SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Mateja Murat

PREDEUKLIDSKO RAZDOBLJE GRČKE MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Putujući u Egipat i Babilon kako bi proučavali glazbu, matematiku i astronomiju, matematičari i filozofi stare Grčke primili su i razradili kulturna i znanstvena dostignuća starog Bliskog Istoka. Znanstvenici jonske škole, čiji je osnivač Tales, najprije su logičnoj obradi i sistematizaciji podvrgli matematičke informacije koje su preuzeli od istočnih naroda, a posebno od Babilonaca. Tako se u području matematike u grčko doba prešlo na apstraktan način razmišljanja, generalizaciju i deduktivni oblik zaključivanja. Upravo je tema ovog rada pregled matematičkih dostignuća grčkih matematičara u razdoblju do 4. stoljeća prije Krista, to jest, do pojave Euklida, uz poseban naglasak na diskusiju sličnosti i razlika starogrčkog i suvremenog pristupa današnjim školskim matematičkim temama.

Diplomski rad je podijeljen u pet poglavlja. U prvome poglavlju riječ je o Talesu i njegovom doprinosu matematici. Drugo poglavlje započinje Pitagorom i poučkom koji se pripisuje njemu, iako se ne zna sa sigurnošću je li ga dokazao on ili neki drugi pitagorejac. U tome poglavlju bit će riječ i o najvažnijim otkrićima u pitagorejskoj aritmetici i geometriji. Pitagora je najvjerojatnije bio među prvim znanstvenicima koji geometriju nisu promatrali samo kao praktičnu i primijenjenu znanost, nego kao i apstraktnu logičnu znanost. Pitagorejci su otkrili postojanje nesumjerljivih veličina te su počeli predstavljati veličine geometrijski, a ne aritmetički, dužinama, a ne brojevima te je tako nastala *geometrijska algebra.* U trećem poglavlju bit će opisana tri klasična problema starogrčke matematike - kvadratura kruga, trisekcija kuta i duplikacija kocke te načini njihova rješavanja tijekom spomenutog razdoblja. U četvrtom poglavlju će biti riječ o doprinosima i ostalih grčkih matematičara među kojima su najistaknutiji Zenon, Demokrit iz Abdere, Teodor iz Kirene, Teetet, Eudoks iz Knida i Aristotel. Posljednje poglavlje obrađuje temu kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje učenika u hrvatskim školama, naglašavajući sličnosti i razlike klasičnog i suvremenog pristupa temama. Kako u predeuklidsko doba nije postajala nikakva algebarska notacija, radi preglednosti ćemo u radu koristiti suvremenu notaciju.

Poglavlje 1

Tales iz Mileta

1.1 Životopis

Tales iz Mileta, prvi grčki matematičar filozof, znanstvenik, inženjer i astronom, a također poznat i kao jedan od legendarnih „Sedam mudraca", živio je oko 624.–547. godine prije Krista. Pretpostavlja se da je na putovanjima geometriju naučio od Egipćana, a astronomiju od Babilonaca. Prema jednom izvoru, njegovi roditelji, majka Kleobulina i otac Heksamija, su bili iz Mileta, a prema drugome, Feničani. Za vrijeme Talesa, grad Milet koji se nalazio u antičkoj regiji Joniji, bio je važno trgovačko središte. Tales je bio osnivač jonske škole filozofije u Miletu, a pretpostavlja se da je bio učitelj Anaksimandra (611.–545. pr. Kr.). Velik dio onog što znamo o Talesu potječe od grčkog filozofa Aristotela (384.–322. pr. Kr.). Herodot, grčki povjesničar, koji je živio oko šezdesetak godina nakon Talesa, je također pisao o njemu, kao i Eudemus.

Poznata je priča o tome kako je Tales, šetajući i gledajući u zvijezde, pao u bunar. Sluškinja koja se brinula o njemu je zapitala kako će znati što se događa na nebu, kad ne vidi što je ispred njega, dapače, pod samim nogama. Pričajući ovu anegdotu, u antici se time ilustrirala nepraktičnost učenjaka. Tales je točno predvidio pomrčinu Sunca 28. svibnja 585. godine pr. Kr. Babilonci su kao rezultat stoljetnih promatranja otkrili period od 223 Mjesečeve mijene nakon kojih se pomrčina ponovi. Tales je to čuo direktno on njih ili od Egipćana kao posrednika i tako predvidio pomrčinu, iako nije vjerojatno da je znao uzrok pomrčine.

Tales je vjerovao da Zemlja pluta na vodi i da je voda izvor svega. Prema Aristotelu, iskoristio je svoje vještine u astronomiji te predvidio obilni urod maslina sljedeće sezone. Pokupovao je sve preše maslina te se obogatio njihovim iznajmljivanjem. Nijedno Talesovo djelo nije opstalo pa se ne zna je li uopće išta pisao, a ako i jest, ta su djela nestala prije Aristotela.

1.2 Talesov doprinos matematici

Talesu se pripisuje sljedećih pet teorema:

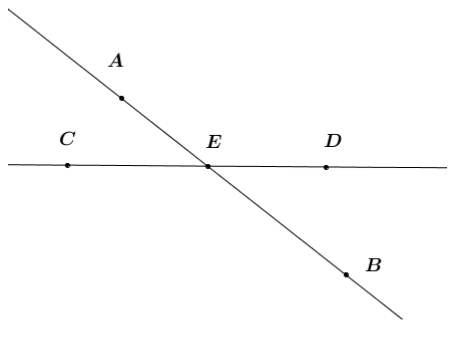
1. Svaki promjer raspolavlja krug.
2. Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.
3. Vršni kutovi su jednaki. (Slika 1.1)
4. K-S-K teorem o sukladnosti trokuta (dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i imaju jednake kutove uz tu stranicu).
5. **Talesov teorem**: Svaki je kut nad promjerom kruga pravi.

Tales se smatra ocem geometrije, iako se ne zna sa sigurnošću koje teoreme je stvarno dokazao. Proklos, koji je živio u 5. stoljeću naše ere i koji je napisao komentare Euklidovih *Elemenata*, prva četiri teorema pripisuje Talesu, dok mu se peti pripisuje na temelju odjeljka u knjizi Diogenesa Laertiusa, grčkog povjesničara koji je pisao biografije grčkih filozofa.

Prvi teorem se nalazi u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao definicija pod rednim brojem 17. Vjeruje se kako je Tales taj teorem samo demonstrirao crtežom do kojeg je vjerojatno došao promatrajući crteže na spomenicima u Egiptu gdje je krug promjerima bio podijeljen na dva, četiri ili šest dijela jednakih površina.

Drugi teorem nalazi se u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 5. U opisu drugog teorema Proklos koristi riječ značenja više „sličan” nego „jednak”, a pretpostavlja se da Tales i nije imao načine za mjerenje kutova.

Također, u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* nalazi se i treći teorem kao propozicija pod rednim brojem 15. Pretpostavlja se da ga je Tales dokazao na ovaj način: označimo

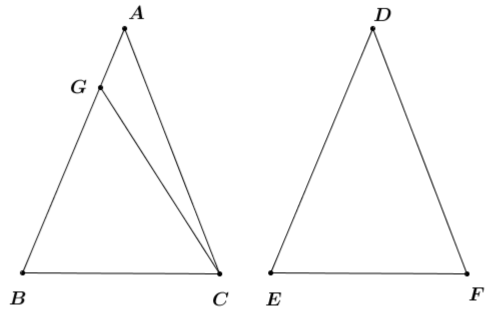


Slika 1.1: Vršni kutovi

sjecište pravaca AB i CD s E. Tvrdimo da je $\angle CEA$ jednak kutu $\angle DEB$ i da je $\angle BEC$ jednak kutu $\angle AED$. Promotrimo kutove $\angle CEA$ i $\angle AED$. To su susjedni kutovi, a samim time i suplementarni, što znači da je zbroj veličina tih kutova jednak 180^o. Isti zaključak vrijedi i za kutove $\angle AED$ i $\angle DEB$. Iz toga proizlazi da su tada kutovi $\angle CEA$ i $\angle DEB$ jednaki. Na analogan način se dokazuje da su i kutovi $\angle BEC$ i $\angle AED$ jednaki.

Četvrti teorem također se nalazi u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 26.

Dokaz K-S-K teorema o sukladnosti trokuta (prema Euklidovim Elementima*):*
Neka su ABC i DEF trokuti takvi da vrijedi $|\angle ABC| = |\angle DEF|$, $|\angle BCA| = |\angle EFD|$ i $|BC|$=$|EF|$ (Slika 1.2). Tvrdimo da se tada ti trokuti podudaraju i u preostale dvije stranice i kutu, to jest da je $|AB|$=$|DE|$, $|AC|$=$|DF|$ i $|\angle BAC| = |\angle EDF|$.



Slika 1.2: Sukladnost trokuta

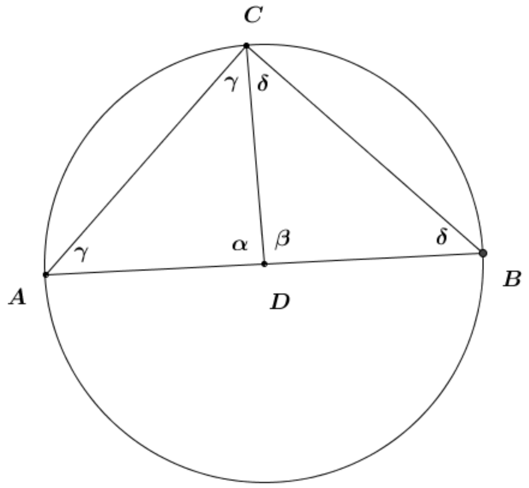
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $|AB| > |DE|$. Tada na stranici $\overline{AB}$ postoji točka G takva da je $|BG|$=$|ED|$. Kako je $|BG|$=$|DE|$, $|BC|$=$|EF|$ i $|\angle GBC| = |\angle DEF|$, slijedi da je tada i $|GC|$=$|DF|$ pa zaključujemo da su trokuti ABC i DEF sukladni. Tada se i preostali kutovi podudaraju, to jest $|\angle GCB| = |\angle DFE|$. Međutim, po pretpostavci je $|\angle ACB| = |\angle DFE|$ te slijedi da je $|\angle GCB| = |\angle ACB|$, što je nemoguće. Tada mora vrijediti da je $|AB|$=$|DE|$ te iz toga onda slijedi da se trokuti podudaraju i u trećoj stranici i trećem kutu, to jest $|AC|$=$|DF|$ i $|\angle BAC| = |\angle EDF|$. ■

Peti teorem se nalazi u trećoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 31. Euklid je dokazao ovaj teorem koristeći poznavanje činjenice da je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta. Nije sigurno da li je Talesu bila poznata ta činjenica o zbroju kutova u trokutu ili nije. Ako jest, dokaz bi išao na ovaj način: Neka je $\overline{AB}$ promjer kruga, D njegovo središte i C proizvoljna točka na rubu krugu. Kutove označimo kao i na slici 1.3. Tada sa slike vidimo da je

$$\alpha + \beta = 2\gamma + \alpha = 2\delta + \beta = \pi$$

pa iz toga slijedi da je

$$\gamma + \delta = \frac{1}{2}(2\gamma + 2\delta + \alpha + \beta - \alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\pi + \pi - \pi) = \frac{\pi}{2}.$$



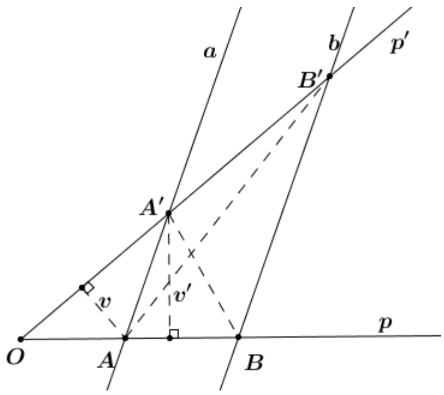
Slika 1.3: Dokaz Talesovog teorema

Talesovo dostignuće je također i njegovo navodno indirektno mjerenje visine Keopsove piramide pomoću njene sjene. Postoje dvije verzije ove priče. Starija potječe od Jeronima, grčkog filozofa koji je živio u 3. stoljeću prije Krista, prema kome je Tales promatrao duljinu sjene piramide u trenutku kad je sjena čovjeka jednaka njegovoj visini. Zaključio je da će duljina sjene piramide biti jednaka visini piramide kada duljina čovjekove sjene bude jednaka njegovoj visini. Prema drugoj verziji, koja potječe od Plutarha, grčkog povjesničara, Tales je zabio štap na kraj sjene piramide i uočavajući dva slična trokuta, došao do zaključka kako se visina piramide naprama duljini štapa odnosi isto kao i duljina sjene piramide naprama duljini sjene štapa. Zapišimo to matematički: označimo s h visinu piramide, s h' duljinu štapa, sa s duljinu sjene piramide i sa s' duljinu sjene štapa. Tada vrijedi: $\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$.

Međutim, najveći problem predstavlja mjerenje duljine sjene piramide jer bi se jedan njezin dio trebao mjeriti na površini piramide što je nemoguće. Tales je riješio problem tako što je uočio da će dio sjene koji je na pobočki piramide biti jednak polovici brida baze upravo kada je sjena piramide paralelna s bazom. Pretpostavlja se da je upravo iz ovog događaja nastao jedan od važnih teorema u geometriji. Iskaz i dokaz ovog teorema je naveden, odnosno dokazan na način na koji se interpretira u današnjoj literaturi.

Teorem 1 (Talesov teorem o proporcionalnosti)**.** *Paralelni pravci a i b na krakovima kuta $\angle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine, to jest (uz oznake na slici 1.4) vrijedi*

1. $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|OA'|}{|OB'|}$,
2. $\dfrac{|OA|}{|AB|} = \dfrac{|OA'|}{|A'B'|}$,
3. $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|AA'|}{|BB'|}$.



Slika 1.4: Talesov teorem o proporcionalnosti

Dokaz:

1. Promatranjem površina određenih trokuta sa slike 1.4 dokazat ćemo da vrijedi prva tvrdnja. Uočimo da vrijedi:

$$P(OAB') = P(OAA') + P(AA'B'), P(OA'B) = P(OAA') + P(AA'B).$$

Pravci a i b su paralelni te je stoga duljina visine na stranicu $\overline{AA'}$ u trokutu $AA'B$ jednaka je duljini visine na tu istu stranicu u trokutu $AA'B'$. Iz toga slijedi da je $P(AA'B) = P(AA'B')$. Tada je $P(OAB') = P(OA'B)$ te vrijedi i

$$\frac{P(OAA')}{P(OA'B)} = \frac{P(OAA')}{P(OAB')}.$$

Kako je površina trokuta OAA' jednaka $\frac{|OA| \cdot v'}{2}$, a površina trokuta $OA'B$ $\frac{|OB| \cdot v'}{2}$ slijedi da je lijeva strana gornje jednakosti jednaka $\frac{|OA|}{|OB|}$. Također, površina trokuta OAA' jednaka je $\frac{|OA'| \cdot v}{2}$, a površina trokuta OAB' $\frac{|OB'| \cdot v}{2}$ te iz ovog slijedi kako je desna strana gornje jednakosti jednaka $\frac{OA'}{OB'}$ čime je tvrdnja dokazana.

2. Uočimo da vrijedi, uz oznake kao na slici 1.4:

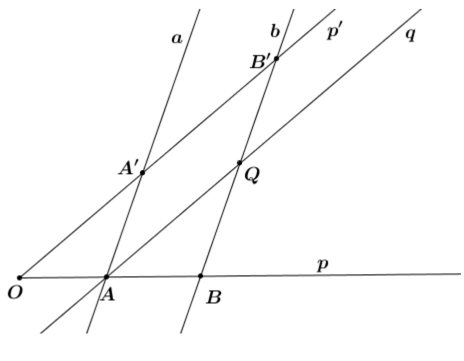
$$\frac{|A'B'|}{OA'} = \frac{|OB'| - |OA'|}{|OA'|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} - 1.$$

Koristeći prethodno dokazanu tvrdnju, slijedi:

$$\frac{|OB'|}{|OA'|} - 1 = \frac{|OB|}{|OA|} - 1 = \frac{|OB| - |OA|}{|OA|} = \frac{|AB|}{|OA|},$$

čime je tvrdnja dokazana.

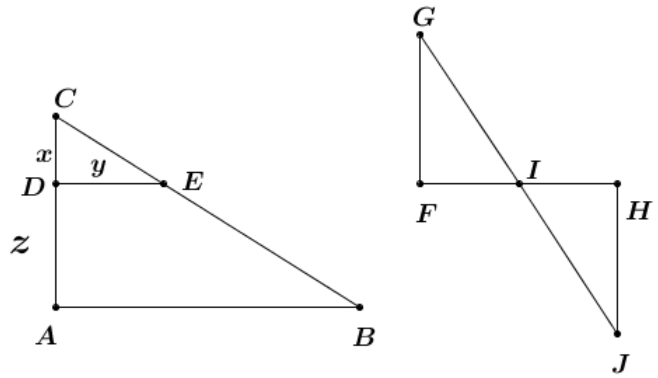
3. Promotrimo sliku 1.5. Neka je q pravac koji je paralelan s p' i koji prolazi točkom A. Označimo s Q sjecište pravaca b i q. Prema (i), paralelni pravci p' i q na krakovima $\angle OBB'$ odsijecaju proporcionalne dužine, stoga vrijedi: $\frac{|BA|}{|BO|} = \frac{|BQ|}{|BB'|}$. Iz $\frac{|OB| - |OA|}{|OB|} = \frac{|BB'| - |QB'|}{|BB'|}$ imamo $1 - \frac{|OA|}{|OB|} = 1 - \frac{|QB'|}{|BB'|}$, to jest $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|GB'|}{|BB'|}$. Kako je $QAA'B'$ paralelogram, slijedi da je $|B'Q| = |AA'|$. Uvrštavanjem u prethodnu jednakost slijedi tvrdnja. ■



Slika 1.5: Dokaz Talesovog teorema o proporcionalnosti

Osim navedenog, Talesu se pripisuje i primjena geometrije na određivanje udaljenosti broda od obale. Postoje dvije metode za koje se pretpostavlja da je pomoću njih Tales izmjerio udaljenost broda od obale.

Promotrimo skicu lijevo na slici 1.6. Tales je promatrao brod s vrha vidikovca. Označimo s A vidikovac, s B brod te s C Talesov položaj. Uočimo da se točka C nalazi vertikalno u odnosu na točku A pa je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu A. Također, dužina $\overline{AB}$ označava razinu mora. Sljedeći korak je odabir točke D, odnosno E tako da se nalazi na stranici $\overline{AC}$, odnosno $\overline{BC}$ i takve da je dužina $\overline{DE}$ paralelna s dužinom $\overline{BC}$. Uočimo da je i trokut CDE pravokutan s pravim kutom u vrhu D. Trokuti ABC i CDE su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. U ovoj situaciji duljine dužina $\overline{CA}$, $\overline{CD}$ i $\overline{CE}$ su poznate. Iz teorema o sličnosti trokuta ABC i CDE slijedi da je omjer duljina odgovarajućih stranica jednak, to jest: $|BA|:|AC|=|ED|:|DC|$. Označimo s $|CD|=x$, $|DE|=y$ i $|CA|=z$. Tada slijedi da je udaljenost broda od obale, to jest $|AB|$ jednaka $\frac{z \cdot y}{x}$. U ovoj metodi primijenjuju se sličnost trokuta i Talesov teorem o proporcionalnosti.



Slika 1.6: Dvije metode pomoću kojih je Tales izmjerio udaljenost broda od obale

Promotrimo skicu desno na slici 1.6. Pretpostavimo da želimo izmjeriti udaljenost od točke F do nepristupačne točke G. Prvo izmjerimo udaljenost od točke F do H na način da točku H odaberemo tako da je mjera kuta $\angle HFG$ jednaka 90°. Polovište dužine $\overline{FH}$ označimo s I. Sjecište pravca GI i okomice iz točke H na pravac FH označimo s J. Uočimo: trokuti FIG i HIJ su sukladni prema K-S-K teoremu o sukladnosti. Iz toga slijedi da je tada $|FG|=|HJ|$. Kako duljinu $\overline{HJ}$ možemo izmjeriti, slijedi da je tada poznata i duljina dužine $\overline{FG}$, to jest, udaljenost broda od obale. U ovoj metodi primijenjuje se sukladnost trokuta. Međutim, u stvarnosti bi opisanu metodu bilo teško provesti jer je potreban velik prostor. Upravo zbog toga se i javlja sumnja u stvarno Talesovo provođenje ove metode.

Poglavlje 2

Pitagora i pitagorejci

2.1 Pitagora sa Samosa

Prvim velikim matematičarem smatra se Pitagora. On se rodio na egejskom otoku Samosu i živio je otprilike 570.–500. pr. Kr. Za razliku od mnogih kasnijih grčkih matematičara, o njegovim otkrićima zapravo sa sigurnošću ne znamo ništa jer ni jedno njegovo djelo nije opstalo. Kao dijete, Pitagora je često putovao sa svojim ocem te se na tim putovanjima susretao s raznim misliocima i učiteljima iz tog vremena. U mladosti su na njega velik utjecaj imala trojica filozofa: Ferekid, kojeg smatraju njegovim učiteljem, Tales i Talesov učenik Anaksimandar. Pitagora je posjetio Talesa u vrijeme kad je on već ostario pa ga vjerojatno i nije mogao mnogo naučiti. Međutim, ostavio je snažan dojam na Pitagoru koji se zainteresirao za matematiku i astronomiju te ga je Tales savjetovao da otputuje u Egipat kako bi više saznao o tim temama. Također, zainteresirao se i za geometriju i kozmologiju, na što ga je potaknuo Anaksimandar. Oko 535. godine Pitagora odlazi u Egipat. Desetak godina kasnije Perzijanci osvajaju Egipat te je Pitagora odveden kao ratni zarobljenik u Babilon. Nakon pet godina zarobljeništva vraća se na Samos gdje osniva školu „Polukrug".

