Bayesovske igre

Mihetec, Marija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marija Mihetec

BAYESOVSKE IGRE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mentoru doc. dr. sc. Lavoslavu Čaklovću zahvaljujem na pristupačnosti, strpljenju i trudu pri izradi ovog diplomskog rada te mojoj obitelji i prijateljima veliko hvala na pruženoj podršci.

Sadržaj

Uvod

Definiciju Bayesovske igre postavio je John C. Harsanyi (1967.) u svome radu " Games with Incomplete Information played by 'Bayesian' Players, I-III ".

Godine 1962. Harsanyi je počeo proučavati prošireni Nashov problem pregovaranja gdje igrači ne znaju funkcije isplate ostalih igrača. U svome radu je prepoznao probleme modeliranja igračevih uvjerenja o uvjerenjima ostalih igrača. Naposljetku je definirao općeniti analitički okvir za proučavanje svih konkurentnih situacija gdje sudionici imaju različite informacije.

Harsanyi je razvio novu teoriju za analizu igara s nepotpunom informacijom u kojima su igrači nesigurni o nekim važnim parametrima igre kao što su funkcije isplate, strategije, informacije ostalih igrača o igri, i tako dalje , ali svaki igrač ima svoju subjektivnu distribuciju vjerojatnosti nad alternativnim mogućnostima.

Takve igre nazivamo Bayesovske igre jer se uvjerenja igrača o nepoznatom parametru mogu prema Bayesovskoj teoriji odlučivanja opisati pomoću distribucija vjerojatnosti nad svim mogućim vrijednostima tog parametra.

U prvom poglavlju ćemo definirati Bayesovske igre kao igre s nepotpunom informacijom u kojoj neki igrači imaju privatne informacije o igri koje nisu poznate ostalim igračima iako oni imaju svoja uvjerenja koje bi to informacije bile te ih pretpostavljaju s nekom vjerojatnošću.

Zatim ćemo navesti primjere Bayesovske igre u kojima objašnjavamo konzistenciju uvjerenja i samu definiciju Bayesovskih igara, kao i primjere s beskonačnim skupom tipova i s neprekidnim tipovima.

Slijedeći važan prikaz Bayesovske igre je Selten igra koja Bayesovsku igru pretvara u strateški oblik igre, odnosno u igru s potpunom informacijom. Nju ćemo prikazati na primjeru te izračunati Nashovu ravnotežu prikaza agenata tipova. Kako bismo upotpunili Selten igru također ćemo izračunati isplate u igri koje odgovaraju korisnostima igrača uvjetovano na njihov tip. S ovakvom postavom promatrat ćemo ravnotežu Bayesovskih igara, odnosno definirat čemo Bayes Nashovu ravnotežu kao Nashovu ravnotežu Selten igre. Također ćemo definirati dominantne ravnoteže strategija koristeći ponovno Selten igru te ih prikazujemo na primjerima.

U drugom poglavlju ćemo definirati stohastičku igru kao igru koja se odvija u koracima od pozicije do pozicije prema prijelaznim vrijednostima te ćemo dokazati postojanje rješenja odnosno vrijednosti takve igre.

Poglavlje 1

Bayesovske igre

1.1 Igre s nepotpunom informacijom

Igra s nepotpunom informacijom je igra u kojoj, u trenutku kada igrači započinju planirati svoje poteze, neki igrači imaju *privatne informacije* o igri koje nisu poznate ostalim igračima. To čini razliku naspram igara s potpunom informacijom u kojima nema privatnih informacija i sve informacije su poznate svim igračima. Privatna informacija, koju igrač ima prije potezanja poteza, zove se *tip igrača*.

Na primjer, na aukciji, svaki igrač ima svoju procjenu vrijednosti danog predmeta. Svaki igrač zna svoju procjenu dok ostali igrači mogu samo pretpostavljati koliko igrač procjenjuje predmet.

Definicija 1.1.1. *Bayesovska igra* Γ *definirana je kao petorka* $\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle$ *gdje je*

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ *skup svih igrača*
- Θ_i *je skup tipova igrača* i
- S_i *je skup akcija ili čistih strategija igrača* i
- *funkcija vjerojatnosti* p_i *je funkcija iz* Θ_i *u* $\Delta(\Theta_{-i})$*, gdje je* Θ_i *u* $\Delta(\Theta_{-i})$ *skup distribucija vjerojatnosti nad* Θ_{-i}*. Znači, za svaki mogući tip* $\theta_i \in \Theta_i$*,* p_i *određuje distribuciju vjerojatnosti* $p_i(\cdot|\theta_i)$ *nad skupom* Θ_{-i} *prikazujući što igrač* i *vjeruje o tipovima ostalih igrača ako je njegov tip* θ_i
- *funkcija isplate* $u_i : \Theta \times S \to \mathbb{R}$ *je takva da za svaki profil akcija i svaki profil tipova* $(\theta, s) \in \Theta \times S$*,* $u_i(\theta, s)$ *određuje isplatu koju igrač* i *dobiva ako su igračevi tipovi kao u* θ *i igrač je odabrao svoje akcije u skladu sa* s

Oznake za Bayesovsku igru nalaze se u Tabalici 1.

N	skup svih igrača
Θ_i	skup tipova igrača i
S_i	skup akcija ili čistih strategija igrača i
Θ	skup svih profila tipova, $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_n$
θ	profil tipova, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$
Θ_{-i}	skup profila tipova agenata osim i-tog, $\Theta_{-i} = \Theta_1 \times \cdots \times \Theta_{i-1} \times \Theta_{i+1} \times \cdots \times \Theta_n$
θ_{-i}	profil tipova agenata osim i-tog, $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$
S	skup svih profila akcija, $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$
p_i	funkcija vjerojatnosti (uvjerenja) igrača i, $p_i : \Theta_i \to \Delta(\Theta_{-i})$
u_i	funkcija korisnosti igrača i, $u_i : \Theta \times S \to \mathbb{R}$

Tablica 1: Oznake za Bayesovsku igru

U Bayesovskoj igri pretpostavljamo:

1. Svaki igrač i zna cjelokupnu strukturu gore definirane igre.

2. Svaki igrač zna svoj tip $\theta_i \in \Theta_i$.

3. Navedene pretpostavke poznate su svim igračima iz N.

4. Točan tip igrača nije deterministički poznat ostalim igračima, ali ostali igrači imaju probabilističku pretpostavku koji je to tip. Funkcija vjerojatnosti p_i opisuje te uvjetovane vjerojatnosti. p_i su poznate svim igračima.

U teoriji igara, igračeva *strategija* je bilo koja opcija koju može izabrati u okruženju gdje ishod ne ovisi samo o njegovim akcijama već i o akcijama ostalih igrača. Strategija je cjelokupan algoritam za igranje igre koji kaže igraču što učiniti za svaku moguću situaciju tijekom igre i za svaki mogući tip, dok su *akcije* potezi koje igrač povlači u igri. Strategija, ne samo da određuje akcije za dani tip, već mora odrediti i akcije koje bi igrač igrao da je drugog tipa.

Profil strategije je skup strategija za sve igrače koji potpuno određuje sve akcije u igri. Profil strategije uključuje samo jednu strategiju za svakog igrača.

Skup strategija igrača definira koje su strategije za njega moguće u igri. U Bayesovskoj igri skup strategija sadrži pravila koje akcije poduzeti za sve moguće privatne informacije.

