SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mihaela Moker

DEKOMPOZICIJSKI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, rujan, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojoj obitelji

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu definirat ćemo dekompozicijske prostore te proučavati neka njihova svojstva.

Da bismo to napravili, u prvom poglavlju, prvo definiramo topologiju i topološke prostore. U drugom poglavlju definiramo i proučavamo razne dekompozicijske prostore te se također, bavimo i Hausdorffovim prostorima. U završnom, trećem poglavlju, proučavamo poseban slučaj dekompozicijskog prostora kojeg nazivamo kvocijentni prostor, točnije kvocijent topološkog prostora i skupa. Također, u ovom se poglavlju bavimo i dekompozicijskim preslikavanjem te vezom s kompaktnošću.

U ovom diplomskom radu svi su pojmovi precizno definirani, a dokazi tvrdnji su matematički precizno utemeljeni.

Poglavlje 1

Topološki prostori

1.1 Topologija

Neka je X skup. Za $\mathcal{F}$ kažemo da je familija podskupova od X ako je $\mathcal{F}$ skup čiji su elementi podskupovi od X. Skup svih podskupova od X zovemo partitivni skup od X i označavamo $\mathcal{P}(X)$.
Naravno, $\mathcal{P}(X)$ je jedna familija podskupova od X.
Nadalje, vrijedi da je $\mathcal{F}$ familija podskupova od X ako i samo ako je $\mathcal{F}$ podskup od $\mathcal{P}(X)$.

Neka je X skup, $\mathcal{F}$ familija podskupova od X, te A neprazan skup. Za S kažemo da je indeksirana familija elemenata od $\mathcal{F}$ ako je S funkcija čija je domena jednaka A, te takva da za svaki $\alpha \in A$ vrijedi da je $S_\alpha \in \mathcal{F}$. Funkciju S označavamo i sa $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Ako kažemo da je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X, to znači da je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{P}(X)$.

Uočimo, ako je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{F}$ familija podskupova od X, onda je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija podskupova od X.
Ako je $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ familija podskupova od X, onda definiramo

$$\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha = \{x \in X \mid (\exists\, \alpha \in A)\, x \in S_\alpha\} \ \text{ i } \ \bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha = \{x \in X \mid (\forall \alpha \in A)\, x \in S_\alpha\}.$$

Definicija 1.1.1. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X takva da vrijede sljedeća svojstva:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

2. *ako je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$, onda je*

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T},$$

3. *ako su $U, V \in \mathcal{T}$, onda je $U \cap V \in \mathcal{T}$.*

Tada za $\mathcal{T}$ kažemo da je topologija na X, a za $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je topološki prostor.

Primjer 1.1.2. *Neka je X skup. Tada je $\mathcal{P}(X)$ topologija na X. Za $\mathcal{P}(X)$ kažemo da je diskretna topologija na X.*

Primjer 1.1.3. *Neka je X skup. Tada je $\{\emptyset, X\}$ topologija na X. Za $\{\emptyset, X\}$ kažemo da je indiskretna topologija na X.*

Primjer 1.1.4. *Neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na $\{1,2\}$.*
Naime, očito je $\emptyset, \{1,2\} \in \mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$.

1° $\exists \alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} = \{1,2\}$. *Tada je*

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{1,2\} \in \mathcal{T}.$$

2° $\nexists \alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} = \{1,2\}$. *Tada je* $U_\alpha = \emptyset$ *ili* $U_\alpha = \{1\}$ *za svaki* $\alpha \in A$.

2.1° $\exists \alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} = \{1\}$. *Tada je*

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \{1\} \in \mathcal{T}.$$

2.2° $\nexists \alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} = \{1\}$. *Tada je* $U_\alpha = \emptyset$ *za svaki* $\alpha \in A$, *pa je*

$$\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Nadalje, očito je $U \cap V \in \mathcal{T}$, za sve $U, V \in \mathcal{T}$.
Prema tome, $\mathcal{T}$ je topologija na $\{1,2\}$.

Napomena 1.1.5. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od X takva da za sve $U, V \in \mathcal{F}$ vrijedi $U \cup V \in \mathcal{F}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $U_1, ..., U_n \in \mathcal{F}$ vrijedi $U_1 \cup ... \cup U_n \in \mathcal{F}$.*

Ovo se dobiva indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrdnja je jasna.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $U_1, ..., U_{n+1} \in \mathcal{F}$.
Imamo $U_1 \cup ... \cup U_{n+1} = (U_1 \cup ... \cup U_n) \cup U_{n+1}$. Prema indukcijskoj pretpostavci vrijedi $U_1 \cup ... \cup U_n \in \mathcal{F}$, pa zbog svojstva familije $\mathcal{F}$ vrijedi $(U_1 \cup ... \cup U_n) \cup U_{n+1} \in \mathcal{F}$, tj. $U_1 \cup ... \cup U_{n+1} \in \mathcal{F}$.
Dakle, tvrdnja vrijedi za $n + 1$.
Zaključak: tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.1.6. *Neka je $\mathcal{F}$ konačna familija podskupova od X takva da za sve $U, V \in \mathcal{F}$ vrijedi $U \cup V \in \mathcal{F}$. Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{F}$. Tada je*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{F}.$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Tada je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$, pa je $\mathcal{U}$ konačan skup. Stoga postoje $n \in \mathbb{N}$ i $V_1, ..., V_n \in \mathcal{U}$ takvi da je $\mathcal{U} = \{V_1, ..., V_n\}$. Očito su $V_1, ..., V_n \in \mathcal{F}$, pa je prema dokazanom $V_1 \cup ... \cup V_n \in \mathcal{F}$. Imamo $\{V_1, ..., V_n\} = \mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, pa slijedi da je

$$V_1 \cup ... \cup V_n = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Prema tome,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{F}.$$

□

Primjer 1.1.7. *Neka je $X = \{1, 2, 3, 4\}$ te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, X\}$. Očito su $\emptyset, X \in \mathcal{T}$ te je očito da je $U \cup V \in \mathcal{T}$ i $U \cap V \in \mathcal{T}$, za sve $U, V \in \mathcal{T}$. Iz prethodne napomene slijedi da je $\mathcal{T}$ topologija na X.*

Propozicija 1.1.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka su $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$. Tada je $U_1 \cap ... \cap U_n \in \mathcal{T}$.*

Dokaz. Ovo lako dobivamo indukcijom po n. □

Definicija 1.1.9. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ ako je $U \in \mathcal{T}$.*

Dakle, $\mathcal{T}$ je skup svih otvorenih skupova u $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 1.1.10. *Neka je* $(X,\mathcal{T})$ *topološki prostor te* $F \subseteq X$. *Kažemo da je F zatvoren skup u topološkom prostoru* $(X,\mathcal{T})$ *ako je* F^c *otvoren skup u* $(X,\mathcal{T})$. $(F^c = X\backslash F)$.

Primjer 1.1.11. *Neka je* $X = \{1,2,3,4\}$ *te neka je* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, X\}$. *Da li je* $\{2\}$ *zatvoren skup u* $(X,\mathcal{T})$*?*

Imamo $\{2\}^c = \{1,3,4\}$, *a* $\{1,3,4\}$ *nije otvoren u* $(X,\mathcal{T})$. *Prema tome,* $\{2\}$ *nije zatvoren skup u* $(X,\mathcal{T})$.

Uočimo da $\{2\}$ nije ni otvoren skup u $(X,\mathcal{T})$.

Primjer 1.1.12. *Neka je X skup te U bilo koji podskup od X. Tada je U i otvoren i zatvoren skup u topološkom prostoru* $(X,\mathcal{P}(X))$.

Primjer 1.1.13. *Neka je X skup. U topološkom prostoru* $(X,\{\emptyset,X\})$ *jedini otvoreni skupovi su* $\emptyset$ *i X, a to su ujedno i jedini zatvoreni skupovi u tom prostoru.*

Propozicija 1.1.14. *Neka je* $(X,\mathcal{T})$ *topološki prostor.*

1. $\emptyset, X$ *su zatvoreni skupovi u* $(X,\mathcal{T})$.
2. *Neka je* $(F_\alpha)_{\alpha\in A}$ *indeksirana familija zatvorenih skupova u* $(X,\mathcal{T})$. *Tada je*
$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$$
zatvoren skup u $(X,\mathcal{T})$.
3. *Neka su* U, V *zatvoreni skupovi u* $(X,\mathcal{T})$. *Tada je* $U\cup V$ *zatvoren skup u* $(X,\mathcal{T})$.

Dokaz. 1. Tvrdnja slijedi iz $\emptyset^c = X$ i $X^c = \emptyset$.

2. Tvrdimo da je
$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} {F_\alpha}^c. \tag{1.1}$$
To zaključujemo iz sljedećih ekvivalencija:
$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right)^c &\Leftrightarrow x \notin \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \\ &\Leftrightarrow x\in X \text{ i } \exists \alpha_0 \in A \text{ takva da } x \notin F_{\alpha_0} \\ &\Leftrightarrow \exists \alpha_0 \in A \text{ takva da je } x \in {F_{\alpha_0}}^c \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in A} {F_\alpha}^c. \end{aligned}$$

Za svaki $\alpha \in A$ skup F_α je zatvoren, pa je stoga za svaki $\alpha \in A$ skup ${F_\alpha}^c$ otvoren. Iz ovoga slijedi da je

$$\bigcup_{\alpha \in A} {F_\alpha}^c$$

otvoren skup. Dakle, prema (1.1)

$$\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \right)^c$$

je otvoren skup pa zaključujemo da je

$$\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$$

zatvoren skup.

3. Vrijedi

$$(U \cup V)^c = U^c \cap V^c. \tag{1.2}$$

Naime,

$$\begin{aligned} x \in (U \cup V)^c &\Leftrightarrow x \notin (U \cup V) \\ &\Leftrightarrow x \in X \;\text{ i }\; x \notin U \;\text{ i }\; x \notin V \\ &\Leftrightarrow x \in U^c \;\text{ i }\; x \in V^c \Leftrightarrow x \in U^c \cap V^c. \end{aligned}$$

Iz (1.2) slijedi da je $(U \cup V)^c$ otvoren skup kao presjek dva otvorena skupa. Prema tome, $U \cup V$ je zatvoren skup.

