \partial\Omega. \quad (3.27)$$

Prostorno aproksimiramo problem (3.1)-(3.4) na sljedeći način: naći  $\{\mathbf{u}_h(t), p_h(t)\} \in V_h \times P_h$ ,  $\forall t \in (0, T)$  tako da vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} (\nabla \mathbf{u}_h) \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega_h} p_h \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{0h}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h \in P_h, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u}_h(0) = \mathbf{u}_{0h} \in V_h, \quad (3.30)$$

$$\mathbf{u}_h(t) = \mathbf{g}_h(t) \quad \text{na } \partial\Omega_h. \quad (3.31)$$

Ako je  $\Omega$  poligonalna domena, onda je  $\Omega_h = \Omega$ . Funkcije  $\mathbf{f}_h$ ,  $\mathbf{u}_{0h}$  i  $\mathbf{g}_h$  su aproksimacije funkcija  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}_0$  i  $\mathbf{g}$  koje zadovoljavaju:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{f}_h - \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^2} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_{0h} - \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^2} &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{g}_h - \mathbf{g}\|_{L^2(\Omega)^2} &= 0.\end{aligned}$$

Funkcija  $\mathbf{g}_h$  mora zadovoljavati i

$$\int_{\partial\Omega_h} \mathbf{g}_h(t) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \text{na } (0, T).$$

Aproksimacija Navier-Stokesovih jednadžbi konačnim elementima definiranim pomoću (3.20)-(3.22) se zove  $P_1 - P_2$  aproksimacija, a konačni elementi *Taylor-Hoodovi elementi*.

### 3.3 Potpuna diskretizacija Navier-Stokesovih jednadžbi

Zapisujući  $\mathbf{u}_h$  i  $p_h$  u vektorskim bazama za  $V_h$  i  $P_h$ , respektivno, i uzimajući za test funkcije  $\mathbf{v}_h$  i  $q_h$  sve elemente vektorskih baza za  $V_{0h}$  i  $P_h$ , iz formulacije (3.28)-(3.31) dobit ćemo sustav običnih diferencijalnih jednadžbi zajedno s linearnim relacijama koje su pridružene diskretnom uvjetu inkompresibilnosti. Dakle, kako bi imali punu diskretizaciju problema (3.1)-(3.4) primijenjujemo  $\theta$ -shemu na algebarsko diferencijalni sustav (3.28)-(3.31). Time dobivamo:

$$\mathbf{u}_h^0 = \mathbf{u}_{0h} \quad (3.32)$$

i za  $n \geq 0$  ako je poznata  $\mathbf{u}_h^n$  računamo  $\{\mathbf{u}_h^{n+\theta}, p_h^{n+\theta}\} \in V_h \times P_h$ , zatim  $\mathbf{u}_h^{n+1-\theta} \in V_h$  i na kraju  $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\} \in V_h \times P_h$  rješavajući sljedeće diskretne eliptičke sustave

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_h} \frac{\mathbf{u}_h^{n+\theta} - \mathbf{u}_h^n}{\theta \Delta t} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \alpha \nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_h} p_h^{n+\theta} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+\theta} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \beta \nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^n : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\ - \int_{\Omega_h} (\nabla \mathbf{u}_h^n) \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{0h},\end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+\theta} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h \in P_h, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{u}_h^{n+\theta} = \mathbf{g}_h^{n+\theta} \quad \text{na } \partial\Omega_h, \quad (3.35)$$

zatim

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_h} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1-\theta} - \mathbf{u}_h^{n+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \beta\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1-\theta} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\Omega_h} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta}) \mathbf{u}_h^{n+1-\theta} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+\theta} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \alpha\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^{n+\theta} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\Omega_h} p_h^{n+\theta} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{0h}, \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_h^{n+1-\theta} = \mathbf{g}_h^{n+1-\theta} \quad \text{na } \partial\Omega_h, \tag{3.37}$$

i na kraju

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_h} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^{n+1-\theta}}{\theta\Delta t} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} + \alpha\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega_h} p_h^{n+1} \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
 & = \int_{\Omega_h} \mathbf{f}_h^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \beta\nu \int_{\Omega_h} \nabla \mathbf{u}_h^{n+1-\theta} : \nabla \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\Omega_h} (\nabla \mathbf{u}_h^{n+1-\theta}) \mathbf{u}_h^{n+1-\theta} \cdot \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{0h}, \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_h} q_h \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n+1} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall q_h \in P_h, \tag{3.39}$$

$$\mathbf{u}_h^{n+1} = \mathbf{g}_h^{n+1} \quad \text{na } \partial\Omega_h, \tag{3.40}$$

**Napomena 3.3.1.** Nažalost, nema poznatih rezultata o konvergenciji i stabilnosti potpuno diskretiziranog problema (3.32)-(3.40), čak i u jednostavnom slučaju kada je  $\mathbf{g} = 0$  na  $\partial\Omega$  (vidjeti [10], str. 392).

# Poglavlje 4

## Implementacija $\theta$ -scheme

### 4.1 FreeFEM

U posljednjem dijelu ovog diplomskog rada implementirat ćemo uvedenu  $\theta$ -shemu za rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi u FreeFEM-u. To je softver za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi baziran na metodi konačnih elemenata. Iznimno je jednostavan za korištenje, sam generira triangulaciju domene, kao i prostore konačnih elemenata (na korisniku je samo da zada koji tip želi koristiti). Problem koji treba riješiti zadaje se u svojoj varijacijskoj formulaciji, a zatim se sustav običnih diferencijalnih jednadžbi (dobiven uzimanjem baznih funkcija kao test funkcija) rješava nekim od ponuđenih rješavača. Najbolji način za ukratko opisati i shvatiti kako FreeFEM funkcionira je pomoću primjera. Pretpostavimo da trebamo riješiti *Poissonovu* jednadžbu: za zadanu funkciju  $f(x, y)$  naći funkciju  $u(x, y)$  tako da vrijedi

$$-\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad (4.1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (4.2)$$

gdje je  $\Omega$  jedinična kružnica. Sada ćemo analizirati sljedeći kod:

```
1: border C(t=0,2*pi){x=cos(t); y=sin(t);}
2: mesh Th = buildmesh (C(50));
3: fespace Vh(Th,P1);
4: Vh u, v;
5: func f = x*y;
6: solve Poisson(u,v,solver=LU) =
7:   int2d(Th)(dx(u)*dx(v)+dy(u)*dy(v))
8:   - int2d(Th)(f*v)
9:   + on(C,u=0);
10: plot(u);
```

**1:** Granica je opisana parametarskim jednadžbama za  $x$  i  $y$ . Kada je  $\Gamma = \sum_{j=0}^J \Gamma_j$ , svaka krivulja  $\Gamma_j$  mora biti definirana, i dvije krivulje mogu se podudarati samo u krajnjim točkama.