Čista strategija daje potpunu definiciju kako će igrač igrati igru, odnosno određuje potez koji će igrač igrati u svakoj situciji u kojoj se nađe. Strategija za svakog igrača ovisi samo o njegovom tipu jer mu tipovi ostalih igrača možda nisu poznati. Igračev skup strategija je skup čistih strategija koje su moguće za tog igrača.

Mješovita strategija je dodjeljivanje vjerojatnosti čistoj strategiji što omogućava svakom igraču slučajan odabir čiste strategije.

Također u Bayesovskim igrama razlikujemo pojam *akcija* od pojma *strategija*. Strategija za igrača i u Bayesovskim igrama je definirana kao preslikavanje iz Θ_i u S_i. Strategija s_i igrača i određuje čistu akciju za svaki tip igrača i. Dakle, $s_i(\theta_i)$ za dani $\theta_i \in \Theta_i$ određuje čistu akciju koju igrač i igra ako je njegov tip θ_i. Zapis $s_i(\cdot)$ označava čiste akcije igrača i koje odgovaraju proizvoljnom tipu iz njegova skupa tipova.

Definicija 1.1.2. *Kažemo da su uvjerenja* $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *u Bayesovskoj igri* konzistentna *ako postoji neka zajednička prethodna distribucija nad skupom profila tipova* Θ *takva da su uvjerenja igrača takvog tipa samo uvjetovane distribucije vjerojatnosti koje se mogu izračunati iz prethodne distribucije Bayesovskom formulom.*

Odnosno, ako je igra konačna, uvjerenja su konzistentna ako postoji distribucija vjerojatnosti P$\in \Delta(\Theta)$ takva da je

$$p_i(\theta_{-i}|\theta_i) = \frac{P(\theta_i, \theta_{-i})}{\sum\limits_{t_{-i}\in\Theta_{-i}} P(\theta_i, t_{-i})} \quad \forall\theta_i \in \Theta_i, \quad \forall\theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall i \in N.$$

Konzistencija pojednostavljuje definiciju modela. Zajednička prethodna distribucija na Θ određuje sve funkcije vjerojatnosti. U konzistentnom modelu razlike u uvjerenjima između igrača mogu se objasniti razlikama u informacijama, dok nekonzistentna uvjerenja uključuju razlike u mišljenju, koje se ne mogu izvesti iz razlika u opažanju i moraju biti pretpostavljene a priori. Drugim riječima, ako su uvjerenja konzistentna, jedini izvor razlika u uvjerenjima je razlika u informacijama.

1.2 Primjeri Bayesovske igre

1.2.1 Igra pregovaranja dva igrača

U igri pregovaranja sudjeluju dva igrača, igrač 1 i igrač 2. Igrač 1 je prodavač predmeta, a igrač 2 potencijalni kupac. Svaki igrač zna koliko predmet za njega vrijedi i pretpostavlja da je vrijednost predmeta za onog drugog igrača cijeli broj od 1 do 100 s vjerojatnošću $\frac{1}{100}$. Pretpostavimo da oba igrača istovremeno objavljuju svoje ponude. Ponude igrača su između 0 i 100. Ako je ponuda kupca veća ili jednaka ponudi prodavača, trgovat će po cijeni koja je jednaka prosjeku njihovih ponuda, dok u drugom slučaju neće doći do trgovanja.

Za ovu igru imamo:

$$
\begin{aligned}
N &= \{1, 2\}\\
\Theta_1 = \Theta_2 &= \{1, 2, \dots, 100\}\\
S_1 = S_2 &= \{0, 1, \dots, 100\}\\
p_i(\theta_{-i}|\theta_i) &= \frac{1}{100}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall(\theta_i, \theta_{-i}) \in \Theta\\
u_1(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) &= \begin{cases} \frac{s_1+s_2}{2} - \theta_1 & , s_2 \geq s_1, \\ 0 & , s_2 < s_1 \end{cases}\\
u_2(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) &= \begin{cases} \theta_2 - \frac{s_1+s_2}{2} & , s_2 \geq s_1, \\ 0 & , s_2 < s_1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Primjetimo da tip prodavača ukazuje na spremnost za prodaju (minimalna cijena za koju je prodavač spreman prodati predmet) i tip kupca ukazuje na spremnost da plati (maksimalna cijena koju je kupac spreman platiti za predmet). Isto tako, primjetimo da su uvjerenja konzistentna s prethodnim:

$$
\mathrm{P}(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{10000}, \quad \forall\theta_1 \in \Theta_1, \quad \forall\theta_2 \in \Theta_2
$$

gdje je

$$
\Theta_1 \times \Theta_2 = \{1, \dots, 100\} \times \{1, \dots, 100\}.
$$

1.2.2 Aukcija sa zatvorenim ponudama

Promatramo prodavača koji želi prodati predmet putem aukcije. Postoje dva potencijalna kupca koji daju ponude za predmet. Kupci imaju svoje procjene vrijednosti predmeta koje promatramo kao tipove kupaca. Igra se sastoji od dva kupca pa je $N = \{1, 2\}$. Oba kupca daju svoje ponude, s_1 i s_2. Kupac s višom ponudom osvaja predmet, no ako su ponude jednake, tada kupac 1 dobiva predmet.
Funkcije određivanja pobjednika:

$$
f_1(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 & , s_1 \geq s_2, \\ 0 & , s_1 < s_2. \end{cases}
$$

$$
f_2(s_1, s_2) = \begin{cases} 1 & , s_1 < s_2, \\ 0 & , s_1 \geq s_2. \end{cases}
$$

Pretpostavimo da je skup vrijednosti za svakog kupca realan interval [0,1]. Dakle, $\Theta_1 = \Theta_2 = [0,1]$ i $S_1 = S_2 = [0,1]$.
Ako pretpostavimo da svaki igrač vjeruje da je drugi igrač svoju vrijednost predmeta odredio prema uniformnoj distribuciji, tada je

$$p_i([x,y]|\theta_i) = y - x, \quad \forall 0 \leq x \leq y \leq 1, \quad i = 1,2.$$

Promatrat ćemo dvije vrste aukcija sa zatvorenim ponudama, aukcije prve cijene i aukcije druge cijene. Kod aukcije prve cijene sa zatvorenim ponudama svi kupci istovremeno daju svoje zatvorene ponude tako da nijedan kupac ne zna ponude drugih kupaca. Kupac s najvišom ponudom plaća cijenu koju je ponudio. Aukcija druge cijene jednaka je aukciji prve cijene osim što pobjenik plaća drugu najvišu ponudu umjesto svoje ponude.

Kod aukcije prve cijene, pobjednik aukcije platit će iznos koji je ponudio za predmet pa je stoga funkcija korisnosti igrača dana s

$$u_i(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2) = f_i(s_1, s_2)(\theta_i - s_i), \quad i = 1,2.$$

To upotpunjuje definiciju Bayesovske igre ističući da aukcija prve cijene uključuje dva kupca. Slično se može razviti Bayesovska igra za aukciju druge cijene.

