Jedna generalizacija konveksnih funkcija

Mrvičić, Ivana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Mrvičić

JEDNA GENERALIZACIJA KONVEKSNIH FUNKCIJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Sanja Varošanec

Zagreb, studeni, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici prof.dr.sc. Sanji Varošanec na vodstvu, velikoj pomoći i savjetima te strpljenju pri izradi ovog diplomskog rada. Hvala joj na ukazanom povjerenju, podršci i razumijevanju te joj veliko hvala što je svojom vedrinom i radošću uljepšala zadnje godine mog studiranja. Hvala mojoj obitelji, dečku i prijateljima na ljubavi, bezuvjetnoj podršci i vjeri u moj uspjeh.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu bit će riječ o poopćenju pojma konveksnih funkcija. Matematičari H. Hudzik i L. Maligranda su poopćili pojma konveksnosti u radu [4] uvodeći s-konveksne funkcije i to, s-konveksne funkcije u prvom smislu i s-konveksne funkcije u drugom smislu. Definirat ćemo s-konveksne funkcije, te navesti i dokazati razna svojstva koja imaju s-konveksne funkcije. Poznato nam je da za konveksnu funkciju vrijedi tzv. Jensenova nejednakost. Dokazat ćemo da i za s-konveksne funkcije u drugom smislu vrijedi Jensenova nejednakost. Također ćemo dokazati da za s-konveksne funkcije vrijedi Hermite-Hadamardova nejednakost. Dat ćemo jednu gornju ocjenu razlike dviju strana Hermite-Hadamardove nejednakosti. Promatrat ćemo sredine za proizvoljne realne brojeve i na njih primjeniti neka svojstva s-konveksnih funkcija. Razmotrit ćemo rezultate Hermite-Hadamardovog tipa za s-konveksne funkcije u prvom smislu koje su objavili S.S. Dragomir i S. Fitzpatrick u radu [3].

Poglavlje 1

Svojstva s-konveksnih funkcija

Konveksne funkcije su dobro poznata klasa funkcija s kojima se obično upoznajemo u problemima ispitivanja tijeka funkcije i crtanja grafa. Funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nazivamo konveksnom ako za svaki $x, y \in [a, b]$ i za $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$, vrijedi

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y). \tag{1.1}$$

Ako u gornjoj nejednakosti vrijedi drugi znak nejednakosti, tada govorimo o konkavnoj funkciji.
Neka su $x, y \in [a, b]$. Kad se kroz točke $(x, f(x))$ i $(y, f(y))$ na grafu funkcije povuče sekanta, tada se graf konveksne funkcije f na intervalu $[x, y]$ nalazi ispod sekante. To je način kako vizualno prepoznajemo konveksnu funkciju. Ako je konveksna funkcija f ujedno i dva puta diferencijabilna tada je njezina druga derivacija nenegativna. Vrijedi i obrat: ako f'' postoji i ako je $f'' \geq 0$, tada je f konveksna. Kod ispitivanja tijeka funkcije često se upravo ovo svojstvo koristi za određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti. Godine 1994. matematičari H. Hudzik i L. Maligranda su poopćili pojam konveksnosti u radu [4] uvodeći s-konveksne funkcije i to na dva načina. U jednom smjeru poopćavanja mijenjaju uvjet $\alpha + \beta = 1$ u uvjet $\alpha^s + \beta^s = 1$, a u drugom smjeru poopćavanja se u sumi na desnoj strani nejednakosti (1.1) umjesto faktora α i β javljaju redom brojevi α^s i β^s. Izrecimo precizno definicije s-konveksnih funkcija.

Definicija 1.1. *[4] Neka je $s \in \langle 0, 1]$. Funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ je s-konveksna u prvom smislu ako*

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

vrijedi za svaki $u, v \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty\rangle$ i za svaki $\alpha, \beta \geq 0$ takve da je $\alpha^s + \beta^s = 1$. Zapisujemo: $f \in K_s^1$. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ s-konveksna u drugom smislu, ako nejednakost

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

vrijedi za sve $u, v \in \mathbb{R}_+$ i za sve $\alpha, \beta \geq 0$, gdje je $\alpha + \beta = 1$. Zapisujemo: $f \in K_s^2$.

Naravno, obje s -konveksnosti svode se na konveksnost kad je $s = 1$. Ovako definirane funkcije imaju razna svojstva koja ćemo u narednom tekstu navesti i dokazati. Sadržaj sljedećeg teorema jest da su s-konveksne funkcije u prvom smislu rastuće, dok su s-konveksne funkcije u drugom smislu nenegativne.

Teorem 1.2. *[4] Neka je* $0 < s < 1$.
a) Ako je $f \in K_s^1$, *onda je* f *rastuća na* $\langle 0, \infty\rangle$ *i* $f(0^+) := \lim\limits_{u\to 0^+} f(u) \leq f(0)$.
b) Ako je $f \in K_s^2$, *onda je* f *nenegativna na* $[0, \infty\rangle$.

Dokaz. a) Neka je f s-konveksna u prvom smislu.
Stavimo u definiciji $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$ ove brojeve: $\alpha \to x^{\frac{1}{s}}$, $\beta \to (1-x)^{\frac{1}{s}}$, $u \to u$, $v \to u$. Tada je

$$\alpha^s + \beta^s = (x^{\frac{1}{s}})^s + ((1-x)^{\frac{1}{s}})^s = x + 1 - x = 1$$

i

$$\begin{aligned} f(x^{\frac{1}{s}}u + (1-x)^{\frac{1}{s}}u) &\leq xf(u) + (1-x)f(u) \\ f((x^{\frac{1}{s}} + (1-x)^{\frac{1}{s}})u) &\leq f(u) \\ f(h(x)u) &\leq f(u). \end{aligned}$$

Definiramo funkciju h:

$$h(x) = x^{\frac{1}{s}} + (1-x)^{\frac{1}{s}}.$$

Dokažimo da je h padajuća na $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ i rastuća na $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Odredimo pomoću derivacije stacionarne točke funkcije.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{s}x^{\frac{1}{s-1}} - \frac{1}{s}(1-x)^{\frac{1}{s-1}} \\ \frac{1}{s}\left[x^{\frac{1-s}{s}} - (1-x)^{\frac{1-s}{s}}\right] &= 0 \\ x^{\frac{1-s}{s}} &= (1-x)^{\frac{1-s}{s}} \\ x &= 1-x \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stacionarna točka je $x = \frac{1}{2}$. Nacrtajmo tablicu predznaka za h':

	$\left[0, \frac{1}{2}\right\rangle$	$\left\langle\frac{1}{2}, 1\right]$
h'	-	+
h	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, h pada do $x = \frac{1}{2}$ i raste nakon toga. Odredimo sliku intervala $[0, 1]$. Na $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ h pada pa je

$$h\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{1}{2}\right), h(0)\right].$$

Na $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ h raste pa je

$$h\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[h\left(\frac{1}{2}\right), h(1)\right].$$

Uz to je

$$h(0) = 1, h(1) = 1,$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{s}} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{s}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{s}} = 2 \cdot 2^{\frac{-1}{s}} = 2^{1-\frac{1}{s}}.$$

Iz

$$f\left[\left(\alpha^{\frac{1}{s}} + (1-\alpha)^{\frac{1}{s}}\right)u\right] \leq \alpha f(u) + (1-\alpha) f(u) = f(u)$$

imamo $f(h(x) \cdot u) \leq f(u)$, a budući da je $h([0, 1]) = \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$, to znači da postoji $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ tako da je $h(x) = t$. Dakle, možemo pisati $f(tu) \leq f(u)$ za $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$.
To znači da $f(tu) \leq f(u)$ za sve $u > 0$, $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$. Ako je $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$, onda $t^{\frac{1}{2}} \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$. Dakle, tvrdnja $f(tu) \leq f(u)$ za sve $u > 0$, $t \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right]$ vrijedi za svaki $u > 0$ pa slijedi $f(tu) = f\left(t^{\frac{1}{2}}\left(t^{\frac{1}{2}}u\right)\right) \leq f\left(t^{\frac{1}{2}}u\right) \leq f(u)$ za svaki $u > 0$.
Želimo dokazati da je $f(tu) \leq f(u)$ za sve $u > 0$, $t \in \langle 0, 1]$.
Znamo:

$$f(t^*u^*) \leq f(u^*), u^* > 0, t^* \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right] = I_0 \tag{1.2}$$

Neka je $t \in \left[2^{2(1-\frac{1}{s})}, 1\right] = I_1$, tada je $t^{\frac{1}{2}} \in \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right] = I_0$. Slijedi $f(tu) = f(t^{\frac{1}{2}} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot u) = f(t^{\frac{1}{2}}(t^{\frac{1}{2}} \cdot u))$.
Znamo da je $t^{\frac{1}{2}}u$ pozitivan broj i $t^{\frac{1}{2}} \in I_0$ pa primjenom (1.2) na brojeve $u^* = t^{\frac{1}{2}}u, t^* = t^{\frac{1}{2}}$ dobijemo $f(tu) \leq f(t^{\frac{1}{2}}u) \leq f(u)$ jer smo u zadnjoj nejednakosti opet primjenili (1.2) na brojeve $u^* = u, t^* = t^{\frac{1}{2}}$.
Time je nejednakost $f(tu) \leq f(u)$ proširena na veći interval $I_1 \supset I_0$.
Formiramo novi interval $I_2 = \left[2^{4(1-\frac{1}{s})}, 1\right] \supset I_1$ i opet vrijedi $t \in I_2$ iz čega slijedi da je $t^{\frac{1}{2}} \in I_1$.
Analognim postupkom kao gore, nejednakost $f(tu) \leq f(u)$ vrijedi i na intervalu I_2.
Promatrajući intervale

$$I_0 = \left[2^{1-\frac{1}{s}}, 1\right], I_1 = \left[2^{2(1-\frac{1}{s})}, 1\right], I_2 = \left[2^{2^{2(1-\frac{1}{s})}}, 1\right], I_3 = \left[2^{2^{3(1-\frac{1}{s})}}, 1\right], ..., I_n = \left[2^{2^{n(1-\frac{1}{s})}}, 1\right]$$