Međutim, stanovnici Samosa nisu baš bili zadovoljni njegovim poučavanjem te stoga Pitagora odlazi u Kroton koji se nalazi u južnoj Italiji gdje osniva filozofsko - vjersku školu. Ta škola je poznatija pod imenom **pitagorejska škola** te njezine sljedbenika nazivamo **pitagorejcima**. U ono vrijeme osnivanje škole nije bilo neobično u grčkom svijetu. Posebnost Pitagorine škole bila je u tome što su njezini ciljevi bili istodobno politički, filozofski i religiozni. Formirana od nekih 300 - tinjak aristotokrata, zajednica je imala karakter bratstva ili tajnog društva. Sastojala se od *unutrašnjeg* i *vanjskog kruga*. *Unutrašnji krug* su činili učitelji i matematičari i članovi tog kruga nazvali su se *mathematikoi*. Oni su živjeli u zajednici, nisu imali nikakvo osobno vlasništvo i bili su vegetarijanci. *Vanjski krug* činili su učenici koji su se nazvali *akousmatikoi*. Oni su živjeli u vlastitim kućama, a u zajednicu su dolazili samo preko dana. Mogli su zadržati svoju imovinu i nisu morali biti vegetarijanci. I muškarcima i ženama je bilo dozvoljeno da postanu članovi zajednice. Poput drugih mističnih kultova tog vremena, i pitagorejci su imali svoje čudne inicijacije, obrede i zabrane. Tako su, na primjer, odbili jesti grah, piti vino, podići ono što padne ili „miješati" vatru sa željezom. Također, pitagorejci su vjerovali u numerologiju, to jest, smatrali su da svaki broj ima svoju osobnost - muški ili ženski, savršen ili nepotpun, lijep ili ružan. Osim toga, smatrali su i da brojevi imaju magična svojstva. Tako je broj 1 predstavljao svemir i savršenstvo, dok su brojevi 4 i 9 oličenje pravednosti jer su kvadrati prirodnih brojeva. Pitagorejci su pojam *beskonačnosti* povezivali s božanstvima i nisu ga proučavali jer su smatrali kako to smiju činiti samo bogovi. Zbog filozofije da je sve broj, a pod brojem su pitagorejci mislili na prirodne brojeve, su smatrali da su svake dvije veličine sumjerljive, to jest, da za svake dvije postoji jedinica mjere tako da obje imaju cjelobrojne vrijednosti (ekvivalentno: omjer mjera bilo koje dvije istovrsne veličine je omjer dva cijela broja). Osim toga, zanimali su se i za osnove matematike: koncept broja, trokuta i ostalih matematičkih likova te apstraktnu ideja dokaza. Napravili su velik iskorak od toga da su 2 broda + 2 broda = 4 broda do apstraktnog shvaćanja jednakosti $2 + 2 = 4$.

Danas Pitagoru pamtimo po Pitagorinom teoremu koji je nazvan njemu u čast jer se pretpostavlja da ga je on (ili neki drugi pitagorejac) prvi dokazao.

Teorem 2 (Pitagorin teorem)**.** *Zbroj je kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak kvadratu nad hipotenuzom. Obratno, ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvjema njegovim stranicama jednak kvadratu nad trećom, onda je taj trokut pravokutan trokut.*

Ne možemo sa sigurnošću reći na koji način su pitagorejci dokazali ovaj teorem. Opisat ćemo tri načina dokazivanja: preko jednakosti površina, preko omjera, to jest sličnosti, i onako kako je Euklid dokazao u svojim *Elementima*.

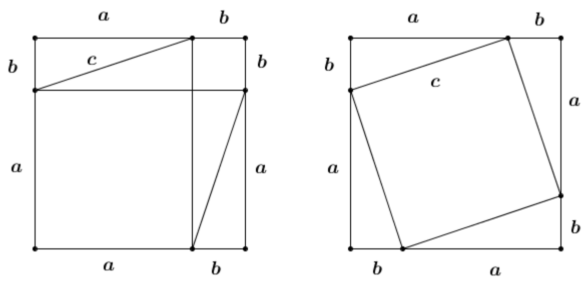
U dokazu preko površina promatramo kvadrat duljina stranica $a + b$. U prvom slučaju taj kvadrat podijelimo na dva manja kvadrata sa stranicama duljine a i b i dva sukladna pravokutnika sa stranicama duljina a i b. Svaki od tih dvaju pravokutnih trokuta dijagonalom duljine c podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta (Slika 2.1 lijevo). U drugom slučaju četiri trokuta unutar kvadrata duljina stranica $a+b$ mogu biti smještena kao na slici 2.1 desno.

Uočimo kako površinu kvadrata možemo zapisati na dva načina: kao zbroj površina dvaju kvadrata i dvaju pravokutnika

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

te kao zbroj površina kvadrata i četiriju trokuta

$$(a + b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)^2 .$$



Slika 2.1: Dokaz Pitagorinog teorema preko površina

Oduzimanjem četiri površine trokuta od većeg kvadrata u oba slučaja dobivamo jednake površine, to jest, $c^2 = a^2 + b^2$. Dokažimo i obrat. Pravokutni trokut s katetama a i b prema Pitagorinu poučku ima hipotenuzu duljine $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tada je proizvoljan trokut sa stranicama duljina a, b i $\sqrt{a^2 + b^2}$ sukladan početnom pravokutnom trokutu po S-S poučku o sukladnosti iz čega zaključujemo kako je i on pravokutan.

Dokaz preko omjera se može provesti na više načina. Neka je trokut ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu A. Konstruirajmo okomicu iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i nožište označimo s D (Slika 2.2). Uočimo kako su trokuti DAB i CAD slični međusobno, a ujedno i trokutu ABC. Koristeći 4. i 17. propoziciju iz 6. knjige Euklidovih *Elemenata* dobivamo sljedeće:

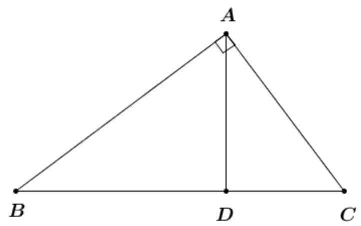
$$|BA|^2 = |BD| \cdot |BC|$$

$$|AC|^2 = |CD| \cdot |BC|.$$

Tada je

$$|BA|^2 + |AC|^2 = |BD| \cdot |BC| + |CD| \cdot |BC| = |BC|^2,$$

iz čega slijedi tvrdnja teorema.

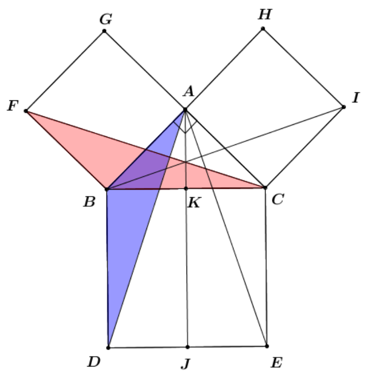


Slika 2.2: Dokaz Pitagorinog teorema preko omjera

Teorija omjera je bila primjenjiva jedino na sumjerljive veličine te je potrebno dokazati teorem tako da ne ovisi o korištenju omjera, što je i učinio Euklid. Geometrijske veličine su sumjerljive ako im je omjer duljina/površina/volumena prikaziv kao omjer prirodnih brojeva. Kako pitagorejci pod kvadratima nisu mislili na potencije brojeva, već na geometrijske likove te su jednakost shvaćali kao jednakost površina, izvorno shvaćanje teorema glasi ovako: U pravokutnom trokutu zbroj površina kvadrata nad katetama jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom.

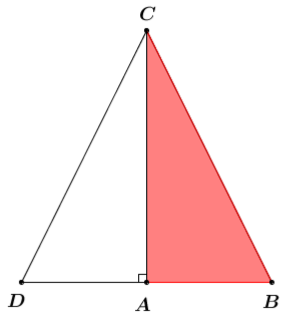
Dokaz Pitagorinog teorema:
Dokazujemo prvi smjer, to jest, da je zbroj kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak zbroju kvadrata nad hipotenuzom. Dokaz ovog teorema nalazi se u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 47.

Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom u vrhu A (Slika 2.3). Nad svakom stranicom trokuta konstruiramo kvadrat. Sjecište paralele iz A s pravcem BD i pravca DE označimo s J, a s pravcem BC označimo s K. Promotrimo trokute ABD i FBC. Uočimo: $|AB|=|FB|$, $|BD|=|BC|$ i $|\angle DBA| = |\angle FBC|$ (jednak je zbroju pravog kuta i $\angle ABC$). Iz toga slijedi da su ta dva trokuta sukladna pa se podudaraju i u trećoj stranici, to jest $|AD|=|FC|$. Uočimo kako paralelogram $BDJK$ ima dvostruku veću površinu nego trokut ABD. Oni imaju istu osnovicu ($\overline{BD}$) i istu visinu ($\overline{KB}$ je iste duljine kao i visina spuštena iz vrha A na BD). Također, kvadrat $BAGF$ ima dvostruku veću površinu nego trokut FBC. Oni imaju imaju istu osnovicu ($\overline{FB}$) i istu visinu ($\overline{AB}$ je iste duljine kao i visina spuštena iz vrha C na FB). Kako su trokuti ABD i FBC sukladni, slijedi da je površina paralelograma $BDJK$ jednaka površini kvadrata $BAGF$. Na analogan način dolaže se jednakost površina paralelograma $KJEC$ i kvadrata $ACIH$. Zbroj površina paralelograma jednak je kvadratu nad hipotenuzom, čime je tvrdnja dokazana.



Slika 2.3: Dokaz Pitagorinog teorema - prvi smjer

Dokazujemo drugi smjer, to jest, ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvjema njegovim stranicama jednak kvadratu nad trećom, onda je taj trokut pravokutan trokut. Dokaz ovog teorema nalazi se u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 48.



Slika 2.4: Dokaz Pitagorinog teorema - drugi smjer

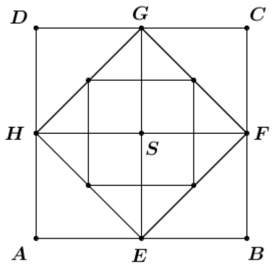
Neka je kvadrat nad stranicom BC trokuta ABC jednak zbroju kvadrata nad preostalim dvjema stranicama, to jest: $|BC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$ (Slika 2.4). Tvrdimo da je $\angle BAC$ pravi. Prvo konstruiramo točku D tako da je $\angle CAD$ pravi te da vrijedi $|DA| = |AB|$. Kako je $|DA| = |AB|$, slijedi da je kvadrat nad stranicom DA jednak kvadratu nad stranicom AB. Tada vrijedi: $|DA|^2 + |AC|^2 = |BA|^2 + |AC|^2$. Također, pošto je trokut CAD pravokutan, slijedi da je $|DC|^2 = |DA|^2 + |AC|^2$. Algebarskom manipulacijom ovim trima jednakostima dolazimo do zaključka kako je kvadrat nad stranicom DC sukladan kvadratu nad stranicom BC, iz čega slijedi da je $|DC| = |BC|$. Promotrimo trokute DAC i BAC. Kako im je AC zajednička stranica te vrijedi $|DA| = |AB|$ i $|DC| = |BC|$, zaključujemo kako su ta dva trokuta sukladna prema S - S poučku o sukladnosti. Kako je trokut DAC pravokutan, slijedi da je $\angle BAC$ pravi, čime je tvrdnja dokazana. ■

Otkriće postojanja iracionalnih nesumjerljivih veličina uznemirilo je pitagorejce jer je odmah bila bačena sjena sumnje na dokaze koji su se temeljili na teoriji omjera te je razumljiva njihova želja da se o ovom otkriću ne pročuje izvan njihove škole. Tako je navodno Hippasus iz Metaponta to otkrio široj javnosti te je ubrzo nakon toga prema jednom izvoru bio izopćen iz zajednice, a prema drugome je nestao nakon brodoloma. Pitagorejci su pokazali da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva stranici kvadrata, to jest, da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Teorem 3. *Stranica kvadrata nije sumjerljiva njegovoj dijagonali.*

Dokaz: Neka je dan kvadrat $ABCD$. Polovišta njegovih stranica označimo redom s E, F, G i H (Slika 2.5). Kako je $ABCD$ kvadrat, tada je i $EFGH$. Konstruirajmo dijagonale

EG i FH i njihovo sjecište označimo s S. Uočimo da je S ujedno i sjecište dijagonala kvadrata $ABCD$. Sada imamo jedan veliki kvadrat $ABCD$ čija je površina dvostruko veća od površine kvadrata $EFGH$ i četverostruko od površine kvadrata $AESH$.



Slika 2.5: Dokaz iracionalnosti $\sqrt{2}$

Pretpostavimo da su stranica i dijagonala kvadrata $EFGH$ sumjerljive. To znači da postoje prirodni brojevi m, n i duljina d takvi da je $|FH| = md$ i $|EH| = nd$. Kad bi oba broja, i m i n bili parni, mogli bismo uzeti $2d$ umjesto d pa možemo pretpostaviti kako je bar jedan od brojeva m i n neparan. Budući da je površina kvadrata $ABCD$ dvostruko veća od površine kvadrata $EFGH$, slijedi $m^2d^2 = 2n^2d^2$ te zaključujemo kako m mora biti paran. Stoga je $|SD| = kd$, za neki $k \in \mathbf{N}$. Budući da je površina kvadrata $EFGH$ dvostruko veća od površine kvadrata $AESH$, slijedi $n^2d^2 = 2k^2d^2$ te zaključujemo kako i n mora biti paran broj. Došli smo do zaključka da i m i n moraju biti parni brojevi što je u kontradikciji s pretpostavkom. ■

U sljedećim dvama poglavljima bit će više opisana pitagorejska dostignuća u aritmetici i geometriji. Osim tim područjima, pitagorejci su se bavili i astronomijom i glazbom. Tako su u astronomiji otkrili da je Zemlja, kao i ostala nebeska tijela, sfernog oblika i činjenicu da se Sunce, Mjesec i planeti gibaju u smjeru suprotnom od dnevne rotacije. Međutim, shvaćanje svemira je ipak bilo geocentrično. U glazbi je najvjerojatnije sam Pitagora uočio da vibrirajuće žice daju harmonične tonove ako su im omjeri duljina stranica određeni jednostavni razlomci.

Godina Pitagorine smrti se ne zna sa sigurnošću. Poznato je jedino da je oko 508. godine prije Krista pitagorejsku školu napao neki plemić te su zbog toga pitagorejci utočište pronašli u bijegu. Sam Pitagora je tada pobjegao u Metapont i mnogi se slažu da se tamo umro, ili čak počinio samoubojstvo iz očaja. Drugi pak misle da je Pitagora doživio 100 godina. Nakon Pitagorine smrti škola je još dugo djelovala, ali nakon nekog vremena sve se više počela baviti politikom, a manje znanošću te se zbog toga i rascjepkala. Nasilno je zatvorena 460. pr. Kr.

2.2 Pitagorejska aritmetika

Pitagorejce je, kao što smo rekli, zanimala ideja broja, pri čemu pod brojevima misle samo na prirodne brojeve. Njih su klasificirali na različite načine, te ćemo ovdje navesti neke od tih klasifikacija. Posebnu su pažnju pridavali *figurativnim brojevima.* Tako je jednom točkicom (ili kvadratićem, kamenčićem, ...) prikazan broj 1, a slaganjem točkica (ili kvadratića) u razne oblike dobivaju se i ostali prirodni brojevi. Neki od tih brojeva su trokutni, kvadratni, pentagonalni, heksagonalni, pravokutni i slično. Također, proučavali su i razna svojstva parnih i neparnih brojeva. U Filolajevom[1] fragmentu spominje se kako se brojevi sastoje od dva osnovna tipa: od parnih i neparnih, zajedno s trećim, parno - neparnim tipom koji je kombinacija prva dva. Nikomah od Gerasa (60.–120.) donosi sljedeću, pitagorejsku definiciju parnih i neparnih brojeva: „Paran broj je onaj koji dozvoljava podjelu samo jednom operacijom u najveće i najmanje dijelove, najveće po veličini i najmanje po broju (to jest, na dva jednaka dijela), dok je neparan onaj koji se ne može podijeliti, već je jedino podjeljiv na dva nejednaka dijela." Nikomah daje i drugu definiciju: „Paran broj je onaj koji se može podijeliti na dva jednaka, ali i na dva nejednaka dijela (osim fundamentalne *dijade* koja se može podijeliti samo u dva jednaka dijela), ali kako god da se podijeli, dijelovi moraju biti istog tipa (oba parna ili oba neparna), dok je neparan broj onaj čiji dijelovi su nejednaki i različitog tipa (jedan je paran, drugi je neparan)". Koliko daleko su pitagorejci proveli daljnu podjelu Filolajeva tri tipa brojeva, ne zna se sa sigurnošću.

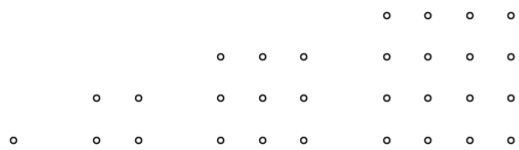
Prosti ili nekompozitni brojevi te složeni ili kompozitni brojevi, prvi put su razdijeljeni u fragmentu Speusipa (oko 408.–339. pr. Kr.), grčkog filozofa, koji se oslanja na rad Filolaja. Pitagorejac Timarid prost broj naziva *pravocrtnim* jer se može prikazati samo u jednoj dimenziji dok su alternativni termini bili *eutimetrički* i *linearni.* Kod Euklida je prost broj onaj „koji se može izmjeriti samo s jedinicom" a složeni onaj „koji je izmjeriv s nekoliko brojeva". I Euklid i Aristotel su zaključili kako je 2 prost broj, dok pitagorejci ne samo da su isključili 2 iz kategorije prostih brojeva, već dijadu nisu ni smatrali brojem - 2 je bio princip (ishodište) parnih brojeva kao što je jedinica bila princip (ishodište) brojeva.

Na slici 2.6 brojevi 1, 4, 9 i 16 prikazani su kao skupovi točaka u ravnini raspoređeni u jednak broj redaka i stupaca. Pitagorejci su te brojeve nazvali *kvadratnim brojevima* jer su oblika n^2 te su uočili da se mogu dobiti kao zbrojevi uzastopnih neparnih brojeva počevši od 1:

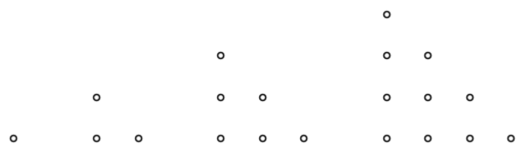
$$n^2 = 1 + 3 + ... + (2n - 1).$$

Na slici 2.7 brojevi 1, 3, 6 i 10 prikazani su kao točke u ravnini koje su raspoređene tako da čine trokut. Takve brojeve nazivamo *trokutnim brojevima* i oni se mogu zapisati u obliku $T_n = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Posebnu pažnu pitagorejci su pridavali broju 10 koji

[1]Filolaj iz Krotona (470.–390. pr. Kr.) - grčki filozof, astronom,fizičar i matematičar, pripadnik pitagorejske škole.



Slika 2.6: Kvadratni brojevi

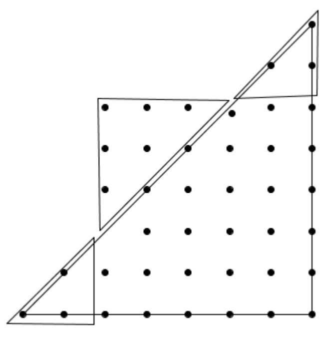


Slika 2.7: Trokutni brojevi

se može zapisati kao $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, a za njih su ta četiri pribrojnika predstavljala četiri elementa: vatru, vodu, zrak i zemlju. Zaključili su kako je zbroj dvaju uzastopnih trokutnih brojeva jednak zbroju uzastopnih neparnih brojeva, to jest:

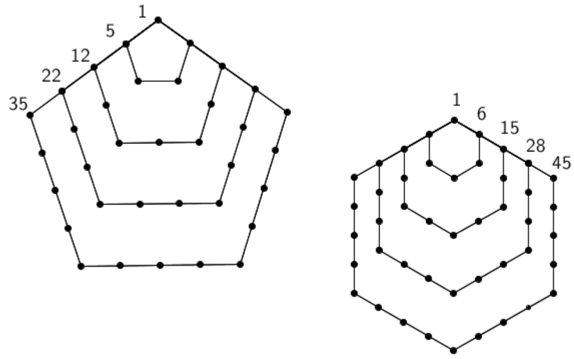
$$T_n + T_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2n + 1).$$

Također, da je broj 1 i kvadratni i trokutni te da ima više brojeva s tim svojstvom, na primjer broj 36. Na slici 2.8 je prikazano kako se kvadratni broj 36 može prikazati kao trokutni broj. Isto vrijedi i za brojeve 1225, 41616, 1413721 i tako dalje.



Slika 2.8: Broj 36:kvadratni i trokutni broj

Pentagonalni brojevi su brojevi koji se mogu zapisati u obliku $1+4+7+...+(3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$, *heksagonalni* u obliku $1+5+9+...+(4n-3) = 2n^2 - n$, a *pravokutni* kao $n(n+1) = 2+4+...+2n$, gdje se uočava da je pravokutni broj dvostruki trokutni.



Slika 2.9: Pentagonalni i heksagonalni brojevi

Savršeni brojevi su prirodni brojevi koji su jednaki zbroju svih svojih pravih djelitelja. Primjeri savršenih brojeva: 6, 28, 496 i 8128. Brojevi kao što su 220 i 284, kod kojih je zbroj svih pravih djelitelja jednog broja jednak drugome, nazivaju se *prijateljski brojevi*. Pravi djelitelji broja 220 su: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 22, 44, 55 i 110, a broja 284 su 1, 2, 4, 71 i 142. Tada

$$1+2+4+5+10+20+22+44+55+110 = 284$$

i

$$1+2+4+71+142 = 220.$$

Pretpostavlja se da su pitagorejci znali samo za taj par prijateljskih brojeva. Do danas nije poznato ima li ih konačno ili beskonačno mnogo.

U devetoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 36 nalazi se sljedeći rezultat za koji se pretpostavlja da je pitagorejski, a koji ćemo zapisati u algebarskoj notaciji.

Teorem 4. *Ako je $s = 1+2+2^2+...+2^{p-1}$ prost broj, onda je $n = 2^{p-1}s$ savršen.*

Kako se u ovom dokazu koristi formula za sumu geometrijskog niza, za koju se također pretpostavlja da je bila poznata pitagorejcima, najprije ćemo nju dokazati. Formula se nalazi u devetoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 35 i iskazat ćemo je i dokazati koristeći suvremenu notaciju.

Teorem 5. *Ako za niz brojeva* $a_1, a_2, a_3, ...a_n, a_{n+1}$ *vrijedi* $a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = ... = a_n : a_{n+1}$, *onda* $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + ... + a_n)$.

Dokaz: Kako vrijedi $a_{n+1} : a_n = a_n : a_{n-1}$, tada prema 11. propoziciji[2] u sedmoj knjizi Euklidovih *Elemenata* slijedi $(a_{n+1} - a_n) : (a_n - a_{n-1}) = a_n : a_{n-1}$, što možemo zapisati kao $(a_{n+a} - a_n) = (a_n - a_{n-1}) : a_{n-1}$. Primijenjujući ovaj zapis na sve članove niza dobivamo

$$(a_{n+1} - a_n) : a_n = (a_n - a_{n-1}) : a_{n-1} = ... = (a_2 - a_1) : a_1.$$

Prema 12. propoziciji sedme knjige Euklidovih *Elemenata*[3] slijedi

$$(a_{n+1} - a_n + a_n - a_{n+1} + ... + a_2 - a_1) : (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1) = (a_2 - a_1) : a_1.$$

Budući da je $a_{n+1} - a_n + a_n - a_{n-1} + ... + a_2 - a_1$ jednak $a_{n+1} - a_1$ dobivamo

$$(a_{n+1} - a_1) : (a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1) = (a_2 - a_1) : a_1,$$

čime je tvrdnja dokazana. ■

Sada možemo dokazati teorem 4.

Dokaz: Pretpostavimo da je $s = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{p-1}$ prost broj. Uočavamo djelitelje od n: $1, 2, 2^2, ..., 2^{p-1}$ i $s, 2s, 2^s, ..., 2^{p-2}s$ što slijedi iz osnovnog teorema aritmetike o jedinstvenoj faktorizaciji priprodnih brojeva na proste faktore, iako se u 14. propoziciji devete knjige Euklidovih *Elemenata* nalazi dokaz za specijalan slučaj za koji su pitagorejci najvjerojatnije znali. Prema prethodnom teoremu suma geometrijskog niza $s+2s+2^2s+...+2^{p-2}s$ je jednaka $2^{p-1}s - s$. Međutim, s smo zapisali kao sumu $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{p-1}$ iz čega slijedi

$$n = 2^{p-1}s = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{p-1} + s + 2s + 2^2s + ... + 2^{p-2}s.$$

Dakle, dobili smo da je n jednak sumi svih pravih djelitelja od n, to jest, da je savršen broj, čime je tvrdnja dokazana. ■

U 17. stoljeću brojeve oblika $2^p - 1$, gdje je p prost broj počinje proučavati francuski redovnik **Marin Mersenne** (1588.–1648.) te se njemu u čast oni nazivaju Mersenneovi brojevi. Stari Grci su poznavali četiri Mersenneova broja:

$$M_2 = 2^2 - 1 = 3,$$

$$M_3 = 2^3 - 1 = 7,$$

$$M_5 = 2^5 - 1 = 31,$$

---

[2] Ako za dane veličine vrijedi $a : c = e : f$, onda $(a - e) : (c - f) = a : c$.

[3] Ako za dane veličine vrijedi $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = ... = a_n : b_n$, tada je i $(a_1 + a_1 + ...a_n) : (b_1 + b_2 + ...b_n)$ u istom omjeru.

$$M_7 = 2^7 - 1 = 127,$$

dok je u srednjem vijeku otkriven još jedan $M_{13} = 2^{13} - 1 = 8191$. Mersanne je koristeći ih pronašao prvih osam savršenih brojeva (za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$). Do danas nije poznato postoji li beskonačno mnogo Mersanneovih brojeva, ali su i dalje izvor za nalaženje prostih brojeva.

Pitagorejci ne samo da su otkrili postojanje nesumjerljivih duljina u barem jednom slučaju (dijagonala i stranica kvadata), već su i otkrili postupak za dobivanje aproksimacija vrijednosti $\sqrt{2}$ pomoću traženja bilo kojeg broja cjelobrojnih rješenja jednadžbi $2x^2 - y^2 = \pm 1$. Filozof i matematičar, Teon iz Smirne (oko 130. godine) je osmislio postupak za postizanje sve točnije aproksimacije vrijednosti $\sqrt{2}$ racionalnim brojevima. Izračuni uključuju dvije sekvence brojeva, „bočni brojevi" i „dijagonalni brojevi". Započinjemo s dva broja gdje prvi označimo s a_1 i njega zovemo prvi bočni broj, dok drugi označimo s d_1 i njega zovemo prva dijagonala. Postupak se nastavlja tako da se sljedeći par brojeva: drugi bočni i druga dijagonala (a_2, d_2) formiraju iz prvih, treći bočni i treća dijagonala (a_3, d_3) iz drugih i tako dalje u skladu sa sljedećom shemom.

$$a_2 = a_1 + d_1, d_2 = 2a_1 + d_1,$$
$$a_3 = a_2 + d_2, d_3 = 2a_2 + d_2,$$
$$...$$
$$a_{n+1} = a_n + d_n, d_{n+1} = 2a_n + d_n.$$

Ako uzmemo $a_1 = d_1 = 1$ dobivamo

$$a_2 = 1 + 1 = 2, d_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$
$$a_3 = 2 + 3 = 5, d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$
$$a_4 = 5 + 7 = 12, d_4 = 2 \cdot 5 + 7 = 17,$$

i tako dalje.

U odnosu na ove brojeve, Teon iznosi opću tvrdnju da je $d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1$, te uočava da se predznak naizmjence mijenja ovisno o tome kako se d-ovi i a-ovi uzimaju. Tako je predznak od $d_1^2 - 2a_1^2$ jednak -1, od $d_2^2 - 2a_2^2$ jednak +1, od $d_3^2 - 2a_3^2$ jednak 1 i tako dalje, dok će suma kvadrata svih d-ova biti dvostruko veća od sume kvadrata svih a-ova. Ta tvrdnja zapravo ovisi o istinitosti sljedećeg identiteta:

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2.$$

Ako su x i y brojevi koji zadovoljavaju jednu od dvije jednadžbe $2x^2 - y^2 = \pm 1$, tada nam formula, ako je istinita, daje brojeve $x + y$ i $2x + y$ koji zadovoljavaju i drugu jednadžbu.

Međutim, ne samo da je identitet istinit, već nam Proklos u komentarima Euklidovih *Elemenata* objašnjava na koji način je Euklid to dokazao u drugoj knjizi svojih *Elemenata*. Zadana je dužina $\overline{AB}$. Polovište te dužine označimo s C i konstruiramo pravokutan trokut ACD s pravim kutom u vrhu C. Uočimo da vrijedi $|AD|^2 + |DB|^2 = 2|AC|^2 + 2|CD|^2$. Ako označimo $\overline{AC} = \overline{CB} = x$ i $\overline{BD} = y$ dobivamo

$$(2x + y)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(x + y)^2,$$

odnosno

$$(2x + y)^2 - 2(x + y)^2 = 2x^2 - y^2,$$

što je i tražena formula.

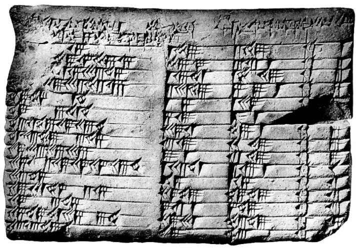
Algebarski se opća zakonitost dokazuje na sljedeći način:

$$d_n^2 - 2a_n = (2a_{n-1} + d_{n-1})^2 - 2(a_{n-1} + d_{n-1})^2$$

$$d_n^2 - 2a_n = 2a_{n-1}^2 - d_{n-1}^2$$
$$d_n^2 - 2a_n = -(d_{n-1}^2 - 2a_{n-1}^2)$$
$$d_n^2 - 2a_n = +(d_{n-2}^2 - 2a_{n-2}^2)$$

i tako dalje. Kako se dokaz zakonitosti nalazi u drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata* pretpostavlja se da je ovaj teorem pitagorejski.

Priča o Pitagorinom teoremu, kojeg su otkrili ili sam Pitagora ili jedan od njegovih sljedbenika, počinje puno ranije, nekih 1500 godina prije Krista u Babilonu. Dokaz tome je glinena pločica *Plimpton 322* (Slika 2.10) na kojoj se nalazi velik broj uređenih parova (a, c) za koje postoji cijeli broj b takav da je $a^2 + b^2 = c^2$.



Slika 2.10: Plimpton 322 (izvornik: http://www.math.ubc.ca/ cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html)

Povjesničari Otto Neugebauer i Abraham Sachs su 1945. godine su otkrili kako retci na pločici zadovljavaju svojstvo vezano uz Pitagorine trojke, to jest, uređene trojke prirodnih brojeva takva da je zbroj kvadrata prvih dvaju od njih jednak kvadratu trećeg. Brojevi u srednja dva stupca predstavljaju duljine kraće stranice b i hipotenuze c pravokutnog trokuta (gdje je $b < a$). U gornjem retku pločice iznad drugog stupca piše „širina", a iznad trećeg „dijagonala". U tadašnje vrijeme su hipotenuzu pravokutnog trokuta nazivali dijagonalom a kraću stranicu širinom. Prvi stupac slijeva sadrži kvocijent $\left(\frac{c}{a}\right)^2$ ili $\left(\frac{b}{a}\right)^2$, a posljednji numeraciju redaka o 1 do 15.

Primitivnom pitagorejskom trojkom zovemo pitagorejsku trojku čiji su svi članovi relativno prosti[4]. Samom Pitagori se pripisuje djelomično rješenje problema nalaženje pitagorejskih trojki: Ako su

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1,$$

gdje je $n \geq 1$ proizvoljan cijeli broj, onda je (x, y, z) pitagorejska trojka. Pretpostavlja se da je Pitagora do ovog rezultata došao tako da je iskoristio činjenicu koja je bila poznata pitagorejcima, a to je da su neparni brojevi razlike dvaju uzastopnih kvadratnih brojeva što možemo zapisati kao

$$(2k - 1) + (k - 1)^2 = k^2.$$

Nadalje, pretpostavimo da je $2k-1$ potpun kvadrat i označimo $2k-1 = m^2$. Tada dobivamo da je $k = \frac{m^2+1}{2}$ i $k - 1 = \frac{m^2-1}{2}$. Uvršavanjem u gornju jednadžbu dobivamo

$$m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2.$$

Uočimo da

$$x = m, y = \frac{m^2-1}{2}, z = \frac{m^2+1}{2}$$

zadovoljavaju početnu jednadžbu za bilo koji neparni $m > 1$. Pitagora je došao do zaključka da ako je $m = 2n + 1, n \geq 1$, tada dobivamo da je

$$x = 2n + 1, y = 2n^2 + 2n, z = 2n^2 + 2n + 1.$$

Uočimo da je u ovom zapisu broj z, odnosno duljina hipotenuze uvijek za 1 veća veća od duljine veće katete.

Osim Pitagore, drugo djelomično rješenje problema pitagorejskih trojki pripisuje se grčkom filozofu Platonu,

$$x = 2n, y = n^2 - 1, z = n^2 + 1.$$

[4]Dva ili više prirodnih brojeva relativno su prosti ako je njihov najveći zajednički djelitelj 1.

Primijenjujući i ovdje svojstvo da je neparan broj razlika dva uzastopna kvadratna broja slijedi

$$(k+1)^2 = k^2 + (2k+1) = [(k-1)^2 + (2k-1)] + 2k + 1 = (k-1)^2 + 4k.$$

Za $k = n^2$ dobivamo

$$(2n)^2 + (n^2-1)^2 = (n^2+1)^2.$$

Uočimo da se u ovom zapisu hipotenuza i kateta razlikuju za dva.

Ni jedno od navedenih pravila ne vrijedi za sve pitagorejske trojke. Euklid je u desetoj knjizi svojih *Elemenata* dao potpuno rješenje ovog problema.

Teorem 6 (Teorem o pitagorejskim trojkama)**.** *Za svaku primitivnu pitagorejsku trojku* (a, b, c) *postoje relativno prosti prirodni brojevi* m *i* n *različite parnosti takvi da je* $m > n$ *i* $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$. *Vrijedi i obratno, svaka trojka tog oblika je primitivna pitagorejska trojka.*

Dokaz: Neka je (a, b, c) pitagorejska trojka. Uočimo kako sva tri broja a, b i c ne mogu istovremeno biti neparni jer kvadrati neparnih brojeva pri dijeljenju s 4 daju ostatak 1 te bi tada lijeva strana jednakosti $a^2 + b^2 = c^2$ pri dijeljenju s 4 dala ostatak 2, a desna 1. Isto tako, nemoguće je i da je samo jedan od tih brojeva neparan. Ako bi to bio a ili b, tada bi lijeva strana pri dijeljenju s 4 dala ostatak 1, a desna 0. Također, nemoguće je i da su i a i b neparni, a c paran broj, jer bi lijeva strana jednakosti pri dijeljenju s 4 dala ostatak 2, a desna 0. Iz ovoga zaključujemo kako su u pitagorejskoj trojci (a, b, c) ili sva tri broja parna ili je točno jedan od brojeva a i b paran, a drugi broj i c neparni. Stoga je u primitivnoj pitagorejskoj trojci jedan od brojeva a i b paran, a ostala dva broja su neparna.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je a paran. Tada je $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}$. Brojevi $\frac{a}{2}, \frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ su prirodni, a $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ relativno prosti (jer bi inače neki broj veći od 1 dijelio njihov zbroj c i njihovu razliku b pa b i c ne bi bili relativno prosti). Umnožak dvaju relativno prostih brojeva $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ je kvadrat prirodnog broja $\frac{a}{2}$. Uočimo da je to moguće samo ako su $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ kvadratni, to jest oblika

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \frac{c-b}{2} = n^2, mn = \frac{a}{2},$$

($m > n$, m i n relativno prosti). Također, m i n ne mogu oba biti neparni jer bi inače $m^2 - n^2 = b$ bio paran, stoga zaključujemo kako je $m - n$ neparan. Iz sustava $\frac{c+b}{2} = m^2, \frac{c-b}{2} = n^2, mn = \frac{a}{2}$ dobivamo da je $a = 2mn, b = m^2 - n^2$ i $c = m^2 + n^2$, čime je tvrdnja teorema dokazana. ∎

2.3 Pitagorejska geometrija

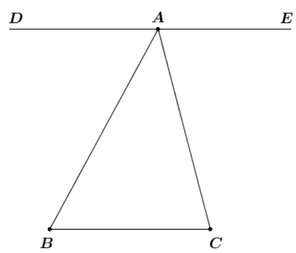
U starogrčkoj matematici se pod brojem mislilo samo na prirodan broj, iako su starogrčki geometrijski postupci ekvivalentni računanju s razlomcima i s približnim vrijednostima korijena. Kako Grci nisu poznavali algebru u današnjem smislu te riječi, kao zamjenu za algebarske operacije koristili su geometriju. To je rezultiralo time da velik dio grčke geometrije nazivamo „geometrijskom algebrom."

Nastavljamo s iznošenjem činjenica i teorema geometrije koji se pripisuju pitagorejcima.

Teorem 7. *Zbroj kutova u bilo kojem trokutu iznosi dva prava kuta.*

Teorem je najprije bio postavljen i dokazan u specijalnom slučaju, pravokutnom trokutu, a generalizacija je uslijedila tako što se proizvoljni trokut okomicom iz prozvoljnog vrha na nasuprotnu stranicu podijelio na dva pravokutna trokuta. Eudemus pitagorejcima pripisuje teorem i daje dokaz.

Dokaz: Neka je dan trokut ABC (Slika 2.11). Konstruirajmo točkom A paralelu DAE sa stranicom BC. Budući da su pravci BC i DE paralelni i AB je transverzala tih pravaca, prema svojstvu kutova uz transverzalu para paralelnih pravaca slijedi da je $|\angle DAB| = |\angle ABC|$. Analogno zaključujemo da vrijedi $|\angle EAC| = |\angle ACB|$. Dakle, zbroj veličina kutova $\angle ABC$ i $\angle ACB$ je jednaka zbroju veličina kutova $\angle DAB$ i $\angle EAC$. Dodajmo svakom zbroju kut $\angle BAC$ pa dobivamo $|\angle ABC| + |\angle ACB| + |\angle BAC| = |\angle DAB| + |\angle EAC| + |\angle BAC|$, a kako desna strana iznosi dva prava kuta, tvrdnja je dokazana. ■



Slika 2.11: Zbroj je kutova u trokutu dva prava kuta.

Pitagorejcima su bila poznata i općenitija svojstva kutova bilo kojeg mnogokuta:

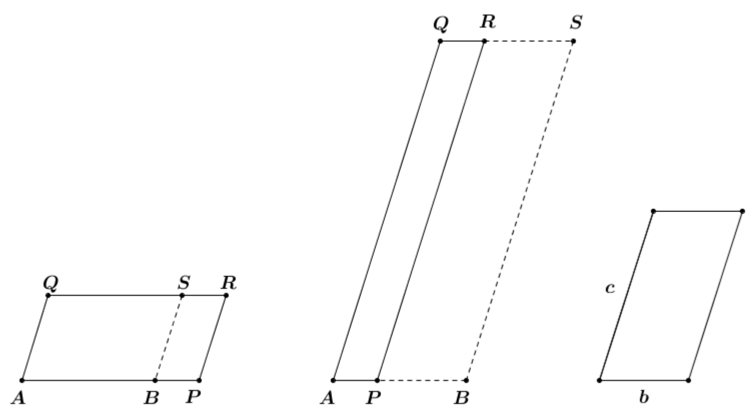
1. Zbroj unutarnjih kutova u n - terokutu iznosi $2n - 4$ prava kuta.

2. Zbroj vanjskih kutova u n - terokutu iznosi četiri prava kuta.

Proklos, citirajući Eudemusa, je potvrdio da su upravo pitagorejci otkrili metodu „pridruživanja površina", njene „predbačaje" i „podbačaje". Ova metoda daje geometrijsko rješenje koje je ekvivalentno rješavanju algebarske jednadžbe stupnja ne većeg od 2.

Jednostavan primjer „pridruživanja" opisuje Euklid u prvoj knjizi svojih *Elemenata*: zadana je osnovica paralelograma i kut. Treba konstruirati paralelogram čija je površina jednaka površini zadanog trokuta ili nekog drugog mnogokuta. Ovo je ekvivalentno rješavanju jednadžbe $ax = bc$ po x, to jest, dijeljenju produkta bc s a.

Općeniti slučaj „prebačaja" odnosno „podbačaja" površina je prikazan na sljedećem primjeru. Potrebno je konstruirati paralelogram čija osnovica sadrži zadanu dužinu (ili je u njoj sadržana) te čija je površina jednaka površini zadanog paralelograma (ili nekog drugog mnogokuta), a ostatak paralelograma je sličan zadanom paralelogramu.



Slika 2.12: Geometrijska algebra

Zadana je dužina $\overline{AB}$. Na slici 2.12 lijevo konstruiran je paralelogram $APRQ$ nad dužinom $\overline{AB}$. U ovom primjeru dužina $\overline{AB}$ je sadržana u dužini $\overline{AP}$ i kažemo da paralelogram $APRQ$ „prebacuje" paralelogram $ABSQ$ za paralelogram $BPRS$.

Na slici 2.12 u sredini, dužina $\overline{AP}$ je sadržana u dužini $\overline{AB}$. U tom slučaju kažemo da paralelogram $APRQ$ „podbacuje" paralelogram $ABSQ$ za paralelogram $BPSR$.

Neka je C površina zadanog paralelograma čije duljine stranica označimo s b i c. Problem je u konstrukciji paralelograma $APRQ$ čija je površina jednaka zadanoj površini C i čiji je ostatak paralelogram $BPRS$ („prebačaj" ili „podbačaj") sličan zadanom paralelogramu. Odredimo najprije površinu ostatka, to jest, površinu paralelograma $BPRS$. Kako je taj paralelogram sličan zadanom paralelogramu duljina stranica b i c slijedi $\dfrac{|BP|}{|PR|} = \dfrac{b}{c}$. Označimo $|BP| = x$ i $|AB| = a$. Tada je $|AP| = a \pm x$ i $|PR| = \dfrac{c}{b}x$. Površinu traženog paralelograma možemo zapisati pomoću umnoška duljina stranica paralelograma i sinusa kuta između njih. Označimo $m = \sin(\angle APR)$ te je tada površina traženog paralelograma jednaka $m \cdot |AP| \cdot |PR|$, to jest,

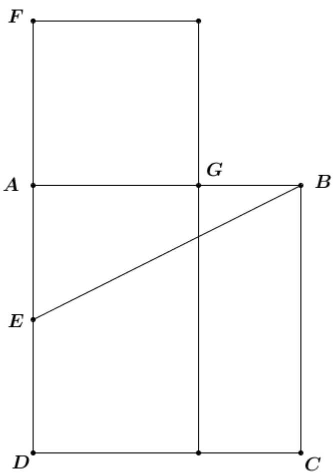
$$m \cdot (a \pm x) \cdot \frac{c}{b} x = C.$$

U slučaju kad imamo predznak minus, Euklid u prvoj knjizi svojih *Elemenata*, u propozicijama 27. - 29. dokazuje nužne uvjete za postojanje rješenja.