1.2.3 Bayesovske igre s beskonačnim skupovima tipova

Često je lakše analizirati primjere s beskonačnim skupovima tipova nego one s konačnim velikim skupom tipova. Jedina komplikacija u beskonačnom slučaju je da vjerojatnosne distribucije $p_i(\cdot|\theta_i)$ moraju biti definirane na svim mjerljivim podskupovima od Θ_{-i} umjesto samo na pojedinačnim elementima od Θ_{-i}. Na primjer, ako je R_{-i} podskup od Θ_{-i}, definiramo $p_i(R_{-i}|\theta_i)$ za igrača i kao subjektivnu vjerojatnost da će igrač tipa θ_i pristupiti događaju gdje je profil ostalih tipova u R_{-i}.

1.2.3.1 Primjer: Igra pregovaranja s neprekidnim tipovima

Promatramo igru pregovaranja kao što je opisana u prethodnom primjeru ali s realnim intervalima kao skupovima tipova. Na primjer, $\Theta_1 = \Theta_2 = S_1 = S_2 = [0,100]$. Neka je, za svakog igrača i i svaki $\theta_i \in \Theta_i$, $p_i(\cdot|\theta_i)$ uniformno distribuirana nad [0,100]. Tada je za svaka dva broja x i y, $0 \leq x \leq y \leq 1$, vjerojatnost da će bilo koji tip θ_i igrača i biti pridružen događaju da su tipovi ostalih igrača između x i y:

$$p_i([x,y]|\theta_i) = \frac{y-x}{100}.$$

1.3 Prikaz agenta tipa i Selten igra

U ovom poglavlju iznosimo prikaz Bayesovskih igara koji omogućuje da Bayesovska igra bude pretvorena u strateški oblik igre (s potpunom informacijom).
Za danu Bayesovsku igru $\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i) \rangle$, Selten igra je ekvivalent strateškom obliku igre $\Gamma^S = \langle N^S, (S_j^S), (U_j) \rangle$.
Ideja korištena za formuliranje Selten igre je imati agente tipova. Svaki igrač u originalnoj Bayesovskoj igri zamjenjen je s brojem agenata tipova. Zapravo, igrač je zamjenjen s točno onoliko agenata tipova koliki je broj tipova u skupu tipova tog igrača. Sa sigurnošću možemo pretpostaviti da su skupovi tipova igrača međusobno disjunktni. Skup igrača u Selten igri dan je s

$$N^S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Theta_i.$$

Primjetimo da svaki agent tipa pojedinačnog igrača može igrati potpuno iste akcije kao sam igrač. To znači da za svaki $\theta_i \in \Theta_i$,

$$S_{\theta_i}^S = S_i.$$

Funkcija isplate U_{θ_i} za svaki $\theta_i \in \Theta_i$ je uvjetno očekivana korisnost za igrača i u Bayesovskoj igri ako je θ_i njegov stvarni tip. To je preslikavanje $U_{\theta_i} : \times_{i \in \mathbb{N}} \times_{\theta_i \in \Theta_i} S_i \to \mathbb{R}$.
Objasnit ćemo način na koji je U_{θ_i} izračunat koristeći slijedeći primjer u kojem ćemo također izračunati Nashovu ravnotežu. *Nashova ravnoteža* je profil strategija $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ u igri Γ ako svaki igrač i odabere strategiju s_i^* koja predstavlja njegov najbolji odgovor obzirom na odabir strategija ostalih igrača.

Definicija 1.3.1. *Neka je Γ igra s n igrača gdje je S_i skup strategija za svakog igrača* i, *$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ je skup profila strategija i $u = (u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s))$ je funkcija isplate za $s \in S$. Neka je s_i profil strategije igrača* i *i neka je s_{-i} profil strategija svih igrača osim* i-tog. *Svaki igrač $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ odabire strategiju s_i te se dobiva profil strategija $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Profil strategija $s^* \in S$ je* Nashova ravnoteža *ako vrijedi*

$$\forall i, \quad s_i \in S_i \quad u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*).$$

Nashova ravnoteža na čistim strategijama je Nashova ravnoteža gdje svi igrači igraju čiste strategije, dok je Nashova ravnoteža na mješovitim strategijama ravnoteža gdje barem jedan igrač igra mješovitu strategiju. Naime, igra može imati i ravnotežu na čistim strategijama i ravnotežu na mješovitim strategijama.

1.3.1 Selten igra za Bayesovsku igru cijena

Promatramo dva poduzeća, poduzeće 1 i poduzeće 2. Poduzeće 1 proizvodi proizvod x_1, a poduzeće 2 proizvodi proizvod x_2 ili proizvod y_2. Proizvod x_2 sličan je proizvodu x_1 dok je proizvod y_2 druge vrste. Proizvod koji proizvodi poduzeće 2 je strogo čuvana tajna pa se može smatrati privatnom informacijom poduzeća 2. Stoga,

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2\}, \\ \Theta_1 &= \{x_1\}, \\ \Theta_2 &= \{x_2, y_2\}. \end{aligned}$$

Svako poduzeće mora odrediti cijenu proizvoda kojeg proizvodi, što je strateška odluka koju donosi poduzeće. Poduzeće 1 ima izbor odabrati nisku cijenu a_1 ili visoku cijenu b_1, dok poduzeće 2 na izbor ima nisku cijenu a_2 ili visoku cijenu b_2. Znači,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a_1, b_1\}, \\ S_2 &= \{a_2, b_2\}. \end{aligned}$$

Tip poduzeća 1 je poznat svima budući da je Θ_1 jednočlan skup.
Vjerojatnosti uvjerenja poduzeća 2 o poduzeću 1 dane su s

$$\begin{aligned} p_2(x_1|x_2) &= 1 \text{ i} \\ p_2(x_1|y_2) &= 1. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da su vjerojatnosti uvjerenja poduzeća 1 o poduzeću 2

$$\begin{aligned} p_1(x_2|x_1) &= 0.6 \text{ i} \\ p_1(y_2|x_1) &= 0.4. \end{aligned}$$

Da bismo potpuno definirali Bayesovsku igru, moramo odrediti funkciju korisnosti. Neka su funkcije korisnosti za dva moguća profila $\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2$ i $\theta_1 = x_1, \theta_2 = y_2$ dane u tablicama 2 i 3.

		2	
		a_2	b_2
1	a_1	1,2	0,1
	b_1	0,4	1,3

Tablica 2: u_1 i u_2 za $\theta_1 = x_1, \theta_2 = x_2$

		2	
		a_2	b_2
1	a_1	1,3	0,4
	b_1	0,1	1,2

Tablica 3: u_1 i u_2 za $\theta_1 = x_1, \theta_2 = y_2$

Time smo završili opis Bayesovske igre. Sada ćemo izračunati ekvivalentnu Selten igru $\langle N^S, (S_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i \\ i \in N}}, (U_{\theta_i})_{\substack{\theta_i \in \Theta_i \\ i \in N}} \rangle$.
Imamo

$$
\begin{aligned}
N^S &= \Theta_1 \bigcup \Theta_2 = \{x_1, x_2, y_2\} \\
S_{x_1} &= S_1 = \{a_1, b_1\} \\
S_{x_2} &= S_{y_2} = S_2 = \{a_2, b_2\}.
\end{aligned}
$$

Primjetimo da je $U_{\theta_i} : S_1 \times S_2 \times S_2 \to \mathbb{R}, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall i \in N$,
gdje je

$$
\begin{aligned}
S_1 \times S_2 \times S_2 = \{&(a_1, a_2, a_2), (a_1, a_2, b_2), (a_1, b_2, b_2), (a_1, b_2, a_2), \\
&(b_1, a_2, a_2), (b_1, a_2, b_2), (b_1, b_2, b_2), (b_1, b_2, a_2)\}.
\end{aligned}
$$