□

Napomena 1.1.15. *Ako je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $n \in \mathbb{N}$ te $F_1, ..., F_n$ zatvoreni skupovi u $(X, \mathcal{T})$, onda je $F_1 \cup ... \cup F_n$ zatvoren skup u $(X, \mathcal{T})$, što lako slijedi iz prethodne propozicije.*

1.2 Baza topologije

Definicija 1.2.1. *Neka je X skup, $\mathcal{T}$ topologija na X te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$,
2. *svaki neprazan element od $\mathcal{T}$ se može napisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, tj. ako je $U \in \mathcal{T}$, $U \neq \emptyset$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je*
$$U = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{B}_\alpha.$$

Tada za $\mathcal{B}$ kažemo da je baza topologije $\mathcal{T}$.

Primjer 1.2.2. *Neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na skupu $\{1,2,3\}$. Jasno je da je presjek bilo koja dva elementa iz $\mathcal{T}$ opet u $\mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}$ konačna familija, dovoljno je provjeriti da je unija bilo koja dva elementa iz $\mathcal{T}$ opet u $\mathcal{T}$, a to očito vrijedi. Neka je $\mathcal{B}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2,3\}\}$. Tada je $\mathcal{B}_1$ baza topologije $\mathcal{T}$. Familija $\mathcal{B}_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ je također baza topologije $\mathcal{T}$.*
Nadalje, sam $\mathcal{T}$ je baza topologije $\mathcal{T}$.

Napomena 1.2.3. *Uočimo da općenito, ako je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X, $\mathcal{T}$ je baza topologije $\mathcal{T}$.*

Primjer 1.2.4. *Neka je X skup, te neka je $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{P}(X)$.*

Naime, očito je da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, s druge strane, ako je $S \in \mathcal{P}(X)$, $S \neq \emptyset$, onda je

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

Poglavlje 2

Dekompozicijski prostori

2.1 Dekompozicijska topologija

Definicija 2.1.1. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. *za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi $A \neq \emptyset$,*
2. *ako su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $A \neq B$, onda je $A \cap B = \emptyset$,*
3. $$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = X.$$

Tada za $\mathcal{F}$ kažemo da je particija skupa X.

Primjer 2.1.2. *Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ te neka su $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7\}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{7\}\}$ i $\mathcal{F}_3 = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$. Tada je $\mathcal{F}_1$ particija od X, a $\mathcal{F}_2$ i $\mathcal{F}_3$ nisu particije od X.*

Propozicija 2.1.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je $\mathcal{F}$ particija skupa X. Neka je Λ skup svih podskupova $\mathcal{G}$ od $\mathcal{F}$ takvih da je*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}.$$

Tada je Λ topologija na $\mathcal{F}$.

Dokaz. 1. Imamo

$$\emptyset \subseteq \mathcal{F} \ \text{ i } \ \bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset \in \mathcal{T},$$

dakle $\emptyset \in \Lambda$.
Nadalje,

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F} \text{ i } \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = X \in \mathcal{T},$$

pa je $\mathcal{F} \in \Lambda$.

2. Neka je $(\mathcal{G}_i)_{i \in J}$ indeksirana familija elemenata od Λ. Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i \in \Lambda.$$

Budući da je $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{F}$ za svaki $i \in J$, imamo da je $\bigcup \mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{F}$. Nadalje, vrijedi

$$\bigcup_{A \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i} A = \bigcup_{i \in J} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}_i} A \right). \tag{2.1}$$

Dokažimo (2.1) . Neka je

$$x \in \bigcup_{A \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i} A.$$

Tada postoji

$$A_0 \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i$$

takav da je $x \in A_0$. Budući da je

$$A_0 \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i,$$

postoji $i_0 \in J$ takav da je $A_0 \in \mathcal{G}_{i_0}$. Slijedi da je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}_{i_0}} A.$$

Stoga je

$$x \in \bigcup_{i \in J} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}_i} A \right).$$

Obratno, neka je

$$x \in \bigcup_{i \in J} \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}_i} A \right).$$

Tada postoji $i_0 \in J$ takav da je
$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}_{i_0}} A.$$
Slijedi da postoji $A_0 \in \mathcal{G}_{i_0}$ takav da je $x \in A_0$. Slijedi da je
$$A_0 \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i,$$
stoga je
$$x \in \bigcup_{A \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i} A.$$
Time je (2.1) dokazana.
Za $i \in J$ neka je
$$U_i = \bigcup_{A \in \mathcal{G}_i} A.$$
Budući da je $\mathcal{G}_i \in \Lambda$, imamo da je $U_i \in \mathcal{T}$. Dakle, $(U_i)_{i \in J}$ je indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Budući da je $\mathcal{T}$ topologija, vrijedi
$$\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}.$$
No, prema (2.1) vrijedi
$$\bigcup_{A \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i} A = \bigcup_{i \in J} U_i.$$
Dakle,
$$\bigcup_{A \in \bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i} A \in \mathcal{T}.$$
Prema tome,
$$\bigcup_{i \in J} \mathcal{G}_i \in \Lambda.$$

3. Neka su $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \Lambda$. Imamo $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, pa je $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$.
Vrijedi
$$\bigcup_{A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}} A = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A\right) \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A\right). \tag{2.2}$$
Naime, ako je
$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}} A,$$

onda postoji $A_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$ takav da je $x \in A_0$.
Slijedi $A_0 \in \mathcal{G}$ i $A_0 \in \mathcal{H}$, pa je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \ \text{ i } \ x \in \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A.$$

Stoga je

$$x \in \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \right) \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \right).$$

Obratno, neka je

$$x \in \left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \right) \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \right).$$

Tada je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \ \text{ i } \ x \in \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A.$$

Stoga, postoji $A_0 \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in A_0$ te također postoji $A_1 \in \mathcal{H}$ takav da je $x \in A_1$. Iz ovoga slijedi da su $A_0, A_1 \in \mathcal{F}$. Stoga, kada bi vrijedilo $A_0 \neq A_1$ imali bismo $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ no, to nije moguće jer je $x \in A_0 \cap A_1$.
Prema tome, $A_0 = A_1$, dakle $A_0 \in \mathcal{G}$ i $A_0 \in \mathcal{H}$, tj. $A_0 \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, pa je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}} A.$$

Time smo dokazali da vrijedi (2.2).
Budući da su $\mathcal{G}, \mathcal{H} \in \Lambda$, vrijedi

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T} \ \text{ i } \ \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \in \mathcal{T},$$

stoga je

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \right) \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \right) \in \mathcal{T},$$

pa je prema (2.2)

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}} A \in \mathcal{T}.$$

Dakle, $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} \in \Lambda$.
Time smo dokazali da je Λ topologija na $\mathcal{F}$.

□

Definicija 2.1.4. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $\mathcal{F}$ *particija skupa* X. *Neka je* Λ *skup svih podskupova* $\mathcal{G}$ *od* $\mathcal{F}$ *takvih da je*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}.$$

Tada za Λ *kažemo da je dekompozicijska topologija na* $\mathcal{F}$ *određena topologijom* $\mathcal{T}$, *a za topološki prostor* $(\mathcal{F}, \Lambda)$ *kažemo da je dekompozicijski prostor (određen topologijom* $\mathcal{T}$*).*

Uočimo da je prema prethodnoj propoziciji dekompozicijska topologija zaista topologija.

Primjer 2.1.5. *U prethodnom smo dokazu dobili da vrijedi relacija* (2.2)*, pri čemu su* $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{H}$ *bile podfamilije neke particije od* X. *Dokažimo da jednakost* (2.2) *općenito ne vrijedi za bilo koje familije podskupova* $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{H}$ *od* X. *Uzmimo* $X = \{0, 1, 2\}, \mathcal{G} = \{\{0, 1\}\}$ *i* $\mathcal{H} = \{\{1, 2\}\}$.

Tada je $\mathcal{G} \cap \mathcal{H} = \emptyset$, *pa je*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G} \cap \mathcal{H}} A = \emptyset.$$

S druge strane, imamo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = \{0, 1\} \quad i \quad \bigcup_{A \in \mathcal{H}} A = \{1, 2\},$$

pa je

$$\left(\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \right) \bigcap \left(\bigcup_{A \in \mathcal{H}} A \right) = \{0, 1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}.$$

Prema tome, jednakost (2.2) *ne vrijedi za sve* $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{H}$.

2.2 Primjeri dekompozicijskih prostora

Primjer 2.2.1. *Neka je* $X = \{1, 2, 3\}$ *te neka je* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$. *Tada je* $\mathcal{T}$ *topologija na* X. *Neka je* $\mathcal{F} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$. *Neka su* $\mathcal{G}_1 = \{\{1, 2\}\}, \mathcal{G}_2 = \{\{3\}\}, \mathcal{G}_3 = \emptyset$ *i* $\mathcal{G}_4 = \mathcal{F}$. *Tada su* $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$ *i* $\mathcal{G}_4$ *podskupovi od* $\mathcal{F}$.

Imamo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}_1} A = \{1, 2\} \notin \mathcal{T}, \bigcup_{A \in \mathcal{G}_2} A = \{3\} \notin \mathcal{T},$$

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}_3} A = \emptyset \in \mathcal{T} \quad i \quad \bigcup_{A \in \mathcal{G}_4} A = X \in \mathcal{T}.$$

Prema tome, $\mathcal{G}_3$ *i* $\mathcal{G}_4$ *su elementi dekompozicijske topologije na* $\mathcal{F}$ *određene s* $\mathcal{T}$, *tj.* $\{\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4\}$ *je dekompozicijska topologija na* $\mathcal{F}$.

Uočimo da je to indiskretna topologija na $\mathcal{F}$. $(\{\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4\} = \{\emptyset, \mathcal{F}\})$.

Nadalje, neka je $\mathcal{F}' = \{\{1\}, \{2,3\}\}$. *Tada je* $\mathcal{F}'$ *također particija od* $\{1,2,3\}$, *a svi podskupovi od* $\mathcal{F}'$ *su*

$$\{\{1\}\}, \{\{2,3\}\}, \mathcal{F}' \text{ i } \emptyset.$$

Unije elemenata ovih podskupova su redom

$$\{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \text{ i } \emptyset,$$

a od ovih skupova su prvi, treći i četvrti elementi od $\mathcal{T}$. *Iz ovoga slijedi da su* $\{\{1\}\}, \mathcal{F}'$ *i* $\emptyset$ *svi elementi dekompozicijske topologije na* $\mathcal{F}'$ *određene s* $\mathcal{T}$.