Međutim, u grčkoj su se geometriji najčešće razmatrali jednostavniji slučajevi u kojima je bilo potrebno konstruirati pravokutnik, dok je ostatak kvadrat. Tada je ekvivalentna jednadžba oblika $(a \pm x) \cdot x = b^2$.

Najprije, ukoliko je potrebno, mijenjamo predznak tako da je koeficijent koji stoji uz x^2 pozitivan. Zatim objema stranama jednakosti dodajemo $\frac{1}{4}a^2$ tako da na lijevoj strani dobijemo potpuni kvadrat, dok na desnoj strani imamo $\frac{1}{4}a^2 \pm b^2$. Tada izjednačujemo korijen izraza na lijevoj strani s korijenom izraza na desnoj strani. U 11. propoziciji u 2. knjizi Euklidovih *Elemenata* je opisan geometrijski postupak rješavanja ove jednadžbe na sljedeći način.

Zadana je dužina $\overline{AB}$ koju želimo točkom G podijeliti na dva dijela tako da vrijedi $|AB| \cdot |BG| = |AG|^2$ (Slika 2. 13). Ako označimo $|AB| = a$ i $|AG| = x$, ovo je ekvivalentno rješavanju jednadžbe $a \cdot (a - x) = x^2$, to jest, $x^2 + ax = a^2$. Nad dužinom $\overline{AB}$ konstruirajmo

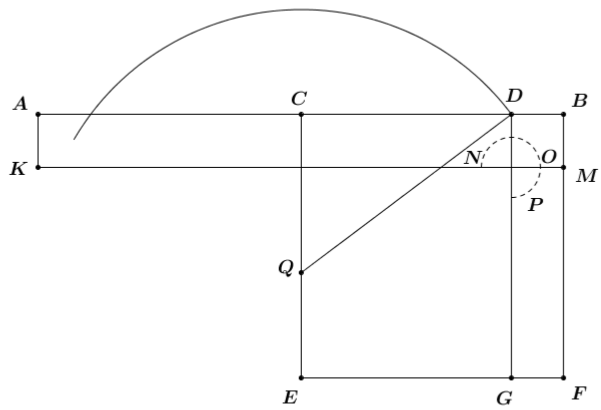


Slika 2.13: Geometrijska algebra

kvadrat $ABCD$ te polovište dužine $\overline{AD}$ označimo s E. Spojimo točku E s točkom B. Zatim na pravcu AD konstruiramo točku F tako da vrijedi $|EF| = |EB|$, dobivajući na taj način da vrijedi $|AG| = |AF|$. Sada imamo $|EB|^2 = \frac{1}{4}a^2 + a^2 = \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2$. Kako je $|EF| = |EB|$, slijedi da je $|EF| = x + \frac{1}{2}a$ i $|AF| = x$, čime je problem riješen.

Rješenje jednadžbi oblika $(a \pm x) \cdot x = b^2$ opisana su u 5. i 6. propoziciji u drugoj knjizi Euklidovih *Elemenata*. Euklid koristi termin *gnomon* koji potječe od pitagorejaca, a koji predstavlja figuru koja je nastala uklanjanjem paralelograma iz većeg sličnog paralelograma. Prikazuje ga kružnim lukom.

Zadana je dužina $\overline{AB}$. Neka točka C dijeli tu dužinu na dva jednaka dijela, a točka D na dva nejednaka dijela (Slika 2.14). Konstruirajmo pravokutnik $ABMK$ i kvadrat $CBFE$. Označimo $|AB| = a$, $|BD| = x$ i gnomon NOP označimo kružnim lukom. Tada je $(a - x) \cdot x = P_{ADMK}$, to jest, $(a - x) \cdot x = P_{NOP}$, gdje je P_{NOP} površina gnomona. Ako je površina gnomona jednaka b^2 onda dobivamo jednadžbu $x^2 - ax = -b^2$. Dodavanjem objema stranama jednakosti $\frac{1}{4}a^2$ dobivamo na lijevoj strani potpun kvadrat. Izjednačavanjem korijena dobivamo rješenje. Uočimo da b^2 mora biti veći od $\frac{1}{4}a^2$ ukoliko želimo realna rješenja.

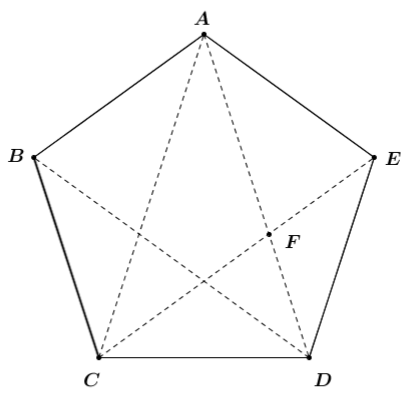


Slika 2.14: Geometrijska algebra

Dokaz geometrijskom algebrom: Neka se točka Q nalazi na stranici $\overline{CE}$ kvadrata $CBFE$ tako da $|CQ| = b$. Konstruirajmo kružnicu sa središtem u točki Q polumjera duljine $\frac{1}{2}a$. Ako je $\frac{1}{2}a > b$, onda kružnica siječe pravac CB u točki D. Primijenjujemo Pitagorin poučak te dobivamo $|CD|^2 = |QD|^2 - |QC|^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$. Kako je $b^2 = ax - x^2$ dobivamo da je $|CD|^2 = \left(\frac{1}{2}a - x\right)^2$. Kako nas zanimaju samo pozitivni brojevi slijedi da je $|CD| = \frac{1}{2}a - x$ te smo time odredili položaj točke D te onda znamo i duljinu $|DB|$ čime je problem riješen.

Proklos svjedoči o tome da je Pitagora otkrio „kozmičke likove”, to jest, pet pravilnih poliedara. Drugi pak izvori tvrde da je Hippasus upisao dodekaedar u sferu, ali su pitagorejci zasluge pripisali Pitagori za kaznu Hippasusu zbog otkrivanje tajne nesumjerljivosti. Kako je znak raspoznavanja pripadnika škole bio „trostruko isprepleteni trokut”, to jest zvjezdasti peterokut, ne čudi činjenica da su pitagorejci znali konstruirati pravilni peterokut. Konstrukciju pravilnog peterokuta opisanu u četvrtoj knjizi Euklidovih *Elemenata* moguće je izvesti ukoliko je poznata konstrukcija jednakokračnog trokuta (zadanog opsega i omjera duljine osnovice i kraka), a tu konstrukciju je moguće izvesti ukoliko je poznato rješenje podjele dužine točkom u određenom omjeru.

Dokaz: Pretpostavimo da je konstruiran pravilni peterokut $ABCDE$. Spojimo vrhove A i C, A i D te C i E kao na slici 2.15.



Slika 2.15: Konstrukcija peterokuta

Pitagorejci su znali teoreme o zbroju unutarnjih kutova bilo kojeg mnogokuta te su zaključili kako je svaki od kutova peterokuta jednak $\frac{6}{5}$ pravog kuta. Trokut ABC je jednakokračan pošto su $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ stranice početnog peterokuta pa iz toga slijedi da je $\angle BAC$ jednak kutu $\angle BCA$ i iznosi $\frac{2}{5}$ pravog kuta. To vrijedi i za kutove EAD i ECD iz istog razloga. Oduzimanjem kutova $\angle BAC$ i $\angle DAE$ od kuta $\angle BAE$ koji iznosi $\frac{6}{5}$ pravog kuta, dobivamo da kut $\angle CAD$ iznosi $\frac{2}{5}$ pravog kuta. Na analogan način zaključujemo da i kut

$\angle ACE$ iznosi $\frac{2}{5}$ pravog kuta. Dolazimo do zaključka kako je u jednakokračnom trokutu ACD svaki od kutova uz osnovicu jednak dvostrukom kutu nasuprot osnovice.

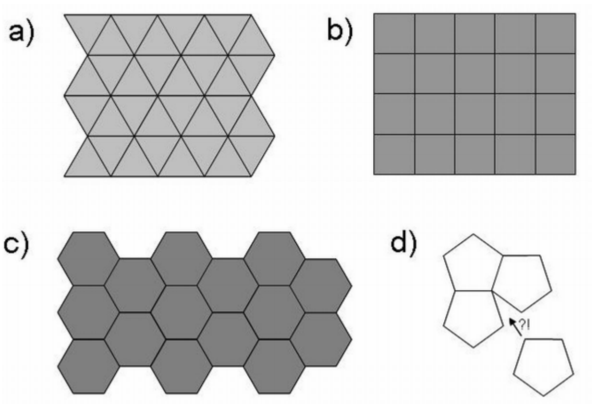
Označimo sjecište pravaca AD i CE s F. Uočimo da je trokut CFD jednakokračan jer je kut $\angle CFD$ (vanjski kut kuta $\angle CFA$ u trokutu CFA) jednak zbroju veličina kutova $\angle CAF$ i $\angle ACF$ (kutovi u trokutu CAF). Iz toga slijedi da kut $\angle CFD$ iznosi $\frac{4}{5}$ pravog kuta te je jednak kutu $\angle CDF$. Tada je $|CD| = |CF| = |AF|$.

Trokuti ACD i CDF su slični po K-K poučku o sličnosti te im je omjer duljina odgovarajućih stranica jednak, to jest,

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DF|} \text{ i } \frac{|AD|}{|AF|} = \frac{|AF|}{|FD|}.$$

Uočimo da je dužina $\overline{AD}$ točkom F podijeljena u određenom omjeru. Prema tome, za konstrukciju pravilnog peterokuta s dužinom $\overline{CD}$ kao bazom potrebno na zadanoj dužini samo $\overline{AD}$ odrediti točku F.

Kako smo već napomenuli, pitagorejci su poznavali svih pet Platonovih tijela čije je proučavanje u uskoj vezi s popločavanjem ravnine i popunjavanjem prostora pravilnim ili polupravilnim likovima, odnosno tijelima. Budući da je zbroj kutova u svakom n - terokutu jednak $2n - 4$ prava kuta, tada je svaki kut u tom n - terokutu jednak upravo $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ prava kuta.



Slika 2.16: Postoje samo tri pravilna popločavanja ravnine. (izvornik: http://prelog.chem.pmf.hr/ fmbruckler/PovMat/povmat2.pdf)

Pitagorejci su došli i do zaključka da ako se u nekoj točki ravnine sastaje m pravilnih

n-terokuta (to jest, njihovih vrhova), tada mora vrijediti

$$m\alpha = m \cdot \frac{2n-4}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Uvrštavanjem raznih kombinacija za m i n, koji moraju biti prirodni brojevi, dobivamo da su jedine mogućnosti za $n = 3$ i $m = 6$, za $n = 4$ i $m = 4$ i za $n = 6$ i $m = 3$. Postoje točno tri načina za popločavanje (prekrivanje bez rupa i poklapanje) ravnine sukladnim pravilnim mnogokutima: pravilnim trokutima, četverokutima i šesterokutima.

Poglavlje 3

Tri klasična problema

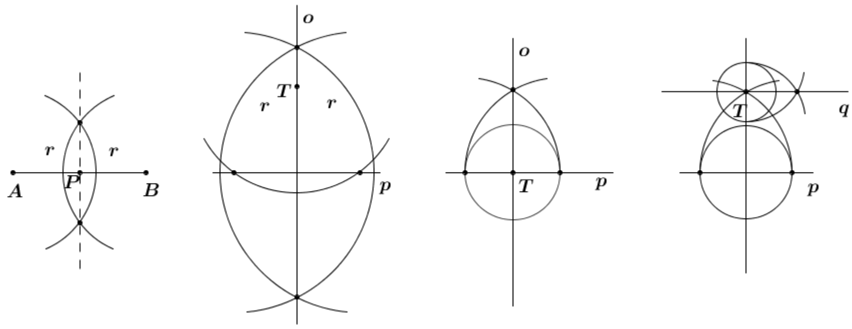
Naziv „euklidske konstrukcije' dolazi od Euklida, a podrazumijeva konstrukcije za koje su dozvoljeni samo jednobridno ravnalo, na kojem nije istaknuta nikakva jedinica mjere, i šestar, pri čemu se ravnalo koristilo isključivo za spajanje dviju točaka, a šestar za crtanje kružnica kojima su poznati središte i radijus. Ovaj zahtjev pripisuje se Platonovoj Akademiji koja je djelovala od 387. godine prije Krista do 529. godine naše ere. Smatra se da je točka konstruirana ako je dobivena kao sjecište dvaju pravaca, polupravaca ili kao sjecište dviju kružnica. Pravac je konstruiran ako znamo konstruirati bilo koje njegove dvije točke, dok je kružnica konstruirana ako znamo konstruirati njeno središte i bilo koju njenu točku. Euklid je u *Elementima* riješio više od stotinu geometrijskih konstrukcija. Međutim, mnogo više ih je zadano i za rješavanje mnogih nisu dovoljni ravnalo i šestar. Tri takva problema danas su poznata kao *tri klasična probema starogrčke matematike*:

1. kvadratura kruga, to jest konstrukcija kvadrata čija je površina jednaka površini zadanog kruga;
2. trisekcija kuta, to jest podjela kuta na tri sukladna dijela;
3. duplikacija kocke, to jest konstrukcija kocke čiji je volumen dva puta veći od volumena zadane kocke.

Kako smo naveli, upravo se u predeuklidskom razdoblju grčke matematike pojavio zahtjev egzaktnog rješavanja tih i drugih geometrijskih problema ravnalom i šestarom. Danas znamo da uz te uvjete tri klasična problema nisu rješiva. S druge strane, starogrčki su pokušaji rješenja ovih problema ravnalom i šestarom doveli do zanimljivih novih matematičkih otkrića. Navedimo nekoliko osnovnih konstrukcija pomoću ravnala i šestara prikazanih na slici 3.1:

1. konstrukcija polovišta P dužine $\overline{AB}$ koja je zadana svojim krajnjim točkama A i B;

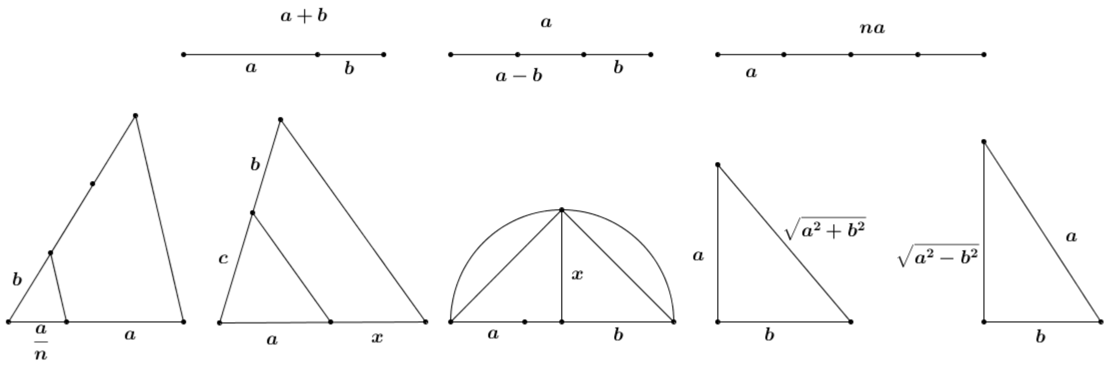
2. konstrukcija okomice o danom točkom T na dani pravac p (T je izvan pravca p);
3. konstrukcija okomice o danom točkom T na dani pravac p (T je na pravcu p);
4. konstrukcija pravca q danom točkom T, paralelnog danom pravcu p (T je izvan p).



Slika 3.1: Osnovne konstrukcije pomoću ravnala i šestara

Osim navedenog, ravnalom i šestarom možemo kut podijeliti na dva jednaka dijela, prenositi duljine danih dužina pa tako i veličine danih kutova. Međutim, pomoću ravnala i šestara ne možemo provjeriti je li neka točka na pravcu ili ne, niti koristiti ravnalo da provjerimo jesu li dvije dužine jednake duljine. Ravnalom i šestarom provedive su i četiri osnovne računske operacije te vađenje drugih korijena, kako je prikazano na slici 3.2:

1. $x = a + b$ (zbrajanje duljina);
2. $x = a - b$ (oduzimanje duljina);
3. $x = na, n \in \mathbb{N}$;
4. $n = \dfrac{a}{n}, n \in \mathbb{N}$;
5. $n = \dfrac{n}{m}a, n, m \in \mathbb{N}$;
6. $x = \dfrac{ab}{c}$ (konstrukcija četvrte proporcionale);
7. $x = \sqrt{ab}$ (geometrijska sredina);
8. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
9. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.



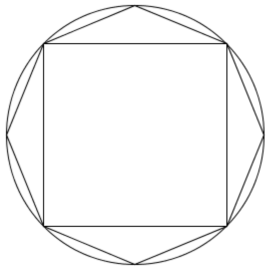
Slika 3.2: Operacije provedive ravnalom i šestarom

3.1 Problem kvadrature kruga

Problem kvadrature kruga predstavlja problem konstrukcije kvadrata čija je površina jednaka površini danog kruga. Ako označimo polumjer zadanog kruga s r i stranicu traženog kvadrata s x, tada je $r^2\pi = x^2$. Odatle slijedi da trebamo konstruirati duljinu $x = r\sqrt{\pi}$. Kako se umnožak i kvadratni korijen mogu konstruirati, ovaj problem svodi se na konstrukciju dužine duljine π ako je zadana jedinična duljina. Ovaj problem je, među spomenutim trima problemima, najdulje zanimao, kako profesionalne, tako i matematičare amatere. Već su Egipćani, oko 1800. godine prije Krista, došli do zaključka da je površina kruga jednaka površini kvadrata stranice za devetinu kraće od promjera kruga, to jest, koristili su procjenu $P = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$, gdje je d promjer kruga. Zapravo su time broj π aproksimirali kao $\pi \approx 3{,}16$. Stari Babilonci su pretpostavljali da je opseg kruga jednak šesterostrukom polumjeru, to jest da je $o = 6 \cdot r$. Kako je $o = 2r\pi$, onda bi to značilo da je $\pi = 3$, a ta se procjena može naći i u mnogim drugim starim kulturama.

Prvi starogrčki matematičar koji se bavio problemom kvadrature kruga je **Anaksagora iz Klazomene** (499.–428. pr. Kr.), koji se njime bavio tijekom boravka u zatvoru. Njegovo rješenje nije sačuvano, ali pretpostavlja se kako je tvrdio da među malim veličinama nema najmanje, premda njihovo smanjivanje teče neprekinuto.

Nakon njega, problemom se bavio i **Antifont** (480.–411. pr. Kr.), sofist i Sokratov suvremenik, koji je kao rješenje predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug. Najprije je krenuo od kvadrata kojeg je upisao u krug. Zatim je iznad svake stranice kvadrata konstruirao jednakokračne trokute i tako dobio upisani osmerokut (Slika 3.3). Taj postupak je nastavljao dalje, redom uz udvostručenje broja stanica te je, naravno pogrešno, zaključio, budući da se svaki mnogokut može pomoću ravnala i šestara pretvoriti u kvadrat

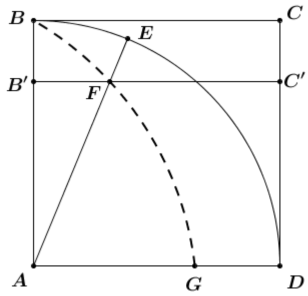


Slika 3.3: Antifontova metoda

iste površine, da se krug može pretvoriti u kvadrat.

Brison iz Herakleje, grčki matematičar i Sokratov učenik, je također pokušao riješiti problem kvadrature kruga. Koristio je Antifontovu ideju, ali osim konstrukcije upisanih pravilnih mnogokuta u krug, on je konstruirao i opisane pravilne mnogokute krugu te tvrdio da između njih postoji mnogokut iste površine kao dani.

Nakon njega, za problem kvadrature kruga zainteresirao se i **Hipija iz Elide** (oko 460.–400. pr. Kr.). Izvor podataka o Hipijinom životu su Platonovi dijalozi, gdje ga on opisuje kao arogantnog, hvalisavog i taštog čovjeka. Kao i njegov suvremenik Hipokrat, Hipija je bio jedan od prvih koji je poučavao poeziju, gramatiku, povijest, politiku, arheologiju, matematiku i astronomiju za novac. Najpoznatiji je po otkriću krivulje kvadratise, koju



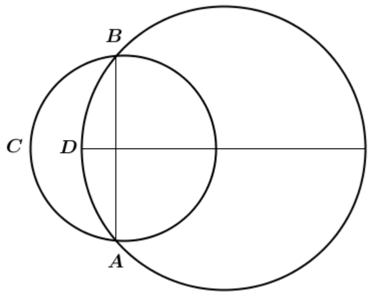
Slika 3.4: Hipijina kvadratisa

je otkrio oko 420. godine prije Krista. To je krivulja koju je nemoguće konstruirati samo ravnalom i šestarom. Kvadratisa je definirana kao geometrijsko mjesto točaka F koje su sjecišta stranice kvadrata BC, koja se jednolikom brzinom spušta na stranicu AD s drugom stranicom AB istog kvadrata, a koja jednoliko rotira do položaja AD i to tako da stranica BC padne na stranicu AD točno kada i AB (slika 3.2). Pomoću kvadratise se može grafičkim postupkom naći opseg kruga i površina kružnice. Jednadžba Hipijine kvadratise u Kartezijevom koordinatnom sustavu u ravnini glasi $y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2a}$.

Prema Papusu (4. st. n. e.), **Dinostrat**, (390.–320. pr. Kr.) je prvi opisao primjenu kvadratise kod rješavanja problema kvadrature kruga. Dinostratova se „konstrukcija" svodi na pokazivanje da je pravokutnik kojemu je jedna stranica duljine $|AB|$, a druga duljine $\frac{2|AB|^2}{|AG|}$ jednake površine kao krug polumjera $|AB|$. Uočimo da ako bi se mogla ravnalom i šestarom konstruirati točka G kvadratise (što nije moguće), obje duljine stranica pravokutnika bi bile konstruktibilne, a ravnalom i šestarom je moguće dani pravokutnik pretvoriti u kvadrat jednake površine.