Gornji skup je skup svih profila strategija svih agenata tipova. Profil strategija može se prikazati kao $(s_{x_1}, s_{x_2}, s_{y_2})$. Također se može prikazati kao $(s_1(\cdot), s_2(\cdot))$ gdje je s_1 preslikavanje iz Θ_1 u S_1 i strategija s_2 preslikavanje iz Θ_2 u S_2. Općenito, za Bayesovsku igru s n igrača profil čistih strategija je oblika

$$((s_{\theta_1})_{\theta_1 \in \Theta_1}, (s_{\theta_2})_{\theta_2 \in \Theta_2}, \ldots, (s_{\theta_n})_{\theta_n \in \Theta_n}).$$

Drugi način zapisa je $(s_1(\cdot), s_2(\cdot), \ldots, s_n(\cdot))$, gdje je s_i preslikavanje iz Θ_i u S_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Isplate agenata tipa u Selten igri dobivene su kao uvjetovana očekivanja nad profilima tipova ostalih agenata. Na primjer, izračunajmo isplatu $U_{x_1}(a_1, a_2, a_2)$ koja je očekivana isplata dobivena od agenata tipa x_1 (za igrača 1) koji igra akciju a_1 i agenata tipova x_2 i y_2 koji igraju akciju a_2, odnosno a_2. U tom slučaju je tip igrača 1 poznat, ali tip igrača 2 može biti x_2 ili y_2 s vjerojatnostima danim funkcijama uvjerenja $p_1(\cdot|x_1)$. Sljedeće uvjetovano očekivanje daje traženu isplatu.

$$
\begin{aligned}
U_{x_1}(a_1, a_2, a_2) &= p_1(x_2|x_1)u_1(x_1, x_2, a_1, a_2) + p_1(y_2|x_1)u_1(x_1, y_2, a_1, a_2) \\
&= 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 1 \\
&= 0.6 + 0.4 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Analogno se isplata $U_{x_1}(a_1, a_2, b_2)$ računa

$$
\begin{aligned}
U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) &= p_1(x_2|x_1)u_1(x_1, x_2, a_1, a_2) + p_1(y_2|x_1)u_1(x_1, y_2, a_1, b_2) \\
&= 0.6 \cdot 1 + 0.4 \cdot 0 \\
&= 0.6.
\end{aligned}
$$

Slično se pokazuje:

$$\begin{aligned}
U_{x_1}(b_1, a_2, a_2) &= 0\\
U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) &= 0.4\\
U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) &= 2\\
U_{x_2}(a_1, b_2, b_2) &= 1\\
U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) &= 4\\
U_{y_2}(a_1, a_2, a_2) &= 3.
\end{aligned}$$

Iz čega slijedi:

$$\begin{gathered}
U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) > U_{x_1}(b_1, a_2, b_2)\\
U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{x_2}(a_1, b_2, b_2)\\
U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) > U_{y_2}(a_1, a_2, a_2).
\end{gathered}$$

Zaključujemo da je profil akcija (a_1, a_2, b_2) Nashova ravnoteža prikaza agenata tipova.

1.3.2 Račun isplate u Selten igri

Nadalje ćemo koristiti u umjesto U. Općenito imamo

1. Bayesovsku igru $\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i)\rangle$,
2. njezin ekvivalent Selten igru $\Gamma^S = \langle N^S, (S_{\theta_i}), (u_{\theta_i})\rangle$,
3. profil akcija u prikazu agenata tipova u obliku $((s_{\theta_1})_{\theta_1\in\Theta_1}, (s_{\theta_2})_{\theta_2\in\Theta_2}, \ldots, (s_{\theta_n})_{\theta_n\in\Theta_n})$,
4. isplate u_{θ_i} za $\theta_i \in \Theta_i, i \in N$, izračunate na slijedeći način:

$$u_{\theta_i}(s_{\theta_i}, s_{\theta_{-i}}) = \sum_{t_{-i}\in\Theta_{-i}} p_i(t_{-i}|\theta_i)u_i(\theta_i, t_{-i}, s_{\theta_i}, s_{t_{-i}})$$

gdje je $s_{t_{-i}}$ profil strategije koji odgovara agentima tipova t_{-i}.

Sažet način zapisa gornjeg je

$$u_{\theta_i}(s_{\theta_i}, s_{\theta_{-i}}) = \mathbb{E}_{\theta_{-i}}[u_i(\theta_i, \theta_{-i}, s_{\theta_i}, s_{\theta_{-i}})].$$

Zapis u_{θ_i} odgovara korisnosti igrača i uvjetovano da tip bude jednak θ_i.
S ovom postavom promatrat ćemo ravnotežu Bayesovskih igara.

1.3.3 Ravnoteža Bayesovske igre

Definicija 1.3.2. Bayes Nashova ravnoteža na čistim strategijama *Bayesovske igre* $\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i)\rangle$ *prirodno se može definirati kao Nashova ravnoteža na čistim strategijama ekvivalentne Selten igre. Odnosno, profil strategija agenata tipova*

$$s^* = ((s^*_{\theta_1})_{\theta_1 \in \Theta_1}, (s^*_{\theta_2})_{\theta_2 \in \Theta_2}, \dots, (s^*_{\theta_n})_{\theta_n \in \Theta_n})$$

je Bayes Nashova ravnoteža na čistim strategijama od Γ *ako*

$$\forall i \in N, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad u_{\theta_i}(s^*_{\theta_i}, s^*_{\theta_{-i}}) \geq u_{\theta_i}(s_i, s^*_{\theta_{-i}}) \quad \forall s_i \in S_i.$$

Alternativno, za profil strategija $(s^*_1(\cdot), s^*_2(\cdot), \dots, s^*_n(\cdot))$ *kažemo da je Bayes Nashova ravnoteža ako je*

$$u_{\theta_i}(s^*_i(\theta_i), s^*_{-i}(\theta_{-i})) \geq u_{\theta_i}(s_i, s^*_{-i}(\theta_{-i})) \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall i \in N.$$

1.3.4 Primjer 1: Bayesovska igra cijena

Nastavljamo već razmatranu Bayesovsku igru cijena. Znamo sljedeće:

- Za $\theta_2 = x_2$, strategija b_2 je strogo dominirana strategijom a_2, stoga, igrač 2 odabire a_2 kada je $\theta_2 = x_2$.
- Za $\theta_2 = y_2$, strategija a_2 je strogo dominirana s b_2, stoga, igrač 2 odabire b_2 kada je $\theta_2 = y_2$.
- Kada su profili akcije (a_1, a_2) ili (b_1, b_2), igrač 1 ima isplatu 1 bez obzira na tip igrača 2, dok za ostale profile isplata igrača 1 jednaka je 0.
- Budući da je $p_1(x_2|x_1) = 0.6$ i $p_1(y_2|x_1) = 0.4$, igrač 1 smatra da je tip x_2 igrača 2 više vjerojatan nego tip y_2.