Propozicija 2.2.2. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, neka je* $\mathcal{F}$ *particija od* X *te neka je* Λ *dekompozicijska topologija na* $\mathcal{F}$.

1. *Ako je* $\mathcal{T}$ *diskretna topologija na* X, *onda je* Λ *diskretna topologija na* $\mathcal{F}$.

2. *Ako je* $\mathcal{T}$ *indiskretna topologija na* X, *onda je* Λ *indiskretna topologija na* $\mathcal{F}$.

Dokaz. 1. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}$ diskretna topologija na X. Želimo dokazati da je $\Lambda = \mathcal{P}(\mathcal{F})$. Jasno je da je $\Lambda \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F})$ prema tome, dovoljno je pokazati da je svaki $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ element od Λ.
Neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Za svaki $A \in \mathcal{G}$ vrijedi $A \in \mathcal{F}$, pa je $A \subseteq X$. Stoga je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \subseteq X, \quad \text{tj.} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}$$

jer je $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Stoga je $\mathcal{G} \in \Lambda$.
Prema tome, $\Lambda = \mathcal{P}(\mathcal{F})$, što znači da je Λ diskretna topologija na $\mathcal{F}$.

2. Pretpostavimo da je $\mathcal{T}$ indiskretna topologija na X dakle, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.
Želimo dokazati da je $\Lambda = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$.
Imamo da su $\emptyset, \mathcal{F} \in \Lambda$ jer je Λ topologija na $\mathcal{F}$ prema tome, $\{\emptyset, \mathcal{F}\} \subseteq \Lambda$.
Dokažimo sada da je $\Lambda \subseteq \{\emptyset, \mathcal{F}\}$.
Neka je $\mathcal{G} \in \Lambda$. Pretpostavimo da je $\mathcal{G} \neq \emptyset$ i $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$. Odaberimo $A_0 \in \mathcal{G}$. Nadalje, postoji $B \in \mathcal{F}$ takav da $B \notin \mathcal{G}$. Imamo $A_0 \in \mathcal{F}$, pa je $A_0 \neq \emptyset$ jer je $\mathcal{F}$ particija od X. Odaberimo $x \in A_0$. Tada je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A,$$

što znači da je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq \emptyset.$$

Nadalje, iz $B \in \mathcal{F}$ slijedi da je $B \neq \emptyset$. Odaberimo $y \in B$. Jasno je da je $y \in X$. Tvrdimo da

$$y \notin \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A.$$

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $A \in \mathcal{G}$ takav da je $y \in A$. Imamo $B \notin \mathcal{G}$ i $A \in \mathcal{G}$ iz čega slijedi da je $A \neq B$. Iz ovoga, i činjenice da su $A, B \in \mathcal{F}$ slijedi da je $A \cap B = \emptyset$. No, to je u kontradikciji s činjenicom da je $y \in B$ i $y \in A$. Dakle,

$$y \notin \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A.$$

Ovo povlači da je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq X.$$

Dakle,

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq \emptyset \ \text{ i } \ \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq X,$$

pa

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \notin \{\emptyset, X\}, \ \text{ tj. } \ \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \notin \mathcal{T}.$$

Ovo je u kontradikciji s tim da je $\mathcal{G} \in \Lambda$.
Pretpostavka da je $\mathcal{G} \neq \emptyset$ i $\mathcal{G} \neq \mathcal{F}$ nas je dovela do kontradikcije, pa zaključujemo da je $\mathcal{G} = \emptyset$ ili $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, tj. $\mathcal{G} \in \{\emptyset, \mathcal{F}\}$.
Dakle, $\Lambda \subseteq \{\emptyset, \mathcal{F}\}$ i time smo dokazali da je $\Lambda = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$, tj. Λ je indiskretna topologija na $\mathcal{F}$.

□

Primjer 2.2.3. *Neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{N}\}$. Tada je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{N}$.*

Neka je P skup svih parnih brojeva iz $\mathbb{N}$, a N skup svih neparnih brojeva iz $\mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{F} = \{P, N\}$. Očito je $\mathcal{F}$ particija od $\mathbb{N}$. Neka je Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena s $\mathcal{T}$. Sve podfamilije od $\mathcal{F}$ su

$$\emptyset, \{P\}, \{N\} \ \ i \ \ \mathcal{F},$$

a unije svih elemenata tih familija su redom

$$\emptyset, \ P, \ N \ \ i \ \ \mathbb{N}.$$

Iz ovoga slijedi da je $\Lambda = \{\emptyset, \mathcal{F}\}$.

Primjer 2.2.4. *Neka je* $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}$. *Tvrdimo da je* $\mathcal{T}$ *topologija na* $\mathbb{R}$.
Očito je $\mathcal{T}$ *familija podskupova od* $\mathbb{R}$.

1. *Očito su* $\emptyset,\ \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

2. *Pretpostavimo da je* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija elemenata od* $\mathcal{T}$.

   1° *Postoji* $\alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} \in \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \in U\}$. *Tada je* $0 \in U_\alpha$, *pa je*

   $$0 \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

   Prema tome,

   $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

   2° *Ne postoji* $\alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} \in \{U \subseteq \mathbb{R} \mid 0 \in U\}$, *pa je* $U_\alpha \in \{\emptyset\}$, *za svaki* $\alpha \in A$. *Dakle,* $U_\alpha = \emptyset$ *za svaki* $\alpha \in A$, *pa je*

   $$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \emptyset, \quad tj. \quad \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

3. *Neka su* $U, V \in \mathcal{T}$.

   1° $U = \emptyset$ *ili* $V = \emptyset$. *Tada je* $U \cap V = \emptyset$, *pa je* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

   2° $U \neq \emptyset$ *i* $V \neq \emptyset$. *Tada je* $0 \in U$ *i* $0 \in V$, *pa je* $0 \in U \cap V$, *tj.* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Zaključak: $\mathcal{T}$ *je topologija na* $\mathbb{R}$.

Primjer 2.2.5. *Neka je* $\mathcal{F} = \{\mathbb{Q},\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$. *Očito je* $\mathcal{F}$ *particija od* $\mathbb{R}$. *Neka je* Λ *dekompozicijska topologija na* $\mathcal{F}$ *određena topologijom* $\mathcal{T}$ *iz primjera* 2.2.4.
Svi podskupovi od $\mathcal{F}$ *su*

$$\{\mathbb{Q}\}, \{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}, \mathcal{F} \ \ i \ \ \emptyset,$$

a unije njihovih elemenata su redom

$$\mathbb{Q},\ \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},\ \mathbb{R} \ \ i \ \ \emptyset.$$

Imamo $\mathbb{Q} \in \mathcal{T}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \notin \mathcal{T}, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ *i* $\emptyset \in \mathcal{T}$, *pa je*

$$\Lambda = \{\{\mathbb{Q}\}, \mathcal{F}, \emptyset\}.$$

Primjer 2.2.6. *Neka je $\mathcal{T}$ familija skupova iz primjera* 2.2.4. *Neka je $A = \langle -\infty, -1\rangle$, $B\,[-1, 1]$ i $C = \langle 1, \infty\rangle$. Neka je $\mathcal{F} = \{A,\ B,\ C\}$. Tada je $\mathcal{F}$ particija od $\mathbb{R}$. Neka je Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Svi podskupovi od $\mathcal{F}$ su*

$$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \quad i \quad \emptyset.$$

Unije njihovih elemenata su redom

$$A \notin \mathcal{T},\ B \in \mathcal{T},\ C \notin \mathcal{T},\ A \cup B \in \mathcal{T},\ A \cup C \notin \mathcal{T},\ B \cup C \in \mathcal{T},\ A \cup B \cup C \in \mathcal{T} \quad i \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Prema tome, dekompozicijska topologija Λ na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$ je jednaka

$$\Lambda = \{\{B\}, \{A, B\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}, \emptyset\}.$$

Primjer 2.2.7. *Neka je $\mathcal{T}$ familija skupova iz primjera* 2.2.4. *Neka je $\mathcal{F}$ particija od $\mathbb{R}$. Tada postoji (jedinstveni) element od $\mathcal{F}$ koji sadrži* 0*, označimo ga s A_0. Dakle, $A_0 \in \mathcal{F}$ i $0 \in A$. Neka je Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Tvrdimo da je*

$$\Lambda = \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \mid A_0 \in \mathcal{G}\} \cup \{\emptyset\}. \tag{2.3}$$

Neka je $\mathcal{G} \in \Lambda$. Tada je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}.$$

1°

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = \emptyset.$$

Tada je $\mathcal{G} = \emptyset$ (kada bi vrijedilo $\mathcal{G} \neq \emptyset$, postojao bi $B \in \mathcal{G}$, pa bi vrijedilo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq \emptyset$$

jer je $B \neq \emptyset$, pošto je $B \in \mathcal{F}$).

2°

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \neq \emptyset.$$

Tada je

$$0 \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A$$

jer je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}.$$

Tada postoji $B \in \mathcal{G}$ takav da je $0 \in B$. Iz toga slijedi da je $B = A_0$.
Prema tome, $A_0 \in \mathcal{G}$.

Ovim smo dokazali da je $\Lambda \subseteq \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \mid A_0 \in \mathcal{G}\} \cup \{\emptyset\}$.
Obratno, očito je $\{0\} \in \Lambda$. *Pretpostavimo da je* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *takav da je* $A_0 \in \mathcal{G}$. *Želimo dokazati da je* $\mathcal{G} \subseteq \Lambda$. *Imamo* $0 \in A_0$ *i* $A_0 \in \mathcal{G}$, *pa je*

$$0 \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A,$$

stoga je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T}.$$

Dakle, $\mathcal{G} \in \Lambda$ *i time smo dokazali da vrijedi* (2.3).