**2:** Triangulacija  $\mathcal{T}_h$  domene  $\Omega$  je automatski generirana naredbom `buildmesh(C(50))` koristeći 50 točaka na  $C = \Gamma$ . Pretpostavlja se da se domena nalazi s lijeve strane granice koja je implicitno orijentirana svojom parametrizacijom. Profinjenje triangulacije postiže se uzimanjem većeg broja točaka na  $\Gamma$ .

**3:** Prostor konačnih elemenata je uobičajeno prostor polinomijalnih funkcija na elementima (u ovom slučaju na trokutima). Funkcija `fespace(Vh,P1)` definira  $V_h$  kao prostor neprekidnih funkcija koje su affine u  $x$  i  $y$  na svakom trokutu iz  $\mathcal{T}_h$ . Kako je to linearan vektorski prostor konačne dimenzije, možemo mu naći bazu. Kanonska baza je sastavljena od neprekidnih po dijelovima afinih funkcija koje poprimaju vrijednost 1 u jednom vrhu, a 0 u ostalim vrhovima.

**4:** Definiramo funkcije  $u$  i  $v$  da budu elementi iz  $V_h$ .

**5:** Analitički definiramo funkciju  $f$ .

**6:** Definiramo problem koji treba riješiti.

**7-8:** Varijacijska formulacija Poissonove jednadžbe. Dobivena je množenjem jednadžbe (4.1) s funkcijom  $v(x, y)$  koja je jednaka 0 na  $\partial\Omega$  i integriranjem po  $\Omega$ . Linija 7 predstavlja lijevu stranu, a linija 8 desnu stranu varijacijske formulacije.

**9:** Zadavanje homogenog Dirichletovog rubnog uvjeta.

**10:** Pomoću naredbe `plot` vizualiziramo rješenje.

Sad kad smo upoznali `FreeFEM` možemo krenuti rješavati Navier-Stokesove jednadžbe.

## 4.2 Numerički eksperimenti

Mi smo izveli Navier-Stokesove jednadžbe koje opisuju gibanje inkompresibilnih viskoznih fluida. Sada ćemo u nekoliko eksperimenata pokušati dočarati gibanje fluida ovisno o viskoznosti (mjera otpora fluida da se deformira zbog različite brzine gibanja njegovih slojeva) i zadanim rubnim uvjetima.

### Kavitacija

Zasigurno jedan od najpoznatijih praktičnih problema vezanih uz Navier-Stokesove jednadžbe je problem dvodimenzionalne kavitacije. Glavni razlog za popularnost tog problema je jednostavnost geometrije i rubnih uvjeta. Domena u kojoj se nalazi inkompresibilni viskozni fluid je jedinični kvadrat  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Na rubu domene je zadana brzina fluida; na lijevoj, donjoj i desnoj stranici kvadrata obje komponente brzine iznose 0, dok je na gornjoj stranici  $u_1 = 1$ , a  $u_2 = 0$ . Napomenimo još da ćemo u svim eksperimentima

uzimati da je vanjska sila  $\mathbf{f}$  jednaka 0. Dakle, tražimo rješenje  $\{\mathbf{u}, p\}$  problema

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{u } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{u } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \operatorname{uz} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{na } \partial \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (4.3)$$

gdje je

$$\mathbf{g} = \begin{cases} (1, 0), & \text{ako je } x \in (0, 1), y = 1, \\ \mathbf{0}, & \text{inače.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Za početni uvjet uzimamo da je  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . Potpuno diskretizirani oblik problema (4.3) je sustav (3.32)-(3.40), naravno uz  $\mathbf{f} = 0$ . Upravo taj sustav rješavamo u FreeFEM-u, a brzinu fluida prikazat ćemo pomoću *strujnica*. To su krivulje koje su u svakoj točki tangencijalne na vektor brzine gibanja fluida. Računamo ih tako da nađemo funkciju  $\psi$  koja zadovoljava

$$\operatorname{rot} \psi = \mathbf{u}. \quad (4.5)$$

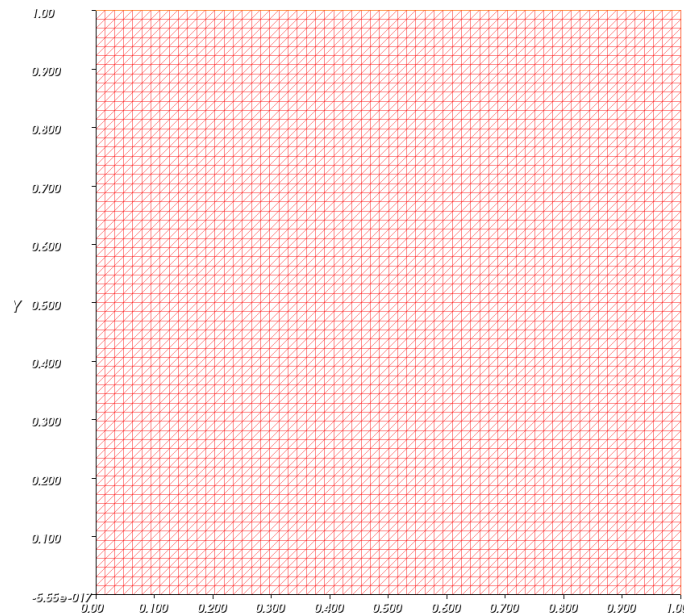
S obzirom da vrijedi  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{f}) - \Delta \mathbf{f}$  za svako trodimenzionalno vektorsko polje  $\mathbf{f}$ , strujnice računamo kao rješenje jednadžbe

$$-\Delta \psi = \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (4.6)$$

Napravili smo 5 eksperimenata, u ovisnosti o Reynoldsovom broju, odnosno viskoznosti. Prisjetimo se da je  $\operatorname{Re} = LU/\nu$ . Zbog oblika i dimenzija domene, te zadane brzine na rubu, uzimamo da je  $L = U = 1$ . Ostaje nam da je  $\operatorname{Re} = 1/\nu$ . Jedna stvar je zajednička u svih 5 eksperimenata, a to je triangulacija domene, podijeljena je na  $64 \times 64$  kvadratića, od kojih je svaki podijeljen na 2 trokutića. Finija podjela bi dala točnije rezultate, ali u tom slučaju izvršavanje programa predugo traje. Na slici 4.1 vidimo kako triangulacija izgleda. Nadalje, uvjet zaustavljanja je dostizanje stacionarnog rješenja  $\mathbf{u}_h^n$ , tj. onoga za koje je relativna razlika  $\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_2 / \|\mathbf{u}_h^n\|_2$  manja od zadanog  $\varepsilon$  ili prekoračenje zadanog broja iteracija  $k$ .

1.  $\operatorname{Re} = 100$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $k = 5000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 243.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.75635 \times 10^{-8}$ .
2.  $\operatorname{Re} = 400$ ,  $\Delta t = 0.05$ ,  $\varepsilon = 10^{-7}$ ,  $k = 5000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 1392.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.975543 \times 10^{-8}$ .

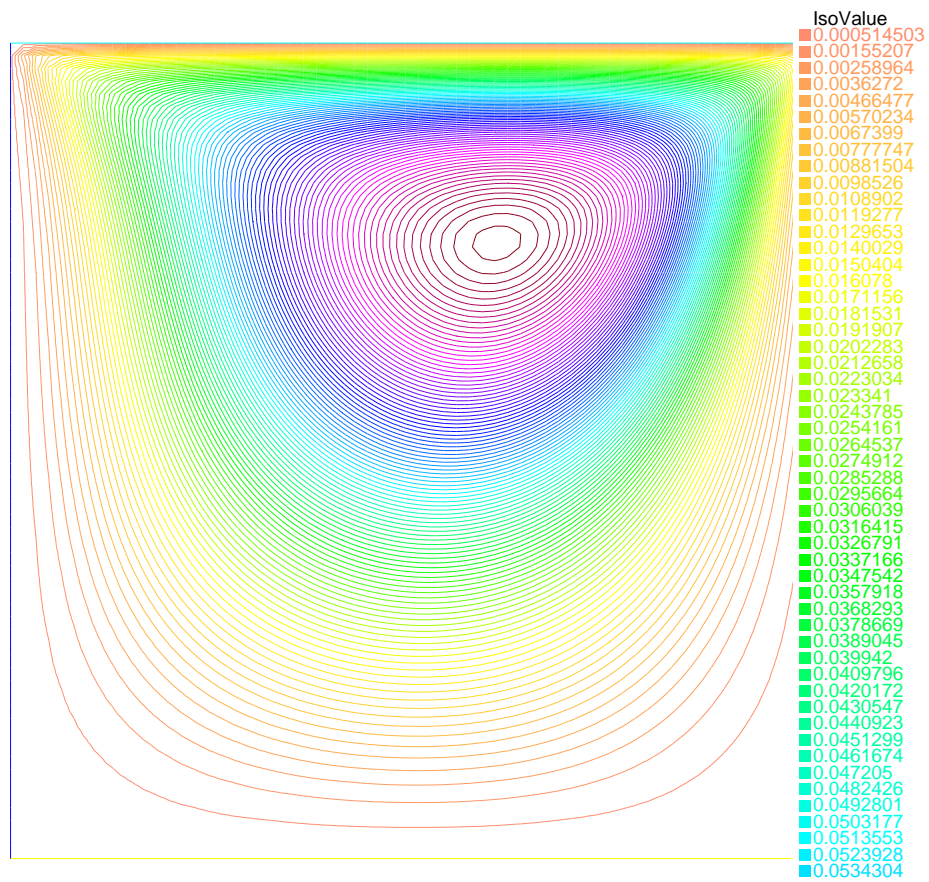




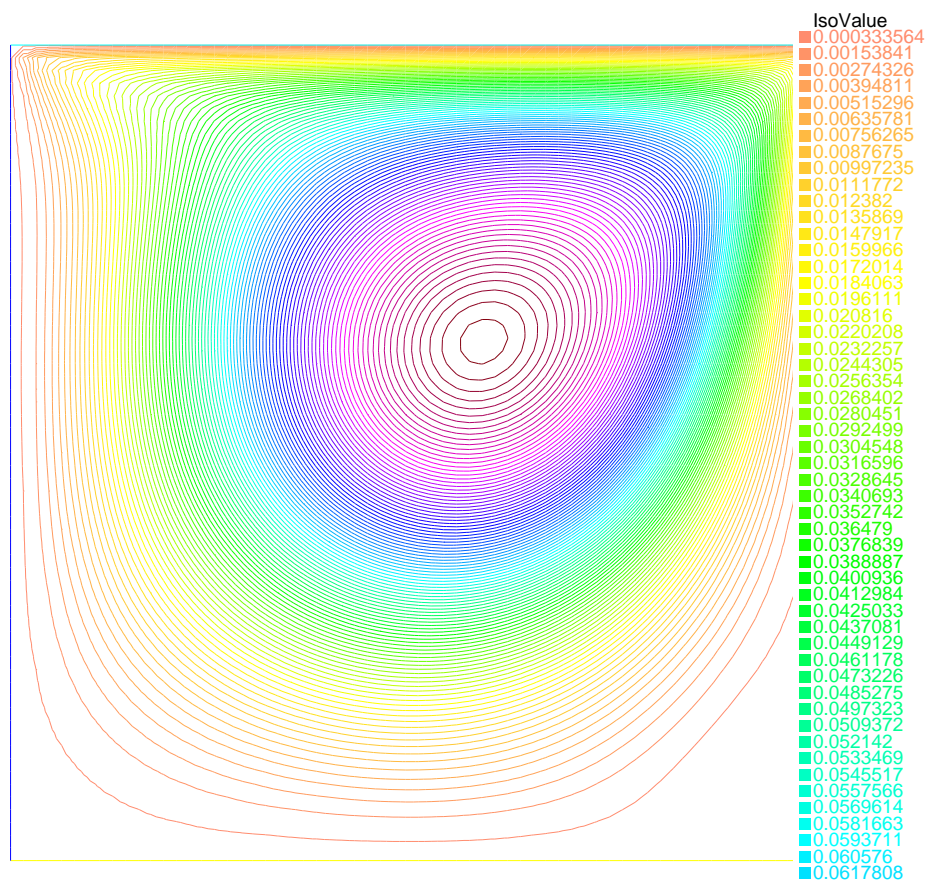
Slika 4.1: Triangulacija jediničnog kvadrata

3.  $Re = 1000$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 5000$   
Rezultati: dostignut je maksimalan broj iteracija uz relativnu razliku rješenja  $5.16642 \times 10^{-6}$ .
4.  $Re = 5000$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: dostignut je maksimalan broj iteracija uz relativnu razliku rješenja  $2.97658 \times 10^{-5}$ .
5.  $Re = 10000$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: dostignut je maksimalan broj iteracija uz relativnu razliku rješenja  $1.42192 \times 10^{-3}$ .

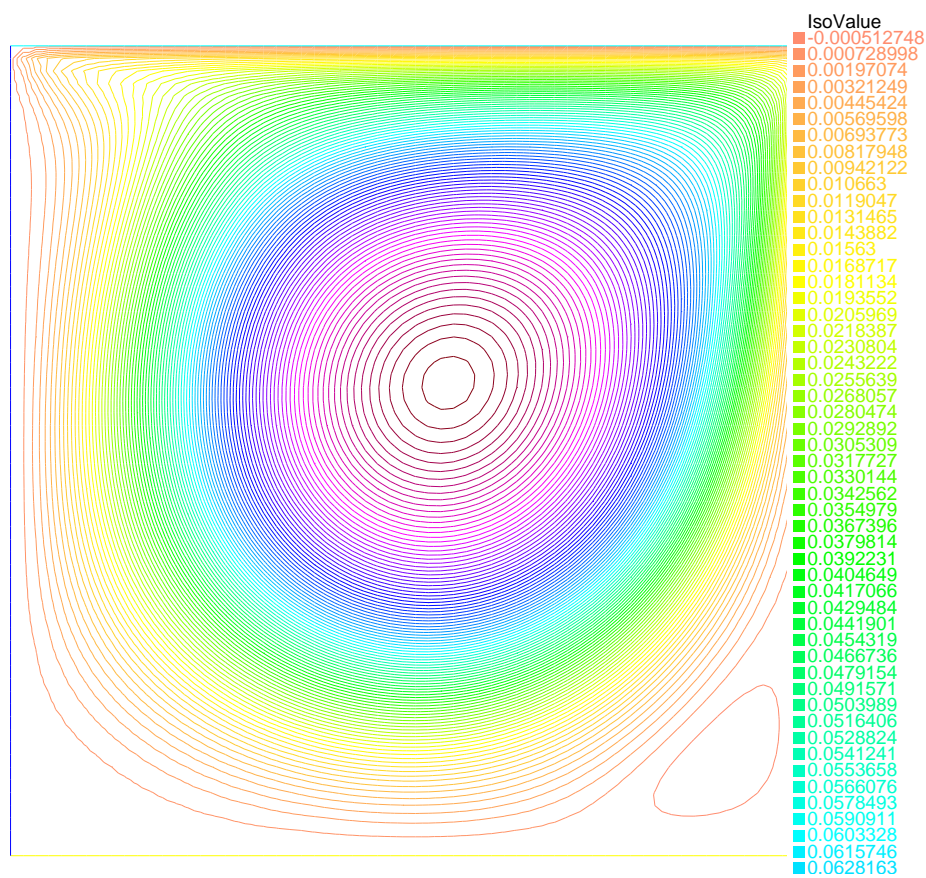
Povećanjem Reynoldsovog broja smanjuje se viskoznost, a time i otpornost fluida na promjene. Za  $Re = 100$ , brzo dolazimo do stacionarnog rješenja, dok za  $Re = 400$  korak  $\Delta t = 0.1$  je prevelik i dolazi do "eksplozije" rješenja, stoga smo morali smanjiti korak na  $\Delta t = 0.05$ . Također kod  $Re = 1000$  korak vremenske diskretizacije smo morali smanjiti na  $\Delta t = 0.01$ . Idealno bi bilo imati još manji korak diskretizacije, npr.  $\Delta t = 10^{-4}$  i  $T = +\infty$ , odnosno ne ograničavati se na broj iteracija. Rezultati eksperimenata pokazuju stvaranje jednog središnjeg vrtloga, a za veće Reynoldsove brojeve uočavaju se i manji vrtlozi u donjem lijevom i desnom kutu, ali i u gornjem lijevom kutu domene. Sve to možemo vidjeti na sljedećim slikama, a u Prilogu 5.1 se nalazi kod.



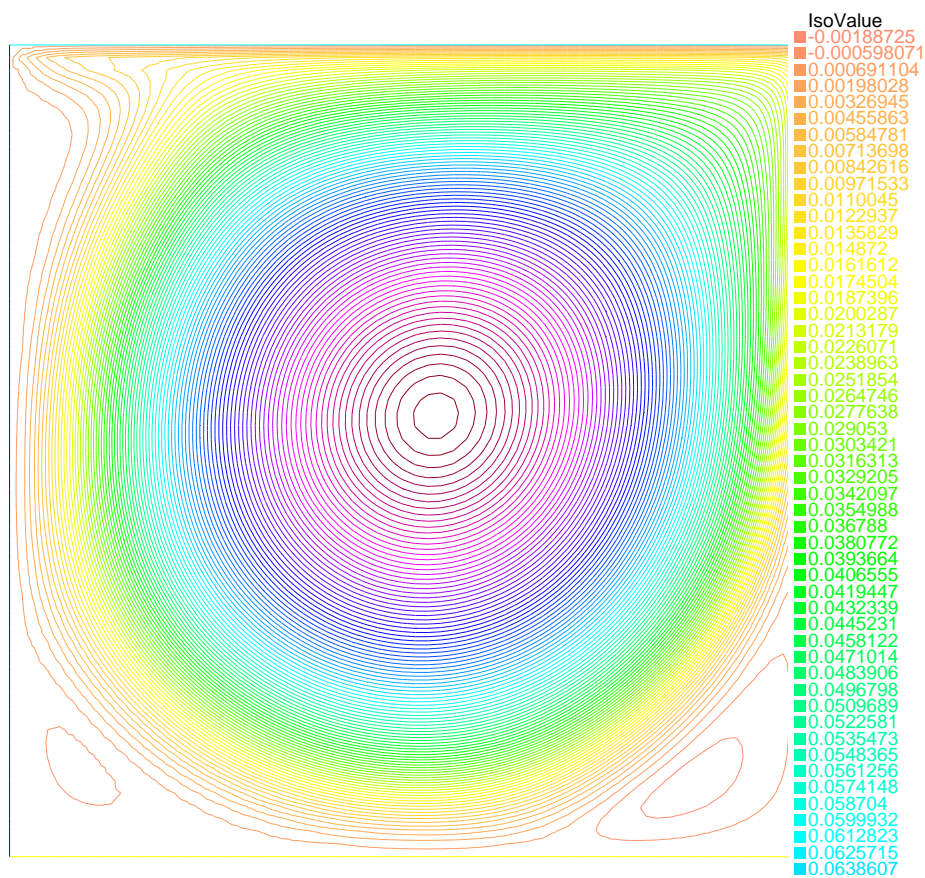
Slika 4.2:  $Re = 100$ , strujnice



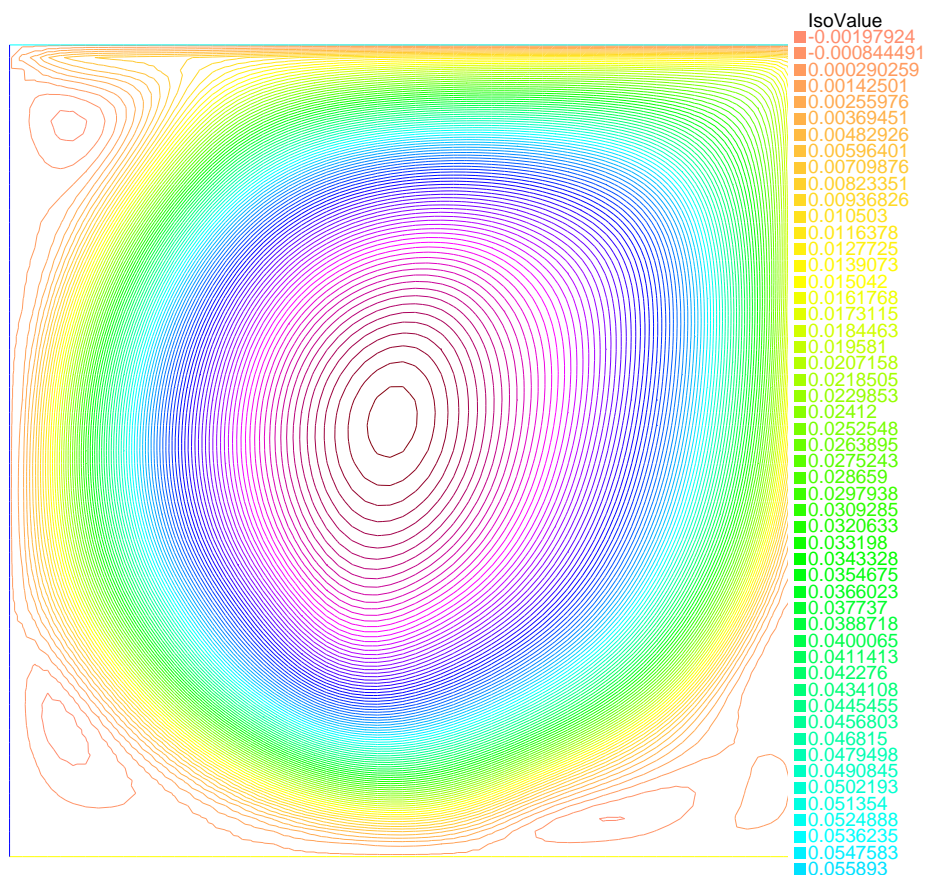
Slika 4.3:  $Re = 400$ , strujnice



Slika 4.4:  $Re = 1000$ , strujnice



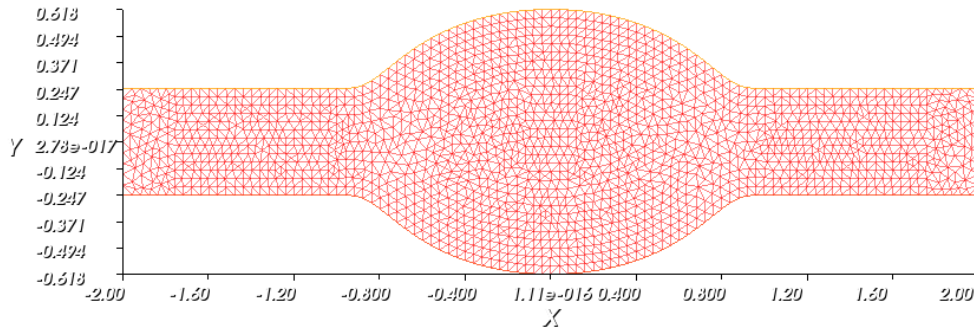
Slika 4.5:  $Re = 5000$ , strujnice



Slika 4.6:  $Re = 10000$ , strujnice

## Dvodimenzionalna cijev s proširenjem

U drugom problemu opet promatramo tok inkompresibilnog Newtonovog fluida, ali kroz cijev duljine 4 cm, a širine 0.5 cm, osim na sredini gdje ima proširenje. Oblik cijevi i njenu triangulaciju (100 intervala u  $x$  smjeru, 10 intervala u  $y$  smjeru) možemo vidjeti na slici 4.7.



Slika 4.7: Triangulacija cijevi s proširenjem

Tražimo rješenje problema (4.3). Za početni uvjet uzimamo da je  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ . Na rubu domene je zadana brzina; na donjem i gornjem rubu obje komponente brzine su jednake 0, dok je na lijevom ( $\Gamma_1$ ) i desnom ( $\Gamma_3$ ) rubu  $u_2 = 0$ , a vrijednost od  $u_1$  nekako zadajemo. Kako je

$$0 = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

i  $u_2 = 0$ , slijedi da je  $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$ , odnosno

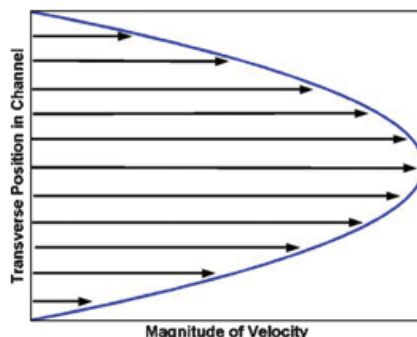
$$u_1 = u_1(y).$$

Neka je  $u_{11}$  prva komponenta brzine na lijevom rubu, a  $u_{31}$  prva komponenta brzine na desnom rubu. Na lijevom rubu zadajemo parbolički oblik brzine kao na slici 4.8. Iz uvjeta kompatibilnosti  $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx \, dy = 0$ , dobije se da je

$$\int_{\Gamma_1} u_{11} \, dy = \int_{\Gamma_3} u_{31} \, dy$$

što će biti zadovoljeno ako uzmemo

$$u_{11} = u_{31}.$$



Slika 4.8: Parabolički oblik brzine

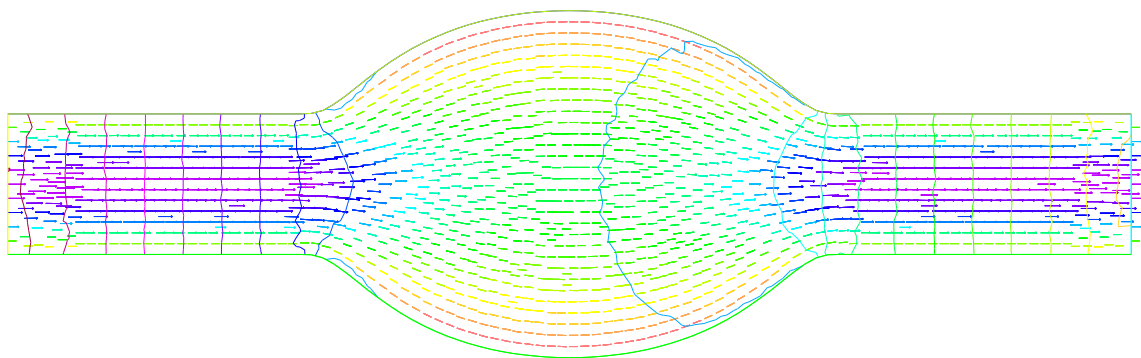
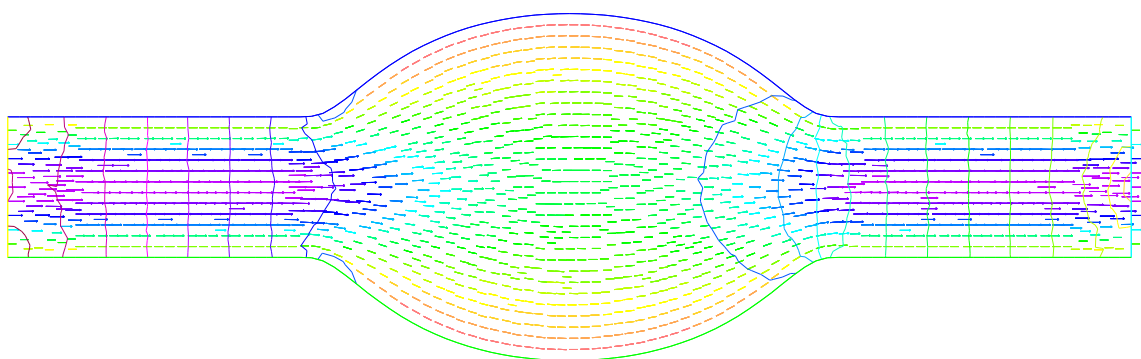
Ponovno imamo 5 eksperimenata za 5 različitih vrijednosti Reynoldsovog broja. Uvjet zaustavljanja programa je dostizanje stacionarnog rješenja  $\mathbf{u}_h^n$ , tj. onoga za koje je relativna razlika  $\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_2 / \|\mathbf{u}_h^n\|_2$  manja od zadanog  $\varepsilon$  ili prekoračenje zadanog broja iteracija  $k$ .

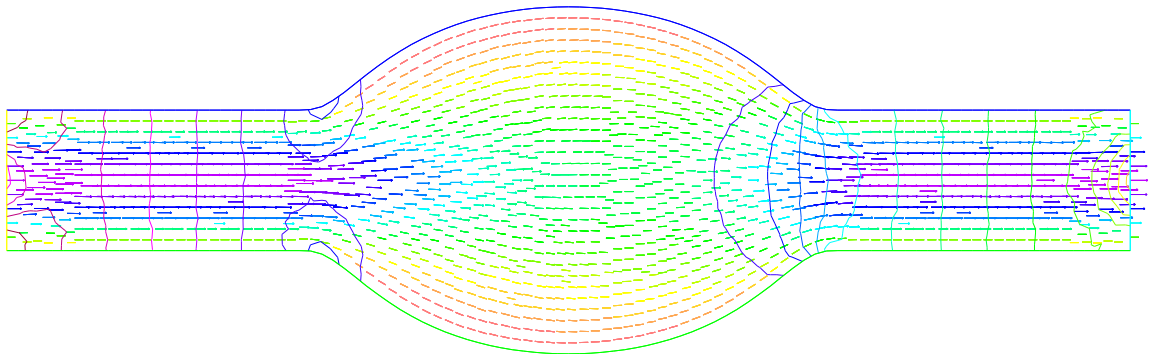
1.  $Re = 100$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 143.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.55707 \times 10^{-7}$ .
2.  $Re = 400$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 483.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.93559 \times 10^{-7}$ .
3.  $Re = 1000$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 1024.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.97822 \times 10^{-7}$ .
4.  $Re = 5000$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 2295.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.99073 \times 10^{-7}$ .
5.  $Re = 10000$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $k = 10000$   
Rezultati: izvršavanje prekinuto u 3007.-oj iteraciji kada je postignuta relativna razlika rješenja  $9.97756 \times 10^{-7}$ .

Na sljedećim slikama smo prikazali kako izgleda brzina i tlak fluida u svakom od slučajeva neposredno prije zaustavljanja programa. Strelice istih boja označavaju istu brzinu fluida,

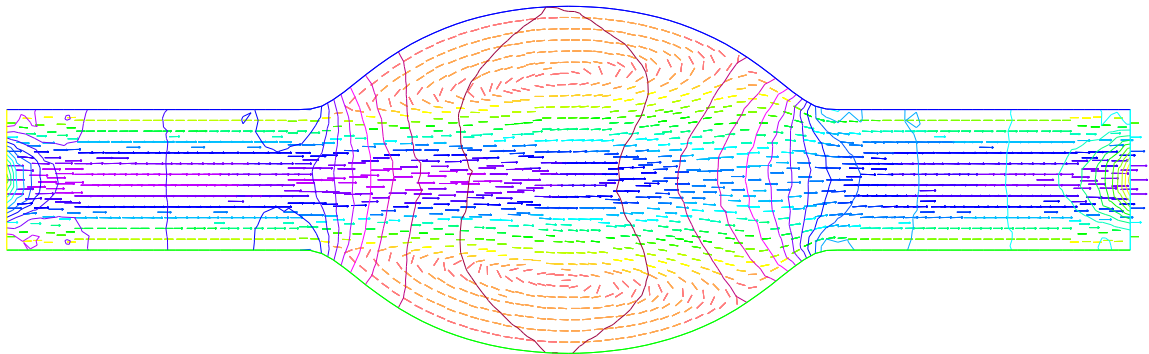


a linije označavaju područja istog tlaka. Vidimo da smo ovaj put uspješni dobili sva stacionarna rješenja, a povećanjem Reynoldsovog broja nismo morali smanjivati korak diskretizacije. Za velike Reynoldsove brojeve ( $Re = 5000$ ,  $Re = 10000$ ) uočavamo pojavu vrtloga. Zapravo se na gornjem i donjem proširenju stvorila kavitacija kao u prvom primjeru. Kod programa se nalazi u Prilogu 5.2.

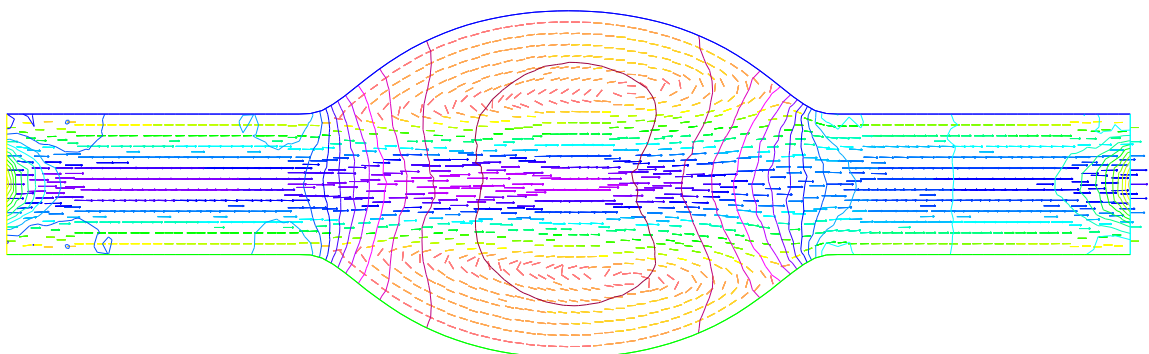
Slika 4.9:  $Re = 100$ ,  $i = 140$ Slika 4.10:  $Re = 400$ ,  $i = 480$



Slika 4.11:  $Re = 1000, i = 1020$



Slika 4.12:  $Re = 5000, i = 2200$



Slika 4.13:  $Re = 10000, i = 3000$

# Poglavlje 5

## Prilozi

### 5.1 Prilog 1

```
int n = 64;
mesh Th = square( n, n );
plot( Th );
savemesh( Th, "mreza.msh" );
fespace Vh( Th, P1b );
Vh u1, u2, v1, v2, up1=0, up2=0, u1old, u2old;
fespace Ph( Th, P1 );
Ph p, q;

int i = 0;
real theta = 1 - 1/sqrt(2);
real alpha = ( 1 - 2*theta )/( 1 - theta );
real beta = theta/( 1 -theta );
real dt = 0.01;
real ni = 0.0001;

problem NS1( u1, u2, p, v1, v2, q, init = i ) =
int2d(Th)(
( u1*v1 + u2*v2 )/( theta*dt )
+ alpha*ni*( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
- p*( dx(v1) + dy(v2) )
- q*( dx(u1) + dy(u2) )
// - p*q*0.000001
```

```

)
+ int2d(Th)(
- ( up1*v1 + up2*v2 )/( theta*dt )
+ beta*ni*( dx(up1)*dx(v1) + dy(up1)*dy(v1)
+ dx(up2)*dx(v2) + dy(up2)*dy(v2) )
+ ( dx(up1)*up1 + dy(up1)*up2 )*v1
+ ( dx(up2)*up1 + dy(up2)*up2 )*v2
)
+ on( 3, u1 = 1, u2 = 0 )
+ on( 1, 2, 4, u1 = 0, u2 = 0 );

problem NS2( u1, u2, v1, v2, init = i ) =
int2d(Th)(
( u1*v1 + u2*v2 )/( (1-2*theta)*dt )
+ beta*ni*( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
+ ( dx(up1)*u1 + dy(up1)*u2 )*v1
+ ( dx(up2)*u1 + dy(up2)*u2 )*v2
)
+ int2d(Th)(
- ( up1*v1 + up2*v2 )/( (1-2*theta)*dt )
+ alpha*ni*( dx(up1)*dx(v1) + dy(up1)*dy(v1)
+ dx(up2)*dx(v2) + dy(up2)*dy(v2) )
- p*( dx(v1) + dy(v2) )
)
+ on( 3, u1 = 1, u2 = 0 )
+ on( 1, 2, 4, u1 = 0, u2 = 0 );

real eps = 1e-6;

for( i = 0; i <= 10000; i++ )
{
u1old=u1;
u2old=u2;
NS1;
up1 = u1;
up2 = u2;
NS2;
up1 = u1;

```

```

up2 = u2;
NS1;
up1 = u1;
up2 = u2;
if ( i == 10 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika10.eps" );
if ( i == 100 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika100.eps" );
if ( i == 200 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika200.eps" );
if ( i == 500 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika500.eps" );
if ( i == 1000 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika1000.eps" );
if ( i == 3000 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika3000.eps" );
if ( i == 5000 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika5000.eps" );
if ( i == 7000 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika7000.eps" );
if ( i == 9000 )
plot( [u1,u2], p, ps = "slika9000.eps" );
cout << "i = " << i << endl;
real error = sqrt(int2d(Th)((u1old-u1)^2+(u2old-u2)^2)/
int2d(Th)(u1^2+u2^2));
cout << "razlika = " << error << endl;
if( error < eps )
break;
} ;

Vh psi, phi;
solve streamlines( psi, phi ) =
int2d(Th)( dx(psi)*dx(phi) + dy(psi)*dy(phi) )
+ int2d(Th)( -phi*( dy(u1)-dx(u2) ) )
+ on( 1, 2, 3, 4, psi = 0 );

real[ int ] viso(50);
for( int i = 0; i < viso.n; i++ )
viso[i]=i*0.000001;

```

```

plot( psi, nbiso = 100, viso = viso(0:viso.n-1),
ps = "pomoc.eps", value = true );

plot( psi, nbiso = 100, ps = "strujnice.eps", value = true );
plot( psi, nbiso = 100, bb = [[0.0,0.0],[0.3,0.3]],
  ps = "donjilijevikut.eps" );
plot( psi, nbiso = 100, bb = [[0.7,0.0],[1.0,0.3]],
  ps = "donjidesnikut.eps" );
plot( psi, nbiso = 100, bb = [[0.0,0.5],[0.3,1.0]],
  ps = "gornjilijevikut.eps" );

```

## 5.2 Prilog 2

```

int left = 1;
int lower = 2;
int right = 3;
int upper = 4;

func real f ( real x )
{
y = abs(x);
if( y < 1 )
{return -0.25-exp(-1/(1-y*y));}
else
{return -0.25;}
}

func real g ( real x )
{
y = abs(x);
if( y < 1 )
{return 0.25+exp(-1/(1-y*y));}
else
{return 0.25;}
}

border b1(t=0.25,-0.25){ x=-2; y=t; label = left; }
border b2(t=-2,2){ x=t; y=f(t); label = lower; }
border b3(t=-0.25,0.25){ x=2; y=t; label = right; }

```

```

border b4(t=2,-2){ x=t; y=g(t); label = upper; }

int n = 100;
int m = 10;

mesh Th = buildmesh( b1(m)+b2(n)+b3(m)+b4(n) );
plot( Th );
savemesh( Th, "cijev.msh" );

fespace Vh( Th, P1b );
Vh u1, u2, v1, v2, up1 = 0, up2 = 0, u1old, u2old;
fespace Ph( Th, P1 );
Ph p, q;

int i = 0;
real theta = 1 - 1/sqrt(2);
real alpha = ( 1 - 2*theta )/( 1 - theta );
real beta = theta/( 1 -theta );
real dt = 0.1;
real ni = 0.00001;

problem NS1( u1, u2, p, v1, v2, q, init = i ) =
int2d(Th)(
( u1*v1 + u2*v2 )/( theta*dt )
+ alpha*ni*( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
- p*( dx(v1) + dy(v2) )
- q*( dx(u1) + dy(u2) )
- p*q*0.000001
)
+ int2d(Th)(
- ( up1*v1 + up2*v2 )/( theta*dt )
+ beta*ni*( dx(up1)*dx(v1) + dy(up1)*dy(v1)
+ dx(up2)*dx(v2) + dy(up2)*dy(v2) )
+ ( dx(up1)*up1 + dy(up1)*up2 )*v1
+ ( dx(up2)*up1 + dy(up2)*up2 )*v2
)
+ on( 1, u1 = (0.25+y)*(0.25-y), u2 = 0 )

```

```

+ on( 3, u1 = (0.25+y)*(0.25-y), u2 = 0 )
+ on( 2, 4, u1 = 0, u2 = 0 );

problem NS2( u1, u2, v1, v2, init = i ) =
int2d(Th)(
( u1*v1 + u2*v2 )/( (1-2*theta)*dt )
+ beta*ni*( dx(u1)*dx(v1) + dy(u1)*dy(v1)
+ dx(u2)*dx(v2) + dy(u2)*dy(v2) )
+ ( dx(up1)*u1 + dy(up1)*u2 )*v1
+ ( dx(up2)*u1 + dy(up2)*u2 )*v2
)
+ int2d(Th)(
- ( up1*v1 + up2*v2 )/( (1-2*theta)*dt )
+ alpha*ni*( dx(up1)*dx(v1) + dy(up1)*dy(v1)
+ dx(up2)*dx(v2) + dy(up2)*dy(v2) )
- p*( dx(v1) + dy(v2) )
)
+ on( 1, u1 = (0.25+y)*(0.25-y), u2 = 0 )
+ on( 3, u1 = (0.25+y)*(0.25-y), u2 = 0 )
+ on( 2, 4, u1 = 0, u2 = 0 );

real eps = 1e-6;

for( i = 0; i <= 10000; i++ )
{
u1old = u1;
u2old = u2;
NS1;
up1 = u1;
up2 = u2;
NS2;
up1 = u1;
up2 = u2;
NS1;
up1 = u1;
up2 = u2;
if ( !(i%100) )
plot( [u1,u2], p, ps = "iter" + i + ".eps" );
cout << "i = " << i << endl;
}

```



```
real error = sqrt(int2d(Th)((u1old-u1)^2+(u2old-u2)^2)/int2d(Th)(u1^2+u2^2));
cout << "razlika = " << error << endl;
if( error < eps )
break;
} ;
```

# Bibliografija

- [1] I. Aganović, *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, Zagreb, 2003.
- [2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.
- [3] A. Chorin, J. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, drugo izdanje, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [4] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol.1: Three-dimensional elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [5] Z. Ding, *A proof of the trace theorem of Sobolev spaces on Lipschitz domains*, dostupno na <http://www.ams.org/journals/proc/1996-124-02/S0002-9939-96-03132-2/S0002-9939-96-03132-2.pdf> (kolovoz 2014.).
- [6] Z. Drmač, *Numerička matematika*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2010.
- [7] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička matematika*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2008.
- [8] L. Evans, *Partial Differential Equations*, drugo izdanje, AMS, Providence, Rhode Island, 2010.
- [9] U. Ghia, K. N. Ghia, C. T. Shin, *High-Reynolds solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*, J. Comput. Phys. 48(1982), 387-411.
- [10] R. Glowinski, *Finite Element Methods for Incompressible Viscous Flows*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. 9, Numerical Methods for Fluids (Part 3), North-Holland, Amsterdam, 2003.
- [11] E. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, C. D. Mitescu, *Physical Hydrodynamics*, Oxford, New York, 2001.

- [12] F. Hecht, *FreeFEM++ dokumentacija*
- [13] P. L. Lions, B. Mercier, *Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators*, J. Numer. Anal. 16(1979), 964-979.
- [14] M. Jurak, *Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF-MO, Zagreb, 2006.
- [15] R. Temam, *Navier-Stokes Equations*, Norh-Holland, Amsterdam, 1977.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu izveli smo Navier-Stokesove jednađbe kojima smo opisali tok inkompresibilnog viskoznog Newtonovog fluida i naveli neke rezultate o egzistenciji rješenja tih jednađbi. Njihovo rješavanje je netrivialan zadatak jer se mora riješiti sustav nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednađbi uvažavajući dodatni uvjet inkompresibilnosti. Primjenom jedne *operator-splitting* metode uspjeli smo razdvojiti nelinearnost i inkompresibilnost. Numerički eksperimenti su pokazali da se potproblem vezan uz nelinearnost može linearizirati bez većeg gubitka točnosti. Zatim smo implementirali tu metodu u FreeFEM-u koji je softver za numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednađbi baziran na metodi konačnih elemenata i primijenili je za rješavanje Navier-Stokesovih jednađbi u različitim dvodimenzionalnim domenama.

# Summary

In this diploma thesis we derived Navier-Stokes equations for incompressible Newtonian viscous fluid and provided some results on the existence of solutions to these equations. Solving Navier-Stokes equations is a nontrivial task because one has to solve a system of partial differential equations taking into account the additional incompressibility condition. Applying one *operator-splitting* method to time discretization, we managed to decouple the difficulties associated to the nonlinearity with those associated to the incompressibility condition. Numerical experiments have shown that subproblem related to nonlinearity can be linearized without significant loss of accuracy. Then we implemented this method in FreeFEM, the software specialized for solving PDEs based on finite element method and applied it to solve Navier-Stokes equations in different two-dimensional domains.

# Životopis

Marija Galić rođena je 04. siječnja 1991. u Šibeniku, gdje je završila osnovnu i srednju školu. Godine 2009. upisala je preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Isti je završila 2012. godine s prosjekom ocjena 4.667. Nakon toga upisuje diplomski studij Primijenjena matematika na istom fakultetu s ostvarenim prosjekom 4.75 prije obrane diplomskog rada.