Gornji argumenti pokazuju da je jedinstvena Bayes Nashova ravnoteža na čistim strategijama u primjeru dana s

$$(s^*_{x_1} = a_1, s^*_{x_2} = a_2, s^*_{y_2} = b_2),$$

što potvrđuje već pokazano. Primjetimo da je strategija ravnoteže za poduzeće 1 uvijek niska cijena, dok je za poduzeće 2 niska cijena ako proizvodi proizvod x_2 i visoka cijena ako proizvodi proizvod y_2.
Gornji primjer, također pokazuje opasnost analiziranja svake matrice zasebno. Ako je svima poznato da je tip igrača 2 x_2, tada je jedinstvena Nashova ravnoteža (a_1, a_2), a ako je svima poznato da igrač 2 ima tip y_2, tada dobivamo (b_1, b_2) za jedinstvenu Nashovu ravnotežu. No, u Bayesovskoj igri tip igrača 2 nije svima poznat i stoga je gornje predviđanje na analizi svake matrice zasebno krivo.

1.3.5 Primjer 2: Aukcija prve cijene sa zatvorenim ponudama

Prisjetimo se da kod aukcije prve cijene sa zatvorenim ponudama svi kupci istovremeno daju svoje zatvorene ponude tako da nijedan kupac ne zna ponude drugih kupaca. Kupac s najvišom ponudom plaća cijenu koju je ponudio.

U našem primjeru promatramo prodavača i dva potencijalna kupca kao u Primjeru 1.2.2 u kojem svaki kupac daje svoju ponudu $S_i, i = 1, 2$. U ovoj igri je pobjednik kupac s većom ponudom. Ali, ako su ponude jednake (neriješen rezultat), pobjednik je kupac 1. Pobjednik plaća prodavaču iznos jednak njegovoj ponudi, a kupac koji je izgubio ne plaća ništa. Napravimo sljedeće pretpostavke:

1. θ_1, θ_2 su nezavisno uzete iz uniformne distribucije na [0,1].
2. Ponuda kupca i je oblika $s_i(\theta_i) = \alpha_i\theta_i$, gdje je $\alpha_i \in [0, 1]$. Ova pretpostavka implicira da je kupac i ponudio dio α_i njegove vrijednosti, to je razumna pretpostavka koja implicira linearan odnos između ponude i vrijednosti.

Problem kupca 1 je dati ponudu tako da maksimizira svoju očekivanu isplatu:

$$\max_{s_1 \geq 0}(\theta_1 - s_1)\mathrm{P}\{s_2(\theta_2) \leq s_1\}.$$

Kako je ponuda igrača 2, $s_2(\theta_2) = \alpha_2\theta_2$ i $\theta_2 \in [0, 1]$, maksimalna ponuda kupca 2 je α_2. Kupac 1 zna to i stoga je $s_1 \in [0, \alpha_2]$. Isto tako,

$$\begin{aligned} P\{s_2(\theta_2) \leq s_1\} &= P\{\alpha_2\theta_2 \leq s_1\} \\ &= P\{\theta_2 \leq \frac{s_1}{\alpha_2}\} \\ &= \frac{s_1}{\alpha_2}(\text{za } \theta_2 \text{ uniformno nad [0,1]}). \end{aligned}$$

Prema tome, problem kupca 1 je

$$\max_{s_1 \in [0, \alpha_2]}(\theta_1 - s_1)\frac{s_1}{\alpha_1}.$$

Rješenje ovog problema je

$$s_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2} & , \frac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2, \\ \alpha_2 & , \frac{\theta_1}{2} > \alpha_2. \end{cases}$$

Analogno dobijemo

$$s_2(\theta_2) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{2} & , \frac{\theta_2}{2} \leq \alpha_1, \\ \alpha_1 & , \frac{\theta_2}{2} > \alpha_1. \end{cases}$$

Neka je $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Tada imamo

$$s_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}, \quad \forall \theta_1 \in \Theta_1 = [0,1],$$
$$s_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}, \quad \forall \theta_2 \in \Theta_2 = [0,1].$$

Primjetimo da ako je $s_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}$, tada je najbolji odgovor kupca 1 $s_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}$ i obratno. Stoga je profil $(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2})$ Bayes Nashova ravnoteža.

1.3.6 Dominantna ravnoteža strategija

Dominantnu ravnotežu strategija možemo definirati koristeći ponovno Selten igru.

Definicija 1.3.3. *Za danu Bayesovsku igru $\Gamma = \langle N, (\Theta_i), (S_i), (p_i), (u_i)\rangle$ profil strategija agenata tipova $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ je* jako dominantna ravnoteža strategija *ako je*

$$u_{\theta_i}(s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) > u_{\theta_i}(s_i, s_{-i}(\theta_{-i}))$$
$$\forall s_i \in S_i \backslash \{s_i^*(\theta_i)\}, \quad \forall s_{-i}(\theta_{-i}) \in S_{-i}, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall i \in N.$$

Definicija 1.3.4. *Za profil strategija agenata tipova $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ kažemo da je* slabo dominantna ravnoteža strategija *ako je*

$$u_{\theta_i}(s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) \geq u_{\theta_i}(s_i, s_{-i}(\theta_{-i}))$$
$$\forall s_i \in S_i, \quad \forall s_{-i}(\theta_{-i}) \in S_{-i}, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall i \in N$$

i stroga nejednakost je zadovoljena barem za jedan $s_i \in S_i$.

Definicija 1.3.5. *Za profil strategija agenata tipova $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot), \ldots, s_n^*(\cdot))$ kažemo da je* vrlo slabo dominantna ravnoteža strategija *ako je*

$$u_{\theta_i}(s_i^*(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i})) \geq u_{\theta_i}(s_i, s_{-i}(\theta_{-i}))$$
$$\forall s_i \in S_i, \quad \forall s_{-i}(\theta_{-i}) \in S_{-i}, \quad \forall \theta_i \in \Theta_i, \quad \forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}, \quad \forall i \in N.$$

Dominantna ravnoteža strategija ne ovisi o funkcijama uvjerenja, a to je ono što ga čini moćnim i jako je snažno svojstvo.

1.3.7 Primjer slabo dominantne ravnoteže strategija aukcije druge cijene

Pokazali smo ranije da aukcija prve cijene sa zatvorenim ponudama ima Bayes Nashovu ravnotežu. Sada ćemo promatrati aukciju druge cijene sa zatvorenim ponudama s dva pregovarača i pokazat ćemo da igra ima slabo dominantnu ravnotežu strategija. Aukcija druge cijene jednaka je aukciji prve cijene osim što pobjednik plaća drugu najvišu ponudu umjesto svoje ponude.

Kažimo da je kupac 2 objavio svoju ponudu kao $\hat{\theta}_2$. Tada postoje dva slučaja:

1. $\theta_1 \geq \hat{\theta}_2$
2. $\theta_1 < \hat{\theta}_2$.

Razmotrimo svaki slučaj zasebno.

Slučaj 1: $\theta_1 \geq \hat{\theta}_2$

Neka je $\hat{\theta}_1$ objava kupca 1. Postoje dva slučaja:

- Ako je $\hat{\theta}_1 \geq \hat{\theta}_2$, tada je isplata za kupca 1 jednaka $\theta_1 - \hat{\theta}_2 \geq 0$.
- Ako je $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, tada je isplata za kupca 1 jednaka 0.

Stoga je maksimalna moguća isplata $\theta_1 - \hat{\theta}_2 \geq 0$.
Ako je $\hat{\theta}_1 = \theta_1$ (tj. kupac 1 objavljuje svoju pravu ponudu), isplata za kupca 1 jednaka je $\theta_1 - \hat{\theta}_2$, što je najveća moguća isplata. Prema tome, objaviti θ_1 je najbolji odgovor za kupca 1 bez obzira što kupac 2 objavi.