Lema 2.2.8. *Neka je* $\mathcal{F}$ *particija nekog skupa* X. *Pretpostavimo da je* $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *takav da je*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = X.$$

Tada je $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Dokaz. Neka je $B \in \mathcal{F}$. Odaberimo $x \in B$ (takav sigurno postoji jer je B neprazan skup). Vrijedi $x \in X$, pa je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A,$$

tj. postoji $A \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in A$. Imamo $A \in \mathcal{F}$ (jer je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$), $B \in \mathcal{F}$ i $x \in A \cap B$, pa zaključujemo da je $A = B$. Prema tome, $B \in \mathcal{G}$.
Time smo dokazali da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, pa slijedi tvrdnja leme. $\square$

Primjer 2.2.9. *Neka je* $\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{\mathbb{R}\}$. *Tada je* $\mathcal{T}$ *topologija na* $\mathbb{R}$.

1. *Očito su* $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$.

2. *Neka je* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *indeksirana familija elemenata od* $\mathcal{T}$. *Želimo dokazati da je*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

1° *Postoji* $\alpha_0 \in A$ *takva da je* $U_{\alpha_0} = \mathbb{R}$. *Tada je*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = \mathbb{R},$$

pa je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

2° *Za svaki* $\alpha \in A$ *vrijedi* $U_\alpha \in \{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \subseteq \mathbb{N}\}$. *Stoga, za svaki* $\alpha \in A$ *vrijedi* $U_\alpha \subseteq \mathbb{N}$, *pa slijedi da je*

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \subseteq \mathbb{N}.$$

Prema tome,

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

3. *Neka su* $U, V \in \mathcal{T}$. *Ako je* $U \subseteq \mathbb{N}$ *ili* $V \subseteq \mathbb{N}$, *onda je* $U \cap V \subseteq \mathbb{N}$, *tj.* $U \cap V \in \mathcal{T}$. *Inače, vrijedi* $U = \mathbb{R}$ *i* $V = \mathbb{R}$, *pa je* $U \cap V = \mathbb{R}$, *dakle* $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Neka je $A = \langle -\infty, -1 \rangle, B = [-1, 1]$ *i* $C = \langle 1, \infty \rangle$ *te neka je* $\mathcal{F} = \{A, B, C\}$. *Tada je* $\mathcal{F}$ *particija od* $\mathbb{R}$. *Neka je* Λ *dekompozicijska topologija na* $\mathcal{F}$ *određena topologijom* $\mathcal{T}$.
Svi podskupovi od $\mathcal{F}$ *su*

$$\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\} \quad i \quad \emptyset.$$

Unije njihovih elemenata su redom

$$A \notin \mathcal{T},\ B \notin \mathcal{T},\ C \notin \mathcal{T},\ A \cup B \notin \mathcal{T},\ A \cup C \notin \mathcal{T},\ B \cup C \notin \mathcal{T},\ A \cup B \cup C \in \mathcal{T} \quad i \quad \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Prema tome, $\Lambda = \{\{A, B, C\}, \emptyset\}$, *tj.* $\Lambda = \{\mathcal{F}, \emptyset\}$.

Nadalje, neka su $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *i* $N = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ *te neka je*

$$\mathcal{F}' = \{P,\ N,\ \langle -\infty, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, ...\},$$

$$tj.\ \mathcal{F}' = \{P,\ N,\ \langle -\infty, 1\rangle\} \cup \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Uočimo da je $\mathcal{F}'$ particija od $\mathbb{R}$.
Neka je Λ' dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}'$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Tvrdimo da je

$$\Lambda' = \{\emptyset,\ \mathcal{F}', \{P\}, \{N\}, \{P, N\}\}.$$

Vrijedi $\emptyset,\ \mathcal{F}', \{P\}, \{N\}, \{P, N\} \in \Lambda'$ jer su $\emptyset,\ \mathbb{R},\ P,\ N,\ \mathbb{N} \in \mathcal{T}$.
Obratno, neka je $\mathcal{G} \in \Lambda'$. Tada je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T},$$

pa je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \subseteq \mathbb{N} \ \ ili \ \ \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = \mathbb{R}.$$

Ako je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A = \mathbb{R},$$

onda iz činjenice da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ i leme 2.2.8 slijedi da je $\mathcal{G} = \mathcal{F}'$.
Ako je

$$\bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \subseteq \mathbb{N},$$

onda je jasno da $\langle -\infty, 1\rangle \notin \mathcal{G}$ i $\langle n, n+1\rangle \notin \mathcal{G}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$, zaključujemo da je $\mathcal{G} \subseteq \{P, N\}$, tj. $\mathcal{G} = \emptyset$ ili $\mathcal{G} = \{P\}$ ili $\mathcal{G} = \{N\}$ ili $\mathcal{G} = \{P, N\}$.
Time smo dokazali da je $\Lambda = \{\emptyset, \mathcal{F}', \{P\}, \{N\}, \{P, N\}\}$.

2.3 Hausdorffovi prostori

Definicija 2.3.1. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je Hausdorffov ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$, postoje otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je*

$$x \in U,\ y \in V \ \ i \ \ U \cap V = \emptyset.$$

Primjer 2.3.2. *Pretpostavimo da je X skup koji ima bar dva elementa. Tada topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$ nije Hausdorffov.*

Jedini otvoren skup koji sadrži točku x je X. Isto tako, jedini otvoren skup koji sadrži točku y je X. Stoga je jasno da ne postoje otvoreni disjunktni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$.

Primjer 2.3.3. *Neka je* $X = \{1, 2\}$ *te* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. *Tada* $(X, \mathcal{T})$ *nije Hausdorffov topološki prostor.*

Jedini otvoren skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ *koji sadrži* 2 *je čitav* X*, a jasno je da* X *nije disjunktan niti s jednim skupom koji sadrži* 1. *Prema tome,* $(X, \mathcal{T})$ *nije Hausdorffov topološki prostor.*

Primjer 2.3.4. *Neka je* X *neprazan skup. Tvrdimo da je topološki prostor* $(X, \mathcal{P}(X))$ *Hausdorffov.*

Neka su $x, y \in X$ *te* $x \neq y$. *Neka je* $U = \{x\}$ *i* $V = \{y\}$. *Tada su* U *i* V *otvoreni skupovi u* $(X, \mathcal{P}(X))$ *te* $x \in U$, $y \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$*, pa je topološki prostor* $(X, \mathcal{P}(X))$ *Hausdorffov.*

Primjer 2.3.5. *Neka je* $\mathcal{T}$ *topologija iz primjera* 2.2.4. *Pretpostavimo da je* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *Hausdorffov prostor. To znači da za sve* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ *postoje* U, $V \in \mathcal{T}$ *takvi da je*

$$x \in U, \ y \in V \ \text{ te } \ U \cap V = \emptyset.$$

Odaberimo neke $x, y \in \mathbb{R}$ *takve da je* $x \neq y$. *Tada postoje* $U, V \in \mathcal{T}$ *takvi da je* $x \in U, y \in V$ *te da je* $U \cap V = \emptyset$. *Jasno je da su* U *i* V *neprazni, pa iz definicije topologije* $\mathcal{T}$ *slijedi da je* $0 \in U$ *i* $0 \in V$*, a to znači da je* $U \cap V \neq \emptyset$. *Kontradikcija.*

Primjer 2.3.6. *Neka je* $\mathcal{T}$ *topologija iz primjera* 2.2.9. *Pretpostavimo da je* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *Hausdorffov prostor. Neka je* $x = 0$ *i* $y = 1$. *Tada postoje otvoreni skupovi* U *i* V *takvi da je* $0 \in U$ *i* $1 \in V$ *te* $U \cap V = \emptyset$. *Po definiciji topologije slijedi da je* $U \subseteq \mathbb{N}$ *ili* $U = \mathbb{R}$.
Vidimo da U *nije podskup od* $\mathbb{N}$ *jer sadrži* 0*, pa je onda* $U = \mathbb{R}$. *Iz* $U = \mathbb{R}$ *slijedi da je* $U \cap V = V$ *što je različito od praznog skupa. Kontradikcija.*

Propozicija 2.3.7. *Neka je* $\mathcal{T}$ *topologija na skupu* X. *Neka je* $\mathcal{B}$ *familija podskupova od* X. *Tada je* $\mathcal{B}$ *baza topologije* $\mathcal{T}$ *ako i samo ako vrijedi:*

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$,

2. *za svaki* $U \in \mathcal{T}$ *i za svaki* $x \in U$ *postoji* $B \in \mathcal{B}$ *takav da je* $x \in B \subseteq U$.

Dokaz. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

1. Očito vrijedi.
2. Neka je $U \in \mathcal{T}$, te $x \in U$. Budući da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{T}$, tada U možemo napisati kao uniju nekih elemenata od baze $\mathcal{B}$, tj. postoji indeksirana familija $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ tako da je
$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$
Iz $x \in U$ slijedi da postoji $\alpha \in A$ takva da je $x \in B_\alpha$. Imamo $x \in B_\alpha \subseteq U$ i $B_\alpha \in \mathcal{B}$.

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da vrijede 1. i 2.. Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Neka je $U \in \mathcal{T}, U \neq \emptyset$. Želimo dokazati da se U može zapisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$. Prema 2., za svaki $x \in U$ postoji $B_x \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_x \subseteq U$. Na taj način smo dobili indeksiranu falimiju $(B_x)_{x \in U}$ elemenata od $\mathcal{B}$ te vrijedi

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x.$$

Zaključak: $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$. □

Propozicija 2.3.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Tada je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor ako i samo ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je*

$$x \in B_1, y \in B_2 \ \text{ i } \ B_1 \cap B_2 = \emptyset.$$

Dokaz. $\Leftarrow$ Ako za sve $x, y \in X$ takve da je $x \neq y$ postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1, y \in B_2$ i $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, onda je očito $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor.

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor. Neka su $x, y \in X$ i neka je $x \neq y$. Tada postoje $U, V \in \mathcal{T}$ takvi da je $x \in U, y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. Prema prethodnoj propoziciji, postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da je $x \in B_1 \subseteq U$ i $y \in B_2 \subseteq V$. Iz $U \cap V = \emptyset$ slijedi da je $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

□

Propozicija 2.3.9. *Neka je X skup, $\mathcal{B}$ familija podskupova od X te $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X takve da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}_2$. Tada je $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Dokaz. Neka je $U \in \mathcal{T}_1$. Ako je $U = \emptyset$, onda je očito $U \in \mathcal{T}_2$. Ako je $U \neq \emptyset$, onda postoji indeksirana familija $(B_\alpha)_{\alpha \in A}$ elemenata od $\mathcal{B}$ takva da je

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Iz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$ slijedi da je $B_\alpha \in \mathcal{T}_2$ za svaki $\alpha \in A$, stoga je

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha \in \mathcal{T}_2.$$

Prema tome, $U \in \mathcal{T}_2$. Time smo dokazali da je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.
Analogno dobivamo da je $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.
Prema tome, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Teorem 2.3.10. *Neka je X neprazan skup te neka je $\mathcal{B}$ familija podskupova od X koja ima sljedeća svojstva:*

1. $$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X,$$

2. *ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te $x \in B_1 \cap B_2$, onda postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Tada postoji topologija $\mathcal{T}$ na X takva da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.