Označimo li $r = |AB|$, vidimo da je druga stranica pravokutnika duljine $\frac{2r^2}{|AG|}$, dakle Dinostratova konstrukcija znači da je $r^2\pi = r \cdot \frac{2r^2}{|AG|}$, odnosno da je $|AG| = \frac{2}{\pi}$. To se lako dobije iz gore navedene jednadžbe kvadratise u Kartezijevom koordinatnom sustavu.

Problemom kvadrature kruga bavio se i **Hipokrat s Hiosa** (oko 470.–410. pr. Kr.), jedan od najvećih matematičara predeuklidskog doba. Malo se zna o njegovom životu, ali prema jednoj verziji priče, navodno da je Hipokrat bio trgovac kojeg su napali gusari te mu oduzeli svu imovinu. Iz tog razloga je otišao u Atenu gdje je prisustvovao predavanjima iz matematike te na kraju i sam predavao geometriju kako bi preživio. Najpoznatiji je po tome što je oko 420. godine prije Krista napisao knjigu iz geometrije, u kojoj je nalaze osnovni teoremi, koncepti i metode te što je prvi točno odredio površinu nekog lika obrubljenog krivuljama. Baveći se problemom kvadrature kruga, našao je i površine Hipokratovih mjeseca. Pod mjesecom podrazumijevamo geometrijski lik omeđen lukovima dviju kružnica različitih središta i radijusa, dok su Hipokratovi mjeseci oni mjeseci za koje se može konstruirati kvadrat jednake površine. Uočimo da je površina mjeseca jednaka razlici površina



Slika 3.5: Mjesec

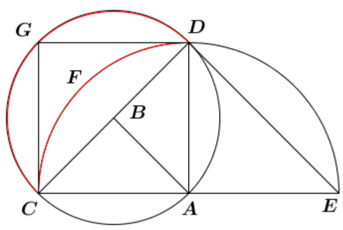
kružnih odsječaka, to jest

$$P_{☾} = P(ABC) - P(ABD).$$

Poznato je ukupno pet Hipokratovih mjeseca, a pretpostavlja se da su Hipokratu bila poznata tri od njih. U konstrukciji tih mjeseca Hipokrat koristi Pitagorin teorem, Talesov teorem te teorem da se površine krugova odnose kao kvadrati pripadnih polumjera. Ovaj posljedni teorem se nalazi u 12. knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 2, kojeg je Euklid dokazao koristeći Eudoksovu metodu ekshaustije. Međutim, Eudoks je rođen nekoliko godina nakon smrti Hipokrata pa se postavlja pitanje kako je uopće Hipokrat dokazao ovaj teorem. Eudoks je vjerovao da je Hipokrat ispravno dokazao teorem te možemo samo zaključiti kako je i sam Hipokrat razvio određenu varijantu metode ekshaustije ili pak niti nije dao potpun dokaz.

Prvi Hipokratov mjesec je mjesec omeđen polukružnicom nad hipotenuzom jednakokračnog trokuta te kružnicom kojoj je središte vrh pri pravom kutom i koja prolazi kroz druga dva vrha (Slika 3.6).

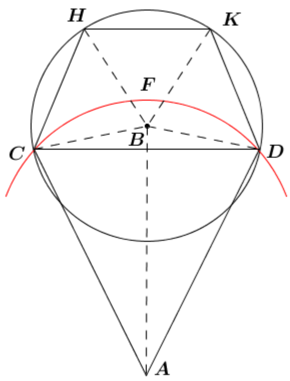
Prvo konstruiramo polukružnicu sa središtem u A duljine promjera $|CE|$. Sjecište polukružnice i okomice iz središta A na pravac CE označimo s D. Uočimo da je trokut CDE jednakokračan pravokutan i da je $P(\triangle CED) = 2 \cdot P(\triangle CAD)$. Iz toga onda slijedi da $\overline{CE} : \overline{CD} = \sqrt{2} : 1$. Zatim konstruiramo polukružnicu sa središtem u točki B koja je polovište $\overline{CD}$ i duljine promjera $|CD|$. Kako je $|CE| : |CD| = \sqrt{2} : 1$, zaključujemo da je površina kružnog osječka CGD dvostruko manja od površine kružnog odsječka CDE, što je jednako površini isječka koji je četvrtina kruga polumjera $|CA|$. Kako je kružni odsječak $CFDB$ zajednički četvrtini kruga polumjera $|CA|$ i polukružnici nad promjerom $|CE|$, slijedi da je površina mjeseca $CGDF$ jednaka površini jednakokračnog pravokutnog trokuta ACD.



Slika 3.6: Prvi Hipokratov mjesec

Drugi Hipokratov mjesec se temelji na konstrukciji jednakokračnog trapeza $CHKD$ za čije stranice vrijedi sljedeći omjer: $|CD| : |DK| : |KH| : |HC| = \sqrt{3} : 1 : 1 : 1$ (Slika 3.7).

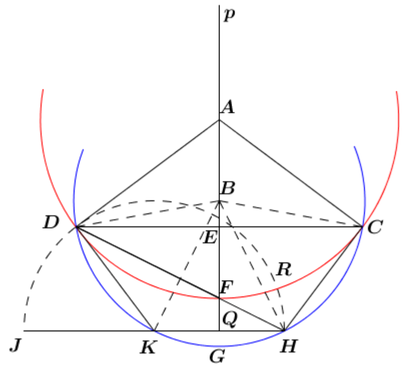
Konstruiramo trapez $CHKD$ i njemu opisanu kružnicu sa središtem u B. Zatim konstruiramo trokut CAD koji je sličan trokutu CBH te nakon toga kružnicu sa središtem na simetrali trapeza koja prolazi točkama C i D. Uočimo kako je zbroj površina triju malih odječaka jednak površini velikog odsječka (nad stranicom $\overline{CD}$) pa zbog sličnosti trokuta CAD i CBH slijedi da je površina mjeseca $CHKD$ upravo jednaka površini trapeza.



Slika 3.7: Drugi Hipokratov mjesec

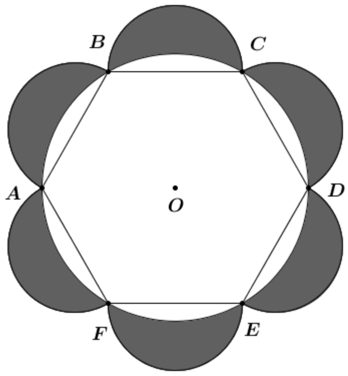
Treći Hipokratov mjesec se dobije ako se promatra pravilni peterokut $CFDKH$ za čije stanice vrijedi: $|CF| : |FD| : |DK| : |KH| : |HC| = \sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{2} : \sqrt{2}$ (Slika 3.8). Prvo konstruiramo polukružnicu sa središtem u K duljine promjera JH. Zatim konstuiramo simetralu p dužine $\overline{KH}$ čije polovište označimo s Q. Sada dolazi najkompliciraniji dio: potrebno je konstruirati točku D na polukružnici tako da vrijedi $|DF|^2 = \frac{3}{2}|DK|^2$, gdje je točka F sjecište pravaca DH i p. Nadalje, konstruiramo jednakokračni trapez $CHKD$ kojem opišemo kružnicu čije se središte nalazi u točki B te nakon toga kružnicu koja prolazi točkama C, F i D i njezino središte označimo s A. Hipokrat je dokazao da je površina mjeseca $CGDF$ jednaka površini peterokuta $CHKDF$.

Iako Hipokrat nije tvrdio da se svaki mjesec može kvadrirati, grčki matematičari su bili optimistični oko kvadriranja najsavršenije krivulje, kruga, pa su mu neki autori pripisali sljedeću „kvadraturu” kruga. Konstruiramo kružnicu sa središtem u O duljine promjera $|AD|$ u koju zatim upišemo pravilni šesterokut $ABCDEF$ (Slika 3.9). Nad svakom stranicom šesterokuta konstuiramo polukružnicu čime smo dobili šest mjeseca. Uočimo da je površina pravilnog šesterokuta plus šest površina polukrugova nad stranicama tog šesterokuta jednaka površini kruga opisanog šesterokutu plus površina šest mjeseca. Također, polumjer kruga opisanog šesterokutu je jednak duljini stranice tog šestrokuta, odnosno, promjeru polukruga nad svakom stranicom tog šesterokuta. Slijedi da se površina kruga opisanog šesterokutu i površina kruga kojem je promjer stranica tog šesterokuta odnose kao $4 : 1$. Zaključujemo kako je površina kruga kojem je promjer stranica šesterokuta upravo



Slika 3.8: Treći Hipokratov mjesec

jednaka razlici površina šesterokuta i šest mjesecâ. Međutim, nije poznato je li Hipokrat znao da se ovi mjeseci ne mogu kvadrirati.



Slika 3.9: Navodna Hipokratova kvadratura kruga

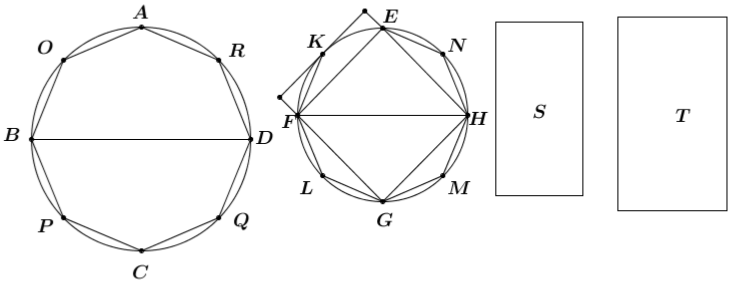
Opis predeuklidskih pristupa problemu kvadrature kruga završavamo Euklidovim dokazom da su površine krugova razmjerne kvadratima njihovih promjera, što je, kako smo rekli, već ranije bilo poznato starogrčkim matematičarima. Ova tvrdnja nalazi se u 12. knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 2.

Teorem 8. *Površine krugova odnose se kao kvadrati njihovih promjera.*

Dokaz: Neka su $ABCD$ i $EFGH$ zadani krugovi i $|BD|$ i $|FH|$ njihovi odgovarajući promjeri (Slika 3.10). Tvrdimo da se površina kruga $ABCD$ odnosi prema površini kruga

$EFGH$ kao površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|EF|$.

Ako se površina kvadrata duljine stranica $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranica $|FH|$ ne odnosi u istom omjeru kao i površina kruga $ABCD$ prema površini kruga $EFGH$, onda je omjer površine kvadrata duljina stranica $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ jednak omjeru površine kruga $ABCD$ prema površini ili manjoj ili većoj od površine kruga $EFGH$. Neka bude prvo prema manjoj površini S.



Slika 3.10: Površine krugova su razmjerne kvadratima njihovih promjera - dokaz

U krug $EFGH$ upišimo kvadrat $EFHG$. Površina tog upisanog kvadrata veća je od polovine površine kruga $EFGH$. Ako kroz točke E, F, G i H konstruiramo tangente na kružnicu, polovina površine opisanog kvadrata jednaka je površini kvadrata $EFGH$. Kako je površina opisanog kvadrata veća od površine kruga, tada je površina upisanog kvadrata $EFGH$ veća od polovine površine kruga $EFGH$. Sjecište simetrala stranica $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ i $\overline{HE}$ i kruga $EFGH$ redom označimo s K, L, M i N. Stoga je površina svakog od trokuta EKF, FLG, GMH i HNE veća od polovine površine kružnog odsječka nad odgovarajućom tetivom. Konstruirajmo paralelograme tako da je površina svakog od trokuta EKF, FLG, GMH i HNE jednaka polovici površine odgovarajućeg paralelograma. Ako nastavimo ovaj postupak dalje na opisani način, na kraju ćemo dobiti površine kružnih odsječaka čiji je zbroj manji od razlike površine kruga i manje površine S. Tu ćemo iskoristiti prvu propoziciju koja se nalazi u desetoj knjizi Euklidovih *Elemenata*: Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće veličine oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine. Neka zbroj površina kružnih odsječaka EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, i NE kruga $EFGH$ bude manji od razlike površine kruga $EFGH$ i površine S. Tada je ostatak, mnogokut $EKFLGMHN$ veći od površine S. Upišimo i u krug $ABCD$ mnogokut $AOBPCQDR$ koji je sličan mnogokutu $EKFLGMHN$. Tada se površina kvadrata duljine stranice $|DC|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ odnosi kao površina mnogokuta $AOBPCQDR$ prema površini mnogokuta $EKFLGMHN$.

Ali, površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ se odnosi kao površina kruga $ABCD$ prema površini S. Prema tome se površina kruga $ABCD$ prema površini kruga $EFGH$ odnosi kao površina mnogokuta $AOBPCQDR$ prema površini mnogokuta $EKFLGMHN$. Tada se površina kruga prema površini upisanog mnogokuta odnosi kao površina S prema površini mnogokuta $EKFLGMHN$. Ali, površina kruga je veća od površine upisanog mnogokuta pa je prema tome i površina S veća od površine mnogokuta $EKFLGMHN$. No, ona je i manja, što je nemoguće. Prema tome, površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ se ne odnosi kao površina kruga $ABCD$ prema površini manjoj od kruga $EFGH$. Slično se dokazuje da i površina kvadrata duljine stranice $|FH|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|BD|$ se ne odnosi kao površina kruga $EFGH$ prema površini manjoj od kruga $ABCD$.

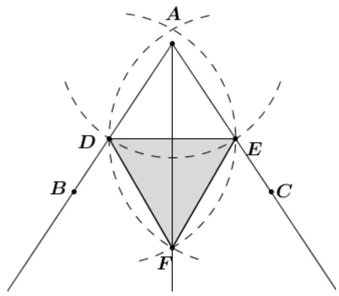
Tvrdimo također da se površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ ne odnosi kao površina kruga $ABCD$ prema površini koja je veća od površine kruga $EFGH$. Zaista, ako je to moguće, neka bude prema većoj površini T. Znači da se površina kvadrata duljine stranice $|FH|$ prema površini kvadrata duljine stranice $|BD|$ odnosi kao površina T prema površini kruga $ABCD$. Ali, površina T se prema površini kruga $ABCD$ odnosi kao površina kruga $EFGH$ prema površini manjoj od površine kruga $ABCD$. Na ovaj način površina kvadrata duljine stranica $|FH|$ se prema površini kvadrata duljine stranica $|BD|$ odnosi kao površina kruga $EFGH$ prema površini manjoj od kruga $ABCD$. Ali, dokazano je da je to nemoguće. Prema tome, površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ se prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ ne odnosi kao površina kruga $ABCD$ prema površini većoj od površine kruga $EFGH$. A dokazali smo da nije ni kao površina tog kruga prema manjoj površini. Prema tome, površina kvadrata duljine stranice $|BD|$ se prema površini kvadrata duljine stranice $|FH|$ odnosi kao površina kruga $ABCD$ prema površini kruga $EFGH$. Time je dokazano da se površine krugova odnose kao kvadrati njihovih promjera. ■

Za kraj, napomenimo da je Ferdinand von Lindemann, njemački matematičar, 1882. dokazao da je broj π transcendentan, što znači da π nije korijen ni jedne algebarske jednadžbe čiji su koeficijenti algebarski brojevi. Iz toga slijedi da se za zadanu jediničnu duljinu duljina π ne može konstruirati ravnalom i šestarom te je time problem kvadrature kruga riješen potpuno i negativno.

3.2 Problem trisekcije kuta

Problem trisekcije kuta je problem konstrukcije trećine zadanog kuta koji potječe iz 4. stoljeća prije Krista. Ovaj problem je nastao iz potreba u arhitekturi i tehnici, najvjerojatnije iz želje za konstrukcijom pravilnog deveterokuta za koju su stari Grci trebali kružnicu podijeliti na devet jednakih dijelova. To su pokušali konstruirati tako da su prvo konstruirali jednakostraničan trokut te time podijelili kružnicu na tri jednaka dijela. Zatim su trebali središnji kut od 120° podijeliti na tri jednaka dijela pomoću ravnala i šestara, ali nisu uspjeli te je vjerojatno iz toga nastao problem trisekcije kuta.

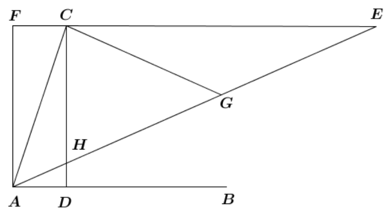
S druge strane, problem bisekcije kuta su Grci znali riješiti vjerojatno već vrlo rano te je opis konstrukcije dan u prvoj knjizi Euklidovih *Elemenata* kao propozicija pod rednim brojem 9.



Slika 3.11: Bisekcija kuta

Neka je $\angle BAC$ zadani pravolinijski kut koji trebamo podijeliti na dva jednaka dijela (Slika 3.11). Odaberemo proizvoljnu točku na polupravcu AB te zatim konstruiramo točku E na polupravcu AC tako da vrijedi $|AD| = |AE|$. Nakon toga konstruiramo dužinu $\overline{DE}$ i nad njom jednakostraničan trokut DEF. Tvrdimo da je kut $\angle BAC$ polupravcem AF podijeljen na dva jednaka dijela. Promotrimo trokute ADF i AEF. Oni imaju zajedničku stranicu $\overline{AF}$ te po konstrukciji vrijedi da je $|DF| = |EF|$ i $|AD| = |AE|$. Iz ovoga zaključujemo da su trokuti DAF i EAF sukladni prema S - S poučku o sukladnosti, iz čega slijedi da je onda $|\angle DAF| = |\angle EAF|$, čime je tvrdnja dokazana.

Hipokrat se osim kvadraturom kruga bavio i problemom trisekcije kuta. On rješava problem „mehaničkom" konstrukcijom na sljedeći način: za zadani kut $\angle CAB$ konstruiramo okomicu iz točke C na pravac AB te sjecište označimo s D (Slika 3.12). Zatim

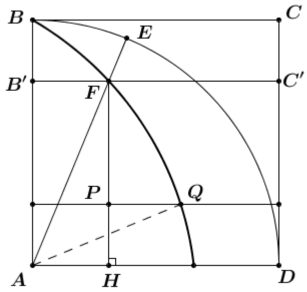


Slika 3.12: Trisekcija kuta Hipokratovom metodom

konstuiramo pravokutnik $ADCF$ te stranicu FC produljimo do točke E i sjecište pravca

AE i DC označimo s H. Pritom je točka E odabrana tako da vrijedi: $|HE| = 2|AC|$. Sada je kut $\angle EAB$ trećina kuta $\angle CAB$.

Dokažimo to. Neka je točka G polovište dužine $\overline{HE}$. Tada je $|HG| = |GE| = |AC|$. Kako je $\angle ECH$ pravi kut, vrijedi da je $|CG| = |HG| = |GE|$ te $|\angle EAB| = |\angle CEA| = |\angle ECG|$. Nadalje, kako je $|AC| = |CG|$, tada je i $|\angle CAG| = |\angle CGA|$. Ali, $|\angle CGA| = |\angle GEC| + |\angle ECG| = 2|\angle CEG| = 2|\angle EAB|$, što je i bilo potrebno dokazati.



Slika 3.13: Trisekcija kuta pomoću kvadratise

Trisekcija zadanog kuta $\angle EAD$ se može izvršiti i pomoću **Hipijine** kvadratise (Slika 3.13). Zadan je kut $\angle EAD$ koji je određen jednim položajem rotirajuće stranice AB i pripadne točke F te kvadratise. Konstuiramo okomicu iz točke F na stranicu $\overline{AD}$ i nožište visine označimo s H. Zatim se na okomici FH odredi točka P takva da je $|FP| : |PH| = 2 : 1$. Nakon toga konstruiramo paralelu sa stranicom AD u točki P i sjecište te paralele i kvadratise označimo s Q. Tada je kut $\angle QAD$ jednak trećini kuta $\angle EAD$. Primijetimo da su sve konstrukcije u ovom opisu, osim točaka kvadratise, izvedive ravnalom i šestarom.

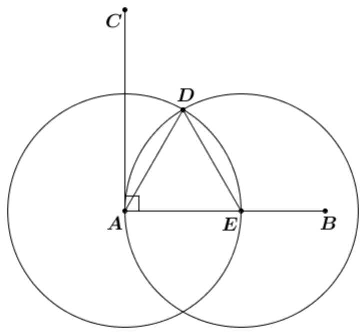
Da bismo dokazali nerješivost problema trisekcije kuta, dovoljno je dokazati nerješivost za jedan poseban kut. Za dani kut α trebamo konstruirati kut $\frac{\alpha}{3}$. Kut možemo konstruirati ako možemo konstruirati njegov kosinus, to jest ako i samo ako možemo konstruirati $a = \operatorname{Re} z = \cos\alpha$, gdje je $z = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Uočimo da se iz

$$a = \operatorname{Re} z = \cos\alpha = \cos\left(3 \cdot \frac{\alpha}{3}\right) = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3} = 4x^3 - 3x \qquad (3.1)$$

problem trisekcije kuta svodi na rješavanje kubne jednadžbe $4x^3 - 3x - a = 0$, $a = \cos\alpha$. Supstitucijom $y = 2x$ jednadžba prelazi u oblik $y^3 - 3y - 2a = 0$ te se problem trisekcije kuta svodi na rješavanje kubne jednadžbe, to jest, određivanja racionalnih korijena ove kubne jednadžbe.

Neka je $\alpha = 60^{o}$. Tada je $a = \cos 60^{o} = \frac{1}{2}$ pa jednadžba (3. 1) prelazi u sljedeći oblik: $y^3 - 3y - 1 = 0$. Trisekcija kuta od 60^{o} nije izvediva jer iz teorije algebarskih jednadžbi[1] slijedi da bi jednadžba $y^3 - 3y - 1 = 0$ morala imati bar jedno racionalno rješenje, a jedini kandidati za takvo su ± 1, koji to očito nisu. Kako smo pronašli barem jedan kut za koji trisekcija kuta nije izvediva ravnalom i šestarom, zaključujemo kako općenito trisekcija kuta nije izvediva ravnalom i šestarom.

Problem trisekcije kuta razlikuje se od preostala dva problema jer ga je moguće riješiti ravnalom i šestarom u specijalnim slučajevima. Stari Grci su znali da se neki kutovi mogu podijeliti na tri jednaka dijela ravnalom i šestarom, primjerice pravi kut. Za dani pravi kut $\angle CAB$ konstuirajmo kružnicu sa središtem u A proizvoljnog radijusa koja pravac AB siječe u točki E. Zatim konstuirajmo drugu kružnicu jednakog radijusa sa središtem u točki E. Sjecište tih dviju kružnica označimo s točkom D. Tada je trokut DAE jednakostraničan te slijedi da je $|\angle DAE| = 60^{o}$ i $|\angle DAC| = 30^{o}$. Time je riješena trisekcija pravog kuta ravnalom i šestarom.



Slika 3.14: Trisekcija pravog kuta ravnalom i šestarom

Sljedeći primjer kuta za koji su znali konstruirati njegovu trećinu je kut od 45^{o}. Općenito vrijedi: Ako je za dani kut α moguće izvršiti trisekciju kuta šestarom i ravnalom, onda je trisekcija kuta izvediva i za kut $\frac{\alpha}{2}$. Kako je kut od 45^{o} dobiven bisekcijom kuta od 90^{o}, a kut od 90^{o} je moguće podijeliti na tri jednaka dijela, zaključujemo kako je moguća i trisekcija kuta od 45^{o}. Prema prethodnom opisu konstrukcije trisekcije pravog kuta konstruiramo kut od 30^{o}. Zatim konstruiramo simetralu tog kuta i time smo dobili kut od 15^{o} koji je trećina kuta od 45^{o}.

[1]F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

Općenito, kut veličine $\frac{360^{\circ}}{n}$, gdje je n prirodan broj je moguće ravnalom i šestarom podijeliti na tri jednaka dijela ako i samo ako n nije djeljiv s 3. Problem trisekcije kuta završavamo dokazom samo drugog smjera ove tvrdnje, to jest: za svaki kut čija je veličina oblika $\frac{360^{\circ}}{n}$, gdje je n prirodan broj koji nije djeljiv s 3, trisekcija je izvediva.

Dokaz: Pretpostavimo da je zadani kut $\angle AOB = \frac{360^{\circ}}{n}$, gdje je n prirodan broj djeljiv s 3 te n možemo zapisati kao $n = 3^r \cdot m$, za $m, n, r \in \mathbf{N}$. Tada postoje dva cijela broja a i b takva da vrijedi $mb + 3c = 1$. (Ovime smo dobili linearnu diofantsku jednadžbu koja ima cjelobrojna rješenja jer $M(m, 3)$ dijeli 1.) Množeći ovu jednadžbu s $\frac{360^{\circ}}{3n}$ dobivamo

$$mb \cdot \frac{360^{\circ}}{3n} + c \cdot \frac{360^{\circ}}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{360^{\circ}}{n}.$$

Uvrštavajući u jednadžbu izraz $\frac{m}{n} = \frac{1}{3^r}$ dobivamo

$$b \cdot \frac{120^{\circ}}{3^r} + c \cdot \frac{360^{\circ}}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{360^{\circ}}{n},$$

odnosno

$$\frac{\angle AOB}{3} = c \cdot \angle AOB + 2b \cdot \frac{60^{\circ}}{3^r}.$$

Uočimo kako izraz $\frac{60^{\circ}}{3^r}$ za $r = 1$ odgovara trisekciji kuta od 60° što smo pokazali da nije moguće. Iz toga zaključujemo kako $\frac{60^{\circ}}{3^r}$ nije konstruktibilan kut, za svaki $r \in \mathbf{N}$. Tada ni kut $\angle AOB$ nije konstruktibilan te smo time došli do kontradikcije s pretpostavkom. ■

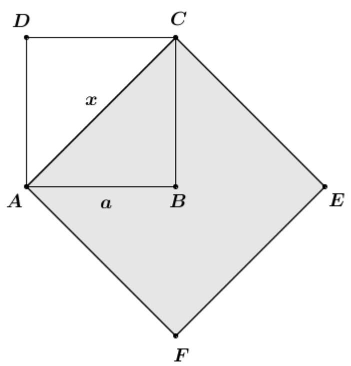
3.3 Problem duplikacije kocke

Problem duplikacije kocke je problem konstrukcije brida kocke čiji je volumen dva puta veći od volumena zadane kocke. Uz nastanak ovog problema vežu se dvije legende.

Prema prvoj legendi, stanovnici otoka Delosa, koji se nalazi u Egejskom moru, zbog epidemije kuge su se odlučili obratiti za pomoć delfijskom proročištu. Proročica im je savjetovala da udvostruče zlatni žrtvenik boga Apolona koji je imao oblik kocke kako bi umirili bogove. Kako nikako nisu uspjevali rješiti problem, odlučili su zamoliti Platona za savjet. On im je objasnio da se na ovaj način zapravo željelo posramiti Grke zbog ravnodušnosti prema matematici i zanemarivanja geometrije. Zbog ove se legende problem duplikacije kocke često naziva *Delijski problem.*

Druga pak legenda kaže da je kralj Minos smatrao da je nadgrobni spomenik u obliku kocke njegova sina Glaukusa premalen te ga je udlučio udvostručiti. Zapovijedio je udvostručenje spomenika na način da se duljina brida kocke udvostruči, što je pogrešno. Time se volumen kocke povećao osam puta, umjesto dva.

Korijeni nastanka problema duplikacije kocke mogu biti pomalo nejasni, ali nema sumnje da su već pitagorejci znali kako riješiti problem udvostručenja kvadrata. Označimo duljinu stranice zadanog kvadrata $|AB| = a$ i duljinu stranice traženog kvadrata s x. Za zadanu površinu kvadrata, koje je jednaka a^2 trebamo pronaći kvadrat čija je površina dvostruko veća od zadane. Time dobivamo sljedeću jednadžbu $x^2 = 2a^2$ te se ovaj problem svodi na konstrukciju dužine duljine $x = a\sqrt{2}$. Neka je $ABCD$ zadani kvadrat duljine stranice a i $|AC|$ njegova dijagonala. Kako je trokut ABC jednakokračan pravokutan, primijenjujući Pitagorin poučak slijedi da je $|AC| = a\sqrt{2}$. Nad dijagonalom $|AC|$ konstruiramo kvadrat $ACEF$ i time je problem udvostručenja kvadrata riješen.



Slika 3.15: Udvostručenje kvadrata

Osim problemom kvadrature kruga i trisekcije kuta, **Hipokrat s Hiosa** bavio se i problemom duplikacije kocke. Za zadanu duljinu brida kocke a, on problem svodi na konstrukciju srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$. Srednje geometrijske proporcionale između duljina a i b duljine su x i y takve da je

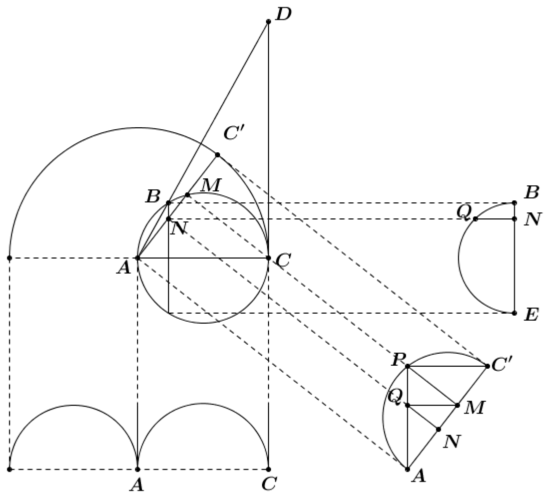
$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Iz danog razmjera slijedi da je $x^2 = ay$ i $y^2 = 2ax$ iz čega proizlazi da je $x^3 = 2a^3$. Ovime je stereometrijski problem sveden na planimetrijski, to jest, za zadanu dužinu duljine a trebamo pronaći dužinu duljine $x = a\sqrt[3]{2}$.

Hipokratova ideja svođenja problema duplikacije kocke na problem razmjera bila je ključna za daljnje pristupe i svi kasniji grčki matematičari problemu su pristupali pokušavajući konstruirati srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$.

Arhita iz Tarenta (oko 428.–350. pr. Kr.) bio je grčki filozof, matematičar, fizičar, astronom te pripadnik pitagorejske škole. Kako se bavio problemom udvostručenja kocke, ujedno se bavio i harmonijskom sredinom brojeva. On je problem rješavao u trodimenzionalnom prostoru gdje je srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$ odredio pomoću presjeka cilindra, torusa i konusa.

Pretpostavimo da su zadane dvije dužine $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ između kojih želimo pronaći dvije srednje geometrijske proporcionale. Konstruirajmo kružnicu promjera $\overline{AC}$ te neka je $\overline{AB}$ tetiva te kružnice.



Slika 3.16: Arhitino rješenje duplikacije kocke u trodimenzionalnom prostoru

Zatim u ravnini kojoj pripadaju točke A i C te koja je okomita na ravninu određenu točkama A, B i C konstruiramo polukrug nad promjerom $\overline{AC}$ te taj polukrug rotiramo oko točke A okomito na ravninu ABC. Time smo opisali polutorus čiji je unutarnji polumjer jednak nula i time točka C prelazi u točku C'. Nakon toga konstruiramo poluvaljak nad polukrugom ABC kao bazom koji siječe plohu polutorusa po određenoj krivulji. Neka je CD tangenta na kružnicu ABC u točki C te sjecište pravca AB i te tangente označimo s D. Rotacijom trokuta ADC oko $\overline{AC}$, dužina $\overline{AD}$ opiše polustožac, pri čemu točka B opiše polukružnicu BQE koja je okomita na ravninu ABC te čiji je promjer $\overline{BE}$ okomit na promjer $\overline{AC}$. Ploha polustošca siječe dobivenu krivulju na poluvaljku u točki P te njezinu ortogonalnu projekciju na ravninu ABC označimo s M. Sjecište pravca AP i polukruga BQE označimo s Q, a pravca AC' i dužine $\overline{BE}$ s N. Konstruirajmo dužine $\overline{PC'}$, $\overline{QM}$ i $\overline{QN}$. Kako su polukrugovi APC' i BQE okomiti na krug ABC slijedi da je i njihov presjek, to jest dužina $\overline{QN}$, također okomit na krug ABC. Iz Euklidovog teorema[2] slijedi da je $|QN|^2 =$

[2]Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina svih ortogonalnih projekcija na hipo-

$|EN| \cdot |NB|$. Primijenjujući svojstvo tetive (potencije točke N na kružnicu) dobivamo da je $|EN| \cdot |NB| = |AN| \cdot |NM|$ pa iz ovih dviju jednakosti slijedi da je $|QN|^2 = |AN| \cdot |NM|$. Također, iz ovoga zaključujemo da je $\angle AQM$ pravi kut. Međutim, i kut $\angle APC'$ je pravi pa slijedi da je $MQ \parallel C'P$ te zaključujemo da su trokuti AQM, AMP i APC' međusobno slični. Slijedi

$$|AQ| : |AM| = |AM'| : |AP| = |AP| : |AC'|$$

a kako je $|AQ| = |AB|$ i $|AC'| = |AC|$ dobivamo sljedeće

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|.$$

Ako vrijedi da je $|AB| = a$, $|AC| = 2a$, $|AM| = x$ i $|AP| = y$, onda dobivamo

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Zaključujemo kako za dane duljine a i $2a$ možemo pronaći srednje geometrijske proporcionale x i y pri čemu je $x = |AM|$ duljina brida udvostručene kocke.

Jezikom današnje analitičke geometrije: ako je ishodište koordinantnog sustava u prostoru u točki A, pravac AC x-os, pravac koji prolazi točkom A i koji je okomit na AC u ravnini ABC y-os, pravac koji prolazi točkom A i koji je paralelan s pravcem PM z - os, onda je točka P određena kao presjek tri plohe:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2x^2}{b^2}$ (stošca),
2. $x^2 + y^2 = ax$ (cilindra),
3. $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$ (torusa),

gdje je $|AC| = a$ i $|AB| = b$. Kvadriranjem druge jednadžbe i uvrštavanjem u prvu dobivamo da je

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{b^2},$$

odnosno

$$x^2 + y^2 = b\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(uzimamo samo pozitivne korijene jer se bavimo duljinama). Dijeljenjem treće jednadžbe s $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i posljednje jednadžbe s $\sqrt{x^2 + y^2}$ dobivamo da je

$$\frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b},$$

tenuzu, to jest, geometrijska sredina svojih odsječaka na hipotenuzi.

odnosno

$$|AC| : |AP| = |AP| : |AM| = |AM| : |AB|.$$

Time smo dokazali da su $|AP|$ i $|AM|$ tražene proporcionale.

Od Eutocija (480.–540. pr. Kr.), grčkog matematičara koji je pisao komentare djela Arhimeda i Apolonija, saznajemo da je **Eudoks s Knida** (408.–355. pr. Kr.) također dao rješenje problema duplikacije kocke. Međutim, njegovo rješenje je izgubljeno jer je Eutocije smatrao da je verzija koju je on vidio pogrešna pa je nije htio dalje prosljeđivati. Sumnja se u to da je Eudoks napravio tu pogrešku jer je bio izvrstan matematičar, već se smatra da je tu pogrešku napravio onaj koji je prepisivao rješenje, a da ga nije u potpunosti razumio. Neki smatraju da je Eudoksovo rješenje bilo samo dvodimenzionalna verzija već opisanog Arhitinog rješenja, dok drugi sumnjaju u to da bi Eudoks samo kopirao Arhitino rješenje.

Problemom duplikacije kocke bavio se i **Menehmo** (oko 380.–320. pr. Kr.), Eudoksov učenik. Poznata je priča od o tome kako je Aleksandar Veliki navodno tražio od Menehma da mu pokaže neki jednostavan način učenja geometrije. Menehmov odgovor je bio: *O kralju, za putovanje zemljom postoje privatne ceste i kraljevski putovi, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve.* Neki su iz ovoga zaključili kako je Menehmo bio učitelj Aleksandra Velikog.

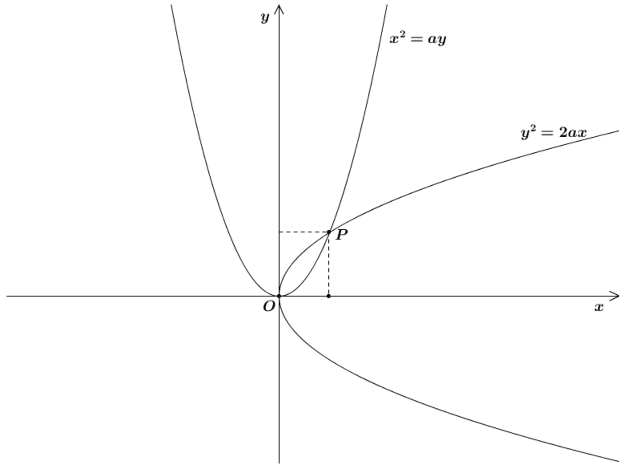
Menehmo je otkrio da se presjekom stošca i ravnine koja je okomita na njegovu izvodnicu dobiju do tada nepoznate krivulje. Vrsta krivulje ovisi o kutu prvi vrhu stošca pa tako za stožac šiljastog vrha dobivamo elipsu, pravokutnog vrha parabolu i tupog vrha hiperbolu. Menehmo je otkrio konike pokušavajući riješiti problem duplikacije kocke. Zapravo je problem koji je krenuo rješavati bilo nalaženje srednjih geometrijskih proporcionala x i y između a i b, gdje su a i b zadane duljine, to jest, nalaženje x i y takve da vrijedi $a : x = x : y = y : b$. Lako se vidi da iz prvog razmjera slijedi $x^2 = ay$, iz drugog $y^2 = bx$ te iz $a : x = y : b$ slijedi $xy = ab$, ali ovo nije način na koji je Menehmo riješio problem duplikacije kocke.

Neka je a duljina brida zadane kocke i $b = 2a$. Pogledajmo dva načina na koja je Menehmo riješio problem. Napominjemo da za opis pristupa koristimo suvremenu notaciju i analitičku geometriju, koje nisu postojale u Menehmovo doba.

1. način: Promatramo dvije parabole zadane jednadžbama

$$x^2 = ay, y^2 = 2ax.$$

Rješavajući ovaj sustav jednadžbi dolazimo do sljedeće jednadžbe $x(x^3 - 2a^3) = 0$ čija su rješenja jednaka $x_1 = 0$ i $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Uočimo da je x_2 traženo rješenje, to jest, da je jednak duljini brida udvostručene kocke. Grafički, rješenje je apscisa točke P koja je sjecište dviju navedenih parabola.

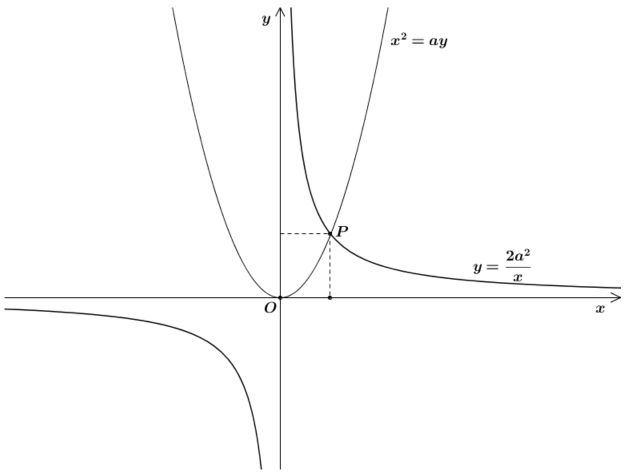


Slika 3.17: Menehmovo rješenje duplikacije kocke pomoću dviju parabola

2. način: Promatramo hiperbolu i parabolu zadane redom jednadžbama

$$y = \frac{2a^2}{x}, x^2 = ay.$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi dolazimo do sljedeće jednadžbe $x^3 = 2a^3$ čije je jedno realno rješenje jednako $a\sqrt[3]{2}$.



Slika 3.18: Menehmovo rješenje duplikacije kocke pomoću hiperbole i parabole

Iako je danas prvenstveno zapamćen kao filozof, **Platon** (429.–348. pr. Kr.), rođen u Ateni, bio je također jedan od grčkih matematičara. Smatrao je da je geometrija ključ za otključavanje tajni svemira pa je stoga i razumljiv znak iznad ulaza u *Akademiju*: „Neka ne ulazi onaj koji ne zna geometriju". Platon je igrao važnu ulogu u poticanju i inspiriranju grčkih intelektualaca na studij matematike, kao i filozofije te je postao poznat kao „tvorac matematičara". Od svojih je studenata tražio točne definicije, jasno navedene pretpostavke te logično deduktivno zaključivanje. Inzistirao je da se geometrijski dokazi dokažu jedino pomoću ravnala i šestara. Pred svoje je studente postavio i tri klasična problema (duplikaciju kocke, trisekciju kuta, kvadraturu kruga). Upravo se Platonu pripisuje prvo eksplicitno isticanje zahtjeva da geometrijske konstrukcije treba izvoditi isključivo ravnalom i šestarom.

Platon je najpoznatiji po svojoj indentifkaciji pet regularnih simetričnih trodimenzionalnih oblika, poznatijih kao *Platonova tijela*. *Platonova tijela* ili pravilni poliedri su poliedri čije strane su sukladni pravilni mnogokuti, a svi kutovi među njegovim stranama su jednake veličine. Platonovih tijela ima samo 5, što ćemo dokazati u sljedećem teoremu koristeći suvremenu notaciju i Eulerovu formulu[3].

Teorem 9. *Postoji 5 Platonovih tijela.*

Dokaz: Strane pravilnog poliedra su sukladni pravilni mnogokuti, n-terokuti. U svakom vrhu pravilnog poliedara se sastaje isti broj bridova, k bridova, a time i isti broj strana k strana. Označimo s V broj vrhova pravilnog poliedra, s B broj bridova pravilnog poliedra te s S broj strana pravilnog poliedra. Kako se radi o pravilnim n-terokutima, svaka strana ima n vrhova, a u svakom vrhu se sastaje k strana pa vrijedi

$$nS = kV,$$

iz čega slijedi

$$V = \frac{nS}{k}. \tag{3.2}$$

Zatim, svaki brid pripada dvjema stranama pa je

$$nS = 2B,$$

iz čega slijedi

$$B = \frac{nS}{2}. \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem jednakosti (3.2) i (3.3) u Eulerovu formulu, $V-B+S = 2$, dobivamo sljedeće

$$\frac{nS}{k} - \frac{nS}{2} + S = 2,$$

[3] U konveksnom poliedru za broj vrhova V, broj bridova B i broj strana S vrijedi formula $V - B + S = 2$.

to jest

$$S = \frac{4k}{2n + 2k - nk}.$$

Iz (3.2) i (3.3) slijedi $B = \frac{Vk}{2}$, a $S = \frac{Vk}{n}$ pa uvrštavanjem u Eulerovu formulu dobivamo

$$V = \frac{4n}{2n + 2k - nk}.$$

Također, iz (3.2) i (3.3) slijedi $V = \frac{Bk}{2}$, a $S = \frac{2B}{n}$ pa uvrštavanjem u Eulerovu formulu dobivamo

$$B = \frac{2nk}{2n + 2k - nk}.$$

Uočimo da S, V i B moraju biti pozitivni brojevi. Znamo da su brojnici pozitivni pa tada i nazivnik koji je svima zajednički mora biti pozitivan broj, to jest $2n + 2k - nk > 0$, iz čega slijedi

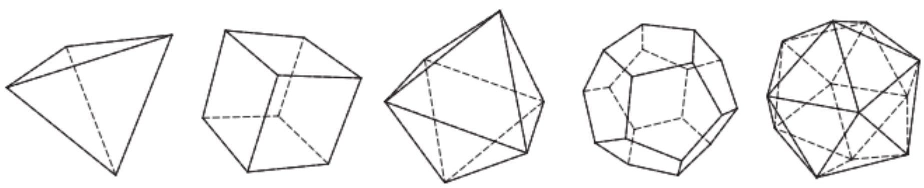
$$2(n + k) > nk. \tag{3.4}$$

Mora vrijediti $n \geq 3, k \geq 3$. Sada promatramo dva slučaja: $n \geq k$ i $n \leq k$.

1. $n \geq k$ Uvršavanjem nejednakosti u (3.4) dobivamo $4n \geq 2(n + k) > nk$ iz čega slijedi $k < 4$, to jest, $k = 3$. Uvrštavanjem $k = 3$ u (3.4) dobivamo $2(n + 3) > 3n$ iz čega slijedi $n < 6$.

2. $n \leq k$ Uvrštavanjem nejednakosti u (3.4) dobivamo $4k \geq 2(n+k) > nk$, iz čega slijedi $n < 4$, to jest, $n = 3$. Uvrštavanjem $n = 3$ u (3.4) dobivamo $2(3 + k) > 3k$ iz čega slijedi $k < 6$.

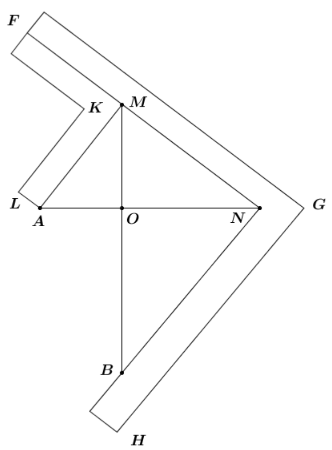
Dakle, jedine mogućnosti za uređene parove (n, k) su: $(3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$.



Slika 3.19: Platonova tijela (izvornik: http://www.grad.hr/nastava/geometrija/ng/tijela/poli.pdf)

Tetraedar (grč. *tetra* - četiri) je pravilni poliedar koji ima 4 vrha, 6 bridova i 4 strane koje su jednakostranični trokuti. Heksaedar ili kocka (grč. *hex* - šest) je pravilni poliedar koji ima 8 vrha, 12 bridova i 6 strane koje su kvadrati. Oktaedar (grč. *okto* - osam) je pravilni poliedar koji ima 6 vrha, 12 bridova i 8 strane koje su jednakostranični trokuti. Dodekaedar (grč. *dodeka* - dvanaest) je pravilni poliedar koji ima 20 vrha, 30 bridova i 12 strane koje su pravilni peterokuti. Ikozaedar (grč. *eikos* - dvadeset) je pravilni poliedar koji ima 12 vrha, 30 bridova i 20 strane koje su jednakostranični trokuti. Platon je o njima pisao u dijalogu *Timeju* 360. godine prije Krista i u njemu je povezao svaki od četiri klasična elementa (zemlju, zrak, vodu i vatru) s pravilnim poliedrom. Tako je zemlju povezao s kockom, zrak s oktaedrom, vodu s ikozaedrom i vatru s tetraedrom, dok je za peti, dodekaedar, pomalo nejasno napisao da ga je koristio Bog za raspoređivanje konstelacija na nebu. Neizvjesno je tko je prvi opisao svih pet navedenih oblika - to su mogli biti i pitagorejci ili kako neki izvori navode, da je prvi cjeloviti prikaz pet pravilnih poliedara dao Teetet. Poznato je kako se Platon protivio rješenjima duplikacije kocke pomoću mehaničkih sredstava te je nevjerojatno da je sljedeće rješenje njegovo, iako mu ga Eutocije pripisuje. Postoje dvije teorije koje objašnjavaju ovo mehaničko rješenje. Prema jednoj, Platon jest izmislio mehaničko rješenje da bi pokazao kako ga nije uopće teško pronaći, a prema drugoj, to rješenje je otkrio netko od Platonovih sljedbenika s *Akademije*.

Neka su zadane dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ i pravokutni kutnici FGH i FKL pri čemu je kutnik FKL položen tako da ga možemo pomicati duž FG (Slika 3.20). Uočimo da je KL uvijek paralelan s GH. Pribor namjestimo tako da unutarnja strana brida GH kutnika FGH uvijek prolazi točkom B, a vanjski strana brida KL kutnika FKL prolazi točkom A. Zatim, točku N dobivamo kao sjecište unutarnje strane kuta u vrhu G i pravca OA, a točku M kao sjecište vanjske strane kuta u vrhu K i pravca OB.



Slika 3.20: Platonovo mehaničko rješenje duplikacije kocke

Uočimo kako su kutovi $\angle BNM$ i $\angle NMA$ pravi te je točka O nožište visine iz vrhova tih pravih kutova. Primijenjujući Euklidov teorem na trokute MBN i ANM slijedi da je $|ON|^2 = |MO| \cdot |OB|$ te $|OM|^2 = |AO| \cdot |ON|$, što možemo zapisati kao

$$\frac{|MO|}{|ON|} = \frac{|ON|}{|OB|}$$

i

$$\frac{|AO|}{|OM|} = \frac{|OM|}{|ON|}$$

iz čega slijedi

$$|AO| : |OM| = |OM| : |ON| = |ON| : |OB|.$$

Iz ovoga dobivamo da su $\overline{OM}$ i $\overline{ON}$ srednje geometrijske proporcionale. Označimo $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = 2a$, $\overline{OM} = x$ i $\overline{ON} = y$ pa prethodni razmjer prelazi u

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

iz čega slijedi da je $|OM| = a\sqrt[3]{2}$, to jest, duljina brida udvostručene kocke.

Poglavlje 4

Drugi grčki matematičari predeuklidskog doba

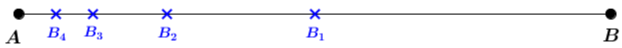
U daljnjem tekstu navest ćemo još nekoliko grčkih filozofa i matematičara koji su pridonijeli razvoju matematike tijekom predeuklidskog razdoblja.

Jedan od njih je i **Zenon iz Eleje** (490.–425. pr. Kr.). On se osim matematikom bavio i filozofijom te je bio prijatelj i učenik filozofa Parmenida s kojim je studirao u Eleji, u južnoj Italiji, u školi koju je Parmenid osnovao. Glavni izvor znanja o njemu je Platonov dijalog *Parmenid*. Aristotel ga je nazvao izumiteljem dijalektike, ali je Zenon najviše ostao upamćen zbog svojih 40 paradoksa. Nažalost ni jedno njegovo djelo nije sačuvano. Najpoznatiji njegovi paradoksi su vezani uz kretanje, opisani u Aristotelovom djelu *Fizika* koji im je i dao moderne nazive. Ti Zenonovi paradoksi su vjerojatno prvi primjeri metode poznate kao **reductio ad absurdum**, poznate kao dokaz pomoću kontradikcije. Zenonovi paradoksi su zbunjivali, izazivali te inspirirali filozofe, matematičare i fizičare preko dvije tisuće godina. Ti paradoksi se smatraju prvim pokušajima matematičkog pristupa beskonačnosti. Beskonačnost prostora i vremena može se shvatiti kao beskonačna djeljivost ili kao beskonačna veličina. Također, beskonačnost se može shvatiti kao potencijalna ili aktualna. No ipak, preostaje dilema je li beskonačna djeljivost jednaka konačno maloj veličini, beskonačno maloj veličini ili odsustvu veličine (neveličini). Osim toga, pretpostavka aktualne i potencijalne djeljivosti prostora i vremena u vezi je sa pitanjem njihove kontinuiranosti odnosno diskretnosti.

Opišimo četiri najpoznatija Zenonova paradoksa.

1. Dihotomija

   Ovaj paradoks nosi naziv „dihotomija" jer uključuje ponovno dijeljenje na polovine. Kretanje je nemoguće jer „ono što je u pokretu mora prvo prijeći pola puta prije nego što stigne do cilja." Ako neko tijelo treba prijeći put od točke A do točke B, onda mora prijeći i točku B_1 koja je između točaka A i B. Ali prije nego što se to dogodi, mora prijeći i točku B_2 koja je između točaka A i B_1. Na analogan način, prije nego što dođe do točke B_2 mora prijeći točku B_3 koja se nalazi između točaka A i B_2 i tako dalje. Prema tome, kretanje nikada ne može početi.

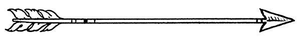


Slika 4.1: Dihotomija

2. Strijela

   „Strijela koja izgleda kao da leti, zapravo ne leti nego nepomično stoji, jer kad bi letjela, morala bi u svakom trenutku i biti i ne biti na jednom mjestu."

   Zamislimo da strijela tijekom jednog vremenskog intervala leti neprestano naprijed te pogledajmo svaki trenutak u tom vremenskom intervalu. Nemoguće je da se strijela miče u takvom trenutku jer trenutak ima trajanje 0 te strijela ne može istovremeno biti na dva mjesta. Zaključujemo kako je prema tome u svakom trenutku strijela nepomična te je tako nepomična i tokom čitavog intervala.



Slika 4.2: Strijela (izvornik: https://bs.wikipedia.org/wiki)

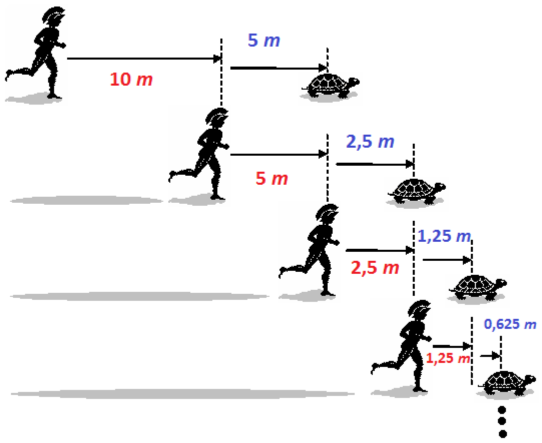
3. Stadion

   Ovim paradoksom Zenon ukazuje na nemogućnost stvarnog postojanja kretanja. Tako čovjeku koji je na kočiji koja se mimoilazi s drugom kočijom, njezino kretanje izgleda brže nego što izgleda gledatelju na tribinama.

4. Ahil i kornjača

   Zamislimo utrku Ahila i kornjače. Neka je Ahil dvostruko brži od kornjače te neka kornjača ima prednost u odnosu na Ahila od 10 metara. Tvrdnja u paradoksu je sljedeća: ako Ahil i kornjača krenu u isto vrijeme, brzonogi Ahil nikada neće prestići sporu kornjaču. Zašto?

   Ako Ahil i kornjača krenu u istom smjeru u istom trenu, onda kad je Ahil prešao početnu udaljenost od 10 metara, kornjača je 5 metara ispred njega. Kako kornjača ne miruje, ona u isto vrijeme prolazi neki put. Dok Ahil prijeđe tih 5 metara, kornjača ih prijeđe još 2,5. Problem se ponavlja i u sljedećem koraku: dok Ahil prijeđe tih 2,5 metara, kornjača je opet 1,25 metara ispred njega. Ako ovako nastavimo unedogled, kornjačina prednost će uvijek postojati, ma koliko mala ona bila.



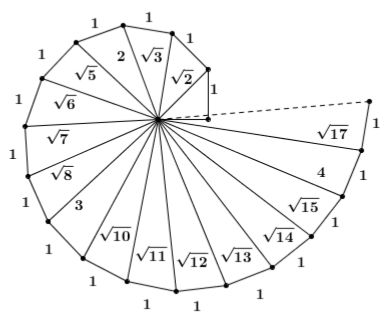
Slika 4.3: Ahil i kornjača

Danas bismo Ahilov put opisali konvergentim geometrijskim redom $10 + 5 + 2,5 + 1,25 + ... = 10\sum \frac{1}{2^n} = 20$, isto kao i kornjačin put $5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 + ... = 10\sum \frac{1}{2^n} = 10$. Kako je Ahil na početku bio udaljen 10 metara, slijedi da će u beskonačnosti ipak oboje doći na isto mjesto. Zenon je ovo vjerojatno naslućivao te se vidi kako su upravo njegova razmatranja bitna kao početak teorije infinitezimalnih (beskonačno malih) veličina.

Osim Zenona, za razvoj teorije infinitezimalnih veličina važan je **Demokrit iz Abdere** (460.–370. pr. Kr.). On je začetnik učenja po kome se svijet sastoji od atoma i praznog prostora, u kome se atomi vječito kreću čineći da nastaju i nestaju sve stvari. Naravno, u ono vrijeme, Demokrit svoje tvrdnje nije mogao dokazati. Ubrzo poslije Demokritove smrti, zaboravljeno je njegovo učenje i to najviše zaslugom njegovog suvremenika Aristotela. Prema Aristotelovom učenju, dijeljenje svakog tijela može se vršiti u beskonačnost, što je potpuno u suprotnosti s Demokritovim zaključkom da mora postojati granica u dijeljenju tijela, tj. mora postojati nedjeljiva čestica, atom. Demokrit je napisao i mnogo matematičkih djela, od kojih nažalost ni jedno nije sačuvano. Prema Plutarhu, Demokrit je postavio sljedeće pitanje: „Ako je stožac presječen ravninom paralelnom osnovici (time misli ravninom beskonačno bliskom osnovici, op. a), kako da si zamislimo plohe presjeka?

Jesu li jednake ili različite? Ako su različite, stožac je neravan s puno udubina poput stepenica i neravnina; a ako su jednake, stožac će izgledati popun valjka sastavljen od jednakih, a ne različitih krugova, što je besmisleno." Pretpostavlja se kako je iz ovog pitanjem proizašla ideja izračunavanja volumena stošca kako je to kasnije učinio Arhimed.

U već spomenutom Platonovom djelu *Timej* nalazi se opis Platonovih tijela, dok se u dijalogu *Teetet* nalazi opis iracionalnih kvadratnih korijena. Izvor za *Teetet* je **Teodor iz Kirene** (465.–398. pr. Kr.) koji je bio učitelj matematike grčkog filozofa Platona. On je dokazao da su stranice kvadrata duljina $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$ nesumjerljive s dijagonalom duljine 1. Nije poznat njegov dokaz, ali se pretpostavlja kako je primjenio isti postupak kao i za dokazivanje da je $\sqrt{2}$ racionalan broj, na sve slučajeve od $\sqrt{3}$ do $\sqrt{17}$. Na slici 4.4 vidi se kako kreće konstrukcija: krećemo od jednakokračnog pravokutnog trokuta čije su duljine katete jednake 1. Duljina hipotenuze tog trokuta je $\sqrt{2}$. Zatim konstruiramo okomicu duljine 1 na hipotenuzu duljine $\sqrt{3}$ i time dobivamo drugi trokut čija je duljina hipotenuze jednaka $\sqrt{3}$. Na analogan način: podizanjem okomica duljina 1 na hipotenuze dobivamo i hipotenuze duljine $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}, \ldots,$ $\sqrt{17}$. Također, pretpostavlja se da je baš stao na $\sqrt{17}$ jer je trokut čija je duljina hipotenuze upravo $\sqrt{17}$ zadnji trokut koji dobijemo ovim postupkom konstrukcije prije nego napravimo puni krug. Generalizacija dokaza s $\sqrt{2}$ na $\sqrt{3}$ išla bi na ovaj način: zadan je pravokutan trokut čija je duljina jedne katete jednaka 1, a hipotenuza duljine 2. Pretpostavimo da je druga kateta a tog pravokutnog trokuta, dakle $a = \sqrt{3}$, sumjerljiva s 1. U tom slučaju bi a trebala biti cjelobrojna jer je 1 prirodan broj i omjer duljine stranica a i 1 mora biti racionalan broj. U dokazu teorema 6 vidjeli smo da je u pitagorejskoj trojci (a, b, c) jedan od brojeva a i b neparan (u našem slučaju to je b, $b = 1$) te je i c takav, a ovdje imamo da je $c = 2$, što nas dovodi do kontradikcije s pretpostavkom.



Slika 4.4: Teodorova spirala

Već spomenuti **Teetet** (417.–369. pr. Kr.) je bio učenik Teodora iz Knida i član Platonove Akademije. Generalizirao je Teodorov rezultat da su $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots,$ $\sqrt{17}$ iracionalni tako da je pokazao da je kvadratni korijen svakog prirodnog broja koji nije potpun kvadrat, iracionalan broj. Smatra se kako se deseta knjiga Euklidovih *Elemenata* temelji na ovome rezultatu. Također, Teetet se navodno prvi bavio oktaedrom i ikozaedrom te se smatra kako je 13. knjiga Euklidovih *Elemenata* bazirana na njegovu radu.

Zasigurno uz Pitagoru i Hipokrata, najznačajniji matematičar ovog doba je **Eudoks iz Knida** (408.–355. pr. Kr.). On je učio geometriju od Arhite iz Tarenta (tako se zainteresirao za problem duplikacije kocke) i filozofiju od Platona. Budući da je bio vrlo siromašan, nije živio u Ateni nego u luci grada Pireja, odakle je svakodnevno putovao u Platonovu *Akademiju*. Uz pomoć prijatelja je otputovao u Egipat gdje je proučavao astronomiju kod svećenika. Na povratku kući je u Kiziki na obali Mramornog mora osnovao vlastitu školu. Smatra se da je utemeljio opću teoriju omjera i razmjera i metodu ekshaustije. U petoj knjizi Euklidovih *Elemenata*, s 18 definicija i 25 propozicija je obrađena Eudoksova opća teorija omjera i razmjera pomoću koje se mogu dokazati sve uobičajene tvrdnje iz teorije proporcionalnosti i sličnosti, no omogućuje i uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina bez upotrebe iracionalnih brojeva. Tako je u toj knjizi omjer definiran kao odnos s obzirom na veličinu (iznos) dviju istovrsnih veličina, dok za veličine kažemo da su istom omjeru (razmjerne), prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako bilo kojim brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu. U suvremnoj notaciji, tom definicijom je rečeno da $a : b = c : d$ znači da za sve m i n vrijedi: ako $ma < nb$, onda $mc < nd$; ako $ma = nb$, onda $mc = nd$ i ako $ma > nb$, onda $mc > nd$. Eudoksova metoda ekshaustije je zapravo generalizacija teorije omjera i razmjera. To je prva propozicija u desetoj knjizi Euklidovih *Elemenata*: ako od neke veličine oduzmemo više od njene polovice, od ostatka više od njegove polovice i tako dalje, onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od bilo koje veličine. Ova propozicija temelji se na Arhimedovom aksiomu: za svake dvije površine P i S postoji prirodan broj m takav da je $mP > S$, to jest, veća od dvije istovrsne veličine nadmašuje manju za iznos koji dovoljno puta ponovljen nadmašuje obje. Arhimed je kasnije koristeći se Eudoksovim dostignućima, razvio metodu ekshaustije riješivši pomoću nje čitav niz problema koji se danas rješavaju integralnim računom. Koristio se ovom metodom prilikom izračunavanja površine kruga, odsječka parabole, elipse, za računanje površine sfere i slično. Eudoksu pripada i učenje o piramidama, koje je, kao i učenje o oblim tijelima primjenom metode ekshaustije sadržano u 12. knjizi Euklidovih *Elemenata*. Tom se metodom posebno dokazuje 5. propozicija 12. knjige, koja je osnovni poučak o piramidama: Trostrane piramide koje imaju iste osnovke i iste visine imaju i iste obujme. Osim matematike, Eudoks se bavio i astronomijom. Među astronomima, postao je poznat zahvaljujući opisu zvjezdanog neba, izlasku i zalasku zvijezda stajačica. Te je podatke dobio gledajući model nebeske kugle. Eudoksu također pripada jedan od prvih pokušaja izgradnje teorije gibanja planeta. Smatrao je da je Zemlja okružena nizom koncentričnih sfera te je postavio model nebeskih sfera (njih 27) kao pomoćno matematičko sredstvo kojim je objasnio retrogradno kretanje nekih planeta. Ovaj model kasnije je usvojio i Aristotel, ali je on sfere zamišljao kao realne nebeske objekte, čime je s geometrije prešao na dinamiku. Eudoks je sastavio i stalni kalendar koji je sadržavao podatke o dnevnici i solsticiju.

Filozof **Aristotel** (384.–322. pr. Kr.) je dao važan doprinos razvoju matematičke logike, iako se nije primarno bavio matematikom. U dobi od 17 godina postao je student na Platonovoj *Akademiji* u Ateni koju je u to vrijeme vodio Eudoks, a kasnije je i sam predavao na *Akademiji*. Nakon što je Platon 347. pr. Kr. umro, Aristotel je napustio *Akademiju*. Ne zna se sa sigurnošću razlog njegovog odlaska - neki misle da je otišao jer ga nisu imenovali Platonovim nasljednikom, dok drugi misle da je to bilo iz političkih razloga. Makedonski kralj Filip pozvao ga je da preuzme odgoj njegovog sina Aleksandra, ali nije poznato ništa o njihovom odnosu. Otvorio je i vlastitu filozofsku školu, Likej, koja se nalazila u Ateni, u području hrama Apolona Likeja, koju su nazvali peripatetičkom (jer se nastava odvijala u šetnji), a njezine sljedbenike peripateteticima. On je začetnik logike kakvu danas poznajemo. Postavio je zahtjev da svaka matematička tvrdnja mora biti istinita ili lažna. Za razliku od Platona smatrao je da se matematički pojmovi ne pojavljuju *a priori*, nego predstavljaju sami po sebi apstrakciju predmeta realnog svijeta. Također, smatrao je kako je prostor bezgranično djeljiv i neograničen. Aristotel uvodi pojmove poput indukcije, dedukcije, silogizma i dokaza, koje i razrađuje. Osim toga, Aristotel je tvrdio kako točka ima poziciju za razliku od nekog broja. Tako se nekoj točki može pridružiti broj na pravcu, međutim, poziciju ima samo točka. Isto tako, za Aristotela, pravac nije beskonačan jer iako ga se može nacrtati po volji dugog, nije ga moguće realizirati kao beskonačnog. Osim toga, on je promatrao isključivo konkretne objekte pa tako riječ kao na primjer „dva” za njega nije imenica koja opisuje apstraktan objekt, već pridjev koji opisuje konkretan objekt. Spoznavši velike teškoće koje su se odnosile na pojam beskonačnosti i na rješenje Zenonovih paradoksa, pokušao je pronaći izlaz i protumačiti nesklad između neprekinutosi i diskretnosti. Bio je protiv uporabe pojma gibanja u matematici, smatrajući da se matematika ne bavi realnim stvarima nego njihovim apstrakcijama.

Objavom Euklidovih *Elemenata* završava predeuklidsko razdoblje grčke matematike. Euklid je u svojim *Elementima* napravio sintezu dosadašnje matematike čija je ideja izvesti matematiku iz malog broja početnih pretpostavki. Većina rezultata pripisuje se pitagorejcima, Hipokratu, Eudoksu i Teetetu.

Poglavlje 5

Zaključak: Metodički osvrt na predeuklidsku matematiku

Suvremena nastava matematike obično se opisuje kao nastava orijentirana učenicima gdje se dosadašnja dominantna uloga nastavnika stavlja u drugi plan, a povećava se učenikova aktivnost u nastavi matematike, posebice učenje otkrivanjem. Tako nastavnik više nije glavni akter prijenosa znanja, već je koordinator i organizator nastavnog procesa. Učenje otkrivanjem odnosi se na mogućnost da učenici samostalno, kroz eksperimentiranje, dođu do novih spoznaja, ideja i rješenja problema. Eksperimentalan rad je povezan s heurističkom nastavom u kojoj nastavnik vodi, potiče i usmjerava učeničke ideje na pronalaženje problema i otkrivanje novih sadržaja. Eksperimentalan rad dolazi do izražaja prilikom upotrebe računala u nastavi matematike, najčešće u geometriji. Učenje geometrije pomaže učenicima u razvoju vještina kao što su vizualizacija, kritičko mišljenje, intuicija, perspektiva, pretpostavljanje, deduktivno rasuđivanje, logično argumentiranje i dokazivanje. Uočavanje pravilnosti provodi se najčešće mjerenjem, no razvojem digitalne tehnologije u mogućnosti smo podučavati geometriju i na nove načine. Danas postoje razna dinamičko geometrijska okruženja kao što su *Geogebra* i *Geometer's Sketchpad*. Pomoću njih možemo prikazati i rukovati s geometrijskim objektima na način koji se ne može postići koristeći samo papir, olovku, šestar i ravnalo. U osnovnoj školi učenici isključivo na nizu pojedinačnih primjera dolaze do zaključaka, gdje najčešće generaliziraju nepotpunom indukcijom. Taj način zaključivanja naziva se indukcija. Kako kod induktivnog zaključivanja ne možemo provjeriti sve slučajeve, jer ih ima beskonačno mnogo, ono može dovesti i do pogrešnog zaključivanja. Međutim, iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika se ni na jednoj razini nastave ne izgrađuje kao strog deduktivni sustav. Tako je dokaz nekog teorema konačan niz tvrdnji u kojemu je svaka tvrdnja ili aksiom ili je dobivena iz prethodno dokazanih tvrdnji toga niza po nekom pravilu logičkog zaključivanja. Posljednja tvrdnja u tome nizu sama je tvrdnja teorema. Međutim, veći je interes upotrebljavati induktivnu nastavu jer se time u prvi plan stavlja učenik i njegova kreativnost i aktivnost, jer izreći teorem i onda ići dalje je logično, ali to nije podučavanje jer ne pridonosi razumijevanju. Budući da je interes najveći poticaj za učenje matematike i kao takav nezamjenjiv, nastavnik mora pronaći načine njegova pobuđivanja i njegovanja. To mogu biti razne motivacije prije otkrivanja nekih pravilnosti, zabavni zadatci, natjecanja i slično. Međutim, jedan od još nedovoljno iskorištenih načina su historicizmi. Upravo i oni mogu biti velika motivacija za razvijanje interesa učenika prema matematici. Historicizam je proučavanje određenog pitanja pretežno s povijesne strane te isticanje i naglašavanje povijesnih činjenica među svim ostalim činjenicama. Učenici najvjerojatnije misle kako je matematika fiksan skup činjenica te nemaju nikakvu predodžbu o njezinom razvoju. Zato ih treba osposobiti da nauče vrednovati matematiku i cijeniti suvremene matematičke pojmove, ideje i metode. Oni će ih bolje shvatiti ako poznaju barem djelomično njihov razvoj. Činjenice koje su u predeuklidskom razdoblju grčke matematike otkrivene i dokazane, odnosno pojmovi koji su tada uvedene već su stoljećima standardni u školskoj matematici. U ostatku rada opisat ćemo na koji način se otkrivaju pojmovi, činjenice i teoremi opisani u prethodnim poglavljima, u kojem razredu te usporediti klasičan i suvremeni pristup tim temama.

Kako su pitagorejci proučavali razna svojstva parnih i neparnih brojeva, pogledat ćemo na koji način se uvode parni i neparni brojevi u osnovnoškolsku matematiku. Učenici otkrivaju parne i neparne brojeve na kraju drugog razreda na način da određene brojeve prikazuju pomoću crvenih i plavih kvadratića koji predstavljaju jedinice. Tu će učenici ubrzo uočiti kako parne brojeve mogu prikazati pomoću jednakog broja i plavih i crvenih kvadratića, dok će im za neparne trebati još jedan kvadratić koji nema svog para. Zatim u petom razredu na nekoliko primjera analogijom i generalizacijom nepotpunom indukcijom zaključuju kako je svaki paran broj djeljiv s 2, dok neparan nije djeljiv s 2. Kod pitagorejaca nalazimo sličan opis: paran broj je broj koji se može podijeliti na dva jednaka dijela, dok je neparan onaj koji se ne može podijeliti. Nakon djeljivosti učenici otkrivaju proste i složene brojeve. Proste brojeve otkrivaju ispisivanjem djelitelja prirodnih brojeva te zaključuju kako su prosti brojevi prirodni brojevi koji imaju točno dva djelitelja, da su složeni brojevi prirodni brojevi koji imaju više od dva djelitelja te da broj 1 nije ni prost ni složen. Također, učenici uočavaju da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Za razliku od suvremenog pristupa, pitagorejci broj 2 nisu smatrali prostim brojem te su proste brojeve nazivali pravocrtnim jer se mogu prikazati samo u jednoj dimenziji. Nakon toga, ponavljajući pojmove kružnice i kruga, koje znaju iz nižih razreda, učenici uče pojam promjer kruga. Uz njega se veže Talesov prvi teorem: Svaki promjer raspolavlja krug, kojeg ovdje susrećemo u sličnom obliku: Svaki promjer dijeli krug na dva polukruga. Do ovog zaključka učenici dolaze praktičnom aktivnošću, izrezivanjem likova i njihovim preklapanjem. Vjeruje se kako je Tales ovaj teorem samo demonstrirao crtežom, a ne i dokazao. Teorem o vršnim kutovima nalazimo u obliku: Vršni kutovi su jednakih veličina, kojeg učenici otkrivaju mjerenjem veličina kutova kod dva ukrštena pravca ili izrezivanjem kutova i njihovim preklapanjem. Na intuitivnoj razini otkrivaju da su dva kuta sukladna ako se mogu nanijeti jedan na drugoga da se preklope. Na razini petog razreda se ni jedan od ovih teorema ne dokazuje.

Nakon proširivanja znanja o razlomcima, učenici u šestom razredu ponavljaju teorem o vršnim kutovima jer je bitan za uočavanje sukladnih kutova kod kutova uz presječnicu para paralelnih pravaca. Učenici zbroj kutova u trokutu ne zapisuju na način na koji su pitagorejci to otkrili, a to je da je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta, već raznim aktivnostima: mjerenjem, izrezivanjem, presavijanjem papira ili spajanjem kutova tri sukladna trokuta, otkrivaju da je zbroj kutova u trokutu jednak ispruženom kutu, to jest, 180^o. Taj zaključak verificiraju u alatu dinamične geometrije, gdje je još uvijek riječ o konačno mnogo trokuta te generalizirajući nepotpunom indukcijom zaključuju da tvrdnja vrijedi za sve trokute. Nakon uočavanja odnosa stranica i kutova trokuta učenici otkrivaju teorem o jednakokračnom trokutu, koji se pripisuje Talesu, a nalazimo ga u istom obliku: Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki. Mjerenjem odgovarajućih veličina kutova te nakon toga generalizacijom nepotpunom indukcijom učenici dolaze do zaključka kako teorem vrijedi za sve trokute. Zatim je na redu i teorem o sukladnosti trokuta. Ovaj teorem učenici otkrivaju prvo na kvalitativnoj razini (preklapanjem trokuta), zatim na kvantitativnoj razini (mjerenjem duljina stranica i veličina kutova) te na kraju na simboličkoj razini. Ni u šestom razredu se ovi teoremi ne dokazuju.

U sedmom razredu učenici otkrivaju omjer kao odnos dviju veličina ili mjera. Ključni razvojni korak je učenikova sposobnost razmišljanja o omjeru kao o vezi dviju veličina, a ne kao o dvije veličine koje uspoređujemo. Omjeri uključuju multipliktivnu vezu za razliku od prethodno naučene aditivne veze. Proporcionalno rasuđivanje razvija se u aktivnostima koje uključuju usporedbu i utvrđivanje ekvivalencije omjera te određivanje nepoznatog člana razmjera u različitim kontekstualiziranim zadacima i situacijama bez potrebe za korištenjem formula i pravila. Važna je i vizualizacija, da učenici prikazuje omjere slikovno. Najprije otkrivaju omjer dijela prema cjelini, a nakon toga omjer dijela prema dijelu. Također, otkrivanje se provodi na omjerima istovrsnih veličina, ali bitno je uključiti i omjere raznovrsnih veličina. Tek nakon toga dolazi otkrivanje ekvivalentnih omjera i razmjera te zapisivanje razmjera kao jednakosti dvaju ekvivalentnih omjera. Uočimo ovdje sličnost s definicijom omjera i razmjera u starogrčkoj matematici gdje je omjer definiran kao odnos s obzirom na veličinu (iznos) dviju istovrsnih veličina, dok za veličine kažemo da su istom omjeru (razmjerne), prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako bilo kojim brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili manji od druga dva, u odgovarajućem redoslijedu. Prije samog otkrivanja Talesovog teorema o proporcionalnosti kojeg učenici otkrivaju mjerenjem duljina odgovarajućih stranica u sličnim trokutima, može kao motivacija poslužiti priča o tome kako je Tales izmjerio visinu piramide pomoću sjene te možemo učenicima dati zadatak da na isti način izmjere visinu neke građevine ili stabla u svojoj okolini. Nakon svladavanja pojmova obodnog i središnjeg kuta te poučka o obodnom i središnjem kutu, učenici otkrivaju Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice tako da mjere veličine obodnih kutova nad promjerom kružnice te generalizacijom nepotpunom indukciju zaključuju kako teorem vrijedi u svim slučajevima. Ova dva teorema se ne dokazuju na razini sedmog razreda. Također, u sedmom razredu učenici otkrivaju i koliki je zbroj kutova u mnogokutu. Crtanjem dijagonala iz svih vrhova mnogokuta uočavaju da su time mnogokut podijelili na $n-2$ trokuta, a kako je zbroj veličina unutarnjih kutova u svakome trokutu jednak 180°, zaključuju da je zbroj kutova u mnogokutu jednak $(n-2)\cdot 180^{\circ}$, dok su pitagorejci zbroj unutarnjih kutova u n - terokutu zapisivali kao $2n-4$ prava kuta. Mjerenjem, odnosno izrezivanjem kutova i njihovim spajanjem, učenici dolaze i do zaključka kako je zbroj vanjskih kutova n - terokuta jednak 360°, odnosno 4 prava kuta, odnosno kad spojimo sve kutove uočavamo da oni čine puni kut.

U osmom razredu, nakon kvadriranja i korjenovanja racionalnih brojeva, učenici otkrivaju skup realnih brojeva. Uočavaju da *svi* racionalni brojevi imaju ili konačan ili beskonačan, ali periodičan decimalni zapis te zaključuju da se $\sqrt{2}$ ne može zapisati u obliku racionalnog broja te ga stoga nazivamo iracionalnim brojem. Pitagorejci su otkrili da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj tako što su dokazali kako stranica kvadrata nije sumjerljiva njegovoj dijagonali. Dokaz da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj se ne provodi u osnovnoj školi. Nakon toga, učenici otkrivaju Pitagorin poučak, a zatim i njegov obrat. Pitagorin poučak otkrivaju mjerenjem duljina stranica pravokutnog trokuta te računanjem površina kvadrata nad tim stranicama. Zaključuju da je u svakom pravokutnom trokutu kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta. Taj teorem ne dokazuju onako kako je dokazan u Euklidovim *Elementima* već preko jednakosti površina gdje učenici izrezuju i slažu dijelove kvadrata na način za koji se pretpostavlja da su i pitagorejci dokazali. Nakon toga učenici mjerenjem duljina stranica i računanjem površina kvadrata otkrivaju obrat Pitagorina poučka. Dokaz obrata Pitagorina poučka s učenicima možemo provesti na način kako je opisan u Euklidovim *Elementima.* Alat dinamične geometrije je važno sredstvo, jer se pomoću njega učenici na više primjera uvjeravaju u uočene pravilnosti. Kako su u osmom razredu savladali kvadriranje i korjenovanje, za one učenike koje žele znati više, nakon Pitagorina poučka, ih možemo upoznati sa spiralom drugog korijena. Spiralu mogu konstruirati u alatu dinamične geometrije na već opisani način u prethodnom poglavlju. Također, za one učenike koji žele znati više, ili na dodatnoj nastavi, rješavanje kvadratnih jednadžbi moremo prikazati na način kojim su pitagorejci rješavali, to jest, geometrijskom algebrom.

Na srednjoškolskoj razini, točnije u prvom razredu srednje škole učenici ponavljaju sve dosad naučene Talesove teoreme. Jedina razlika u odnosu na osnovnoškolsku matematiku jest ta da određene teoreme i dokazuju. Najviše pažnje je posvećeno teoremu o proporcionalnosti jer ga učenici primijenjuju u raznim zadacima. Taj teorem dokazuju na način koji je već opisan, no to nije način na koji je Tales to dokazao. Talesov teorem o kutu nad promjerom kruga promatraju samo kao specijalan slučaj poučka o obodnom i središnjem kutu kojeg dokazuju na isti način kao i Tales. Upravo kroz te dokaze učenici se prvi put susreću s deduktivnim načinom zaključivanja. Dedukcija je način zaključivanja kod kojeg najprije dokazujemo opći zaključak kojeg zatim primijenjujemo u pojedinačnim slučajevima. Deduktivnom metodom uvijek dolazimo do točnih zaključaka ako su početne pretpostavke u dokazu točne. Talesov teorem o sukladnosti ne dokazujemo na isti način koji je opisan u Euklidovim *Elementima*, već samim preklapanjem dvaju trokuta koji se podudaraju u stranici i kutovima uz tu stranicu dolazimo do zaključka kako se ta trokuta sijeku i u trećoj točki jer se dva različita pravca mogu sjeći u samo jednoj točki. Teorem o zbroju kutova u trokutu dokazuju na isti način kao i pitagorejci.

U drugom razredu srednje škole u nastavnoj jedinici *Pravilni poliedri* učenike upoznajemo s Platonovim tijelima te načinom na koji ih je Platon povezao. Osim toga, učenici izrađuju i njihove modele od papira tako da izrezanu mrežu tijela saviju i zalijepe po bridovima i pronalaze modele u okolini. Mreže Platonovih tijela možemo koristiti i kao model na kojem zorno možemo prikazati od koliko se točno strana sastoji poliedar.

U četvrtom razredu srednje škole učenici dokazuju da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj na način koji je već opisan. Nakon što su obradili nizove i savladali matematičku indukciju, učenike možemo upoznati s figurativnim brojevima: trokutnim, kvadratnim i tako dalje. Učenici sami naslute formulu za sumu takvih brojeva te je onda dokazuju matematičkom indukcijom. Kod obrađivanja limesa, možemo spomenuti i Eudoksovu metodu ekshaustije, pošto se smatra da je u Eudoksovoj metodi ekshaustije prvi put bila prisutna upotreba limesa. Kod beskonačnog geometrijskog reda, kao motivaciju učenicima možemo dati Zenonov paradoks s Ahilom i kornjačom. Učenike treba navesti na zaključak da je rješenje paradoksa u tome što pojedinih vremenskih intervala ima beskonačno mnogo, ali je njihov zbroj konačan. Zato će u određenom trenutku Ahil ipak prestići kornjaču.

Već u nižim razredima osnovne škole učenici počinju izvoditi jednostavne geometrijske konstrukcije koristeći geometrijski pribor: ravnalo i šestar. Konstrukciju polovišta zadane dužine, to jest, konstrukciju simetrale dužine učenici otkrivaju u petom razredu. Konstrukciju okomice iz točke izvan pravca na dani pravac, iz točke na pravcu na pravac te konstrukciju pravca paralelnog danom pravcu, učenici konstruiraju koristeći dva ravnala, a ne samo ravnalo i šestar kako su koristili pitagorejci. U šestom razredu otkrivaju konstrukciju simetrale kuta te konstrukciju kutova veličina $60^o, 30^o, 120^o, 90^o$ i 45^o. Osim toga, učenici koristeći ravnalo i šetar znaju prenositi duljine danih dužina, a sad otkrivaju i kako prenositi veličine danih kutova. U sedmom razredu nakon Talesovog teorema o proporcionalnosti učenici otkrivaju i kako dijeliti dužine na jednake dijelove, a onda i u zadanom omjeru. U osmom razredu otkrivaju konstrukcije raznih mnogokuta, među kojima je i peterokut, čiju su konstrukciju znali i pitagorejci. U prvom razredu srednje škole ravnalom i šestarom izvode osnovne konstrukcije: konstrukcija polovišta dužine, okomice iz točke izvan pravca na dani pravac, okomice iz točke na pravcu na dani pravac te konstrukciju pravca paralelnog danom pravcu. Konstrukciju geometrijske sredine duljine dužina izvode primjenom Euklidova poučka, a konstrukciju četvrte proporcionale primjenom metode sličnosti. Također, znaju konstruirati i duljinu dužine $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ (tražena dužina je hipotenuza pravokutnog trokuta kojemu su a i b duljine kateta) i $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$ (tražena dužina je kateta pravokutnog trokuta kojemu je a duljina hipotenuze, a b duljina katete.)

Iz napisanog uočavamo da se činjenice, odnosno otkrića do kojih su došli starogrčki matematičari, provlače kroz različite razine obrazovanja. Na nastavnicima je da te teme prilagode učenicima različitih uzrasta, to jest, da se usredotoče na korake otkrivanja, u kojima krećemo od najjednostavnijih pojmova prema složenijim.

Bibliografija

[1] F. M. Brückler, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2007.

[2] T. L. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Clarendon Press, 1931.

[3] T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics - Vol. 1: From Thales to Euclid*, Clarendon Press, 1965.

[4] J. Stilwell, *Mathematics and Its History*, Springer Verlag, 2010.

[5] G. Isakovič Gleizer, *Povijest matematike za školu*, Školske novine & HMD, 2003.

[6] I. Jerković, *Tri klasična problema starogrčke matematike*, Diplomski rad, Zagreb, 2004.

[7] History Topics: Index of Ancient Greek mathematics, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Indexes/Greeks.html

[8] Euclid Elements: http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/elements.html

Sažetak

U radu se upoznajemo s najvećim otkrićima grčkih matematičara sve do Euklida. Stari Grci su uvelike utjecali na znanost, posebno na matematiku, a njihov utjecaj je vidljiv još i danas. Oko 500. godine prije Krista je došlo do preokreta u matematici jer je ona u to doba pod utjecajem pitagorejske škole postala apstraktna, a tvrdnje su se počele dokazivati. U prvom poglavlju ovog rada navodimo biografske podatke o Talesu te njegov doprinos matematici. U drugom poglavlju se upoznajemo s Pitagorom i njegovim sljedbenicima - pitagorejcima. U trećem poglavlju saznat ćemo na koji način su starogrčki matematičari nastojali riješiti tri problema starogrčke matematike. Nadalje, u četvrtom poglavlju ćemo se upoznati i s drugim starogrčkim matematičarima, među kojima su najistaknutiji Zenon i Eudoks. Rad završavamo s opisom primjene navedenih otkrića u nastavi matematike te naglaskom na diskusiji sličnosti i razlika starogrčkog i suvremenog pristupa današnjim školskim matematičkim temama.

Summary

The thesis presents the greatest discoveries of the Greek mathematician before Euclid. The ancient Greeks greatly influenced science, especially mathematics, and their influence is visible even today. About 500 BC a significant turn in mathematics appeared as the influence of the Pythagoreans changed it into an abstract science in which claims have to be proven. In the first chapter of the thesis we present biographical information about Thales and his contribution to mathematics. In the second chapter we meet Pythagoras and his followers - the Pythagoreans. In the third chapter, we describe how the ancient Greek mathematicians tried to solve three classical problems of ancient Greek mathematics. Furthermore, in the fourth chapter deals with other ancient Greek mathematicians of the time, including Zeno and Eudoxus. The thesis concludes with a description of the application of these discoveries in modern mathematics education, with emphasis on the discussion of similarities and differences of the ancient Greek and modern approach.

Životopis

Mateja Murat rođena je u Varaždinu 22. studenog 1991. godine. Pohađala je Osnovnu školu Petar Zrinski u Jalžabetu. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja upisuje opću gimnaziju u SŠ Prva gimnazija u Varaždinu u kojoj završava svoje srednjoškolsko obrazovanje. Nakon toga, godine 2010. upisuje Preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu, Matematičkom odsjeku kojeg završava 2014. godine. Iste godine upisuje Diplomski sveučilišni studij matematike; smjer nastavnički i završava ga 2016. godine.