Slučaj 2: $\theta_1 < \hat{\theta}_2$

Ponovo postoje dva slučaja:

- Ako je $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$, tada je isplata za kupca 1 jednaka $\theta_1 - \hat{\theta}_2 < 0$.
- Ako je $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$, tada kupac 1 ne pobjeđuje i isplata za njega je 0.

Stoga je u ovom slučaju maksimalna moguća isplata 0.
Ako je $\hat{\theta}_1 = \theta_1$, isplata za kupca 1 je 0. Objavljujući $\hat{\theta}_1 = \theta_1$, svoju pravu ponudu, kupac 1 dobiva 0 isplate, što je u ovom slučaju najbolji odgovor.

Možemo zaključiti:

- ponuditi svoju pravu ponudu je optimalno za kupca 1 bez obzira što kupac 2 objavi
- slično ponuditi svoju pravu ponudu je optimalno za kupca 2 bez obzira na objavu kupca 1
- to znači da je točno objavljivanje slabo dominantna strategija za svakog igrača i (θ_1, θ_2) je slabo dominantna ravnoteža strategija

Poglavlje 2

Stohastičke igre

Stohastička igra odvija se u koracima od pozicije do pozicije prema prijelaznim vjerojatnostima kontroliranim zajednički od dva igrača. Možemo pretpostaviti konačan broj pozicija N i konačne brojeve izbora u svakoj poziciji, m_k i n_k. Ipak, igra ne mora biti ograničena po duljini. Kada u poziciji k igrač odabere svoje i-te i j-te alternative, tada se s vjerojatnošću $s^k_{ij} > 0$ igra zaustavlja, dok se s vjerojatnošću p^{kl}_{ij} igra pomiće do pozicije l. Definiramo

$$s = \min_{k,i,j} s^k_{ij} > 0$$

kao najmanju vjerojatnost zaustavljanja. Obzirom da je s pozitivan, igra završava s vjerojatnošću 1 nakon konačnog broja koraka, jer za bilo koji broj t vjerojatnost da se ne zaustavi nakon n koraka nije veća od $(1-s)^t$.

Isplate se akumiliraju tijekom igre sve dok se igra ne zaustavi. Prvi igrač uzima a^k_{ij} od drugog sve dok je par i, j odabran u poziciji k.
Ako definiramo granicu

$$M = \max_{k,i,j} |a^k_{ij}|,$$

tada vidimo da je očekivana ukupna dobit ili gubitak ograničen s

$$M + (1-s)M + (1-s)^2M + \cdots = \frac{M}{s}.$$

Prvi igrač želi maksimizirati ukupnu akumuliranu isplatu a drugi igrač ju želi minimizirati.

Dakle, proces ovisi o $N^2 + N$ matricama

$$P^{kl} = (p^{kl}_{ij} | i = 1, 2, \dots, m_k, j = 1, 2, \dots, n_k)$$
$$A^k = (a^k_{ij} | i = 1, 2, \dots, m_k, j = 1, 2, \dots, n_k),$$

za $k, l = 1, 2, \dots, N$ gdje elementi zadovoljavaju

$$p^{kl}_{ij} \geq 0$$
$$|a^k_{ij}| \leq M$$
$$\sum_{l=1}^{N} p^{kl}_{ij} = 1 - s^k_{ij} \leq 1 - s < 1.$$

Određivanjem početne pozicije dobivamo posebnu igru Γ^k. Termin *stohastička igra* odnosi se na kolekciju $\Gamma = \{\Gamma^k | k = 1, 2, \dots, N\}$.

Potpuni skupovi čistih i mješovitih strategija u ovim igrama su prilično nezgodni, jer uzimaju u obzir više informacija nego što je potrebno. Uvodimo zapis samo za određene bihevioralne strategije, za one koje pridružuju igraču iste vjerojatnosti za njegove odabire svaki puta kada dođu u istu poziciju bez obzira na rutu. Takve *stacionarne strategije*, kako ih zovemo, mogu se prikazati kao N-torka distribucija vjerojatnosti. Stoga:

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \dots, x^N) \text{ gdje je } x^k = (x^k_1, x^k_2, \dots, x^k_{m_k}),$$

za prvog igrača i analogno za drugog igrača. Ovakav se zapis primjenjuje bez promjene na sve igre koje pripadaju Γ.

2.1 Postojanje rješenja

Dana je matrična igra B. Neka val$[B]$ označuje minimax vrijednost za prvog igrača i neka X$[B]$ i Y$[B]$ označuju skupove optimalnih mješovitih strategija za prvog, odnosno drugog igrača. *Minimax vrijednost* igrača je vrijednost do koje dovodi igračev odabir strategije tako da minimizira svoj maksimalan gubitak i predstavlja ono najmanje što igrač može sigurno dobiti. Drugim riječima, to je najniža vrijednost igrača na koju ga protivnik može ograničiti.

Lema 2.1.1. *Ako su* B *i* C *dvije matrice jednakih dimenzija, tada vrijedi*

$$|val[B] - val[C]| \leq \max_{i,j} |b_{i,j} - c_{i,j}|. \tag{2.1}$$

Dokaz. Definiramo $z = \max_{i,j} |b_{ij} - c_{ij}|$.

Tada imamo

$$val[B] + z = val[B + z] \geq val[C] \quad \text{jer je} \quad c_{ij} \leq b_{ij} + z, \quad \forall i, j$$

i

$$val[C] + z = val[C + z] \geq val[B] \quad \text{jer je} \quad b_{ij} \leq c_{ij} + z, \quad \forall i, j.$$

Slijedi da je

$$val[C] \leq val[B] + z \quad \text{odnosno} \quad val[B] - val[C] \geq -z$$

i

$$val[B] \leq val[C] + z \quad \text{odnosno} \quad val[B] - val[C] \leq z.$$

Iz čega možemo zaključiti

$$-z \leq val[B] - val[C] \leq z \Rightarrow |val[B] - val[C]| \leq z,$$

odnosno

$$|val[B] - val[C]| \leq \max_{i,j} |b_{ij} - c_{ij}|$$

□

Vratimo se na stohastičku igru Γ. Definiramo $A^k(\vec{\alpha})$ kao matricu s elementima

$$a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} \alpha^l,$$

$i = 1, 2, \ldots, m_k$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$, gdje je $\vec{\alpha}$ N-vektor s numeričkim komponentama.

Odnosno, definiramo igru Γ^k kao matričnu igru

$$A^k(\vec{\alpha}) = a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} \alpha^l$$

Slijedeći teorem dokazuje postojanje optimalnih stacionarnih rješenja.

Teorem 2.1.2 (Shapley (1952))**.** *Svaka igra Γ^k ima vrijednost, $\vec{\alpha}^k$. Te vrijednosti su jedinstveno rješenje skupa jednadžbi*

$$\alpha^k = val[a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} \alpha^l] \quad za\ k = 1, 2, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Svaki igrač ima optimalnu stacionarnu strategiju koja u poziciji k *koristi optimalnu mješovitu strategiju za igru s matricom*

$$A^k(\vec{\alpha}) = (a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} \alpha^l) \tag{2.3}$$

gdje je $\vec{\alpha}$ vektor vrijednosti, $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^N)$.