dobivamo da na svakom od njih vrijedi $f(tu) \leq f(u)$ i kako je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = \langle 0,1]$ slijedi da nejednakost $f(tu) \leq f(u)$ vrijedi na cijelom $\langle 0,1]$.
Dakle, uzmemo $0 < u \leq v$ i uz $f(tu) \leq f(u)$, za sve $u > 0$, $t \in \langle 0,1]$ dobivamo $f(u) = f((u/v)v) \leq f(v)$, što znači da je f rastuća na $\langle 0,\infty\rangle$.
Drugi dio možemo dokazati na sljedeći način. Za $u > 0$ imamo

$$f(\alpha u) = f(\alpha u + \beta 0) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(0),$$

gdje u zadnjoj nejednakosti primjenimo definiciju s-konveksnosti, i kad $u \to 0^+$ dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0^+} f(u) = \lim_{u\to 0^+} f(\alpha u) &\leq \alpha^s \lim_{u\to 0^+} f(u) + \beta^s f(0)\\
\lim_{u\to 0^+} f(u) &\leq \alpha^s \lim_{u\to 0^+} f(u) + \beta^s f(0)\\
\lim_{u\to 0^+} f(u)(1-\alpha^s) &\leq \beta^s f(0)\\
\lim_{u\to 0^+} f(u) &\leq \frac{\beta^s}{1-\alpha^s} f(0) \qquad (1.3)\\
\frac{\beta^s}{1-\alpha^s} &= \frac{(1-\alpha)^s}{1-\alpha^s}.
\end{aligned}$$

Trebamo dokazati da je $\frac{(1-\alpha)^s}{1-\alpha^s} \leq 1$ jer tada bi (1.3) bilo $\lim_{u\to 0^+} f(u) \leq \frac{\beta^s}{1-\alpha^s} f(0) \leq 1 \cdot f(0)$.
Nejednakost $\frac{(1-\alpha)^s}{1-\alpha^s} \leq 1$ je ekvivalentna sa

$$(1-\alpha)^s \leq 1 - \alpha^s,$$

tj. $\alpha^s + (1-\alpha)^s \leq 1$, tj. $h(\alpha) \leq 1$, a to smo dokazali u ispitivanju tijeka funkcije h. Dakle, $\lim_{u\to 0^+} f(u) \leq f(0)$.

b) $f \in K_s^2$ pa slijedi $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$ za $\alpha + \beta = 1$. Neka je $u \in \mathbb{R}_+$.
Stavimo $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ i $u = v$ tada je

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) &\leq \frac{1}{2^s} f(u) + \frac{1}{2^s} f(v)\\
f(u) &\leq 2 \cdot \frac{1}{2^s} f(u)\\
f(u) &\leq 2^{1-s} f(u)\\
f(u) - 2^{1-s} f(u) &\leq 0\\
f(u)\left[1 - 2^{1-s}\right] &\leq 0.
\end{aligned}$$

Znamo da je $s \in \langle 0,1]$ pa slijedi da je $1 - s \in [0,1\rangle$. Kako je $1 - s \in [0,1\rangle$ slijedi da je $2^{1-s} \in \left[2^0, 2^1\right\rangle = [1,2\rangle$ iz čega slijedi $1 - 2^{1-s} \in \langle -1,0]$, tj. $1 - 2^{1-s}$ je negativni broj pa $f(u)$ mora biti nenegativna.
Dakle, $f(u) \geq 0$ □

Opišimo jedan primjer s-konveksne funkcije.

Primjer 1.3. *[4] Neka je* $0 < s < 1$*,* $a, b, c, \in \mathbb{R}$*. Definiramo, za* $u \in \mathbb{R}_+$

$$f(u) = \begin{cases} a & ; u = 0 \\ bu^s + c & ; u > 0. \end{cases}$$

Tada imamo:
i) ako je $b \geq 0$ *i* $c \leq a$ *onda je* $f \in K_s^1$
ii) ako je $b > 0$ *i* $c < a$ *onda je f rastuća na* $\langle 0, \infty \rangle$ *ali nije na* $[0, \infty\rangle$
iii) ako je $b \geq 0$ *i* $0 \leq c \leq a$ *onda je* $f \in K_s^2$
iv) ako je $b > 0$ *i* $c < 0$ *onda* $f \notin K_s^2$

i) U prvom slučaju imamo četiri podslučaja:
1°. Neka su $u, v > 0$ i $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takvi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$. Tada je $\alpha u + \beta v > 0$ i

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= b(\alpha u + \beta v)^s + c \leq b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c \\ &= b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha^s + \beta^s) \\ &= \alpha^s u^s b + \beta^s v^s b + \alpha^s c + \beta^s c \\ &= \alpha^s u^s b + \alpha^s c + \beta^s v^s b + \beta^s c \\ &= \alpha^s (u^s b + c) + \beta^s (v^s b + c) \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v), \end{aligned}$$

a to je upravo definicija s-konveksnosti u prvom smislu.
2°. Neka su $u = v = 0$ i $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takvi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$.
S jedne strane imamo

$$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0) = f(0) = a.$$

S druge strane imamo

$$\alpha^s f(u) + \beta^s f(v) = \alpha^s f(0) + \beta^s f(0) = (\alpha^s + \beta^s) f(0) = 1 \cdot a = a$$

pa vrijedi $f(\alpha u + \beta v) = \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$.

3°. Neka su $v > u = 0$ i $\beta > 0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ takvi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha \cdot 0 + \beta v) = f(\beta v) \\ &= b\beta^s v^s + c \\ &= b\beta^s v^s + c(\alpha^s + \beta^s) \\ &= b\beta^s v^s + \alpha^s c + \beta^s c \\ &= \alpha^s c + b\beta^s v^s + \beta^s c \\ &= \alpha^s c + \beta^s (bv^s + c) \\ &= \alpha^s c + \beta^s f(v) \leq \alpha^s a + \beta^s f(v) \\ &= \alpha^s f(0) + \beta^s f(v). \end{aligned}$$

4°. Neka su $u > v = 0$ i $\alpha > 0$, $\alpha, \beta \in [0,1]$ takvi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u + \beta \cdot 0) = f(\alpha u) \\ &= b\alpha^s u^s + c \\ &= b\alpha^s u^s + c(\alpha^s + \beta^s) \\ &= b\alpha^s u^s + \alpha^s c + \beta^s c \\ &= \alpha^s (bu^s + c) + \beta^s c \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s c \leq \alpha^s f(u) + \beta^s a \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s f(0). \end{aligned}$$

ii) Funkcija $u \to u^s$ je rastuća za $s \in \langle 0, 1 \rangle$ i budući da je $b \geq 0$ slijedi da je i $u \to bu^s$ neopadajuća pa je i $u \to bu^s + c$ neopadajuća za $u \in \langle 0, \infty \rangle$.
Ako u interval dodamo i broj 0 treba provjeriti da li je $f(0) \leq f(u)$ za svaki $u \in \mathbb{R}_+$, ako želimo imati da je f neopadajuća. To je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} &a \leq bu^s + c / \lim_{u \to 0} \\ &a \leq 0 + c \\ &a \leq c, \end{aligned}$$

a to je u kontradikciji sa $c > a$.
Dakle, $f(0) \leq f(u)$ za svaki $u \in \mathbb{R}_+$, tj. f je neopadajuća.
iii) U ovom slučaju imamo četiri podslučaja:
1°. Neka su $u, v > 0$ i $\alpha, \beta \in [0,1]$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Slijedi $(\alpha + \beta)^s = 1 \leq \alpha^s + \beta^s$.

Tada je $\alpha u + \beta v > 0$ i

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= b(\alpha u + \beta v)^s + c \leq b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha + \beta) \\
&= b(\alpha^s u^s + \beta^s v^s) + c(\alpha + \beta)^s \leq b\alpha^s u^s + b\beta^s v^s + c(\alpha^s + \beta^s) \\
&= b\alpha^s u^s + b\beta^s v^s + \alpha^s c + \beta^s c \\
&= \alpha^s(bu^s + c) + \beta^s(bv^s + c) \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v),
\end{aligned}$$

a to je upravo definicija s-konveksnosti u drugom smislu.
2°. Neka su $u = v = 0$ i $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Slijedi $(\alpha + \beta)^s = 1 \leq \alpha^s + \beta^s$.
S jedne strane imamo

$$f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0) = f(0) = a.$$

S druge strane imamo

$$\alpha^s f(u) + \beta^s f(v) = \alpha^s f(0) + \beta^s f(0) = (\alpha^s + \beta^s) f(0) \geq 1 \cdot a = a$$

pa vrijedi $f(\alpha u + \beta v) = \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$.
3°. Neka su $v > u = 0$ i $\beta > 0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takvi da je $\alpha+\beta = 1$. Slijedi $(\alpha+\beta)^s = 1 \leq \alpha^s+\beta^s$.
Tada je

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha \cdot 0 + \beta v) \\
&= f(\beta v) = b\beta^s v^s + c \\
&= b\beta^s v^s + c(\alpha + \beta)^s \leq b\beta^s v^s + (\alpha^s + \beta^s)c \\
&= b\beta^s v^s + \alpha^s c + \beta^s c \\
&= \alpha^s c + \beta^s(bv^s + c) \\
&= \alpha^s c + \beta^s f(v) \leq \alpha^s a + \beta^s f(v) \\
&= \alpha^s f(0) + \beta^s f(v).
\end{aligned}$$

4°. Neka su $u > v = 0$ i $\alpha > 0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Slijedi $(\alpha + \beta)^s = 1 \leq \alpha^s + \beta^s$. Tada je

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u + \beta \cdot 0) = f(\alpha u) \\
&= b\alpha^s u^s + c \\
&= b\alpha^s u^s + c(\alpha + \beta)^s \leq b\alpha^s u^s + (\alpha^s + \beta^s)c \\
&= b\alpha^s u^s + \alpha^s c + \beta^s c \\
&= \alpha^s(bu^s + c) + \beta^s c \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s c \leq \alpha^s f(u) + \beta^s a \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s f(0).
\end{aligned}$$

iv) Ako je $c > 0$, onda je $f \in K_s^2$. Prema Teoremu 1.2b), znamo ako je $f \in K_s^2$ onda je $f \geq 0$.
Znamo $f(u) = bu^s + c$ i kad je u mali, tada je i bu^s mali pa zbog činjenice da je $c > 0$ može se dogoditi da je $bu^s + c < 0$, tj. $f(u) < 0$ što ne smije biti ako je $f \in K_s^2$.
Dakle, $f \notin K_s^2$.
Može se pokazati da je svaka nenegativna konveksna funkcija ujedno i s-konveksna u drugom smislu. Naime, za $s \in \langle 0, 1]$ i za $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi $\alpha^s \geq \alpha$ pa ako imamo konveksnu nenegativnu funkciju f tada

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \leq \alpha^s f(x) + (1-\alpha)^s f(y),$$

tj. f je s-konveksna.

Od poznatih primjera s-konveksnih funkcija možemo izgraditi druge s-konveksne funkcije koje imaju sljedeće svojstvo. Dokazat ćemo teorem koji nam to omogućuje.

Teorem 1.4. *[4] Neka je $0 < s \leq 1$. Ako su $f, g \in K_s^1$ i ako je $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konveksna i rastuća funkcija u svakoj varijabli onda je funkcija $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definirana sa $h(u) = F(f(u), g(u))$ pripada K_s^1. Posebno, ako su $f, g \in K_s^1$ onda je $f + g$, $\max\{f, g\} \in K_s^1$.*

Dokaz. Ako su $f, g \in K_s^1$ onda su

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

i

$$g(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s g(u) + \beta^s g(v),$$

gdje su $u, v \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha, \beta \geq 0$ takvi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$. F je rastuća po svakoj varijabli pa je

$$F(f(\alpha u + \beta v), g(\alpha u + \beta v)) \leq F(\alpha^s f(u) + \beta^s f(v), \alpha^s g(u) + \beta^s g(v)).$$

F je ujedno i konveksna, tj. za svaki $\lambda \in [0, 1]$ i za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

Uvrstimo $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i dobijemo

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda F(x_1, x_2) + (1-\lambda)F(y_1, y_2). \tag{1.4}$$

Stavimo li $\lambda = \alpha^s$, $1 - \lambda = 1 - \alpha^s = \beta^s$, $x_1 = f(u)$, $x_2 = f(v)$, $y_1 = g(u)$, $y_2 = g(v)$ dobivamo

$$F(\alpha^s f(u) + \beta^s g(u), \alpha^s f(v) + \beta^s g(v)) \leq \alpha^s F(f(u), f(v)) + \beta^s F(g(u), g(v)).$$

Time smo dokazali da je

$$\begin{aligned} h(\alpha u+\beta v) &= F(f(\alpha u+\beta v),(g(\alpha u+\beta v)) \\ &\leq \alpha^s F(f(u),g(u))+\beta^s F(f(v),g(v)) = \alpha^s h(u)+\beta^s h(v), \end{aligned}$$

tj. h je s-konveksna u prvom smislu. Da bi dokazali da je $f+g \in K_s^1$, upotrijebit ćemo funkciju $F(x,y)=x+y$ jer će tada po prvom dijelu ovog teorema biti da ako je F konveksna i ujedno rastuća po koordinatama da je tada

$$h(u)=F(f(u),g(u))=f(u)+g(u)\in K_s^1.$$

Trebamo samo dokazati da za F vrijede pretpostavke teorema.
Dokaz konveksnosti:
Neka je $\lambda\in[0,1]$ i $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$. Treba dokazati (1.4) .
S jedne strane imamo:

$$\begin{aligned} F(\lambda x+(1-\lambda)y) &= F(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2) \\ &= (\lambda x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda x_2+(1-\lambda)y_2) \\ &= \lambda(x_1+x_2)+(1-\lambda)(y_1+y_2). \end{aligned}$$

S druge strane imamo:

$$\lambda F(x_1,x_2)+(1-\lambda)F(y_1,y_2)=\lambda(x_1+x_2)+(1-\lambda)(y_1+y_2),$$

tj. te dvije strane su čak jednake.
Sada trebamo dokazati da je F rastuća po koordinatama, tj. da je funkcija $x\to F(x,y)=x+y$ rastuća po x, što je očito jer se radi o linearnoj funkciji $f(x)=x+y$. Isti zaključak vrijedi za koordinatu y.
Dokažimo da je $F(x,y)=\max\{x,y\}$ konveksna.
S jedne strane imamo:

$$\begin{aligned} F(\lambda x+(1-\lambda)y) &= F(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2) \\ &= \max\{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1, \lambda x_2+(1-\lambda)y_2\}. \end{aligned}$$

S druge strane imamo:

$$\begin{aligned} \lambda F(x)+(1-\lambda)F(y) &= \lambda \max\{x_1,x_2\}+(1-\lambda)\max\{y_1,y_2\} \\ &= \max\{\lambda x_1,\lambda x_2\}+\max\{(1-\lambda)y_1,(1-\lambda)y_2\}. \end{aligned}$$

To se svodi na dokazivanje nejednakosti

$$\max\{a+b,c+d\}\leq\max\{a,c\}+\max\{b,d\}.$$

Promotrimo dva slučaja:
1°. $\max\{a,c\} = a$
1.1°

$$\max\{a,c\} = a \Rightarrow a \geq c$$
$$\max\{b,d\} = b \Rightarrow b \geq d.$$

Zbrajanjem nejednakosti dobijemo:

$$a + b \geq c + d \Rightarrow \max\{a+b, c+d\} = a + b = \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$$

1.2°

$$\max\{a,c\} = a \Rightarrow a \geq c$$
$$\max\{b,d\} = d \Rightarrow b \leq d.$$

Nadalje imamo dva slučaja:

$$a + b \geq c + d \Rightarrow \max\{a+b, c+d\} = a + b \leq a + d = \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$$

ili

$$a + b \leq c + d \Rightarrow \max\{a+b, c+d\} = c + d \leq a + d = \max\{a,c\} + \max\{b,d\}.$$

2°. $\max\{a,c\} = c$
2.1°

$$\max\{a,c\} = c \Rightarrow a \leq c$$
$$\max\{b,d\} = b \Rightarrow b \geq d.$$

Za $\max\{a+b, c+d\}$ imamo dvije mogućnosti:

$$a + b \leq c + d \Rightarrow \max\{a+b, c+d\} = c + d \leq c + b = \max\{a,c\} + \max\{b,d\}$$

ili

$$a + b \geq c + d \Rightarrow \max\{a+b, c+d\} = a + b \leq c + b = \max\{a,c\} + \max\{b,d\}.$$

2.2°

$$\max\{a,c\} = c \Rightarrow a \leq c$$
$$\max\{b,d\} = d \Rightarrow b \leq d.$$

Zbrajanjem nejednakosti dobijemo:

$$a + b \leq c + d \Rightarrow \max\{a + b, c + d\} = c + d = \max\{a, c\} + \max\{b, d\}.$$

Dakle, $F(x, y) = \max\{x, y\}$ je s-konveksna.
Treba još dokazati da je F rastuća po koordinatama. Dokazat ćemo rast po prvoj koordinati, a dokaz za rast po drugoj koordinati provodi se analogno.
Neka je $x_1 \leq x_2$ i $y \in \mathbb{R}_+$. Treba dokazati da je

$$\max\{x_1, y\} \leq \max\{x_2, y\}.$$

Ako je $\max\{x_1, y\} = x_1$, tada je $x_1 \geq y$, no tada je i $x_2 \geq x_1 \geq y$ pa je $\max\{x_2, y\} = x_2$, tj. tvrdnja vrijedi. Ako je $\max\{x_1, y\} = y$, tada je $y \geq x_1$.
U uspoređivanju y i x_2 mogu se pojaviti dvije mogućnosti: $y \geq x_2$ ili $x_2 \geq y$. Ako je $y \geq x_2$, tada je $\max\{x_2, y\} = y$, a to je dalje jednako $\max\{x_1, y\}$ pa tvrdnja vrijedi čak sa znakom jednakosti. Ako je $x_2 \geq y$, tada je $\max\{x_2, y\} = x_2 \geq y = \max\{x_1, y\}$ pa tvrdnja opet vrijedi. Dakle, u svakom slučaju je

$$F(x_1, y) = \max\{x_1, y\} \leq \max\{x_2, y\} = F(x_2, y),$$

što je i trebalo dokazati. □

U definiciji s-konveksnosti zbrojevi $\alpha^s + \beta^s$, odnosno $\alpha + \beta$ moraju biti jednaki 1. No, u izvjesnim slučajevima ti zbrojevi mogu biti i manji od 1. Ti su slučajevi opisani u sljedećem teoremu.

Teorem 1.5. *[4] a) Neka je $f \in K_s^1$. Tada $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$ vrijedi za sve $u, v \in \mathbb{R}_+$ i za sve $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ ako i samo ako $f(0) \leq 0$.*
b) Neka je $f \in K_s^2$. Tada $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$ vrijedi za sve $u, v \in \mathbb{R}_+$ i za sve $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ ako i samo ako $f(0) = 0$.

Dokaz. a) Ako je $\alpha = \beta = 0$ tada je $\alpha^s + \beta^s < 1$ i nejednakost se svodi na $f(0) \leq 0$. Pretpostavimo da su $u, v \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta \geq 0$ i $0 < \gamma = \alpha^s + \beta^s < 1$. Neka je

$$a = \alpha \gamma^{\frac{-1}{s}}$$

i

$$b = \beta \gamma^{\frac{-1}{s}}.$$

Tada je $a^s + b^s = \frac{\alpha^s}{\gamma} + \frac{\beta^s}{\gamma} = 1$ i koristeći dva puta činjenicu da je $f \in K_s^1$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= f(a\gamma^{\frac{1}{s}}u + b\gamma^{\frac{1}{s}}v) \le a^s f(\gamma^{\frac{1}{s}}u) + b^s f(\gamma^{\frac{1}{s}}v) \\
&= a^s f\left[\gamma^{\frac{1}{s}}u + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right] + b^s f\left[\gamma^{\frac{1}{s}}v + (1-\gamma)^{\frac{1}{s}}0\right] \\
&\le a^s\left[\gamma f(u) + (1-\gamma)f(0)\right] + b^s\left[\gamma f(v) + (1-\gamma)f(0)\right] \\
&= a^s\gamma f(u) + b^s\gamma f(v) + (1-\gamma)f(0) \\
&\le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v).
\end{aligned}$$

b) Nužno: Stavimo $u = v = \alpha = \beta = 0$ i uvrstimo u nejednakost $f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
f(0\cdot 0 + 0\cdot 0) &\le 0^s \cdot f(0) + 0^s \cdot f(0) \\
f(0) &\le 0,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.
Dovoljno: Neka su $u, v \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha, \beta \ge 0$ i neka je $0 < \gamma = \alpha + \beta < 1$. Neka je $a = \frac{\alpha}{\gamma}$ i $b = \frac{\beta}{\gamma}$. Tada $a + b = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = 1$ i

$$\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) &= f(a\gamma u + b\gamma v) \le a^s f(\gamma u) + b^s f(\gamma v) \\
&= a^s f\left[\gamma u + (1-\gamma)0\right] + b^s f\left[\gamma v + (1-\gamma)0\right] \\
&\le a^s\left[\gamma^s f(u) + (1-\gamma)^s f(0)\right] + b^s\left[\gamma^s f(v) + (1-\gamma)^s f(0)\right] \\
&= a^s\gamma^s f(u) + b^s\gamma^s f(v) + (1-\gamma)^s f(0) \\
&= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v).
\end{aligned}$$

□

Sljedeći teorem na neki način daje vezu između tih dviju s-konveksnosti.

Teorem 1.6. *[4] a) Neka je $0 < s \le 1$. Ako je $f \in K_s^2$ i $f(0) = 0$, onda je $f \in K_s^1$.*
b) Neka je $0 < s_1 \le s_2 \le 1$. Ako je $f \in K_{s_2}^2$, onda je $f \in K_{s_1}^2$.
c) Neka je $0 < s_1 \le s_2 \le 1$. Ako je $f \in K_{s_2}^1$ i $f(0) \le 0$, onda je $f \in K_{s_1}^1$.

Dokaz. a) Pretpostavimo da je $f \in K_s^2$ i $f(0) = 0$. Za $u, v \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha, \beta \ge 0$, gdje je $\alpha^s + \beta^s = 1$ imamo $\alpha + \beta \le \alpha^s + \beta^s = 1$ i pomoću Teorema 1.5b) dobivamo $f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$. Dakle, $f \in K_s^1$.
b) Pretpostavimo da je $f \in K_{s_2}^2$ i $u, v \ge 0$, $\alpha, \beta \ge 0$, gdje je $\alpha + \beta = 1$. Tada imamo

$$f(\alpha u + \beta v) \le \alpha^{s_2} f(u) + \beta^{s_2} f(v) \le \alpha^{s_1} f(u) + \beta^{s_1} f(v).$$

Dakle, $f \in K^2_{s_1}$.
c) Pretpostavimo da je $f \in K^1_{s_2}$ i $u, v \geq 0$, $\alpha, \beta \geq 0$, gdje je $\alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$. Tada $\alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ pa prema Teoremu 1.5a) imamo

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^{s_2} f(u) + \beta^{s_2} f(v) \leq \alpha^{s_1} f(u) + \beta^{s_1} f(v).$$

Dakle, $f \in K^1_{s_1}$. □

Teorem 1.7. *[4] Neka je $0 < s < 1$ i neka je $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ rastuća funkcija. Tada je funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(u) = u^{s/(1-s)} p(u)$ s-konveksna u prvom smislu.*

Dokaz. Neka je $v \geq u \geq 0$ i $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$. Promotrit ćemo dva slučaja:
1°. Neka je $\alpha u + \beta v \leq u$. Funkcije $u \mapsto u^{s/(1-s)}$ i p su rastuće pa je njihov produkt rastuća funkcija, tj. f je rastuća. Tada $f(\alpha u + \beta v) \leq f(u) = (\alpha^s + \beta^s) f(u) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$.
2°. Neka je $\alpha u + \beta v > u$. Tako dobijemo $\beta v > (1 - \alpha) u$ i $\beta > 0$. Od $\alpha \leq \alpha^s$ za $\alpha \in [0, 1]$ dobijemo $\alpha - \alpha^{s+1} \leq \alpha^s - \alpha^{s+1}$ i tada je

$$\frac{\alpha}{(1-\alpha)} \leq \frac{\alpha^s}{(1-\alpha^s)} = \frac{(1-\beta^2)}{\beta^s},$$

tj.

$$\frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)} \leq \beta^{1-s} - \beta.$$

Također imamo $\alpha u + \beta v \leq (\alpha + \beta) v \leq (\alpha^s + \beta^s) v = v$. Sada je

$$\alpha u + \beta v \leq \frac{\alpha\beta v}{(1-\alpha)} + \beta v \leq (\beta^{1-s} - \beta) v + \beta v = \beta^{1-s} v,$$

odakle slijedi

$$\frac{(\alpha u + \beta v)^s}{1-s} \leq \frac{\beta^s v^s}{1-s}. \tag{1.5}$$

Primjenom (1.5) i monotonosti funkcije p, dobivamo

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= (\alpha u + \beta v)^{\frac{s}{1-s}} p(\alpha u + \beta v) \\ &\leq \beta^s v^{\frac{s}{1-s}} p(\alpha u + \beta v) \leq \beta^s v^{\frac{s}{1-s}} p(v) \\ &= \beta^s f(v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v). \end{aligned}$$

□

Teorem 1.8. *[4] Neka je* $f \in K^1_{s_1}$ *i* $g \in K^1_{s_2}$*, gdje je* $0 < s_1, s_2 \leq 1$.
a) Ako je f *rastuća funkcija i* g *nenegativna funkcija tako da* $f(0) \leq 0 = g(0)$*, onda kompozicija* $f \circ g$ *pripada* K^1_s*, gdje je* $s = s_1 s_2$.
b) Pretpostavimo $0 < s_1, s_2 < 1$. *Ako su* f *i* g *nenegativne funkcije tako da vrijedi* $f(0) = 0$ *i* $g(0^+) = g(0)$ *ili* $g(0) = 0$ *i* $f(0^+) = f(0)$*, onda produkt* fg *pripada* K^1_s*, gdje je* $s = \min\{s_1, s_2\}$.

Dokaz. a) Neka su $u, v \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$, gdje je $s = s_1 s_2$. Budući da je $\alpha^{s_i} + \beta^{s_i} \leq \alpha^{s_1 s_2} + \beta^{s_1 s_2} = 1$ za $i = 1, 2$ pa prema Teoremu 1.5a) i pretpostavci, imamo

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(\alpha u + \beta v) &= f(g(\alpha u + \beta v)) \leq f(\alpha^{s_2} g(u) + \beta^{s_2} g(v)) \\
&\leq \alpha^{s_1 s_2} f(g(u)) + \beta^{s_1 s_2} f(g(v)) = \alpha^s (f \circ g)(u) + \beta^s (f \circ g)(v),
\end{aligned}
$$

što znači $f \circ g \in K^1_s$.
b) Prema Teoremu 1.2a), obje funkcije f i g su rastuće na $\langle 0, \infty\rangle$. Dakle,

$$(f(u) - f(v))(g(v) - g(u)) \leq 0$$

ili nejednakost

$$f(u)g(v) + f(v)g(u) \leq f(u)g(u) + f(v)g(v) \tag{1.6}$$

za sve $v \geq u > 0$. Ako je $v > u = 0$, onda je nejednakost (1.6) istinita jer su f, g nenegativne funkcije i vrijedi $f(0) = 0$ i $g(0^+) = g(0)$ ili $g(0) = 0$ i $f(0^+) = f(0)$. Neka su $u, v \in \mathbb{R}_+$ i $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$ gdje je $s = \min\{s_1, s_2\}$. Tada je $\alpha^{s_i} + \beta^{s_i} \leq \alpha^s + \beta^s = 1$ za $i = 1, 2$ i prema Teoremu 1.5a) i nejednakosti (1.6) imamo

$$
\begin{aligned}
f(\alpha u + \beta v) g(\alpha u + \beta v) &\leq (\alpha^{s_1} f(u) + \beta^{s_1} f(v))(\alpha^{s_2} g(u) + \beta^{s_2} g(v)) \\
&= \alpha^{s_1 + s_2} f(u)g(u) + \alpha^{s_1}\beta^{s_2} f(u)g(v) + \alpha^{s_2}\beta^{s_1} f(v)g(u) + \beta^{s_1+s_2} f(v)g(v) \\
&\leq \alpha^{2s} f(u)g(u) + \alpha^s\beta^s (f(u)g(v) + f(v)g(u)) + \beta^{2s} f(v)g(v) \\
&= \alpha^s f(u)g(u) + \beta^s f(v)g(v),
\end{aligned}
$$

što znači da je $fg \in K^1_s$. $\square$

Poglavlje 2

s-konveksnost u drugom smislu

U prethodnom poglavlju istovremeno smo promatrali svojstva obje vrste s-konveksnih funkcija. Sada ćemo detaljnije razmotriti s-konveksne funkcije u drugom smislu.

Zamijetimo, ako je $f : I \to \mathbb{R}$ nenegativna konveksna funkcija, tada je f ujedno i s-konveksna u drugom smislu. Naime, za $\alpha \in [0, 1]$ vrijedi $\alpha^s \geq \alpha$. Neka su $x, y \in I$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\alpha + \beta = 1$, tada zbog konveksnosti vrijedi

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &\leq \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &\leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \end{aligned}$$

što znači da je f s-konveksna. Pri tome smo u drugoj nejednakosti koristili da je $\alpha \leq \alpha^s$ i $f \geq 0$.

Dakle, sve nenegativne konveksne funkcije su primjeri s-konveksnih funkcija. To znači da su i potencije s eksponentom većim od 1 s-konveksne, jer su takve potencije ujedno konveksne. To se lako pokaže.

Neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $n > 1$. Tada je $f'(x) = nx^{n-1}$ i $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. Očito je $f'' \geq 0$ pa je f konveksna. Ako je $n \in \langle 0, 1\rangle$ tada je f konkavna. Pokazat ćemo da je za $n > s$ funkcija f s-konveksna. Treba dokazati da je

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y),$$

tj. nakon uvrštavanja $f(x) = x^n$, treba dokazati

$$(\alpha x + \beta y)^n \leq \alpha^s x^n + \beta^s y^n. \tag{2.1}$$

Ako je $y = 0$, (2.1) se svodi na $\alpha^n x^n \leq \alpha^s x^n$, tj. $\alpha^n \leq \alpha^s$ što je istinito jer je $n > s$. Ako je $y \neq 0$, podijelimo (2.1) s y i uvedimo zamjenu $t = \frac{x}{y}$. Treba dokazati da je funkcija

$$F(t) = \alpha^s t^n + \beta^s - (\alpha t + \beta)^n$$

nenegativna. Ispitat ćemo njezin tok na $[0, \infty\rangle$. Deriviramo li ju je, dobivamo

$$F'(t) = n\alpha^s t^{n-1} - n\alpha(\alpha t + \beta)^{n-1}.$$

Izjednačimo s nulom i izračunamo stacionarnu točku.

$$\begin{aligned} n\alpha^s t^{n-1} &= n\alpha(\alpha t + \beta)^{n-1} \\ \alpha^{s-1} &= \frac{(\alpha t + \beta)^{n-1}}{t^{n-1}} \\ \alpha^{\frac{s-1}{n-1}} &= \frac{\alpha t + \beta}{t} = \alpha + \frac{\beta}{t} \\ \alpha^{\frac{s-1}{n-1}} - \alpha &= \frac{\beta}{t} \Rightarrow t = \frac{\beta}{\alpha^{\frac{s-1}{n-1}} - \alpha}. \end{aligned}$$

Stacionarna točka je $t_0 = \frac{\beta}{\alpha^{\frac{s-1}{n-1}} - \alpha}$. Izračunamo drugu derivaciju od F.

$$\begin{aligned} F''(t) &= n(n-1)\alpha^s t^{n-2} - n(n-1)\alpha^2(\alpha t + \beta)^{n-2} \\ &= n(n-1)\alpha^s t^{n-2}\left[1 - \alpha^{2-s}\left(\frac{\alpha t + \beta}{t}\right)^{n-2}\right]. \end{aligned}$$

Uvrstimo t_0 u F'' i dobivamo

$$\begin{aligned} F''(t_0) &= n(n-1)\alpha^s t_0^{n-2}\left[1 - \alpha^{2-s}\alpha^{\frac{s-1}{n-1}(n-2)}\right] \\ &= n(n-1)\alpha^s t_0^{n-2}\left[1 - \alpha^{\frac{n-s}{n-1}}\right]. \end{aligned}$$

Budući da je $n > s$ i $n \in \langle 0, 1\rangle$ slijedi da je $\frac{n-s}{n-1} < 0$, pa je $\alpha^{\frac{n-s}{n-1}} > \alpha^s = 1$, tj. izraz u zagradi je negativan i $F''(t_0) > 0$, tj. u t_0 je minimum. Taj minimum iznosi

$$\begin{aligned} F(t_0) &= t_0^n\left[\alpha^s - \left(\frac{\alpha t_0 + \beta}{t_0}\right)^n\right] + \beta^s = t_0^n\left[\alpha^s - \alpha^{\frac{n(s-1)}{n-1}}\right] + \beta^s \\ &= \alpha^s t_0^n\left[1 - \alpha^{\frac{n(s-1)}{n-1} - s}\right] + \beta^s = \alpha^s t_0^n\left[1 - \alpha^{\frac{s-1}{n-1}}\right] + \beta^s \geq 0. \end{aligned}$$

Uz to je

$$F(0) = \beta^s - \beta^n > 0$$

i

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = t^n\left[\alpha^s - \left(\alpha + \frac{\beta}{t}\right)^n\right] + \beta^s = \infty.$$

Dakle, iz svega gore dobivenog imamo da je $F(t) \geq 0$ za $t > 0$. A to smo trebali dokazati. Dakle, $f(x) = x^n$, $n > s$ su primjeri konveksnih funkcija koje su ujedno i s-konveksne.

U definiciji s-konveksne funkcije pojavljuje se linearna kombinacija s dva pribrojnika. Poznato je da za konveksnu funkciju vrijedi tzv. Jensenova nejednakost u kojoj se javlja linearna kombinacija s n pribrojnika, $n \geq 2$. Dokazat ćemo da i za s-konveksne funkcije u drugom smislu vrijedi odgovarajući rezultat. Ovaj je rezultat modifikacija rezultata iz članka [8] i mogli bismo ga nazvati Jensenova nejednakost za s-konveksne funkcije u drugom smislu.

Teorem 2.1. *Neka su $w_1, ..., w_n$ pozitivni realni brojevi, $n \geq 2$. Ako je $f \in K_s^2$, onda je*

$$f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{W_n}\right)^s f(x_i), \tag{2.2}$$

gdje je $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i$ i $x_1, ..., x_n \in I$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po n, $n \geq 2$. Pretpostavimo da je $f \in K_s^2$. Ako je $n = 2$, onda je nejednakost (2.2) ekvivalentna s

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + (1-\alpha)^s f(y),$$

gdje je $\alpha = \frac{w_1}{W_2}$ i $1 - \alpha = \frac{w_2}{W_2}$.
Pretpostavimo da nejednakost (2.2) vrijedi za $n-1$. Tada za n-torke $(x_1, ..., x_n)$ i $(w_1, ..., w_n)$ imamo:

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{W_n}\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) &= f\left(\frac{w_n}{W_n}x_n + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_n}x_i\right)\\
&= f\left(\frac{w_n}{W_n}x_n + \frac{W_{n-1}}{W_n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_{n-1}}x_i\right)\\
&\leq \left(\frac{w_n}{W_n}\right)^s f(x_n) + \left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)^s f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{w_i}{W_{n-1}}x_i\right)\\
&\leq \left(\frac{w_n}{W_n}\right)^s f(x_n) + \left(\frac{W_{n-1}}{W_n}\right)^s \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{w_i}{W_{n-1}}\right)^s f(x_i)\\
&= \left(\frac{w_n}{W_n}\right)^s f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{w_i}{W_n}\right)^s f(x_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_i}{W_n}\right)^s f(x_i).
\end{aligned}$$

Pri tome prva nejednakost vrijedi jer je f s-konveksna, a u drugoj nejednakosti je upotrijebljena pretpostavka indukcije.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \geq 2$. Teorem 2.1 je, ustvari, nejednakost Jensenovog tipa. □

Za konveksne funkcije vrijedi tzv. Hermite-Hadamardova nejednakost, tj. ako je f konveksna i integrabilna na [a,b], tada je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

U sljedećem teoremu dokazat ćemo da sličan rezultat vrijedi i za s-konveksne funkcije. Ovaj rezultat se nalazi u članku [7].

Teorem 2.2. *Neka je $f \in K_s^2$, $a, b \in I$, $a < b$ i neka je f integrabilna. Tada*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Prema definiciji s-konveksnosti vrijedi:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + (1-\alpha)^s f(y).$$

U tu nejednakost stavimo $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ i $\alpha = \frac{1}{2}$. Tada je

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \frac{1}{2}(ta + (1-t)b) + \frac{1}{2}((1-t)a + tb) = \frac{a+b}{2}$$

pa je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^s f(ta + (1-t)b) + \left(\frac{1}{2}\right)^s f((1-t)a + tb) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^s \left[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Integrirajući obje strane nejednakosti (2.4) od 0 do 1, dobivamo

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s \left[\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\mathrm{d}t + \int_0^1 f((1-t)a + tb)\mathrm{d}t\right]. \tag{2.5}$$

Lijeva strana jednaka je:

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 \mathrm{d}t = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

U prvi integral, na desnoj strani, uvedimo supstituciju:

$$x = ta + (1-t)b \Rightarrow t = \frac{x-b}{a-b} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}x}{b-a}$$

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t = \int_b^a f(x)\frac{-\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

U drugi integral, na desnoj strani, uvedimo supstituciju:

$$x = (1-t)a + tb \Rightarrow t = \frac{a-x}{a-b} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{b-a}$$

$$\int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\frac{\mathrm{d}x}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Uvrstimo li dobivene integrale u nejednakost (2.5) dobit ćemo

$$\int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t + \int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] = 2^{1-s}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

čime smo dokazali prvi dio nejednakosti (2.3) .
Drugi dio nejednakosti (2.3) dokazat ćemo koristeći definiciju s-konveksne funkcije, stavljajući $x = a$, $y = b$ i integrirajući s obzirom na $\alpha \in [0,1]$. Po definiciji s-konveksnosti imamo

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + (1-\alpha)^s f(y),$$

tj.

$$f(\alpha a + (1-\alpha)b) \leq \alpha^s f(a) + (1-\alpha)^s f(b),$$

ali također vrijedi i

$$f((1-\alpha)a+\alpha b)\leq(1-\alpha)^s f(a)+\alpha^s f(b).$$

Zbrojimo li te dvije nejednakosti i integriramo po α od 0 do 1 dobit ćemo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(\alpha a+(1-\alpha)b)\mathrm{d}\alpha+\int_0^1 f((1-\alpha)a+\alpha b)\mathrm{d}\alpha&\\ \leq\int_0^1\left[\alpha^s f(a)+(1-\alpha)^s f(b)\right]\mathrm{d}\alpha&+\int_0^1\left[(1-\alpha)^s f(a)+\alpha^s f(b)\right]\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

Iz dokaza prve nejednakosti nam slijedi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha\leq f(a)\int_0^1\alpha^s\mathrm{d}\alpha&+f(b)\int_0^1(1-\alpha)^s\mathrm{d}\alpha\\ +f(a)\int_0^1(1-\alpha)^s\mathrm{d}\alpha&+f(b)\int_0^1\alpha^s\mathrm{d}\alpha,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha&\leq\frac{1}{s+1}f(a)+\frac{1}{s+1}f(b)+\frac{1}{s+1}f(a)+\frac{1}{s+1}f(b)\\ \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha&\leq\frac{2}{s+1}\left[f(a)+f(b)\right]\\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{d}\alpha&\leq\frac{f(a)+f(b)}{s+1},\end{aligned}$$

čime smo dokazali drugu nejednakost, a samim time i početnu tvrdnju. □

Definirajmo dvije funkcije na intervalu $[0,1]$, ([2]).

$$H(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

i

$$F(t)=\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(tx+(1-t)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Očito je $H(0)=f\left(\frac{a+b}{2}\right), H(1)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Teorem 2.3. *Neka je f s-konveksna funkcija u drugom smislu, na intervalu* $[a,b]$ *. Tada je funkcija H s-konveksna u drugom smislu, na* $[0,1]$ *i za $t\in[0,1]$ vrijedi*

$$H(0)\leq 2^{s-1}H(t).$$

Dokaz. s-konveksnost funkcije H je posljedica s-konveksnosti funkcije f.
Naime, imamo

$$\begin{aligned}
H(\alpha t+\beta u) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left((\alpha t+\beta u)x+(1-\alpha t-\beta u)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\alpha\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+\beta\left(ux+(1-u)\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\alpha^s f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)+\beta^s f\left(ux+(1-u)\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&= \alpha^s H(t)+\beta^s H(u),
\end{aligned}$$

čime je dokazana s-konveksnost od H. Krenimo od $2^{s-1}H(t)$ i uz zamjenu varijable $u=tx+(1-t)\frac{a+b}{2}$ imamo:

$$\begin{aligned}
2^{s-1}H(t) &= \frac{2^{s-1}}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{2^{s-1}}{b-a}\int_{u_L}^{u_U} f(u)\frac{b-a}{u_L-u_U}\mathrm{d}u\\
&= \frac{2^{s-1}}{u_L-u_U}\int_{u_L}^{u_U} f(u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

gdje su $u_L = ta + (1-t)\frac{a+b}{2}$ i $u_U = tb + (1-t)\frac{a+b}{2}$.
Na izraz $\frac{2^{s-1}}{u_L-u_U}\int\limits_{u_L}^{u_U} f(u)\mathrm{d}u$ primjenimo prvu nejednakost (2.3) i dobijemo da je

$$\frac{2^{s-1}}{u_L-u_U}\int\limits_{u_L}^{u_U} f(u)\mathrm{d}u \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Budući da je $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0)$, slijedi da je

$$2^{s-1}H(t) = \frac{2^{s-1}}{u_L-u_U}\int\limits_{u_L}^{u_U} f(u)\mathrm{d}u \geq 2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0),$$

tj. $2^{s-1}H(t) \geq H(0)$. □

Teorem 2.4. *Neka je f s-konveksna funkcija u drugom smislu, na intervalu $[a, b]$. Tada je funkcija F simetrična s obzirom na $\frac{1}{2}$ i s-konveksna u drugom smislu, na $[0, 1]$. Također, vrijede sljedeće nejednakosti*

$$2^{1-s}F(t) \geq F(\frac{1}{2})$$

i

$$2^{s-1}F(t) \geq H(1-t).$$

Dokaz. F je simetrična s obzirom na $\frac{1}{2}$ ako vrijedi $F(\frac{1}{2}-t) = F(\frac{1}{2}+t)$ za svaki $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.
S jedne strane imamo

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}-t\right) &= \frac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}-t\right)x + \left(1-\left(\frac{1}{2}-t\right)\right)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}-t\right)x + \left(\frac{1}{2}+t\right)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}+t\right) &= \frac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}+t\right)x + \left(1-\left(\frac{1}{2}+t\right)\right)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b\int\limits_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}+t\right)x + \left(\frac{1}{2}-t\right)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Uvedimo supstituciju: $z = -t$

$$F\left(\frac{1}{2}+t\right) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\left(\frac{1}{2}-z\right)x + \left(\frac{1}{2}+z\right)y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dakle, $F(\frac{1}{2}-t) = F(\frac{1}{2}+t)$. Dokažimo da je F s-konveksna. Neka je $\alpha+\beta = 1$.

$$\begin{aligned}
F(\alpha t_1+\beta t_2) &= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left((\alpha t_1+\beta t_2)\,x + (1-\alpha t_1+\beta t_2)\,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left((\alpha t_1+\beta t_2)\,x + (\alpha+\beta-\alpha t_1+\beta t_2)\,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\alpha(t_1x+(1-t_1)y)+\beta(t_2x+(1-t_2)y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\le \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left[\alpha^s f(t_1x+(1-t_1)y)+\beta^s f(t_2x+(1-t_2)y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\left[\int_a^b\int_a^b \alpha^s f(t_1x+(1-t_1)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_a^b\int_a^b \beta^s f(t_2x+(1-t_2)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right] \\
&= \frac{1}{(b-a)^2}\alpha^s\int_a^b\int_a^b f(t_1x+(1-t_1)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{(b-a)^2}\beta^s\int_a^b\int_a^b f(t_2x+(1-t_2)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \alpha^s F(t_1)+\beta^s F(t_2).
\end{aligned}$$

Dakle, F je s-konveksna funkcija u drugom smislu.
Sada dokažimo prvu nejednakost $2^{1-s}F(t) \ge F(\frac{1}{2})$.
Napišimo $\frac{x+y}{2}$ na sljedeći način:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}(tx+(1-t)y) + \frac{1}{2}((1-t)x+ty),\ \ x,y\in[a,b]\,, t\in[0,1]\,.$$

Primjenimo li definiciju s-konveksnosti, dobivamo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \left(\frac{1}{2}\right)^s f(tx+(1-t)y) + \left(\frac{1}{2}\right)^s f((1-t)x+ty).$$

Integrirajući po x od a do b i po y od a do b dobivamo

$$\int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s \int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left(\frac{1}{2}\right)^s \int_a^b \int_a^b f((1-t)x+ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Uvrstimo u integral $\int_a^b \int_a^b f((1-t)x+ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ supstituciju $1-t=v$.

Tada je $t=1-v$, pa je taj integral jednak $\int_a^b \int_a^b f(vx+(1-v)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, tj. time smo dobili da je

$$\int_a^b \int_a^b f((1-t)x+ty)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \int_a^b f(vx+(1-v)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Iz čega slijedi,

$$\int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^s \int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Da bi dobili drugu nejednakost, definiramo funkciju $H_y(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)\mathrm{d}x$ za fiksni y.

Koristeći supstituciju $u = tx+(1-t)y$, dobivamo $H_y(t) = \frac{1}{u_U-u_L}\int_{u_U}^{u_L} f(u)\mathrm{d}u$, pri čemu su $u_U = ta+(1-t)\frac{a+b}{2}$, $u_L = tb+(1-t)\frac{a+b}{2}$.

Koristeći rezultat iz teorema 2.2 za s-konveksnu funkciju f i $a=u_L$, $b=u_U$ dobivamo

$$\int_{u_U}^{u_L} f(u)\mathrm{d}u \geq 2^{s-1} f\left(\frac{u_U+u_L}{2}\right),$$

tj.

$$H_y(t) \geq 2^{s-1} f\left(\frac{u_U+u_L}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right).$$

Integrirajući tu nejednakost po y od a do b dobivamo

$$\int_a^b H_y(t)\mathrm{d}y \geq 2^{s-1}\int_a^b f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)y\right)\mathrm{d}y.$$

Budući da je $\int\limits_a^b H_y(t)\mathrm{d}t = (b-a)F(t)$ i $f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)y\right) = f\left((1-v)\frac{a+b}{2} + vy\right)$,

tj.

$$\int\limits_a^b f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)y\right)\mathrm{d}y = \int\limits_a^b f\left((1-v)\frac{a+b}{2} + vy\right)\mathrm{d}y = (b-a)\cdot H(v) = (b-a)H(1-t),$$

slijedi

$$(b-a)F(t) \geq 2^{s-1}(b-a)H(1-t),$$

tj.

$$F(t) \geq 2^{s-1}H(1-t).$$

□

Sljedeći nam teorem daje gornju među integrala produkta konveksne i s-konveksne funkcije izraženu u vrijednostima tih funkcija u rubovima integrala.

Teorem 2.5. *[5] Neka su $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in [0, \infty\rangle$, $a < b$, funkcije takve da su g i fg integrabilne. Ako je f konveksna i nenegativna na $[a, b]$ i ako je g s-konveksna na $[a, b]$ za fiksne $s \in \langle 0, 1\rangle$, onda je*

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{s+2}M(a,b) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}N(a,b),$$

gdje je $M(a,b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ i $N(a,b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.

Dokaz. Budući da je f konveksna i g s-konveksna na $[a, b]$ imamo

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq tf(a) + (1-t)f(g), \\ g(ta + (1-t)b) &\leq t^s g(a) + (1-t)^s g(b), \end{aligned}$$

za svaki $t \in [0, 1]$. f i g su nenegativne pa imamo

$$\begin{aligned} &f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) \\ &\qquad \leq t^{s+1}f(a)g(b) + t(1-t)^s f(a)g(b) + (1-t)f(b)g(a) + (1-t)^{s+1}f(b)g(b). \end{aligned}$$

Integrirajući obje strane nejednakosti od 0 do 1, dobivamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b & f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{s+2}(f(a)g(a)+f(b)g(b)) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}(f(a)g(b)+f(b)g(a)).
\end{aligned}
$$

□

Primjedba: Ako u Teoremu 2.5 odaberemo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, gdje je $f(x) = 1$ za svaki $x \in [a,b]$ dobivamo

$$
\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{s+2}(g(a)+g(b)) + \frac{1}{(s+1)(s+2)}(g(a)+g(b)) = \frac{g(a)+g(b)}{s+1},
$$

što je jednako desnoj strani nejednakosti (2.3).

Teorem 2.6. *[5] Neka je $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in [0,\infty\rangle$, $a < b$, funkcija takva da su g i fg integrabilne. Ako je f konveksna i nenegativna funkcija na $[a,b]$ i ako je g s-konveksna na $[a,b]$ za fiksni $s \in \langle 0,1\rangle$, onda je*

$$
2^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b) + \frac{1}{s+2}N(a,b).
$$

Dokaz. Možemo pisati

$$
\frac{a+b}{2} = \frac{ta+(1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a+tb}{2},
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)g\left(\frac{ta+(1-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+tb}{2}\right)\\
&\le \frac{1}{2^{s+1}}\left[f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)\right]\left[g(ta+(1-t)b)+g((1-t)a+tb)\right]\\
&= \frac{1}{2^{s+1}}[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)]\\
&+ \frac{1}{2^{s+1}}[f(ta+(1-t)b)g((1-t)a+tb)+f((1-t)a+tb)g(ta+(1-t)b)]\\
&\le \frac{1}{2^{s+1}}[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)]\\
&+ \frac{1}{2^{s+1}}[tf(a)+(1-t)f(b)][(1-t)^s g(a)+t^s g(b)]\\
&+ \frac{1}{2^{s+1}}[(1-t)f(a)+tf(b)][t^s g(a)+(1-t)^s g(b)]\\
&= \frac{1}{2^{s+1}}[f(ta+(1-t)b)g(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb)]\\
&+ \frac{1}{2^{s+1}}[(t(1-t)^s+(1-t)t^s)M(a,b)+(t^{s+1}+(1-t)^{s+1})N(a,b)].
\end{aligned}
$$

Integriramo od 0 do 1 i dobijemo

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2^s}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &\le \frac{1}{2^{s+1}}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)}M(a,b)+\frac{2}{s+2}N(a,b)\right]\\
&= \frac{1}{2^s}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}M(a,b)+\frac{1}{s+2}N(a,b)\right].
\end{aligned}
$$

$\square$

Lema 2.7. *[1] Neka je $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I° gdje su $a, b \in I$, $a < b$. Ako je f' integrabilna, onda vrijedi sljedeća jednakost*

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\
&\qquad = \frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 tf'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 (t-1)f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\right].
\end{aligned}
$$

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t f'\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{b-a} t f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\Bigg|_1^0 - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Koristeći zamjenu varijable $x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$ dobivamo

$$
I_1 = \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.
$$

Slično dobivamo

$$
I_2 = \int_0^1 (t-1) f'\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x.
$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
I = \frac{b-a}{4}[I_1 + I_2] &= \frac{b-a}{4}\left[\frac{4}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

□

Teorem 2.8. *[1] Neka je $f : I \subset [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I° tako da je f' integrabilna. Ako je $|f'|$ s-konveksna na $[a,b]$ za fiksni $s \in \langle 0,1]$, onda vrijedi sljedeća* *nejednakost:*

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)|+2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right] && (2.8)\\
&\leq \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}[|f'(a)|+|f'(b)|]. && (2.9)
\end{aligned}$$

Dokaz. Prema Lemi 2.7 imamo

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \frac{b-a}{4}\left[\int\limits_0^1 t\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|\mathrm{d}t+\int\limits_0^1 |t-1|\left|f'\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|\mathrm{d}t\right] \\
&\leq \frac{b-a}{4}\int\limits_0^1 t\left[t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+(1-t)^s|f'(a)|\right]\mathrm{d}t \\
&+\frac{b-a}{4}\int\limits_0^1 (1-t)\left[t^s|f'(b)|+(1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]\mathrm{d}t \\
&=\frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{s+2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\frac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(a)|\right] \\
&+\frac{b-a}{4}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(b)|+\frac{1}{s+2}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right] \\
&=\frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)|+2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right], && (2.10)
\end{aligned}$$

što dokazuje nejednakost (2.8). Nejednakost (2.9) dokazujemo ovako: s obzirom da je, $|f'|$ je s-konveksna na $[a,b]$ za proizvoljni $t\in[0,1]$,onda prema (2.3) imamo

$$2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leq\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}. \tag{2.11}$$

Kombinacijom (2.10) i (2.11), imamo

$$\begin{aligned}\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| &\le \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)|+2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right]\\ &\le \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)|+2(s+1)2^{1-s}\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}+|f'(b)|\right]\\ &= \frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}[|f'(a)|+|f'(b)|],\end{aligned}$$

što dokazuje nejednakost (2.9). □

U sljedećem teoremu dat ćemo jednu gornju ocjenu razlike dvaju izraza iz Hermite-Hadamardove nejednakosti. Prije toga ćemo u lemi dokazati korisni identitet.

Lema 2.9. *[6] Neka je $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I° gdje su $a, b \in I$, $a < b$. Ako je f'' integrabilna, onda vrijedi sljedeća jednakost:*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\\ &= \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 (t-1)^2 f''\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t\right]. \quad (2.12)\end{aligned}$$

Dokaz. Koristeći parcijalnu integraciju dobivamo sljedeću jednakost:

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t\\ &= t^2\frac{2}{b-a}f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\Big|_1^0-\frac{4}{b-a}\int_0^1 tf'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{b-a}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{4}{b-a}\left[t\frac{2}{b-a}f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\Big|_1^0\right]\\ &-\frac{4}{b-a}\left[\frac{2}{b-a}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{2}{b-a}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{8}{(b-a)^2}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{8}{(b-a)^2}\int_0^1 f\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t. \quad (2.13)\end{aligned}$$

Koristeći zamjenu varijable $x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a$ za $t \in [0,1]$ i pomnožimo li obje strane (2.13) sa $\frac{(b-a)^2}{16}$, dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{b-a}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Slično dobivamo

$$\begin{aligned} &\frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 (t-1)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{b-a}{8} f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dakle, zbrojimo (2.14) i (2.15) i dobivamo traženu jednakost.

□

Teorem 2.10. *[6] Neka je $f : I \subset [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ diferencijabilna na I° tako da je f'' integrabilna, gdje su $a, b \in I$, $a < b$. Ako je $|f|$ s-konveksna na $[a,b]$ za fiksni $s \in \langle 0,1]$, onda vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right|$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{ |f''(a)| + (s+1)(s+2)\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)| \right\} \tag{2.16}$$

$$\leq \frac{\left[1 + (s+2)2^{1-s}\right](b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{ |f''(a)| + |f''(b)| \right\}. \tag{2.17}$$

Dokaz. Iz Leme 2.9 imamo

$$
\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{16}\left[\int_0^1 t^2 \left| f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right)\right| \mathrm{d}t + \int_0^1 (t-1)^2 \left| f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right| \mathrm{d}t\right] \\
&\le \frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 t^2\left[t^s \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + (1-t)^s |f''(a)|\right]\mathrm{d}t \\
&+ \frac{(b-a)^2}{16}\int_0^1 (t-1)^2\left[t^s |f''(b)| + (1-t)^s \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{1}{s+3}\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(a)|\right] \\
&+ \frac{(b-a)^2}{16}\left[\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}|f''(b)| + \frac{1}{s+3}\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right] \\
&= \frac{(b-a)^2}{(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)| + (s+1)(s+2)\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)|\right\}, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili nejednakost trokuta, a u drugoj definiciju s-konveksnosti te činjenicu da je

$$\int_0^1 t^2(1-t)^s \mathrm{d}t = \int_0^1 (t-1)^2 t^s \mathrm{d}t = \frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

$$\int_0^1 t^{s+2}\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^{s+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{s+3}.$$

Dokazali smo nejednakost (2.16). S obzirom da, $|f''|$ je s-konveksna na $[a, b]$ za proizvoljan $t \in [0, 1]$, onda prema (2.3) imamo

$$2^{s-1}\left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{|f''(a)| + |f''(b)|}{s+1}. \qquad (2.19)$$

Kombinacijom (2.18) i (2.19), imamo

$$\begin{aligned}
&\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)| + (s+1)(s+2)\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)|\right\} \\
&\le \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)| + (s+1)(s+2)2^{1-s}\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{s+1} + |f''(b)|\right\} \\
&= \frac{\left[1+(s+2)2^{1-s}\right](b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|\right\},
\end{aligned}$$

što dokazuje nejednakost (2.17). □

Korolar 2.11. *[6] U Teorem 2.10 stavimo $s = 1$, dobivamo*

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| &\le \frac{(b-a)^2}{192}\left\{|f''(a)| + 6\left|f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f''(b)|\right\} \qquad (2.20) \\
&\le \frac{(b-a)^2}{48}\left\{|f''(a)|+|f''(b)|\right\}.
\end{aligned}$$

Sada možemo razmotriti sredine za proizvoljne realne brojeve α,β, $\alpha \neq \beta$. [1] i [6]
Aritmetička sredina:

$$A(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+;$$

Generalizirana logaritamska sredina:

$$L_n(\alpha,\beta) = \left[\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{(n+1)(\beta-\alpha)}\right]^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1,0\}, \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+.$$

Prema primjeru (1.3) funkcija $f(x) = x^s$ je s-konveksna u drugom smislu. Dakle, primjenom s-konveksne $f : [0,\infty\rangle \to [0,1]$, $f(x) = x^s$ vrijede sljedeće nejednakosti:

Propozicija 2.12. *Neka su $a, b \in [a, b]$, $0 < a < b$ i $0 < s < 1$. Tada imamo*

$$\begin{aligned}
|L_s^s(a,b) - A^s(a,b)| &\le s\left(\frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\right)\left(|a|^{s-1} + 2(s+1)\left|\frac{a+b}{2}\right|^{s-1} + |b|^{s-1}\right) \\
&\le s\frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}(|a|^{s-1}+|b|^{s-1}).
\end{aligned}$$

Dokaz. U nejednakost (2.8) stavimo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^s$ i dobivamo

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right], 0$$

prema (2.3) znamo $2^{s-1}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \le \frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}$, pa slijedi

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|f'(a)| + 2(s+1)2^{1-s}\frac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1} + |f'(b)|\right]$$

$$\left| \left(\frac{a+b}{2}\right)^s - \frac{1}{b-a}\int_a^b x^s\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|sa^{s-1}| + 2(s+1)2^{1-s}\frac{|sa^{s-1}|+|sb^{s-1}|}{s+1} + |sb^{s-1}|\right]$$

$$\left| \left(\frac{a+b}{2}\right)^s - \frac{1}{b-a}\frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b \right| \le s\frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|a|^{s-1} + 2^{2-s}(|a|^{s-1} + |b|^{s-1}) + |b|^{s-1}\right]$$

$$\left| \left(\frac{a+b}{2}\right)^s - \frac{1}{b-a}\frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1} \right| \le s\frac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left[|a|^{s-1}(2^{2-s}+1) + |b|^{s-1}(2^{2-s}+1)\right]$$

$$|A^s(a,b) - L_s^s(a,b)| \le s\frac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}[|a|^{s-1} + |b|^{s-1}].$$

□

Propozicija 2.13. *Neka je $0 < a < b$ i $s \in \langle 0, 1\rangle$. Tada imamo*

$$|A^s(a,b) - L_s^s(a,b)| \le \frac{s(s-1)(b-a)^2}{192}\left\{a^{s-2} + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)^{s-2} + b^{s-2}\right\}.$$

Dokaz. U nejednakost (2.20) stavimo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^s$ i dobivamo

$$\left| \left(\frac{a+b}{2}\right)^s - \frac{1}{b-a}\int_a^b x^s\mathrm{d}x \right| \le \frac{(b-a)^2}{192}\left\{|s(s-1)a^{s-2}| + 6\left|s(s-1)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{s-2}\right| + |s(s-1)b^{s-2}|\right\}$$

$$\left| \left(\frac{a+b}{2}\right)^s - \frac{1}{b-a}\frac{x^{s+1}}{s+1}\Big|_a^b \right| \le \frac{s(s-1)(b-a)^2}{192}\left\{a^{s-2} + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)^{s-2} + b^{s-2}\right\}$$

$$\left|A^s(a,b) - L_s^s(a,b)\right| \le \frac{s(s-1)(b-a)^2}{192}\left\{a^{s-2} + 6\left(\frac{a+b}{2}\right)^{s-2} + b^{s-2}\right\}.$$

□

Poglavlje 3

s-konveksnost u prvom smislu

U prethodnom smo poglavlju razmatrali Hermite-Hadamardovu nejednakost za s-konveksnu funkciju u drugom smislu. Sada ćemo to isto učiniti za s-konveksnu funkciju u prvom smislu. Ove rezultate su objavili Dragomir i Fitzpatrick u radu [3].

Teorem 3.1. *Neka je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ s-konveksna funkcija u prvom smislu, $s \in \langle 0, 1]$. Ako je $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$, tada vrijedi nejednakost*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Dokaz. U definiciju s-konveksnosti u prvom smislu, stavimo $\alpha = \beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ za sve $x, y \in [0, \infty\rangle$, imamo

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

gdje je $\alpha^s + \beta^s = 1$. U gornju nejednakost stavimo $x = ta + (1-t)b, y = (1-t)a + tb, t \in [0, 1]$, te dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)], \tag{3.2}$$

za svaki $t \in [0, 1]$. Integrirajući nejednakost (3.2) po t od 0 do 1 imajući na umu jednakost integrala (2.6) i (2.7)

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b\mathrm{d}t + \int_0^1 f((1-t)a+tb)\mathrm{d}t\right]$$

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

dobivamo traženu nejednakost. $\square$

Teorem 3.2. *Uz pretpostavke Teorema 3.1 vrijedi ova nejednakost*

$$\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\varphi(t)\mathrm{d}t \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{3.3}$$

gdje je $\varphi(t) := 1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}$, $t \in \langle 0,1\rangle$, $s \in \langle 0,1]$.

Dokaz. U definiciju s-konveksnosti u prvom smislu stavimo

$$\alpha = t, \beta = (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, t \in [0,1].$$

Budući da je

$$\alpha^s + \beta^s = 1$$

za svaki $t \in [0,1]$, onda je

$$f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b) \leq t^s f(a) + (1-t^s)f(b)$$

za svaki $t \in [0,1]$ i slično

$$f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb) \leq (1-t^s)f(a) + t^s f(b)$$

za svaki $t \in [0,1]$. Zbrojimo gornje nejednakosti i dobijemo

$$\begin{aligned}[f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b) + f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb] &\leq t^s f(a) + (1-t^s)f(b) + (1-t^s)f(a) + t^s f(b)\\ &= f(a)[t^s+(1-t^s)] + f(b)[(1-t^s)+t^s]\\ &= f(a)+f(b).\end{aligned}$$

Dijeleći s 2 dobivamo

$$\frac{1}{2}[f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)+f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb)] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.4}$$

za svaki $t \in [0,1]$. Integrirajući nejednakost (3.4) po t od 0 do 1 dobivamo

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\mathrm{d}t + \int_0^1 f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb)\mathrm{d}t\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.5}$$

Neka je $u := (1-t^s)^{\frac{1}{s}}, t \in [0,1]$, pa je $t = (1-u^s)^{\frac{1}{s}}$. Zamjenom varijabli dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a+tb)\mathrm{d}t &= -\int_1^0 f(ua+(1-u^s)^{\frac{1}{s}}b)(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Kad taj integral uvrstimo u nejednakost (3.5) dobivamo

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\mathrm{d}t\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\left[1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right]\mathrm{d}t \le \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

tj.

$$\int_0^1 f(ta+(1-t^s)^{\frac{1}{s}}b)\left[\frac{1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}}{2}\mathrm{d}t\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

što nam daje traženu nejednakost. □

Kad je $s=1$, tada je

$$\frac{1+(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1t^{s-1}}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

pa nejednakost (3.2) postaje

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t \le \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Kad se uvrsti supstitucija

$$z = ta + (1-t)b \Rightarrow t = \frac{z-b}{a-b} \Rightarrow dt = \frac{-dz}{b-a},$$

tada je

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\mathrm{d}t = \int_b^a f(z)\frac{-\mathrm{d}z}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$$

pa dobivamo drugu Hermite-Hadamardovu nejednakost.

Bibliografija

[1] M. W. Alomari, M. Darus, U. S. Kirmaci, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions, Acta Mathematica Scientia 31B(4) (2011) 1643–1652.

[2] M. Bombardelli, S. Varošanec, Properties of h-convex functions related to the Hermite-Hadamard-Fejer inequalities, Computers and Mathematics with Applications 58 (2009) 1869–1877.

[3] S. S. Dragomir, S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications, Demonstratio Mathematica 31(3) (1998) 633–642.

[4] H. Hudzik, L. Maligranda, Some remarks on s-convex functions, Aequationes Mathematicae 48 (1994) 100–111.

[5] U. S. Kirmaci, M. Klaričić Bakula, M. E. Özdemir, J. Pečarić, Hadamard-type inequalities for s-convex functions, Applied Mathematics and Computation 193 (2007) 26–35.

[6] M. E. Özdemir, C. Yildiz, A. O. Akdemir, E. Set, On some inequalities for s-convex functions and applications, Journal of Inequalities and Applications 333 (2013) 2–11.

[7] M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim, On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions, Journal of Mathematical Inequalities 2 (2008) 335-341.

[8] S. Varošanec, On h-convexity, Journal of Mathematical Analysis and Applications 326 (2007) 303–311.

Sažetak

U ovom radu opisan je jedan način poopćenja pojma konveksnih funkcija koji su opisali Hudzik i Maligranda 1994. godine.

Rad se sastoji od tri poglavlja. U uvodu je ukratko opisana tema i cilj rada. Prvo poglavlje sadrži definicije i svojstva s-konveksnih funkcija u prvom i drugom smislu. U drugom poglavlju dokazani su rezultati samo za s-konveksne funkcije u drugom smsilu kao što su Jensenova i Hermite-Hadamardova nejednakost, te su dane različite ocjene za razlike lijeve i desne strane Hermite-Hadamardove nejednakosti. U trećem poglavlju izloženi su rezultati za s-konveksne funkcije u prvom smislu.

Summary

In this thesis we describe one generalization of convex function which was introduced by Hudzik and Maligranda in 1994.

The thesis consists of three chapters. In the first chapter we give definitions and some properties of s-convex functions in the first and the second sense. In the second chapter results for s-convex functions in the second sense are proven such as Jensen's and Hermite-Hadamard's inequality. Also there are given different estimates for differences between the left-hand and the right-hand sides of Hermite-Hadamard's inequality. In the third chapter the results for s-convex functions in the first sense are given.

Životopis

Moje ime je Ivana Mrvičić. Rođena sam 29.12.1987. godine u Zadru. U Biogradu na Moru pohađala sam Osnovnu školu Marije Eškinje,te Opću gimnaziju. Maturirala sam 2006. godine, iste godine upisala sam Preddiplomski sveučilišni studij Matematika - smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji sam završila 2012. godine. Nakon završenog preddiplomskog studija upisala sam Diplomski sveučilišni studij Matematika - smjer nastavnički.

Tijekom studiranja sam radila honorarne poslove za T-Hrvatski Telekom, Partner banku i druge. Aktivno se koristim engleskim jezikom, a pasivno njemačkim jezikom. Također odlično se služim svim MS Office programima i informacijsko-komunikacijskim tehnologijama.