Dokaz. Definirajmo $\mathcal{T}$ kao familiju svih podskupova $U \subseteq X$ koji imaju sljedeće svojstvo:

$$\text{za svaki } x \in U \text{ postoji } B \in \mathcal{B} \text{ takav da je } x \in B \subseteq U.$$

Dokažimo da je $\mathcal{T}$ topologija na X. Očito je $\emptyset \in \mathcal{T}$, a da je $X \in \mathcal{T}$ slijedi iz 1..
Neka je $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{T}$. Želimo dokazati da je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Neka je

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Tada postoji $\alpha_0 \in A$ takva da je $x \in U_{\alpha_0}$. Budući da je $U_{\alpha_0} \in \mathcal{T}$ postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U_{\alpha_0}$. Stoga je

$$x \in B \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Zaključak:

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

Neka su $U, V \in \mathcal{T}$. Želimo dokazati da je $U \cap V \in \mathcal{T}$.
Neka je $x \in U \cap V$. Tada je $x \in U$ i $x \in V$. Budući da je $U \in \mathcal{T}$ postoji $B_1 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_1 \subseteq U$. Isto tako iz $V \in \mathcal{T}$ slijedi da postoji $B_2 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_2 \subseteq V$. Iz ovoga slijedi da je

$$x \in B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V.$$

Prema svojstvu 2., postoji $B_3 \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ iz čega slijedi da je $x \in B_3 \subseteq U \cap V$. Time smo dokazali da je $U \cap V \in \mathcal{T}$. Prema tome, $\mathcal{T}$ je topologija na X.
Dokažimo sada da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$.
U tu svrhu dovoljno je provjeriti da vrijede tvrdnje 1. i 2. iz propozicije 2.3.7. Tvrdnja 2. očito vrijedi prema definiciji topologije $\mathcal{T}$. Stoga ostaje još dokazati da je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. No, to je jasno jer za svaki $B \in \mathcal{B}$ i svaki $x \in B$ vrijedi $x \in B' \subseteq B$ i $B' \in \mathcal{B}$, ako uzmemo $B' = B$,

što znači da je $B \in \mathcal{T}$, dakle $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.
Time je tvrdnja teorema dokazana. $\square$

Primjer 2.3.11. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ te neka je $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}\}$. Tada ne postoji topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.*

Pretpostavimo suprotno, da takva $\mathcal{T}$ postoji. Imamo $X \in \mathcal{T}$, pa slijedi da se X može zapisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$. No, to je očito nemoguće jer niti jedan element od $\mathcal{B}$ ne sadrži 3.

Primjer 2.3.12. *Neka je $X = \{1, 2, 3\}$ te neka je $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$. Tada ne postoji topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza.*

Pretpostavimo suprotno, da takva topologija $\mathcal{T}$ postoji. Tada je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, pa slijedi $\{1, 2\}, \{2, 3\} \in \mathcal{T}$ što povlači da je $\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \in \mathcal{T}$, tj. $\{2\} \in \mathcal{T}$. Stoga se $\{2\}$ može zapisati kao unija nekih elemenata od $\mathcal{B}$, a jasno je da je to nemoguće iz definicije od $\mathcal{B}$.

Primjer 2.3.13. *Neka je $\mathcal{B} = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Tvrdimo da za $\mathcal{B}$ vrijede svojstva* 1. *i* 2. *iz teorema* 2.3.10 *(pri čemu je $X = \mathbb{R}$).*

Očito je

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \mathbb{R}.$$

S druge strane, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x \in \langle x - 1, x + 1\rangle$ pa je

$$x \in \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

Dakle,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ te neka je $x \in B_1 \cap B_2$. Imamo

$$B_1 = \langle a, b\rangle\,,\ B_2 = \langle c, d\rangle \quad \text{gdje su } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d.$$

Iz $x \in B_1 \cap B_2$ slijedi $x \in \langle a, b\rangle$ i $x \in \langle c, d\rangle$, pa je $a < x < b$ i $c < x < d$.
Neka su

$$y = \max\{a, c\} \quad i \quad z = \min\{b, d\}\,.$$

Tada je $y < x < z$, tj. $x \in \langle y, z\rangle$. Nadalje, ako je $w \in \langle y, z\rangle$, onda je $y < w < z$, tj. $\max\{a, c\} < w < \min\{b, d\}$, pa je $a < w < b$ i $c < w < d$. Ovo povlači da je $w \in \langle a, b\rangle$ i $w \in \langle c, d\rangle$, odnosno $w \in \langle a, b\rangle \cap \langle c, d\rangle$. Prema tome, $\langle y, z\rangle \subseteq \langle a, b\rangle \cap \langle c, d\rangle$.
Dakle, $x \in \langle y, z\rangle \subseteq B_1 \cap B_2$ i $\langle y, z\rangle \in \mathcal{B}$.
Zaključak: za $\mathcal{B}$ vrijede svojstva 1. *i* 2. *iz teorema* 2.3.10*, stoga postoji (jedinstvena) topologija na $\mathbb{R}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza.*

Za tu topologiju kažemo da je **euklidska topologija** na $\mathbb{R}$.

Primjer 2.3.14. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$.*

1. *Skupovi $\langle a,b\rangle$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ su očito otvoreni u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$. Nadalje, skup $\langle 0,1\rangle \cup \langle 2,3\rangle$ je također otvoren kao unija dva otvorena skupa.*

2. *Neka je $a \in \mathbb{R}$. Tada je skup $\langle a,\infty\rangle$ otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.*
   Naime, vrijedi
   $$\langle a,\infty\rangle = \bigcup_{b \in \langle a,\infty\rangle} \langle a,b\rangle\,, \quad tj. \quad \langle a,\infty\rangle = \bigcup_{b\in A} U_b,$$
   gdje je $A = \langle a,\infty\rangle$ i $U_b = \langle a,b\rangle$, za svaki $b \in A$. Imamo da je $(U_b)_{b\in A}$ indeksirana familija elemenata od $\mathcal{E}$, pa slijedi da je
   $$\bigcup_{b\in A} U_b \in \mathcal{E}, \quad tj. \quad \langle a,\infty\rangle \in \mathcal{E}.$$
   Analogno dobivamo da je $\langle -\infty, a\rangle$ otvoren skup u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.

3. *Skup $\{0\}$ nije otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.*
   Pretpostavimo suprotno. Imamo $0 \in \{0\}$ i $\{0\} \in \mathcal{E}$, pa prema propoziciji 2.3.7 postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $0 \in B \subseteq \{0\}$, pri čemu je
   $$\mathcal{B} = \{\langle a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}\,.$$
   Dakle, postoje $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $0 \in \langle a,b\rangle \subseteq \{0\}$. Ovo je očito nemoguće. Prema tome, $\{0\}$ nije otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.

4. *Skup $[0,\infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.*
   Pretpostavimo suprotno. Imamo $0 \in [0,\infty\rangle$, pa prema propoziciji 2.3.7 postoje $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je
   $$0 \in \langle a,b\rangle \subseteq [0,\infty\rangle\,.$$
   Slijedi $a < 0 < b$. Odaberimo $x \in \mathbb{R}$ takav da je $a < x < 0$. Tada vrijedi $a < x < b$, pa je $x \in \langle a,b\rangle$. Zbog $\langle a,b\rangle \subseteq [0,\infty\rangle$ imamo $x \in [0,\infty\rangle$, pa je $0 \leq x$.
   Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $x < 0$.
   Dakle, skup $[0,\infty\rangle$ nije otvoren u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$.

Propozicija 2.3.15. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Tada je topološki prostor $(\mathbb{R},\mathcal{E})$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Želimo dokazati da postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V u $(\mathbb{R},\mathcal{E})$ takvi da je $x \in U$ i $y \in V$. Možemo pretpostaviti da je $x < y$. Odaberimo $a \in \mathbb{R}$ takav da je $x < a < y$. Neka su $U = \langle -\infty, a\rangle$ i $V = \langle a,\infty\rangle$. Skupovi U i V su očito disjunktni, a otvoreni su prema prethodnom primjeru. Nadalje, jasno je da je $x \in U$ i $y \in V$. Prema tome, $(\mathbb{R},\mathcal{E})$ je Hausdorffov prostor. □

Primjer 2.3.16. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je $\mathcal{F} = \{A, B\}$ gdje su $A = \langle -\infty, 0\rangle$ i $B = [0, \infty\rangle$. Očito je $\mathcal{F}$ particija od $\mathbb{R}$. Neka je Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{E}$. Sve podfamilije od $\mathcal{F}$ su*

$$\emptyset, \{A\}, \{B\} \quad i \quad \{A, B\},$$

a unije elemenata ovih familija su redom

$$\emptyset,\ A,\ B\ \ i\ \ \mathbb{R}.$$

Uočimo da je $A \in \mathcal{E}$ te da $B \notin \mathcal{E}$ (primjer 2.3.14), stoga je $\Lambda = \{\emptyset, \{A\}, \mathcal{F}\}$. Uočimo da topološki prostor $(\mathcal{F}, \Lambda)$ nije Hausdorffov jer je $\mathcal{F}$ jedini otvoren skup u tom prostoru koji sadrži B.
Zaključak: Ako je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, $\mathcal{F}$ particija od X i Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ (određena topologijom $\mathcal{T}$), onda $(\mathcal{F}, \Lambda)$ ne mora biti Hausdorffov prostor.

Poglavlje 3

Kvocijentni prostori

3.1 Kvocijent prostora i skupa

Definicija 3.1.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te neka je A neprazan podskup od X. Neka je*

$$X/A = \{A\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \backslash A\}.$$

Uočimo da je X/A particija od X. Označimo sa $\mathcal{T}/A$ dekompozicijsku topologiju na X/A određenu topologijom $\mathcal{T}$. Za topološki prostor $(X/A, \mathcal{T}/A)$ kažemo da je kvocijent topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ i skupa A.

Primjer 3.1.2. *Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ te neka je $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, X\}$. Očito je $\mathcal{T}$ topologija na X. Neka je $A = \{4, 5, 6\}$. Tada je $X/A = \{A\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \backslash A\}$, tj. $X/A = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\}\}$. Neka je $B = \{1\}, C = \{2\}$ i $D = \{3\}$. Dakle, $X/A = \{A, B, C, D\}$. Tvrdimo da je*

$$\mathcal{T}/A = \{\emptyset, \{B\}, \{A, B, C, D\}\}. \tag{3.1}$$

Znamo da je $\mathcal{T}/A$ familija svih podskupova $\mathcal{G}$ od X/A takvih da je

$$\bigcup_{V \in \mathcal{G}} V \in \mathcal{T}.$$

Stoga je očito $\{\emptyset, \{B\}, \{A, B, C, D\}\} \subseteq \mathcal{T}/A$.
Obratno, neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{T}/A$. Tada je $\mathcal{G} \subseteq X/A$, tj $\mathcal{G} \subseteq \{A, B, C, D\}$ i unija svih elemenata od $\mathcal{G}$ je iz $\mathcal{T}$, tj. unija svih članova od $\mathcal{G}$ je ili $\emptyset$ ili $\{1\}$ ili X. Stoga je $\mathcal{G} = \emptyset$ ili $\mathcal{G} = \{B\}$ ili $\mathcal{G} = \{A, B, C, D\}$. Stoga je

$$\mathcal{G} \in \{\emptyset, \{B\}, \{A, B, C, D\}\}.$$

Prema tome, (3.1) *vrijedi.*

Primjer 3.1.3. *Neka je $\mathcal{E}$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Promotrimo topološki prostor $(\mathbb{R}/\langle 0,1\rangle, \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle)$. Neka je $\mathcal{G} = \{\{x\} \mid x \in \langle 2,3\rangle\}$. Budući da je*

$$\mathbb{R}/\langle 0,1\rangle = \{\langle 0,1\rangle\} \cup \{\{x\} \mid x \notin \langle 0,1\rangle\},$$

očito vrijedi $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle$.
Imamo

$$\bigcup_{V\in\mathcal{G}} V = \langle 2,3\rangle,$$

prema tome

$$\bigcup_{V\in\mathcal{G}} V \in \mathcal{E}.$$

Stoga je $\mathcal{G} \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$.
Neka je $\mathcal{H} = \{\{x\} \mid x \in [2,3\rangle\}$. Tada je

$$\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle \quad i \quad \bigcup_{V\in\mathcal{H}} V = [2,3\rangle.$$

No, $[2,3\rangle \notin \mathcal{E}$ što vidimo na posve isti način kao što smo vidjeli u primjeru 2.3.16 da $[0,\infty\rangle \notin \mathcal{E}$.

Primjer 3.1.4. *Neka je $x = \{3\}$ i $y = \{7\}$. Tada su $x, y \in \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle$ i $x \neq y$. Postoje li otvoreni skupovi U i V u topološkom prostoru $(\mathbb{R}/\langle 0,1\rangle, \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle)$ takvi da je $x \in U, y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$?*

Postoje, naime neka je $U = \{\{x\} \mid x \in \langle 2,4\rangle\}$ i $V = \{\{x\} \mid x \in \langle 6,8\rangle\}$, tada su U i V očito traženi skupovi. No, topološki prostor $(\mathbb{R}/\langle 0,1\rangle, \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle)$ nije Hausdorffov. Dokažimo to. Neka je $x = \{0\}$ i $y = \langle 0,1\rangle$. Tada su $x, y \in \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle$ i $x \neq y$. Pretpostavimo da postoje $U, V \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$ takvi da je $U \cap V = \emptyset$ te $x \in U$ i $y \in V$. Dakle, $\{0\} \in U$, pa je

$$\{0\} \subseteq \bigcup_{A\in U} A, \quad tj. \quad 0 \in \bigcup_{A\in U} A.$$

S druge strane,

$$\bigcup_{A\in U} A \in \mathcal{E}$$

jer je $U \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$. Slijedi da postoje $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ takvi da je $0 \in \langle a,b\rangle$ i

$$\langle a,b\rangle \subseteq \bigcup_{A\in U} A.$$

Slijedi $0 < b$. Odaberimo $\epsilon \in \mathbb{R}$ takav da je $0 < \epsilon < \min\{b,1\}$. Tada je $0 < \epsilon < 1$ i $0 < \epsilon < b$, pa je posebno $\epsilon \in \langle a,b\rangle$. Iz toga slijedi da je

$$\epsilon \in \bigcup_{A\in U} A,$$

pa postoji $A \in U$ *takav da je* $\epsilon \in A$. *No,* $U \in \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle$, *pa je* $A \in \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle$ *što povlači da je* $A = \{x\}$, *za neki* $x \in \mathbb{R}$ *takav da* $x \notin \langle 0,1\rangle$ *ili* $A = \langle 0,1\rangle$. *No,* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *i* $0 < \epsilon < 1$, *pa slijedi da je* $A = \langle 0,1\rangle$. *Dakle,* $A = y$, *pa je stoga* $y \in U$. *Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je* $y \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$.
Prema tome, ne postoje $U, V \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$ *takvi da je* $x \in U, y \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$. *Iz ovoga zaključujemo da topološki prostor* $(\mathbb{R}/\langle 0,1\rangle, \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle)$ *nije Hausdorffov.*

Neka je sada $x = \{0\}$ *i* $y = \{1\}$. *Pretpostavimo da postoje* $U, V \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$ *takvi da je* $x \in U, y \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$. *Iz* $\{0\} \in U$ *na isti način kao maloprije zaključujemo da je* $\langle 0,1\rangle \in U$. *Nadalje, iz* $\{1\} \in V$ *slijedi*

$$1 \in \bigcup_{A \in V} A,$$

no

$$\bigcup_{A \in V} A \in \mathcal{E}.$$

Stoga postoje $c, d \in \mathbb{R},\ c < d$ *takvi da je*

$$1 \in \langle c, d\rangle \subseteq \bigcup_{A \in V} A. \tag{3.2}$$

Imamo $c < 1 < d$. *Odaberimo* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < \epsilon < 1$ *i* $c < \epsilon < 1$. *Slijedi* $\epsilon \in \langle c, d\rangle$, *pa iz* (3.2) *slijedi da je* $\epsilon \in A$ *za neki* $A \in V$. *Imamo* $A \in \mathbb{R}/\langle 0,1\rangle, \epsilon \in A$ *i* $0 < \epsilon < 1$, *pa slijedi* $A = \langle 0,1\rangle$. *Prema tome,* $\langle 0,1\rangle \in V$ *dakle,* $\langle 0,1\rangle \in U \cap V$.
Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je $U \cap V = \emptyset$.
Dakle, ne postoje $U, V \in \mathcal{E}/\langle 0,1\rangle$ *takvi da je* $x \in U, y \in V$ *i* $U \cap V = \emptyset$.

Primjer 3.1.5. *Neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $\mathbb{R}$. *Tvrdimo da je topološki prostor* $(\mathbb{R}/[0,1], \mathcal{E}/[0,1])$ *Hausdorffov.*

Neka su $a, b \in \mathbb{R}/[0,1]$, $a \neq b$. *Tada je* $a \neq [0,1]$ *ili* $b \neq [0,1]$. *Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je* $a \neq [0,1]$.

1° $b \neq [0,1]$.

Tada je $a = \{x\}, b = \{y\}$, *gdje su* $x, y \in \mathbb{R},\ x, y \notin [0,1]$ *i* $x \neq y$.
Neka je $W = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$, *tada je* $W \in \mathcal{E}$ *jer su* $\langle -\infty, 0\rangle, \langle 1, \infty\rangle \in \mathcal{E}$. *Budući da je* $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ *Hausdorffov prostor, postoje* $U', V' \in \mathcal{E}$ *takvi da je* $x \in U', y \in V'$ *i* $U' \cap V' = \emptyset$.
Definirajmo $U = U' \cap W$ *i* $V = V' \cap W$. *Tada su*

$$U, V \in \mathcal{E}, x \in U, y \in V \;\; i \;\; U \cap V = \emptyset.$$

Nadalje, očito su $U, V \subseteq W$*, pa je* $U \cap [0,1] = \emptyset$ *i* $V \cap [0,1] = \emptyset$*.*
Definirajmo $\mathcal{U} = \{\{z\} \mid z \in U\}$ *i* $\mathcal{V} = \{\{z\} \mid z \in V\}$*. Tada su* $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}/[0,1]$ *te*

$$\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = U \;\; i \;\; \bigcup_{A \in \mathcal{V}} A = V$$

pa slijedi $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{E}/[0,1]$ *. Očito,* $\{x\} \in \mathcal{U}$ *i* $\{y\} \in \mathcal{V}$*, tj.* $a \in \mathcal{U}$ *i* $b \in \mathcal{V}$*. Iz* $U \cap V = \emptyset$ *slijedi* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$*.*

2° $b = [0,1]$.
Imamo $a \in \{x\}$ *gdje je* $x \in \mathbb{R}$ *takav da* $x \notin [0,1]$.

2.1° $x < 0$.
Odaberimo $y \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x < y < 0$.
Definirajmo $\mathcal{U} = \{\{z\} \mid z \in \langle -\infty, y\rangle\}$ *i* $\mathcal{V} = \{\{z\} \mid z \in \langle y, \infty\rangle \setminus [0,1]\} \cup \{[0,1]\}$.
Imamo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = \langle -\infty, y\rangle \,, \; \bigcup_{A \in \mathcal{V}} A = \langle y, \infty\rangle \,,$$

pa slijedi $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{E}/[0,1]$*. Očito je* $a \in \mathcal{U},\; b \in \mathcal{V}$ *i* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$*.*

2.2° $x > 1$.
Odaberimo $y \in \mathbb{R}$ *takav da je* $x > y > 1$.
Definirajmo $\mathcal{U} = \{\{z\} \mid z \in \langle y, \infty\rangle\}$ *i* $\mathcal{V} = \{\{z\} \mid z \in \langle -\infty, y\rangle \setminus [0,1]\} \cup \{[0,1]\}$.
Tada su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{E}/[0,1]$ *,* $a \in \mathcal{U},\; b \in \mathcal{V}$ *i* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$*.*

Zaključak: $(\mathbb{R}/[0,1], \mathcal{E}/[0,1])$ *je Hausdorffov prostor.*

3.2 Dekompozicijsko preslikavanje

Definicija 3.2.1. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija. Kažemo da je* f *neprekidna funkcija s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$ *ako za svaki* $V \in \mathcal{S}$ *vrijedi* $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$*.*

Primjer 3.2.2. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori, neka je* $y_0 \in Y$ *te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija definirana sa* $f(x) = y_0$ *za svaki* $x \in X$*. Tada je* f *neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$*.*

Neka je $V \in \mathcal{S}$*. Tada je*

$$f^{\leftarrow}(V) = \begin{cases} \emptyset, & ako\ y_0 \notin V, \\ X, & ako\ je\ y_0 \in V \end{cases} ,$$

pa slijedi $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$*.*
Dakle, f *je neprekidna.*

Primjer 3.2.3. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, te neka je $f : X \to X$ funkcija definirana sa $f(x) = x, \forall x \in X$. Tada je f neprekidna s obzirom na topologiju $\mathcal{T}$ (tj. s obzirom na $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}$).*

Naime, neka je $V \in \mathcal{T}$. Tada je

$$f^{\leftarrow}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} = \{x \in X \mid x \in V\} = V,$$

tj. $f^{\leftarrow}(V) = V$, pa je $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$.

Propozicija 3.2.4. *Neka su $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{S})$ i $(Z, \mathcal{R})$ topološki prostori, neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ te neka je $g : Y \to Z$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{S}$ i $\mathcal{R}$. Tada je funkcija $g \circ f : X \to Z$ neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{R}$.*

Dokaz. Neka je $W \subseteq Z$, tada vrijedi

$$(g \circ f)^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W)). \tag{3.3}$$

Dokažimo to.
Ako je $x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(W)$ tada je $(g \circ f)(x) \in W$, pa je $g(f(x)) \in W$ što povlači $f(x) \in g^{\leftarrow}(W)$, odnosno $x \in f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W))$.
Obratno, ako je $x \in f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W))$ tada je $f(x) \in g^{\leftarrow}(W)$, pa je $g(f(x)) \in W$ što povlači $(g \circ f)(x) \in W$, odnosno $x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(W)$.
Dakle, (3.3) vrijedi.
Pretpostavimo sada da je $W \in \mathcal{R}$. Tada je $g^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{S}$, pa je $f^{\leftarrow}(g^{\leftarrow}(W)) \in \mathcal{T}$ dakle, prema (3.3) $(g \circ f)^{\leftarrow}(W) \in \mathcal{T}$.
Time smo dokazali da je $g \circ f$ neprekidna funkcija. □

Definicija 3.2.5. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ particija skupa X. Za $x \in X$ neka je $[x]$ onaj element od $\mathcal{F}$ takav da je $x \in [x]$ (uočimo da takav element postoji i da je jedinstven). Definirajmo funkciju $p : X \to \mathcal{F}$ sa $p(x) = [x]$. Za p kažemo da je dekompozicijsko preslikavanje pridruženo particiji $\mathcal{F}$.*

Propozicija 3.2.6. *Neka je X skup te neka je $\mathcal{F}$ particija od X. Neka je $p : X \to \mathcal{F}$ dekompozicijsko preslikavanje. Neka je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Tada je*

$$p^{\leftarrow}(\mathcal{G}) = \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A.$$

Dokaz. Neka je $x \in p^{\leftarrow}(\mathcal{G})$. Tada je $p(x) \in \mathcal{G}$, tj. $[x] \in \mathcal{G}$. No, $x \in [x]$. Stoga je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A.$$

Obratno, pretpostavimo da je

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A.$$

Tada postoji $A \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in A$. Uočimo, $A \in \mathcal{F}$ jer je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Stoga je $A = [x]$, tj. $A = p(x)$ pa imamo $p(x) \in \mathcal{G}$. To povlači da je $x \in p^{\leftarrow}(\mathcal{G})$.
Time je tvrdnja dokazana. □

Korolar 3.2.7. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ particija skupa X te Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Neka je $p : X \to \mathcal{F}$ dekompozicijsko preslikavanje. Tada za svaki $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ vrijedi*

$$p^{\leftarrow}(\mathcal{G}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{G} \in \Lambda.$$

Dokaz. Koristeći definiciju topologije Λ i prethodnu propoziciju, imamo da za svaki $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ vrijedi

$$p^{\leftarrow}(\mathcal{G}) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{G}} A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{G} \in \Lambda,$$

pa slijedi tvrdnja. □

Korolar 3.2.8. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $\mathcal{F}$ particija skupa X te Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Neka je $p : X \to \mathcal{F}$ dekompozicijsko preslikavanje. Tada je p neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i Λ.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{G} \in \Lambda$. Prema prethodnom korolaru vrijedi $p^{\leftarrow}(\mathcal{G}) \in \mathcal{T}$. Stoga je p neprekidna funkcija s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i Λ (prema definiciji neprekidnosti). □

3.3 Kompaktnost

Definicija 3.3.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, $K \subseteq X$ te $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je*

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Tada za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoren pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Primjer 3.3.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $K \subseteq X$. Neka je $\mathcal{U} = \{X\}$. Tada je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$.*

Primjer 3.3.3. *Neka je X neprazan skup te neka je K neprazan podskup od X. Neka je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Tada je*

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X,$$

a očito je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *i* $\mathcal{U} \neq \emptyset$. *Prema tome,* $\mathcal{U}$ *je otvoren pokrivač od* K *u* $(X, \mathcal{P}(X))$. *Nadalje, neka je* $\mathcal{V} = \{\{x\} \mid x \in K\}$. *Tada je*

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V = K, \ \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X) \ i \ \mathcal{V} \neq \emptyset,$$

pa je $\mathcal{V}$ *otvoren pokrivač od* K *u* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Definicija 3.3.4. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te* $K \subseteq X$. *Za* K *kažemo da je kompaktan skup u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{T})$ *ako za svaki otvoren pokrivač* $\mathcal{U}$ *od* K *u* $(X, \mathcal{T})$ *postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$K \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Primjer 3.3.5. *Neka su* K *i* X *skupovi takvi da je* $K \subseteq X$. *Pretpostavimo da je* K *beskonačan. Tada* K *nije kompaktan u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Pretpostavimo suprotno. Znamo da je $\mathcal{U} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ *otvoren pokrivač od* K *u* $(X, \mathcal{P}(X))$, *pa kompaktnost skupa* K *povlači da postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$K \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Skupovi $U_1, ..., U_n$ *su jednočlani, pa je* $U_1 \cup ... \cup U_n$ *konačan skup, iz čega slijedi da je* K *konačan. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je beskonačan.*
Zaključak: K *nije kompaktan u topološkom prostoru* $(X, \mathcal{P}(X))$.

Primjer 3.3.6. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor pri čemu je* $\mathcal{T}$ *konačan skup. Tada je svaki podskup od* X *kompaktan u* $(X, \mathcal{T})$.

Naime, neka je $K \subseteq X$. *Neka je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od* K *u* $(X, \mathcal{T})$. *Iz* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ *slijedi da je* $\mathcal{U}$ *konačan skup, a vrijedi* $\mathcal{U} \neq \emptyset$. *Stoga postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je* $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_n\}$. *Iz*

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \ i \ \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = U_1 \cup ... \cup U_n$$

slijedi da je $K \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n$.

Primjer 3.3.7. *Neka je* $\mathcal{E}$ *euklidska topologija na* $\mathbb{R}$. *Tada skup* $\langle 0, 1]$ *nije kompaktan u* $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\mathcal{U} = \{\langle x, \infty\rangle \mid x > 0\}$. *Tada je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač od* $\langle 0, 1]$ *u* $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. *Naime, očito je* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}$, *a ako je* $y \in \langle 0, 1]$ *onda je* $0 < y$, *pa postoji* $x \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < x < y$ *iz čega slijedi da je* $y \in \langle x, \infty\rangle$ *i* $\langle x, \infty\rangle \in \mathcal{U}$. *Dakle,*

$$\langle 0, 1] \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Budući da je $\langle 0, 1]$ *kompaktan, postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i* $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ *takvi da je*

$$\langle 0, 1] \subseteq U_1 \cup ... \cup U_n. \tag{3.4}$$

Imamo $U_1 = \langle x_1, \infty \rangle, ..., U_n = \langle x_n, \infty \rangle$, *gdje su* $x_1, ..., x_n$ *pozitivni realni brojevi.*
Neka je $m = \min\{x_1, ..., x_n\}$. *Očito je* $0 < m < 1$.
Odaberimo $y \in \mathbb{R}$ *takav da je* $0 < y < m$. *Tada je* $y \in \langle 0, 1]$.
Iz (3.4) *slijedi da je* $y \in U_1 \cup ... \cup U_n$, *pa postoji* $i \in \{1, ..., n\}$ *takav da je* $y \in U_i$, *tj.* $y \in \langle x_i, \infty \rangle$. *Ovo je u kontradikciji s činjenicom da je* $y < m \leq x_i$.
Prema tome, $\langle 0, 1]$ *nije kompaktan u* $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.

Propozicija 3.3.8. *Neka su* $(X, \mathcal{T})$ *i* $(Y, \mathcal{S})$ *topološki prostori te neka je* $f : X \to Y$ *funkcija neprekidna s obzirom na topologije* $\mathcal{T}$ *i* $\mathcal{S}$. *Neka je* K *kompaktan u* $(X, \mathcal{T})$. *Tada je* $f(K)$ *kompaktan skup u* $(Y, \mathcal{S})$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač od $f(K)$ u $(Y, \mathcal{S})$. Neka je $\mathcal{U} = \{f^{\leftarrow}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$. Za svaki $V \in \mathcal{V}$ vrijedi $V \in \mathcal{S}$, pa je $f^{\leftarrow}(V) \in \mathcal{T}$ jer je f neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Stoga je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Želimo dokazati da je

$$K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{\leftarrow}(V).$$

Neka je $x \in K$. Tada je $f(x) \in f(K)$, pa postoji element V od $\mathcal{V}$ koji sadrži $f(x)$, tj. $f(x) \in V$. Slijedi da je $x \in f^{\leftarrow}(V)$. Time smo dokazali da je

$$K \subseteq \bigcup_{V \in \mathcal{V}} f^{\leftarrow}(V).$$

Prema tome, $\mathcal{U}$ je otvoren pokrivač od K u $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je

$$K \subseteq f^{\leftarrow}(V_1) \cup ... \cup f^{\leftarrow}(V_n).$$

Neka je $x \in K$. Tada je $x \in f^{\leftarrow}(V_1) \cup ... \cup f^{\leftarrow}(V_n)$, pa je $x \in f^{\leftarrow}(V_i)$ za neki $i \in \{1, ..., n\}$. Slijedi da je

$$f(x) \in V_i, \quad \text{tj.} \quad f(x) \in V_1 \cup ... \cup V_n.$$

Prema tome, za svaki $x \in K$ vrijedi $f(x) \in V_1 \cup ... \cup V_n$. Stoga je $f(K) \subseteq V_1 \cup ... \cup V_n$.
Zaključak: $f(K)$ je kompaktan skup u $(Y, \mathcal{S})$. □

Definicija 3.3.9. *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor te neka je* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. *Kažemo da je* $\mathcal{U}$ *otvoren pokrivač topološkog prostora* $(X, \mathcal{T})$ *ako je*

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Uočimo da je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač topološkog prostora $(X, \mathcal{T})$ ako i samo ako je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač skupa X u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Definicija 3.3.10. *Za topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kažemo da je kompaktan ako za svaki otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ od $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je*

$$X = U_1 \cup ... \cup U_n.$$

Uočimo sljedeće, topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktan ako i samo ako je skup X kompaktan u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$.

Korolar 3.3.11. *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te neka je $f : X \to Y$ funkcija neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$. Pretpostavimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ kompaktan te da je f surjekcija. Tada je topološki prostor $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan.*

Dokaz. Budući da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan skup slijedi da je X kompaktan u $(X, \mathcal{T})$.
Prema propoziciji 3.3.8 skup $f(X)$ je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$.
Budući da je f surjekcija vrijedi da je $f(X) = Y$.
Prema tome, Y je kompaktan u $(Y, \mathcal{S})$, pa je $(Y, \mathcal{S})$ kompaktan topološki prostor. □

Korolar 3.3.12. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, neka je $\mathcal{F}$ particija od X te neka je Λ dekompozicijska topologija na $\mathcal{F}$ određena topologijom $\mathcal{T}$. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan topološki prostor. Tada je $(\mathcal{F}, \Lambda)$ kompaktan topološki prostor.*

Dokaz. Neka je $p : X \to \mathcal{F}$ dekompozicijsko preslikavanje. Neka je $A \in \mathcal{F}$.
Tada je $A \neq \emptyset$, pa odaberimo neki $x \in A$. Tada je očito

$$[x] = A, \quad \text{tj.} \quad p(x) = A.$$

Dakle, za svaki $A \in \mathcal{F}$ postoji $x \in X$ takav da je $p(x) = A$. Prema tome, p je surjekcija.
Prema korolaru 3.2.8 funkcija p je neprekidna s obzirom na topologije $\mathcal{T}$ i Λ.
Iz prethodnog korolara slijedi da je $(\mathcal{F}, \Lambda)$ kompaktan topološki prostor. □

Propozicija 3.3.13. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor, neka je K kompaktan skup u $(X, \mathcal{T})$ te neka je $x \in X$ takav da $x \notin K$. Tada postoje otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je*

$$x \in U, \; K \subseteq V \; \text{ i } \; U \cap V = \emptyset.$$

Dokaz. Tvrdnja je jasna ako je $K = \emptyset$. Naime, tada možemo uzeti $U = X$ i $V = \emptyset$.
Pretpostavimo da je K neprazan. Uzmimo $y \in K$. Tada je $x \neq y$, pa budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor postoje otvoreni skupovi U_y i V_y takvi da je

$$x \in U_y, \; y \in V_y \; \text{ i } \; U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Neka je $\mathcal{V} = \left\{V_y \mid y \in K\right\}$. Tada je $\mathcal{V}$ otvoren pokrivač skupa K u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$. Budući da je K kompaktan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{T})$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i $y_1, ..., y_n \in K$ takvi da je

$$K \subseteq V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

Neka je $V = V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$ te neka je $U = U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$. Očito su U i V otvoreni skupovi. Nadalje, očito je $x \in U$ i $K \subseteq V$. Dokažimo da je $U \cap V = \emptyset$.
Pretpostavimo da postoji z takav da je $z \in U \cap V$. Tada je $z \in U$ i $z \in V$, pa slijedi da postoji $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $z \in V_{y_i}$. S druge strane, iz $z \in U$ slijedi da je $z \in U_{y_i}$ što povlači da je $U_{y_i} \cap V_{y_i}$ neprazan skup. Kontradikcija.
Prema tome, $U \cap V = \emptyset$ i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 3.3.14. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov prostor te neka je K kompaktan u $(X, \mathcal{T})$. Tada je topološki prostor $(X/K, \mathcal{T}/K)$ Hausdorffov.*

Dokaz. Neka su $a, b \in X/K$, $a \neq b$. Tada je $a \neq K$ ili $b \neq K$. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti $a \neq K$.

1° $b \neq K$.

Tada je $a = \{x\}$ i $b = \{y\}$ za neke $x, y \in X/K$, $x \neq y$. Budući da $x \notin K$ prema prethodnoj propoziciji, postoji otvoren skup U_1 takav da je $x \in U_1$ i $U_1 \cap K = \emptyset$.
Isto tako, iz $y \notin K$ slijedi da postoji otvoren skup V_1 takav da je $y \in V_1$ i $V_1 \cap K = \emptyset$.
Budući da je $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffov postoje otvoreni skupovi U_2 i V_2 takvi da je

$$x \in U_2, \ y \in V_2 \ \text{ i } \ U_2 \cap V_2 = \emptyset.$$

Neka su $U = U_1 \cap U_2$ i $V = V_1 \cap V_2$. Tada su U i V otvoreni skupovi,

$$x \in U, \ y \in V, \ U \cap V = \emptyset, \ U \cap K = \emptyset \ \text{ i } \ V \cap K = \emptyset.$$

Neka su $\mathcal{U} = \{\{z\} \mid z \in U\}$ i $\mathcal{V} = \{\{z\} \mid z \in V\}$. Očito su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq X/K$.
Imamo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = U \in \mathcal{T} \ \text{ i } \ \bigcup_{A \in \mathcal{V}} A = V \in \mathcal{T},$$

pa su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}/K$. Zbog $x \in U$ imamo $\{x\} \in \{\{z\} \mid z \in U\}$, tj. $a \in \mathcal{U}$.
Zbog $y \in V$ imamo $\{y\} \in \{\{z\} \mid z \in V\}$, tj. $b \in \mathcal{V}$.
Nadalje, iz $U \cap V = \emptyset$ slijedi

$$\{\{z\} \mid z \in U\} \cap \{\{z\} \mid z \in U\} = \emptyset, \ \text{ tj. } \ \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset.$$

Dakle, $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ su otvoreni disjunkni skupovi u $(X/K, \mathcal{T}/K)$ te $a \in \mathcal{U}$ i $b \in \mathcal{V}$.

2° $b = K$.

Imamo $a = \{x\}$ gdje je $x \in X\backslash K$. Prema prethodnoj propoziciji, postoje otvoreni skupovi U i V u $(X, \mathcal{T})$ takvi da je

$$x \in U,\ K \subseteq V \ \text{ i } \ U \cap V = \emptyset.$$

Neka je $\mathcal{U} = \{\{z\} \mid z \in U\}$ te $\mathcal{V} = \{\{z\}\, z \in V\backslash K\} \cup \{K\}$. Očito su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}/K$ te $a \in \mathcal{U}$ i $b \in \mathcal{V}$. Nadalje, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Imamo

$$\bigcup_{A \in \mathcal{U}} A = U \in \mathcal{T} \ \text{ i } \ \bigcup_{A \in \mathcal{V}} A = (V\backslash K) \cup K = V \in \mathcal{T},$$

pa su $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{T}/K$.

Zaključak: $(X/K, \mathcal{T}/K)$ je Hausdorffov prostor. □

Bibliografija

1. C. O. Christenson, W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
2. W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, Oxford University Press, 1975.
3. S. B. Nadler, *Continuum theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

Sažetak

Ovaj diplomski rad podijeljen je na tri poglavlja. U prvom poglavlju definirani su osnovni pojmovi kao što su topologija, topološki prostor i baza topologije. Drugo se poglavlje sastoji od same teme ovog diplomskog rada, odnosno govori o dekompozicijskim prostorima. Ovdje je definirana dekompozicijska topologija, dekompozicijski prostori te su dani mnogobrojni primjeri navedenih prostora. Također, ovdje se govori i o Hausdorffovim prostorima. U trećem, završnom poglavlju, proučavan je poseban slučaj dekompozicijskog prostora koji se naziva kvocijentni prostor, točnije kvocijent topološkog prostora i skupa. Definirano je dekompozicijsko preslikavanje kao i kompaktnost te proučavana neka njihova svojstva.

Summary

This diploma thesis is divided in three chapters. Basic notions like topology, topological space and basis of topology are defined in the first chapter. The second chapter consists of the theme of this diploma thesis, more exactly it is talking about decomposition spaces. Decomposition topology and decomposition spaces are defined here and numerous examples of such spaces are given. This chapter also speaks of Hausdorff spaces. In third, final chapter, a special case of decomposition space is analyzed, also known as quotient space, more precisely quotient of topological space and set. Decomposition map is also defined here, as well as compactness and some of their properties.

Životopis

Rođena sam 11.1.1990. godine u Pakracu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem 1996. godine u Osnovnoj školi Vladimira Nazora u Daruvaru. Godine 2004. upisujem Opću gimnaziju u Daruvaru koju završavam 2008. godine odličnim uspjehom. Iste godine nastavljam daljnje obrazovanje na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završenog preddiplomskog studija Matematike; smjer: nastavnički, 2013. godine upisujem diplomski studij Matematike; smjer: nastavnički.