Dokaz teorema temelji se na teoremu kontrakcijskog preslikavanja te kako bismo ga dokazali iznosimo potrebne rezultate.

Definicija 2.1.3. *Preslikavanje $T : X \to X$ je* kontrakcijsko preslikavanje *ako postoji pozitivna konstanta $c < 1$, koju zovemo* kontrakcijski faktor*, takva da je*

$$d(Tx, Ty) \leq cd(x, y) \quad \forall x \in X, \forall y \in X.$$

Definicija 2.1.4. *Točku $x \in X$ zovemo* fiksna točka *preslikavanja $T : X \to X$ ako je*

$$Tx = x.$$

Teorem 2.1.5. *Kontrakcijsko preslikavanje* T *na potpunom metričkom prostoru (X,d) ima jedinstvenu fiksnu točku x_0. Štoviše, za svaki $y \in X$, $d(T^n y, x_0) \to 0, \quad n \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $c < 1$ kontrakcijski faktor od T. Tada je

$$d(T^2 y, Ty) \leq cd(Ty, y).$$

Indukcijom se pokaže

$$d(T^{n+1} y, T^n y) \leq c^n d(Ty, y) \quad \forall n.$$

Iz nejednakosti

$$\begin{aligned} d(T^{n+1} y, y) &\leq d(T^{n+1} y, T^n y) + \cdots + d(Ty, y) \\ &\leq (c^n + \cdots + 1) d(Ty, y) \\ &\leq \frac{1}{1-c} d(Ty, y) \end{aligned}$$

za svaki $n > 0$ slijedi da za svaki $n > m$,

$$d(T^{n+1} y, T^m y) \leq \frac{d(T^{m+1} y, T^m y)}{1-c} \leq \frac{c^m d(Ty, y)}{1-c}.$$

Dakle, $\{T^n y\}$ je Cauchyjev niz. Stoga, postoji točka $x_0 \in \mathbb{R}^d$ takva da je $T^n y \to x_0$, za $n \to \infty$. Da je x_0 fiksna točka slijedi iz

$$\begin{aligned} d(Tx_0, x_0) &\leq d(Tx_0, T^n y) + d(T^n y, x_0) \\ &\leq cd(T^{n-1} y, x_0) + d(T^n y, x_0) \to 0 \end{aligned}$$

za $n \to \infty$, pa je $d(Tx_0, x_0) = 0$.
Fiksna točka je jedinstvena, jer ako je z neka druga fiksna točka tada iz

$$d(x_0, z) = d(Tx_0, Tz) \leq cd(x_0, z)$$

slijedi

$$d(x_0, z) = 0$$

□

Sada možemo dokazati teorem 2.1.1.

Promotrimo transformaciju $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$,

$$T\vec{x} = \vec{y} \quad \text{gdje je } y^k = val[A^k(\vec{x})] \quad \text{za } k = 1, 2, \ldots, N$$

i

$$A^k(\vec{x}) = (a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} x^l) \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, m_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n_k, \quad k, l = 1, 2, \ldots, N.$$

Definiramo normu

$$||\vec{x}|| = \max_k |x^k| \quad \text{za } k = 1, \ldots, N.$$

Dokazujemo da je T kontracijsko preslikavanje s kontracijskim faktorom $c = 1 - s$, gdje je $s = \min_{k,i,j} s^k_{ij} > 0$.

Koristeći (2.1) dobijemo:

$$\begin{aligned}
||T\vec{x} - T\vec{y}|| &= \max_k |val[A^k(\vec{x})] - val[A^k(\vec{y})]| \\
&= \max_k |val(a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} x^l) - val(a^k_{ij} + \sum_l p^{kl}_{ij} y^l)| \\
&\leq \max_{k,i,j} | \sum_l p^{kl}_{ij} x^l - \sum_l p^{kl}_{ij} y^l| \\
&\leq \max_{k,i,j} \sum_l p^{kl}_{ij} |x^l - y^l| \\
&\leq (\max_{k,i,j} \sum_l p^{kl}_{ij}) \max_l |x^l - y^l| \\
&= (1 - s)||\vec{x} - \vec{y}||
\end{aligned}$$

Budući da je $c = 1 - s < 1$, iz teorema kontrakcijskog preslikavanja slijedi da postoji jedinstven vektor $\vec{\alpha}$ takav da je $T\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ što je upravo jednadžba (2.2) iz teorema 2.1.1.

Sada trebamo pokazati da sugerirana optimalna stacionarna strategija osigurava vrijednost igre.

Neka $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$ označava sugeriranu stacionarnu strategiju za prvog igrača gdje je x_k^* optimalno za njega za matricu $A^k(\vec{\alpha})$. Trebamo pokazati da u stohastičkoj igri koja započinje u poziciji k, ta strategija daje očekivani povrat barem α^k bez obzira što drugi igrač uradi.

Neka je n proizvoljan te promatramo igru na n-toj poziciji. Ako je na poziciji n igra prisiljena stati i ako je isplata na toj poziciji $a_{ij}^h + \sum_l p_{ij}^{hl} \alpha^l$ umjesto samo a_{ij}^h, uz pretpostavku da je pozicija u tom momentu bila h, tada bi x^* bilo optimalno za igru i vrijednost bi bila α^k.

Stoga u igri s beskonačno pozicija očekivana isplata prvog igrača za prvih n pozicija je najmanje

$$\alpha^k - (1-s)^n \max_{h,i,j} \sum_l p_{ij}^{hl} \alpha^l \geq \alpha^l - (1-s)^n \max_l \alpha^l$$

te su ostali stupnjevi ograničeni odozdo s $(1-s)^n \frac{M}{s}$.

Zbog toga je očekivana isplata prvog igrača najmanje

$$\alpha^l - (1-s)^n \max_l \alpha^l - (1-s)^n \frac{M}{s}.$$

Kako je to točno za svaki n a n je proizvoljan, očekivana isplata prvog igrača je najmanje α^k. Po simetriji, očekivani gubitak drugog igrača je najviše α^k.
Ovo je točno za svaki k što dokazuje teorem 2.1.1.

Bibliografija

[1] Mirna Čalija Matijević i Bojan Radišić, *Nashova ravnoteža*, dostupno na hrcak.srce.hr/file/168691 (srpanj 2014.).

[2] Vlatko Čerić, *Teorija igara*, dostupno na http://web.efzg.hr/dok/INF/Ceric/Modeliranje%20primjenom%20ra%C4%8Dunala/teorija_igara.pdf (srpanj 2014.).

[3] Thomas S. Ferguson, *Appendix 1: Utility Theory*, dostupno na http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/appen.pdf (svibanj 2014.).

[4] ______, *Game Theory*, dostupno na http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf (svibanj 2014.).

[5] John C. Harsanyi, *Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III*, dostupno na http://www2.cs.siu.edu/~hexmoor/classes/CS491-F10/Harasyani.pdf (srpanj 2014.).

[6] Roger B. Myerson, *Comments on "Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I–II"*, dostupno na http://www.uib.es/depart/deeweb/pdi/hdeelbm0/arxius_decisions_and_games/myerson-harsanyi-ms-2004.pdf (srpanj 2014.).

[7] Y. Narahari, *Game Theory*, dostupno na http://lcm.csa.iisc.ernet.in/gametheory/ln/web-ncp13-bayesian.pdf (siječanj 2014.).

[8] L. S. Shapley, *Stochastic games*, dostupno na http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1063912/pdf/pnas01595-0107.pdf (svibanj 2014.).

[9] Eilon Solan, *Stochastic Games*, dostupno na l.academicdirect.org/Horticulture/GAs/Refs/Solan_2009.pdf (svibanj 2014.).

[10] Mark Walker, *Mixed Strategies: Minimax/Maximin and Nash Equilibrium*, dostupno na http://www.u.arizona.edu/~mwalker/MixedStrategy3.pdf (srpanj 2014.).

[11] Shmuel Zamir, *Bayesian Games: Games with Incomplete Information*, dostupno na http://www.ma.huji.ac.il/~zamir/documents/BayesianGames_ShmuelZamir.pdf (srpanj 2014.).

Sažetak

Bayesovske igre su igre s nepotpunom informacijom, odnosno igre u kojoj neki igrači imaju privatne informacije o igri koje nisu poznate ostalim igračima, a te privatne informacije nazivamo tipovima igrača. Sastoji se od skupa igrača, $\{1, 2, \dots, N\}$, skupova tipova igrača, funkcije vjerojatnosti ili uvjerenja, koja određuju distribuciju vjerojatnosti, prikazujući što igrač vjeruje o tipovima ostalih igrača, te od funkcije isplata igrača.

Točan tip igrača nije deterministički poznat ostalim igračima, ali ostali igrači imaju vjerojatnosnu pretpostavku koji je to tip. Model se pojednostavljuje konzistencijom uvjerenja, a uvjerenja su konzistentna ako su izračunata iz iste distribucije vjerojatnosti uvjetovano na tip svakog igrača. Drugim riječima, ako su uvjerenja konzistentna, jedini izvor razlika u uvjerenjima je razlika u informacijama.

Kako bismo izračunali ravnotežu i isplate Bayesovske igre, koristimo ekvivalentnu Selten igru, koja omogućuje da Bayesovska igra bude pretvorena u strateški oblik igre s potpunom informacijom. Ideja korištena za formuliranje Selten igre je imati agente tipova, odnosno da svaki igrač u originalnoj Bayesovskoj igri bude zamijenjen s brojem agenata tipova. Dakle, dok je Nashova ravnoteža profil strategija koje igrači odabiru kao svoj najbolji odgovor obzirom na odabir strategija ostalih igrača, Bayes Nashova ravnoteža na čistim strategijama Bayesovske igre je Nashova ravnoteža ekvivalentne Selten igre.

Stohastička igra Γ sastoji se od konačnog skupa pozicija $\{1, 2, \dots, N\}$, od kojih je jedna određena kao početna pozicija. Sa Γ^k označujemo igru u kojoj je k početna pozicija, a termin stohastička igra se odnosi na kolekciju $\Gamma = \{\Gamma^k | k = 1, 2, \dots, N\}$.

Igru Γ^k povezujemo s matričnom igrom $A^k = (a^k_{ij})$. Ako je stohastička igra na poziciji k, igrači istovremeno odabiru redak i i stupac j matrice A^k. Kao posljedicu toga imamo da prvi igrač osvaja iznos a^k_{ij} od drugog igrača te da se s vjerojatnošću koja ovisi o i,j i k igra zaustavlja ili pomiče do druge pozicije (moguće i iste). Isplate se akumuliraju tijekom igre sve dok igra ne stane. Kako bi osigurali da će se igra s vremenom zaustaviti, pretpostavljamo da su sve vjerojatnosti zaustavljanja pozitivne. Pod tom pretpostavkom vjerojatnost da će se igra zaustaviti u konačnom broju pokreta jednaka je 1. Zbog te pretpostavke, također je konačna očekivana akumulirana isplata bez obzira kako je igra igrana. Igrač 1 želi maksimizirati ukupno akumuliranu isplatu, a igrač 2 ju želi minimizirati. Igra

ne završava s isplatom, nego nakon što se isplata isplati odlučuje se na slučajan način da li će se igra zaustaviti, a ako se igra ne zaustavi odlučuje se koja će pozicija biti sljedeća. Budući da ne možemo odrediti gornju granicu duljine igre, stohastička igra je beskonačna igra.

U stohastičkim igrama vrijednost igre i optimalne strategije za igrače postoje za svaku početnu poziciju. Strategije koje pridružuju igraču iste distribucije vjerojatnosti za njegove odabire kada dođu u istu poziciju bez obzira na rutu zovemo stacionarne strategije. Postojanje vrijednosti igre i optimalnih stacionarnih strategija igrača osigurava Shapleyev teorem.

Summary

Bayesian games are games with incomplete information, i.e. such games in which some players have private information about the game that other players do not know and that private information are called the type of the player. Bayesian games consist of a set of players, $\{1, 2, \ldots, N\}$, the set of types of players, the probability (belief) function which specifies a probability distribution representing what player would believe about the types of the other players, and the payoff function of players.

The exact type of a player is not known deterministically to the other players who however have a probabilistic guess of what this type is. The model of game is simplifies by the constistency of beliefs and beliefs are consistent if they are derived from the same probability distribution by conditioning on each players' type. Speaking differently, if the beliefs are consistent, the only source of differences in beliefs is difference in information.

To calculate the equilibrium and payoff in Bayesian games, we use its equivalent Selten game which enables a Bayesian game to be transformed to a strategic form game with complete information. The idea used in formulating a Selten game is to have type agents; in fact, each player in the original Bayesian game is replaced with a number of type agents. Therefore, while the Nash equilibrium is a strategies profile chosen by players as a best response considering strategies of other players, a pure strategy Bayesian Nash equilibrium is a pure strategy Nash equilibrium of the equivalent Selten game.

A Stochastic Game, Γ, consists of a finite set of positions or states, $\{1, 2, ..., N\}$, one of which is specified as the starting position. We denote by Γ^k the game in which k is the starting position and the term stochastic game refers to the collection $\Gamma = \{\Gamma^k | k = 1, 2, \ldots, N\}$.

Game Γ^k associates with a matrix game , $A^k = (a^k_{ij})$. If the stochastic game is in state k, the players simultaneously choose a row and column of A^k, say i and j. As a result, two things happen. First, Player 1 wins the amount a^k_{ij} from Player 2. Second, with probabilities that depend on i, j and k, the game either stops, or it moves to another state (possibly the same one). The payoffs accumulate throughout the game until it stops. To make sure the game eventually stops, we make the assumption that all the stopping probabilities are positive. Under this assumption, the probability is one that the game ends in a finite number

of moves. This assumption also makes the expected accumulated payoff finite no matter how the game is played. Player 1 wishes to maximize the total accumulated payoff and Player 2 to minimize it. A payoff does not end the game but after a payoff is made, it is then decided at random whether the game ends and, if not, which state should be played next. Since no upper bound can be placed on the length of the game, this is an infinite game.

In stochastic games, the value and optimal strategies for the players exist for every starting position. Strategies which prescribe for a player the same probabilities for his choice every time the same position is reached, by whatever route, are called stationary strategies. The Shapley's theorem states that the value and stationary optimal strategies exist there.

Životopis

Rođena sam 15. travnja 1986. u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Bukovac, te sam potom upisala XV. gimnaziju u Zagrebu. Nakon završetka srednje škole 2005. godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Matematički odsjek u Zagrebu. Nakon stjecanja zvanja sveučilišne prvostupnice matematike, 2011. godine upisala sam Diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu.