SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Pavičić

SVOJSTVO EFEKTIVNOG POKRIVANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Zvonko Iljazović

Zagreb, srpanj, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Posebno bih se zahvalio svojim roditeljima i obitelji, koji su uz mene i podržavaju me i koji su mi uvijek u svakoj životnoj računici. Zahvalio bih se i svojem mentoru na njegovom trudu, vremenu i pomoći. Posljednje, ali ne i manje važno, zahvalio bih se i svojim prijateljima, koji su bili prisutni i činili život ugodnijim u svakom trenutku. S poštovanjem.

Sadržaj

Uvod

Ovim diplomskim radom želimo kroz prizmu izračunljivosti i metričkih prostora iskazati svojstvo efektivnog pokrivanja, koje je usko povezano upravo uz izračunljive metričke prostore. Izračunljivi metrički prostori s tim svojstvom su slični po nekim karakteristikama izračunljivim euklidskim prostorima.

Za početak, da bismo iskazali svojstvo efektivnog pokrivanja, potrebno je iskazati neke pojmove vezane uz izračunljivost, točnije vezano uz izračunljive funkcije. Takve funkcije u teoriji izračunljivosti nazivamo rekurzivnim funkcijama, s time da ćemo se u početnom dijelu ovog diplomskog rada koncentrirati na rekurzivne funkcije čija slika je u skupu prirodnih brojeva. Pomoću tih funkcija, pokazat ćemo i kako iskazati rekurzivnost skupova, što čini važan korak pri iskazivanju svojstva efektivnog pokrivanja. Potom ćemo promatrati rekurzivnost raznih skupova na brojnim primjerima, među kojima će biti i oni koji će se doticati djeljivosti i prostosti brojeva u rekurzivnim skupovima. Ti primjeri pokazat će se važnima za dokazivanje surjektivnosti rekurzivnih funkcija (a počesto i same rekurzivnosti) sa slikom u skupu racionalnih brojeva.

Dodatno, potrebno je poznavati i osnove metričkih prostora, no koncentrirat ćemo se na iskazivanju samog svojstva te ćemo odmah nakon definicije metričkog prostora iskazati definiciju izračunljivog metričkog prostora, a potom i racionalnog otvorenog i zatvorenog skupa u izračunljivom metričkom prostoru. Pomoću tih pojmova fiksirat ćemo određene funkcije i skupove, iskazati definiciju rekurzivno prebrojivih skupova te potom iskazati svojstvo efektivnog pokrivanja. Nadalje, navest ćemo rezultat koji daje dovoljan uvjet da bi izračunljivi metrički prostor imao svojstvo efektivnog pokrivanja, te ćemo navesti konkretan primjer.

Poglavlje 1

Rekurzivne funkcije

1.1 Inicijalne funkcije i osnovne operacije

Napomena 1.1.1. *Uzimamo da je* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Definicija 1.1.2. *Neka su* $s, z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcije definirane sa*

$$s(x) = x + 1,$$
$$z(x) = 0, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Za $n \in \mathbb{N}, n \geq 1,\ j \in \{1, 2, ..., n\}$ *neka je* $I_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *projekcija na j-tu koordinatu, to jest funkcija takva da je*

$$I_j^n(x_1, ..., x_n) = x_j, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}.$$

Za funkcije $s, z, I_j^n, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, j \in \{1, ..., n\}$ *kažemo da su inicijalne funkcije.*

Definicija 1.1.3. *Neka su* $k, n \in \mathbb{N}, n \geq 1, k \geq 1$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *i* $g_1, ..., g_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo funkciju* $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$h(x_1, ..., x_k) = f(g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_n(x_1, ..., x_k)).$$

Za funkciju h kažemo da je dobivena kompozicijom funkcija $f, g_1, ..., g_n$.

Napomena 1.1.4. *Uočimo: Ako je* $n = 1$*, onda je* $h(x_1, ..., x_k) = f(g_1(x_1, ..., x_k))$*, tj.* $h = f \circ g_1$.

Primjer 1.1.5. *Neka je* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 1.$$

Vrijedi

$$g(x_1, x_2, x_3) = s(I_1^3(x_1, x_2, x_3)),$$

dakle funkcija g je kompozicija funkcija s i I_1^3.

Napomena 1.1.6. *Uočimo:* $g(x_1, x_2, x_3) = I_1^3(g(x_1, x_2, x_3), I_2^3(x_1, x_2, x_3), I_3^3(x_1, x_2, x_3))$*, dakle* g *je kompozicija funkcija* I_1^3, g, I_2^3, I_3^3.

Primjer 1.1.7. *Neka je* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija. Definiramo* $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *sa*

$$h(a, b, c) = f(a, c).$$

Vrijedi:

$$h(a, b, c) = f(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c)).$$

Prema tome, h *je kompozicija funkcija* f, I_1^3, I_3^3.

Definicija 1.1.8. *Neka je* $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ *te neka su* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ *funkcije. Definiramo funkciju* $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *indukcijom po prvoj varijabli na sljedeći način:*

$$h(0, y_1, y_2, ..., y_k) = f(y_1, y_2, ..., y_k)$$

$$h(x + 1, y_1, ..., y_k) = g(h(x, y_1, ..., y_k), x, y_1, ..., y_k).$$

Za funkciju h *kažemo da je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* f *i* g.

Primjer 1.1.9. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$h(x, y) = x + y.$$

Postoje li funkcije f *i* g *takve da je* h *dobivena primitivnom rekurzijom od* f *i* g*, tj. postoje li funkcije* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *i* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *takve da vrijedi:*

$$h(0, y) = f(y)$$

$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y).$$

Iz definicije od h *je očito da je*

$$h(0, y) = y = I_y^1(y),$$

$$h(x + 1, y) = h(x, y) + 1 = g(h(x, y), x, y),$$

gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $g(a, b, c) = a + 1$*. Prema tome* h *je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija* I_1^1 *i* g.

Primjer 1.1.10. *Neka je* $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$h(x, y) = x \cdot y.$$

Vrijedi:

$$h(0, y) = 0 = z(y)$$

$$h(x + 1, y) = (x + 1) \cdot y = x \cdot y + y = h(x, y) + y = g(h(x, y), x, y)$$

gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s* $g(a, b, c) = a + c$. *Dakle,*

$$h(0, y) = z(y),$$

$$h(x + 1, y) = g(h(x, y), x, y).$$

Prema tome, funkcija h je dobivena primitivnom rekurzijom od funkcija z i g.

Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana sa* $zb(x, y) = x + y$. *Imamo*

$$g(a, b, c) = zb(a, c) = zb(I_1^3(a, b, c), I_3^3(a, b, c)),$$

dakle g je kompozicija funkcija zb, I_1^3, I_3^3.

Definicija 1.1.11. *Neka je* $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$, *te neka je* $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ *funkcija takva da za sve* $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *takav da je* $g(x_1, ..., x_k, y) = 0$. *Definiramo funkciju* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *sa*

$$f(x_1, ..., x_k) = \min\{y \in \mathbb{N} : g(x_1, ..., x_k, y) = 0\}.$$

Za funkciju f kažemo da je dobivena primjenom μ*-operatora na funkciju g. Pišemo*

$$f(x_1, ..., x_k) = \mu y(g(x_1, ..., x_k, y) = 0).$$

Primjer 1.1.12. *Neka je* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$g(x_1, x_2, x_3) = |(x_1 + x_2) - y|.$$

Tada za svaki $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *td.* $g(x_1, x_2, y) = 0$.

Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *funkcija dobivena primjerom* μ*-operatora na g. Tada je*

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$

Napomena 1.1.13. *Uočimo sljedeće: Ako je f funkcija dobivena primjenom* μ*-operatora na funkciju* $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, *onda za sve* $x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $g(x_1, ..., x_k, f(x_1, ..., x_k)) = 0$.

1.2 Rekurzivne funkcije kojima je kodomena skup prirodnih brojeva

Definicija 1.2.1. *Definirajmo niz* $(\mathcal{F}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *skupova funkcija induktivno na sljedeći način:*

Neka je $\mathcal{F}_0$ *skup svih inicijalnih funkcija. Pretpostavimo da je* $p \in \mathbb{N}$ *te da smo definirali skup* $\mathcal{F}_p$.

Definiramo skup $\mathcal{F}_{p+1}$ *kao skup svih funkcija h takvih da vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

1. $h \in \mathcal{F}_p$;
2. *postoje* $n \in \mathbb{N}$ *i funkcije* $f_1, g_1, ..., g_n \in \mathcal{F}_p$ *takvi da je h dobivena kompozicijom* $f_1, g_1, ..., g_n$;
3. *postoje* $f, g \in \mathcal{F}_p$ *takvi da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g ;*
4. *postoji* $f \in \mathcal{F}_p$ *takva da je h dobivena primjenom* μ*-operatora na f.*

Definicija 1.2.2. *Za funkciju f kažemo da je rekurzivna funkcija ako postoji* $p \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$f \in \mathcal{F}_p.$$

Napomena 1.2.3. *Uočimo da je svaka inicijalna funkcija rekurzivna.*

Nadalje, očito je

$$\mathcal{F}_p \subseteq \mathcal{F}_{p+1},$$

za svaki $p \in \mathbb{N}$*. Iz toga slijedi da je*

$$\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_j,$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$ *takve da je* $i \leq j$.

Primjer 1.2.4. *Neka je* $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$g(a, b, c) = a + 1.$$

Prema primjeru 1.1.5. g je kompozicija inicijalnih funkcija, stoga je $g \in \mathcal{F}_1$*, dakle rekurzivna.*

Propozicija 1.2.5. *i) Neka je* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$*, te neka su h, f,* $g_1, ..., g_n$ *funkcije takve da je h dobivena kompozicijom od f,* $g_1, ..., g_n$*. Pretpostavimo da su f,* $g_1, ..., g_n$ *rekurzivne funkcije. Tada je i h rekurzivna funkcija.*

ii) Neka su h, f, g funkcije takve da je h dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Pretpostavimo da su f i g rekurzivne funkcije. Tada je i h rekurzivna funkcija.

iii) Neka su f i g funkcije takve da je f dobivena primjenom μ-operatora na g. Pretpostavimo da je g rekurzivna funkcija. Tada je i f rekurzivna.

Dokaz. i) Budući da su f, g_1, ..., g_n rekurzivne funkcije, postoje $l, p_1, ..., p_n \in \mathbb{N}$ takvi da su

$$f \in \mathcal{F}_l,$$

$$g_1 \in \mathcal{F}_{p_1}, ..., g_n \in \mathcal{F}_{p_n}.$$

Neka je $q = \max\{l, p_1, ..., p_n\}$. Tada je $l \leq q$, $p_1 \leq q$, ..., $p_n \leq q$, pa je

$$\mathcal{F}_l \subseteq \mathcal{F}_q,$$

$$\mathcal{F}_{p_1} \subseteq \mathcal{F}_q, ..., \mathcal{F}_{p_n} \subseteq \mathcal{F}_q,$$

iz čega slijedi da su f, g_1, ..., g_n elementi od $\mathcal{F}_q$. Stoga je $h \in \mathcal{F}_{q+1}$. Prema tome, h je rekurzivna funkcija.

ii) Neka su $p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ takvi da su

$$f \in \mathcal{F}_{p_1}, g \in \mathcal{F}_{p_2}.$$

Neka je $q = \max\{p_1, p_2\}$. Tada su f, $g \in \mathcal{F}_q$, pa je $h \in \mathcal{F}_{q+1}$. Stoga je h rekurzivna funkcija.

iii) Neka je $p \in \mathbb{N}$ takav da je $g \in \mathcal{F}_p$. Tada je $f \in \mathcal{F}_{p+1}$, dakle f je rekurzivna funkcija.

□

Primjer 1.2.6. *Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$zb(x, y) = x + y.$$

Prema primjeru 1.1.9. zb je dobivena primitivnom rekurzijom od I_1^1 i g, gdje je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$g(a, b, c) = a + 1.$$

Funkcija I_1^1 je rekurzivna jer je inicijalna, a funkcija g je rekurzivna prema Primjeru 1.2.4. Iz prethodne propozicije, ii) dio, slijedi da je funkcija zb rekurzivna.

Primjer 1.2.7. *Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa*

$$h(x, y) = x \cdot y.$$

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa $g(a, b, c) = a + c$, te neka je zb funkcija iz prethodnog primjera.

Prema primjeru 1.1.10. g je kompozicija funkcija zb, I_1^3 i I_3^3. Iz i) dijela propozicije 1.2.5 slijedi da je g rekurzivna funkcija.

Prema primjeru 1.1.10. h je dobivena primitivnom rekurzijom od z i g. Stoga je h rekurzivna funkcija.

Primjer 1.2.8. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Za $a \in \mathbb{N}$ označimo s c_a konstantnu funkciju $c_a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s vrijednošću a, to jest*

$$c_a(x_1, ..., x_k) = a.$$

Tada je c_a rekurzivna funkcija. Dokažimo to indukcijom po a.

Za $a = 0$ imamo

$$c_0(x_1, ..., x_k) = 0 = z(I_1^k(x_1, ..., x_k)).$$

Stoga je c_0 rekurzivna funkcija kao kompozicija inicijalnih funkcija.

Pretpostavimo da je $a \in \mathbb{N}$, te da je c_a rekurzivna funkcija. Vrijedi

$$c_{a+1}(x_1, ..., x_k) = a + 1 = s(a) = s(c_a(x_1, ..., x_k)).$$

Dakle, c_{a+1} je kompozicija funkcija s i c_a koje su rekurzivne, pa je stoga i c_{a+1} rekurzivna funkcija.

Propozicija 1.2.9. *Neka je $c \in \mathbb{N}$ te neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija. Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da vrijedi:*

$$h(0) = c,$$

$$h(x + 1) = \gamma(h(x), x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$. Tada je h rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka je $H : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$H(x, y) = h(x),$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$, to jest

$$H(x, y) = h(I_1^2(x, y)).$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$H(0, y) = c(= h(0))$$

$$H(x + 1, y) = h(x + 1) = \gamma(h(x), x) = \gamma(H(x, y), x)$$

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću c. Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$g(a, b, c) = \gamma(I_1^3(a, b, c), I_2^3(a, b, c)).$$

Tada za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$H(0, y) = f(y)$$

$$H(x + 1, y) = g(H(x, y), x, y)$$

Iz ovoga zaključujemo da je funkcija H dobivena primitivnom rekurzijom od f i g. Funkcija f je rekurzivna prema Primjeru 1.2.8., a g je rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Stoga je H rekurzivna prema Propoziciji 1.2.5.

Iz definicije funkcije H slijedi da je

$$h(x) = H(x, 0),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$, prema tome

$$h(x) = H(I_1^1(x), z(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$.

Iz ovoga zaključujemo da je h dobivena kompozicijom funkcija H, I_1^1 i z. Prema tome, h je rekurzivna funkcija.

□

Propozicija 1.2.10. *Neka je pred* $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$pred(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Funkcija pred je rekurzivna.

Dokaz. Imamo

$$pred(0) = 0,$$

te za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$pred(x + 1) = x = I_2^2(pred(x), x).$$

Dakle,

$$pred(0) = 0,$$

$$pred(x + 1) = I_2^2(pred(x), x).$$

Iz prethodne propozicije slijedi (za $c = 0$, $\gamma = I_2^2$) da je *pred* rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.11. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*, te neka su* $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije*

$$f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

rekurzivne.

Dokaz. Neka je $zb : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana sa

$$zb(x, y) = x + y.$$

Tada za sve $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$(f + g)(x_1, ..., x_k) = f(x_1, ..., x_k) + g(x_1, ..., x_k) = zb(f(x_1, ..., x_k), g(x_1, ..., x_k)).$$

Slijedi da je $f + g$ dobivena kompozicijom funkcija zb, f i g, pa je $f + g$ rekurzivna prema propoziciji 1.2.5. i primjeru 1.2.6.

Analogno se dobiva da je $f \cdot g$ rekurzivna funkcija.

□

Definicija 1.2.12. *Za $x, y \in \mathbb{N}$ definiramo broj*

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \textit{ako je } x \geq y \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

Za funkciju

$$\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \to x \dot{-} y$$

kažemo da je modificirano oduzimanje.

Propozicija 1.2.13. *Modificirano oduzimanje je rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$f(x, y) = y \dot{-} x.$$

Dovoljno je dokazati da je funkcija f rekurzivna. Naime, ako je $\dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ modificirano oduzimanje, onda je

$$\dot{-} (x, y) = x \dot{-} y = f(y, x) = f(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y))$$

to jest $\dot{-}$ je kompozicija funkcija f, I_2^2 i I_1^2, pa je jasno da će rekurzivnost funkcije f povlačiti rekurzivnost funkcije $\dot{-}$.

Neka je $pred : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$pred(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

Prema Propoziciji 1.2.10., funkcija $pred$ je rekurzivna. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$y \dot{-} (x + 1) = pred(y \dot{-} x) \tag{1.1}$$

Imamo dva slučaja:

i)
$$y \dot{-} x = 0$$

Tada je $y \leq x$, pa je $y < x + 1$, te je

$$y \dot{-} (x + 1) = 0 = pred(0) = pred(y \dot{-} x),$$

dakle (1.1) vrijedi.

ii)
$$y \dot{-} x > 0$$

Tada je $y > x$ pa je $y \geq x + 1$. Slijedi da je

$$y \dot{-} (x + 1) = y - (x + 1) = (y - x) - 1 = (y \dot{-} x) - 1 = pred(y \dot{-} x).$$

Dakle, (1.1) vrijedi.
Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada, koristeći (1.1) dobivamo da je

$$f(0, y) = y$$
$$f(x + 1, y) = y \dot{-} (x + 1) = pred(y \dot{-} x)$$

Dakle,

$$f(0, y) = y \tag{1.2}$$
$$f(x + 1, y) = pred(f(x, y)) \tag{1.3}$$

Definirajmo $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ s $G(a, b, c) = pred(a)$. Tada je prema (1.3)

$$f(x + 1, y) = G(f(x, y), x, y)$$

Iz ovoga i činjenice da je $f(0, y) = I_1^1(y)$ zbog (1.2), zaključujemo da je f dobivena primitivnom rekurzijom od I_1^1 i G. Funkcija G je kompozicija funkcija *pred* i I_1^3, pa iz toga proizlazi da je i rekurzivna.

Stoga je i f rekurzivna.

□

Propozicija 1.2.14. *Neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $f(x, y) = y^x$. Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je $f(0, y) = 1 = H(y)$, te

$$f(x + 1, y) = y^{x+1} = y^x \cdot y = f(x, y) \cdot y = G(f(x, y), x, y),$$

pri čemu su $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s

$$H(y) = 1,$$

$$G = I_1^3 \cdot I_3^3.$$

Očito je da su funkcije H i G rekurzivne, te imamo

$$f(0, y) = H(y)$$

i

$$f(x + 1, y) = G(f(x, y), x, y).$$

Prema tome, f je dobivena primitivnom rekurzijom od H i G iz čega slijedi da je f rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.2.15. *Neka je $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$a(x, y) = |x - y|.$$

Tada je a rekurzivna funkcija.

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Tada je

$$|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x). \tag{1.4}$$

Neka je $\dot{-}$ modificirano oduzimanje, te neka je $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$f(x, y) = y \dot{-} x.$$

Vrijedi

$$f(x, y) = \dot{-}\,(y, x) = \dot{-}\,(I_2^2(x, y), I_1^2(x, y)),$$

pa rekurzivnost funkcije $\dot{-}$ povlači rekurzivnost funkcije f. Iz (1.4) slijedi da je

$$a(x, y) = \dot{-}\,(x, y) + f(x, y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$, to jest

$$a = mo + f,$$

gdje je $mo = \dot{-}$.

Prema tome, a je rekurzivna funkcija.

□

1.3 Rekurzivni skupovi

Definicija 1.3.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$ ako je karakteristična funkcija skupa S u $\mathbb{N}^k$*

$$\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

rekurzivna.

Podsjetimo se da je karakteristična funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ skupa S u $\mathbb{N}^k$ definirana sa:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S, \end{cases}$$

$x \in \mathbb{N}^k$.

Primjer 1.3.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada su $\emptyset$ i $\mathbb{N}^k$ rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$. Naime:*

$$\chi_{\mathbb{N}^k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

je konstantna funkcija s vrijednošću 1, a

$$\chi_{\emptyset} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

je konstantna funkcija s vrijednošću 0, stoga su $\chi_{\mathbb{N}^k}$ i $\chi_{\emptyset}$ rekurzivne funkcije (prema primjeru 1.2.8.)

Definicija 1.3.3. *Definiramo funkcije $sg, \overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa*

$$sg(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Funkcije sg i $\overline{sg}$ nazivamo signum i signum potez.

Teorem 1.3.4. *Funkcije sg i $\overline{sg}$ su rekurzivne.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{N}$. Primjetimo da vrijedi

$$sg(0) = 0$$

$$sg(x + 1) = \gamma_1(sg(x), x),$$

pri čemu je $\gamma_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 1. Funkcija γ_1 je rekurzivna prema primjeru 1.2.8. Stoga je funkcija sg rekurzivna, prema propoziciji 1.2.9.

Funkcija $\overline{sg}$ može se prikazati na sličan način:

$$\overline{sg}(0) = 1$$
$$\overline{sg}(x+1) = \gamma_2(\overline{sg}(x), x),$$

gdje je $\gamma_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 0. Stoga je $\overline{sg}$ rekurzivna funkcija. □

Primjer 1.3.5. *Neka je $a \in \mathbb{N}$. Tada je $\{a\}$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}$. Naime, za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\chi_{\{a\}}(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}.$$

Stoga za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{\{a\}}(x) = \overline{sg}(|x-a|).$$

Prema tome,

$$\chi_{\{a\}}(x) = \overline{sg} \circ f, \tag{1.5}$$

gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$f(x) = |x-a|.$$

Funkcija $abs : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s $abs(x,y) = |x-y|$ je rekurzivna prema propoziciji 1.2.15., a vrijedi $f(x) = abs(x,a) = abs(I_1^1(x), c_a(x)), \forall x \in \mathbb{N}$, gdje je $c_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću a.

Stoga je f kompozicija funkcija abs, I_1^1 i c_a, pa je f rekurzivna funkcija. Iz (1.5) *zaključujemo da je i $\chi_{\{a\}}$ rekurzivna funkcija.*

Dakle, $\{a\}$ je rekurzivan skup.

Propozicija 1.3.6. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada su funkcije*

$$f_1 + ... + f_n, f_1 \cdot ... \cdot f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$$

rekurzivne.

Dokaz. Dokažimo indukcijom po $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ da je

$$f_1 + ... + f_n$$

rekurzivna funkcija. Analogno dobivamo da je $f_1 \cdot ... \cdot f_n$ rekurzivna funkcija.

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Neka su $f_1, ..., f_{n+1} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije.
Vrijedi

$$f_1 + ... + f_{n+1} = (f_1 + ...f_n) + f_{n+1},$$

pa činjenica da je $f_1 + ... + f_{n+1}$ rekurzivna funkcija slijedi iz induktivne pretpostavke i propozicije 1.2.11. □

Primjer 1.3.7. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je $\{a\}$ rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$.*
Dokažimo to.
Imamo $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$, gdje su $a_1, ..., a_k \in \mathbb{N}$. Neka je $x \in \mathbb{N}^k$, $x = (x_1, ..., x_k)$.
Vrijedi

$$\begin{aligned}
\chi_{\{a\}}(x) &= \begin{cases} 1, & (x_1, ..., x_k) = (a_1, ..., a_k) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 1, & x_1 = a_1, ..., x_k = a_k \\ 0, & \text{inače} \end{cases} = \\
&= \overline{sg}(|x_1 - a_1|) \cdot ... \cdot \overline{sg}(|x_k - a_k|) = \\
&= \chi_{\{a_1\}}(x_1) \cdot ... \cdot \chi_{\{a_k\}}(x_k) = \\
&= \chi_{\{a_1\}}(I_1^k(x)) \cdot ... \cdot \chi_{\{a_k\}}(I_k^k(x)) = \\
&= (\chi_{\{a_1\}} \circ I_1^k)(x) \cdot ... \cdot (\chi_{\{a_k\}} \circ I_k^k)(x).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Prema tome

$$\chi_{\{a\}} = (\chi_{\{a_1\}} \circ I_1^k) \cdot ... \cdot (\chi_{\{a_k\}} \circ I_k^k),$$

pa iz primjera 1.3.5. i propozicije 1.3.6. slijedi da je $\chi_{\{a\}}$ rekurzivna funkcija.
Dakle, $\{a\}$ je rekurzivan skup u $\mathbb{N}^k$.

Primjer 1.3.8. *Neka je*

$$s = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x < y\}.$$

Tvrdimo da je s rekurzivan skup.
Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_s(x, y) = \begin{cases} 1, & x < y \\ 0, & x \geq y \end{cases}$$

Prema tome, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_s(x, y) = sg(y \dot{-} x).$$

Definirajmo funkciju $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ *sa*

$$f(x, y) = y \dot{-} x.$$

Tada je χ_s *kompozicija funkcija* sg *i* f. *Funkcija* sg *je rekurzivna prema teoremu 1.3.4., a za funkciju* f *smo vidjeli da je rekurzivna u dokazu propozicije 1.2.15. Prema tome,* χ_s *je rekurzivna funkcija.*

Primjer 1.3.9. *Neka je*

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x \leq y\}.$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\chi_S(x, y) = \overline{sg}(x \dot{-} y),$$

pa analogno prethodnom primjeru zaključujemo da je S *rekurzivan skup.*

Napomena 1.3.10. *Ako je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *i* $x \in \mathbb{N}^k$ $x = (x_1, ..., x_k)$, $y \in \mathbb{N}$, *onda ćemo pod*

$$(x, y)$$

obično podrazumijevati $k + 1$*-torku*

$$(x_1, ..., x_k, y).$$

Definicija 1.3.11. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$, *te* $x \in \mathbb{N}^k$ *takav da postoji* $y \in \mathbb{N}$ *sa svojstvom* $(x, y) \in S$.

Tada broj

$$\min\{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in S\}$$

označavamo s

$$\mu y((x, y) \in S).$$

Propozicija 1.3.12. *Neka je* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *te neka je* $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ *rekurzivan skup takav da za svaki* $x \in \mathbb{N}^k$ *postoji* $y \in \mathbb{N}$ *sa svojstvom da je* $(x, y) \in S$. *Neka je* $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ *funkcija definirana s*

$$f(x) = \mu y((x, y) \in S),$$

$x \in \mathbb{N}^k$. *Tada je f rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$g(x, y) = \overline{sg}(\chi_S(x, y)).$$

Očito je g rekurzivna funkcija.

Nadalje, za sve $x \in \mathbb{N}^k$ i $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(x, y) = 0 \iff (x, y) \in S.$$

Stoga je

$$f(x) = \mu y(g(x, y) = 0),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Prema tome, funkcija f je dobivena primjenom μ-operatora na funkciju g, pa je f rekurzivna. □

Propozicija 1.3.13. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka su S i T rekurzivni skupovi u $\mathbb{N}^k$.*

Tada su i skupovi

$$S \cup T,\ S \cap T \text{ i } S^c$$

rekurzivni.

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S \cap T}(x) = \chi_S(x) \cdot \chi_T(x),$$

pa je $\chi_{S \cap T}$ rekurzivna funkcija prema propoziciji 1.2.11.

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S \cup T}(x) = sg(\chi_S(x) + \chi_T(x)),$$

pa je $\chi_{S \cup T}$ rekurzivna funkcija kao kompozicija funkcija sg i $\chi_S + \chi_T$.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_{S^c}(x) = \overline{sg}(\chi_S(x)),$$

što povlači da je χ_{S^c} rekurzivna funkcija.

ZAKLJUČAK: Skupovi $S \cup T$, $S \cap T$ i S^c su rekurzivni.

□

Propozicija 1.3.14. *Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$.*

Nadalje, neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ s

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ . & \\ . & \\ . & \\ f_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases},$$

$\forall x \in \mathbb{N}^k$. *Tada je F rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F(x) = f_1(x) \cdot \chi_{S_1}(x) + ... + f_n(x) \cdot \chi_{S_n}(x)$$

pa tvrdnja propozicije slijedi iz propozicije 1.3.6. □

Primjer 1.3.15. *Neka je $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s*

$$\omega(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Tada je ω rekurzivna funkcija.

Naime, neka su $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s $f_1(x) = x$ i $f_2(x) = 1$, za svaki $x \in \mathbb{N}$, te neka su

$$S_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\},$$

$$S_2 = \{0\}.$$

Funkcije f_1 i f_2 su očito rekurzivne, a skupovi S_1 i S_2 su rekurzivni jer je $\chi_{S_1} = sg$, $\chi_{S_2} = \overline{sg}$. Vrijedi

$$\omega(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in S_1 \\ f_2(x), & x \in S_2 \end{cases}$$

pa iz prethodne propozicije slijedi da je ω rekurzivna funkcija.

Alternativno, možemo zaključiti da je ω rekurzivna iz činjenice da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\omega(x) = x \cdot sg(x) + \overline{sg}(x)$$

1.4 Djeljivost i rekurzivnost

Propozicija 1.4.1. *Funkcija $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definirana s*

$$f(x, y) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor, & \textit{ako je } y > 0 \\ x, & \textit{ako je } y = 0 \end{cases}$$

je rekurzivna.

Dokaz. Neka je

$$\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

funkcija iz prethodnog primjera. Neka je

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 | x < (z + 1)\omega(y)\}.$$

Za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_S(x, y, z) = sg[(z + 1)\omega(y) \dot{-} x] = sg(h(x, y, z))$$

gdje je $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$h(x, y, z) = (z + 1)\omega(y) \dot{-} x.$$

Vrijedi

$$h(x, y, z) = mo(g(x, y, z), I_1^3(x, y, z)),$$

gdje je *mo* modificirano oduzimanje, a funkcija $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ definirana s

$$g(x, y, z) = (z + 1)\omega(y).$$

Funkcija g je rekurzivna kao produkt rekurzivnih funkcija, te je stoga i h rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija, pa zaključujemo da je i χ_S rekurzivna funkcija.

Prema tome, S je rekurzivan skup. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$, $y > 0$. Neka je $k = f(x, y)$. Tada je

$$k = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor,$$

pa slijedi

$$k \leq \frac{x}{y} < k + 1$$

što povlači

$$ky \leq x < (k + 1)y \tag{1.7}$$

Pretpostavimo da je $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x < (z + 1)y$. Iz toga i (1.7) slijedi

$$ky < (z + 1)y,$$

pa je $k < z + 1$, to jest $k \leq z$. Dakle, $x < (z + 1)y$ (prema (1.7)) i $k \leq z$, za svaki $z \in \mathbb{N}$ takav da je $x < (z + 1)y$. Prema tome,

$$k = \mu z(x < (z + 1)y).$$

Time smo pokazali da je

$$f(x, y) = \mu z(x < (z + 1)y),$$

za svaki $x, y \in \mathbb{N}$, $y > 0$.

Iz prethodne jednakosti očito slijedi da je

$$f(x, y) = \mu z(x < (z + 1)\omega(y)),$$

za svaki $x, y \in \mathbb{N}$, $y > 0$. No ova jednakost vrijedi i za $y = 0$. Prema tome, vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Iz definicije skupa S je sada jasno da za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x, y) = \mu z((x, y, z) \in S).$$

Iz propozicije 1.3.12. slijedi da je f rekurzivna. □

Napomena 1.4.2 (cjelobrojno dijeljenje)**.** *Funkciju f iz prethodne propozicije ćemo označiti s D.*

Dakle, $D : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $D(x, y) = \begin{cases} \lfloor \frac{x}{y} \rfloor, & y > 0 \\ x, & y = 0. \end{cases}$

Primjer 1.4.3. *Neka je*

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y|x\}.$$

Dokažimo da je Δ rekurzivan skup. Neka su $x, y \in \mathbb{N}$, $y > 0$. Tada vrijedi

$$y|x \iff \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \iff \frac{x}{y} = \lfloor \frac{x}{y} \rfloor \iff \frac{x}{y} = D(x, y) \iff x = y \cdot D(x, y)$$

Dakle,

$$y|x \iff x = y \cdot D(x, y) \tag{1.8}$$

Budući da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $0|x \iff x = 0$, (1.8) *vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{N}$.*

Neka su $x, y \in \mathbb{N}$. Koristeći (1.8) *dobivamo*

$$(x, y) \in \Delta \iff x = y \cdot D(x, y) \iff |x - y \cdot D(x, y)| = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$\chi_\Delta(x, y) = \overline{sg}|x - y \cdot D(x, y)| \tag{1.9}$$

pa je χ_Δ kompozicija funkcija $\overline{sg}$ i g, gdje je

$$g(x, y) = |x - y \cdot D(x, y)|.$$

Funkciju g možemo prikazati kao kompoziciju funkcije a iz propozicije 1.2.15. i funkcija I_1^2 i $I_2^2 \cdot D$ koje su sve rekurzivne:

$$g(x, y) = a(I_1^2(x, y), I_2^2(x, y) \cdot D(x, y)) = a(I_1^2(x, y), (I_2^2 \cdot D)(x, y)).$$

Zaključujemo da je χ_Δ rekurzivna funkcija, pa je i skup Δ rekurzivan.

Primjer 1.4.4. *Neka je S skup svih parnih brojeva u $\mathbb{N}$. Skup S je rekurzivan skup.*
Naime, neka je Δ skup iz prethodnog primjera. Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_S(x) = \chi_\Delta(x, 2)$$

to jest

$$\chi_S(x) = \chi_\Delta(I_1^1(x), c(x)),$$

gdje je $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ konstantna funkcija s vrijednošću 2.
Prema tome, χ_S je rekurzivna kao kompozicija funkcija χ_Δ, I_1^1 i c, pa je i S rekurzivan skup.

Lema 1.4.5. *Postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$ vrijedi da je $f(x)$ najmanji prirodan broj veći od 1 koji dijeli x.*

Dokaz. Neka je Δ skup iz primjera 1.4.3. Definirajmo;

$$\Delta' = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid ((x, y) \in \Delta \text{ i } y > 1) \text{ ili } x = 1\}.$$

Dokažimo da je Δ' rekurzivan skup.
Neka su

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y > 1\}$$
$$\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x = 1\}$$

Za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{\Delta_1}(x, y) = sg(pred(y)),$$

gdje je funkcija *pred* iz propozicije 1.2.10., pa iz činjenice da su *sg* i *pred* rekurzivne funkcije, slijedi da je i Δ_1 rekurzivan skup.
Nadalje, za sve $x, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{\Delta_2}(x, y) = \overline{sg}|x - 1| = \overline{sg}(a(x, 1))$$

gdje je $a : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$a(u, v) = |u - v|,$$

za sve $u, v \in \mathbb{N}$. Znamo da je a rekurzivna funkcija pa lako zaključujemo da je Δ_2 rekurzivan skup.
Iz definicije skupa Δ' slijedi da je

$$\begin{aligned}\Delta' &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid ((x, y) \in \Delta \text{ i } (x, y) \in \Delta_1) \text{ ili } (x, y) \in \Delta_2\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, y) \in \Delta \cap \Delta_1 \text{ ili } (x, y) \in \Delta_2\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid (x, y) \in (\Delta \cap \Delta_1) \cup \Delta_2\} = \\ &= (\Delta \cap \Delta_1) \cup \Delta_2.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Dakle, $\Delta' = (\Delta \cap \Delta_1) \cup \Delta_2$, pa iz propozicije 1.3.13. slijedi da je Δ' rekurzivan skup.

Neka je $x \in \mathbb{N}$. Ako je $x = 1$, onda za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $(x, y) \in \Delta'$.

Ako je $x = 0$, onda je $(x, y) \in \Delta'$, za svaki $y \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $y \geq 2$.

Ako je $x \geq 2$, onda je $(x, x) \in \Delta'$.

Prema tome, za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $(x, y) \in \Delta'$.

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$f(x) = \mu y((x, y) \in \Delta').$$

Prema propoziciji 1.3.12. funkcija f je rekurzivna.

Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Tada za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(x, y) \in \Delta' \iff y|x \text{ i } y > 1.$$

Prema tome,

$$f(x) = \min\{y \in \mathbb{N} \mid (x, y) \in \Delta'\} = \min\{y \in \mathbb{N} \mid y|x \text{ i } y > 1\}.$$

Dakle, f je tražena funkcija. □

1.5 Skup prostih brojeva i odgovarajuće rekurzivne funkcije

Propozicija 1.5.1. *Skup svih prostih brojeva je rekurzivan.*

Dokaz. Neka je P skup svih prostih brojeva. Neka je f funkcija iz prethodne leme.

Tada za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x \in P \iff x \geq 2 \text{ i } f(x) = x.$$

Stoga je

$$\chi_P(x) = \overline{sg}(x \dot{-} f(x)) \cdot sg(x \dot{-} 1), \forall x \in \mathbb{N}.$$

Iz ovoga zaključujemo da je χ_P rekurzivna funkcija, pa je i skup P rekurzivan. □

Lema 1.5.2. *Neka je $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana tako da je za svaki $x \in \mathbb{N}$ $g(x)$ najmanji prost broj veći od x. Tada je g rekurzivna funkcija.*

Dokaz. Neka je

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x < y \text{ i } y \text{ prost}\}.$$

Dokažimo da je S rekurzivan skup. Neka je P skup svih prostih brojeva.

Prema prethodnoj propoziciji P je rekurzivan skup. Iz definicije skupa S slijedi da je

$$\chi_S(x,y) = sg(y \dot{-} x) \cdot \chi_P(y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{N}$, iz čega zaključujemo da je χ_S rekurzivna funkcija. Dakle, S je rekurzivan skup.

Za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$g(x) = \mu y((x,y) \in S),$$

pa iz propozicije 1.3.12. slijedi da je g rekurzivna funkcija.

□

Definicija 1.5.3. *Neka je $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija takva da je za svaki $i \in \mathbb{N}$ broj*

$$p(i)$$

definiran kao $i+1$ (i plus prvi) prost broj.

Dakle, $p(0) = 2$, $p(1) = 3$, $p(2) = 5$, $p(3) = 7$, ...

Propozicija 1.5.4. *Funkcija p je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je g funkcija iz prethodne leme. Tada vrijedi:

$$p(0) = 2,$$

$$p(x+1) = g(p(x)), \forall x \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Neka je $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s $\gamma(x,y) = g(x)$, za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Iz činjenice da je g rekurzivna funkcija slijedi da je γ rekurzivna funkcija.

Nadalje, iz (1.11) slijedi da je

$$p(0) = 2$$

$$p(x+1) = \gamma(p(x), x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$. Iz propozicije 1.2.9. slijedi da je funkcija p rekurzivna. □

Definicija 1.5.5. *Neka je $e : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana tako da za sve $x, i \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$e(x,i) = \begin{cases} \textit{eksponent kojim prost broj } p_i \textit{ ulazi u rastav od } x \textit{ na proste faktore}, & \textit{ako je } x \geq 1 \\ 0 & \textit{ako je } x = 0 \end{cases}$$

Teorem 1.5.6. *Funkcija e je rekurzivna.*

Dokaz. Neka je $S = \{(x, i, y) \in \mathbb{N} \mid p_i^{y+1} \nmid x \text{ ili } x = 0\}$. Dokažimo da je S rekurzivan skup.

Neka je

$$S_1 = \{(x, i, y) \mid p_i^{y+1} \nmid x\}$$

$$S_2 = \{(x, i, y) \mid x = 0\}.$$

Očito je

$$S = S_1 \cup S_2.$$

Stoga je, prema propoziciji 1.3.13. dovoljno dokazati da su S_1 i S_2 rekurzivni skupovi.

Za sve $x, i, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\chi_{S_2}(x, i, y) = \overline{sg}(I_1^3(x, i, y))$$

pa je χ_{S_2} očito rekurzivna funkcija. Dakle, S_2 je rekurzivan skup.

Neka je

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y|x\}.$$

Prema primjeru 1.4.3., Δ je rekurzivan skup. Neka su $x, i, y \in \mathbb{N}$. Vrijedi

$$p_i^{y+1} \nmid x \iff (x, p_i^{y+1}) \notin \Delta.$$

Stoga je

$$\chi_{S_1}(x, i, y) = \overline{sg}(\chi_\Delta(x, p_i^{y+1})). \tag{1.12}$$

Da bismo dokazali da je S_1 rekurzivan skup, potrebno je dokazati da je χ_{S_1} rekurzivna funkcija, a u tu svrhu je prema (1.12) dovoljno dokazati da je funkcija $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$,

$$f(x, i, y) = \chi_\Delta(x, p_i^{y+1})$$

rekurzivna.

Neka je $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$g(x, i, y) = p_i^{y+1}.$$

Za sve $x, i, y \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x, i, y) = \chi_\Delta(I_1^3(x, i, y), g(x, i, y)).$$

Dakle f je kompozicija funkcija χ_Δ, I_1^3 i g. Stoga je dovoljno dokazati da je g rekurzivna.

Neka je $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$h(a, b) = b^a.$$

Prema propoziciji 1.2.14. funkcija h je rekurzivna. Imamo

$$g(x, i, y) = h(y + 1, p_i),$$

za sve $x, i, y \in \mathbb{N}$. Neka su funkcije $h_1, h_2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ funkcije definirane s

$$h_1(x, i, y) = y + 1,$$

$$h_2(x, i, y) = p_i = p(i).$$

Očito su h_1 i h_2 rekurzivne funkcije (propozicija 1.5.4.). Funkcija g je kompozicija funkcija h, h_1 i h_2, pa je stoga i ona rekurzivna.

S obzirom da je funkcija f kompozicija funkcija χ_Δ, I_1^3 i g, koje su sve rekurzivne, i funkcija f je rekurzivna.

Stoga je i χ_{S_1} rekurzivna funkcija, te je i skup S kao unija skupova S_1 i S_2 rekurzivan.

Neka su $x, i \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je

$$e(x, i) = \mu y((x, i, y) \in S). \tag{1.13}$$

Za $x = 0$, jednakost (1.13) vrijedi, naime po definiciji je

$$e(0, i) = 0,$$

a $(0, i, y) \in S$, za svaki $y \in \mathbb{N}$.

Uzmimo da je $x \geq 1$. Neka je

$$k = e(x, i).$$

Tada $p_i^k | x$, ali $p_i^{k+1} \nmid x$. Očito za svaki $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y < k$ vrijedi

$$p_i^{y+1} | x,$$

to jest $(x, i, y) \notin S$, a $(x, i, k) \in S$. Prema tome, (1.13) vrijedi. Iz propozicije 1.3.12. slijedi da je e rekurzivna funkcija. □

Definicija 1.5.7. *Neka je $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana tako da za svaki x vrijedi*

$$l(x) = \begin{cases} \text{najveći } i \in \mathbb{N} \text{ takav da } p_i \mid x, & x \geq 2 \\ 0 & x = 0 \text{ ili } x = 1. \end{cases}$$

Teorem 1.5.8. *Funkcija l je rekurzivna.*

Dokaz. Lako se indukcijom dobiva da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$x < p_x. \tag{1.14}$$

Neka je $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$g(x, y) = sg(x \dot{-} 1) \cdot \overline{sg}(e(x, x \dot{-} y)).$$

Funkcija g je rekurzivna kao umnožak rekurzivnih funkcija.

Neka je $x \in \mathbb{N}$. Tada postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x, y) = 0$. Ovo je očito ako je $x = 0$ ili $x = 1$. Ako je $x \geq 2$, onda postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da $p_i \mid x$, pa je

$$e(x, i) > 0. \tag{1.15}$$

Imamo $i \leq x$ (u suprotnom bi iz $x < i$ slijedilo $p_x < p_i$, pa bi iz (1.14) slijedilo $x < p_i$, što je nemoguće jer p_i dijeli x). Neka je

$$y = x - i.$$

Tada je $y \in \mathbb{N}$, te je $x \dot{-} y = x - y = i$, pa je $e(x, x \dot{-} y) > 0$ (prema (1.15)).

Prema tome, $g(x, y) = 0$. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija definirana s

$$f(x) = \mu y(g(x, y) = 0).$$

Očito je f rekurzivna funkcija.

Neka je $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Neka je

$$m = l(x).$$

Imamo $p_m \mid x$, pa zaključujemo da je $m \leq x$. Neka je

$$k = x - m.$$

Imamo

$$g(x, k) = \overline{sg}(e(x, x - k)) = \overline{sg}(e(x, m)) = 0$$

.

S druge strane, ako je $y \in \mathbb{N}$ takav da je $y < k$, onda je

$$y < x - m,$$

pa je

$$m < x - y,$$

što povlači da p_{x-y} ne dijeli x (prema definiciji broja m), to jest

$$e(x, x - y) = 0,$$

iz čega slijedi da je

$$g(x, y) = 1.$$

Dakle, k je najmanji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $g(x, y) = 0$. Prema tome, $k = f(x)$, to jest

$$x - m = f(x),$$

pa je

$$m = x \dot{-} f(x).$$

Dakle,

$$l(x) = x \dot{-} f(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$. Stoga je

$$l(x) = sg(x \dot{-} 1) \cdot (x \dot{-} f(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}$, iz čega slijedi da je l rekurzivna funkcija. □

Propozicija 1.5.9. *Postoje rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je*

$$\{(\sigma(i, 0), ..., \sigma(i, \eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$, to jest skup

$$\{(a_0, ..., a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}\}$$

Dokaz. Definirajmo $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa

$$\sigma(i, j) = e(i, j) \dot{-} 1,$$

$$\eta(i) = l(i),$$

za sve $i, j \in \mathbb{N}$. Očito je da su σ i η rekurzivne funkcije. Pokažimo da ove funkcije imaju traženo svojstvo.

Očito je

$$\{\sigma(i, 0), ..., \sigma(i, \eta(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{(a_0, ..., a_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}\}.$$

Obratno, pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$, te da su $a_0, ..., a_n \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$i = p^{a_0+1} \cdot ... \cdot p^{a_n+1}.$$

Imamo

$$\sigma(i, 0) = e(i, 0 \dot{-} 1 = a_0 \text{ , ... , } \sigma(i, n) = e(i, n) \dot{-} 1 = a_n,$$

te

$$\eta(i) = l(i) = n.$$

Prema tome,

$$(\sigma(i, 0), ..., \sigma(i, \eta(i))) = (a_0, ..., a_n).$$

□

1.6 Rekurzivne funkcije s kodomenom izvan skupa prirodnih brojeva

Definicija 1.6.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$. Kažemo da je f rekurzivna funkcija ako postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i*

$$f(x) = (-1)^{c(x)} \frac{a(x)}{b(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Napomena 1.6.2. *UOČIMO SLJEDEĆE: Ako je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivna funkcija, onda je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$.*

Lema 1.6.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

i) Neka su $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada postoje rekurzivne funkcije $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(-1)^{c(x)} a(x) = f(x) - g(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

ii) Neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne funkcije. Tada postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) - g(x) = (-1)^{c(x)} a(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Dokaz. i) Neka je

$$S = \{x \in \mathbb{N}^k \mid c(x) \in 2\mathbb{N}\}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$\chi_S(x) = \chi_{2\mathbb{N}}(c(x)).$$

Stoga je χ_S rekurzivna funkcija kao kompozicija funkcija $\chi_{2\mathbb{N}}$ i c ($\chi_{2\mathbb{N}}$ je rekurzivna jer je $2\mathbb{N}$ rekurzivan skup prema primjeru 1.4.4.).

Dakle, S je rekurzivan skup.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(-1)^{c(x)} a(x) = \begin{cases} a(x), & x \in S \\ -a(x), & x \notin S \end{cases} = \begin{cases} a(x) - 0, & x \in S \\ 0 - a(x), & x \notin S \end{cases} \tag{1.16}$$

Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$f(x) = \begin{cases} a(x), & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in S \\ a(x), & x \notin S \end{cases}$$

Iz propozicije 1.3.14. slijedi da su f i g rekurzivne.

Iz (1.16) slijedi da je

$$(-1)^{c(x)}a(x) = f(x) - g(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

ii) Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$f(x) - g(x) = (-1)^{\overline{sg}(f(x) \dot{-} g(x))} \cdot |f(x) - g(x)|$$

Definirajmo $c, a : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sa

$$c(x) = \overline{sg}(f(x) \dot{-} g(x)) \text{ i}$$

$$a(x) = |f(x) - g(x)|.$$

Funkcija c je kompozicija funkcija $\overline{sg}$ i h, gdje je $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$,

$$h(x) = f(x) \dot{-} g(x).$$

Funkcija h je rekurzivna jer je kompozicija modificiranog oduzimanja i funkcija f i g. Stoga je c rekurzivna funkcija.

Funkcija a je kompozicija funkcije $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(x, y) \mapsto |x - y|$ i funkcija f i g.

Iz propozicije 1.2.15. slijedi da je a rekurzivna funkcija. Stoga su a i $c$tražene funkcije.

□

Propozicija 1.6.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ te neka su $f, g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije*

$$-f, |f|, f + g, f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$$

rekurzivne.

Dokaz. Budući da su f i g rekurzivne funkcije, postoje rekurzivne funkcije $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b_1(x) \neq 0$, $b_2(x) \neq 0$,

$$f(x) = (-1)^{c_1(x)} \frac{a_1(x)}{b_1(x)} \text{ i}$$

$$g(x) = (-1)^{c_2(x)} \frac{a_2(x)}{b_2(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f+g)(x) = \frac{(-1)^{c_1(x)} a_1(x) b_2(x) + (-1)^{c_2(x)} a_2(x) b_1(x)}{b_1(x) b_2(x)}.$$

Iz propozicije 1.2.11. i prethodne leme pod *i*) slijedi da postoje rekurzivne funkcije $f_1, g_1 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(-1)^{c_1(x)} a_1(x) b_2(x) = f_1(x) - g_1(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Isto tako, postoje rekurzivne funkcije $f_2, g_2 : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(-1)^{c_2(x)} a_2(x) b_1(x) = f_2(x) - g_2(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$.

Stoga je

$$(f+g)(x) = \frac{f_1(x) - g_1(x) + f_2(x) - g_2(x)}{b_1(x) b_2(x)} = \frac{(f_1(x) + f_2(x)) - (g_1(x) + g_2(x))}{b_1(x) b_2(x)}$$

Iz propozicije 1.2.11. i prethodne leme pod *ii*) slijedi da postoje rekurzivne funkcije $a, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$(f_1(x) + f_2(x)) - (g_1(x) + g_2(x)) = (-1)^{c(x)} a(x),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Stoga je

$$(f+g)(x) = \frac{(-1)^{c(x)} a(x)}{b_1(x) b_2(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Prema tome, $f + g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ je rekurzivna funkcija.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = (-1)^{c_1(x)+c_2(x)} \frac{a_1(x) a_2(x)}{b_1(x) b_2(x)},$$

pa je očito da je $f \cdot g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija.

Nadalje, za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(-f)(x) = (-1)^{c_1(x)+1}\frac{a_1(x)}{b_1(x)} \text{ i}$$

$$|f|(x) = (-1)^0\frac{a_1(x)}{b_1(x)},$$

stoga su i $(-f), |f| : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivne. □

Neka je $x \in \mathbb{R}$, te neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$|x - q| < \epsilon.$$

Naime, imamo $x < x + \epsilon$, pa postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < q < x + \epsilon$, iz čega slijedi

$$0 < q - x < \epsilon.$$

Dakle, $|x - q| < \epsilon$.

Posebno, za svaki $x \in \mathbb{R}$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ postoji $q \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$|x - q| < 2^{-i}.$$

Definicija 1.6.5. *Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. Za f kažemo da je rekurzivna funkcija ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ takva da je*

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Propozicija 1.6.6. *Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija. Tada je f rekurzivna i kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$.*

Dokaz. Budući da je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{Q}$ rekurzivna funkcija, postoje rekurzivne funkcije $a, b, c : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je $b(x) \neq 0$ i

$$f(x) = (-1)^{c(x)}\frac{a(x)}{b(x)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{Q}$ sa $F(x, i) = f(x)$, za svaki $x \in \mathbb{N}^k, i \in \mathbb{N}$. Tada je

$$F(x, i) = (-1)^{c(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{1.17}$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

Definirajmo funkcije $A, B, C : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ sa

$$A(x, i) = a(x) \ , B(x, i) = b(x) \ , C(x, i) = c(x).$$

Neka su $x_1, ..., x_k, i \in \mathbb{N}$. Imamo

$$A(x_1, ..., x_k, i) = a(I_1^{k+1}(x_1, ..., x_k, i), ..., I_k^{k+1}(x_1, ..., x_k, i))$$

pa slijedi da je A kompozicija funkcija a, I_1^{k+1}, ..., I_k^{k+1}. Stoga je A rekurzivna funkcija. Analogno zaključujemo da su funkcije B i C rekurzivne.

Iz definicije funkcija A, B i C i (1.17) slijedi da je

$$F(x, i) = (-1)^{C(x,i)} \cdot \frac{A(x, i)}{B(x, i)},$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$. Stoga je F rekurzivna funkcija.

Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ i za svaki $i \in \mathbb{N}$ očito vrijedi

$$|f(x) - F(x, i)| = 0,$$

pa je

$$|f(x) - F(x, i)| < 2^{-i}.$$

Prema tome, f je rekurzivna kao funkcija $\mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$. □

Poglavlje 2

Osnove metričkih prostora

Definicija 2.0.7. *Neka je X neprazan skup, te $d : X \times X \to \mathbb{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima:*

1. $d(x, y) \geq 0$, *za sve* $x, y \in X$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$, *za sve* $x, y \in X$
3. $d(x, y) = d(y, x)$, *za sve* $x, y \in X$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, *za sve* $x, y, z \in X$. *(nejednakost trokuta)*

Tada za d kažemo da je metrika na skupu X, a za uređeni par (X, d) kažemo da je metrički prostor.

Primjer 2.0.8. *Neka je $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d(x, y) = |x - y|,$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$. Očito je $d(x, y) \geq 0$. Nadalje, $d(x, y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$. Vrijedi i $d(x, y) = d(y, x)$.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}$. Imamo

$$d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - y| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Dakle, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$. Zaključujemo da je d metrika na $\mathbb{R}$. Za d kažemo da je euklidska metrika.

Primjer 2.0.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|.$$

Očito je da d zadovoljava svojstva 1., 2. i 3. iz definicije metrike. Dokažimo da zadovoljava i četvrto svojstvo.

Neka su $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $z = (z_1, ..., z_n)$. Imamo

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n + z_n - y_n| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + ... + |x_n - z_n| + |z_n - y_n| \qquad (2.1) \\ &= (|x_1 - z_1| + ... + |x_n - z_n|) + (|z_1 - y_1| + ... + |z_n - y_n|) \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Dakle, nejednakost trokuta vrijedi. Prema tome, d je metrika na $\mathbb{R}^n$.

Uočimo da je za $n = 1$ d euklidska metrika na $\mathbb{R}$.

2.1 Izračunljivi metrički prostori

Definicija 2.1.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, te neka je $A \subseteq X$. Kažemo da je A gust skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in X$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$.*

Primjer 2.1.2.

1. *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada je X gust skup u (X, d). Naime, za svaki $x \in X$ i za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in X$ takav da je $d(x, a) < \epsilon$, jer možemo uzeti $a = x$.*

2. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je d metrika na $\mathbb{R}^n$ iz prethodnog primjera. Tada je $\mathbb{Q}^n$ gust skup u metričkom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$.*

   Prvo uočimo sljedeće; za svaki $k \in \mathbb{R}$ i za svaki $\delta > 0$ postoji $l \in \mathbb{Q}$ takav da je

   $$|k - l| < \delta.$$

   To slijedi iz činjenice da postoji $l \in \mathbb{Q}$ takav da je $k < l < k + \delta$ (jer je $k < k + \delta$), a iz ovoga slijedi da je $0 < l - k < \delta$, pa je $|l - k| = l - k < \delta$. Neka je $x \in \mathbb{R}^n$ te neka je $\epsilon > 0$. Imamo $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

   Postoje brojevi $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ takvi da je

   $$|x_1 - a_1| < \frac{\epsilon}{n}, \dots, |x_n - a_n| < \frac{\epsilon}{n}.$$

   Definirajmo $a = (a_1, ..., a_n)$. Tada je $a \in \mathbb{Q}^n$ i

   $$d(x, a) = |x_1 - a_1| + ... + |x_n - a_n| < \frac{\epsilon}{n} \cdot n = \epsilon.$$

   Dakle, $d(x, a) < \epsilon$.

3. *Neka je d euklidska metrika. Skup* $[0,\infty\rangle$ *nije gust u metričkom prostoru* $(\mathbb{R}, d)$*. Naime, neka je* $x = -1$*. Tada za svaki* $a \in [0,\infty\rangle$ *vrijedi*

$$d(x,a) = |x-a| = |a-x| = |a+1| = a+1 \geq 1.$$

Prema tome, ako uzmemo $\epsilon = \frac{1}{2}$*, ne postoji* $a \in [0,\infty\rangle$ *takav da je* $d(x,a) < \epsilon$*.*

Definicija 2.1.3. *Neka je* (X,d) *metrički prostor te neka je* (x_i) *niz u X. Kažemo da je* (x_i) *gust niz u* (X,d) *ako je* $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *gust skup u* (X,d)*.*

Definicija 2.1.4. *Neka je* (X,d) *metrički prostor te neka je* $\alpha : \mathbb{N} \to X$ *niz u X* $(\alpha = (\alpha_i))$ *koji je gust u* (X,d) *te takav da je funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ *rekurzivna. Tada za uređenu trojku* (X,d,α) *kažemo da je izračunljiv metrički prostor.*

Primjer 2.1.5. *Neka je d euklidska metrika te neka je* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ *funkcija definirana s*

$$\alpha(i) = (-1)^{e(i,0)} \cdot \frac{e(i,1)}{e(i,2)+1}.$$

Funkcija α *je očito rekurzivna, a vrijedi i da je surjektivna. Naime, ako je* $q \in \mathbb{Q}$*, onda postoje* $a,b,c \in \mathbb{N}$ *takvi da je* $q = (-1)^c \frac{a}{b+1}$*, pa za* $i = 2^c \cdot 3^a \cdot 5^b$ *vrijedi*

$$\alpha(i) = (-1)^{e(i,0)} \frac{e(i,1)}{e(i,2)+1} = (-1)^c \cdot \frac{a}{b+1} = q.$$

Dakle, $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ *pa je prema prethodnom primjeru pod* 2. α *gust niz u* $(\mathbb{R}, d)$*.*

Neka su $f, g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$ *funkcije definirane s*

$$f_1(i,j) = \alpha_i \ i$$

$$g(i,j) = \alpha_j.$$

Slično kao u dokazu propozicije 1.6.6. zaključujemo da su f i g rekurzivne funkcije. Za svaki $i, j \in \mathbb{N}$ *imamo*

$$d(\alpha_i, \alpha_j) = |\alpha_i - \alpha_j| = |f(i,j) - g(i,j)|$$

Stoga je funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ *jednaka funkciji* $|f-g|$ *koja je rekurzivna prema propoziciji 1.6.4.*

Dakle, funkcija $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{Q}$, $(i,j) \mapsto d(\alpha_i, \alpha_j)$ *je rekurzivna, pa je rekurzivna i kao funkcija* $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{R}$ *(prema propoziciji 1.6.6.).*

ZAKLJUČAK: $(\mathbb{R}, d, \alpha)$ *je izračunljiv metrički prostor.*

2.2 Racionalni otvoreni skupovi u izračunljivim metričkim prostorima

Definicija 2.2.1. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ i $r > 0$. Definirajmo*

$$K(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}.$$

Za $K(x_0, r)$ kažemo da je otvorena kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).

Nadalje, definiramo

$$\overline{K}(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Za $\overline{K}(x_0, r)$ kažemo da je zatvorena kugla oko x_0 radijusa r u metričkom prostoru (X, d).

Definicija 2.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor te $U \subseteq X$. Kažemo da je U otvoren skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki $x \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x, r) \subseteq U$.*

Propozicija 2.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$, $r_0 > 0$. Tada je $K(x_0, r_0)$ otvoren skup u metričkom prostoru (X, d).*

Dokaz. Neka je $x \in K(x_0, r_0)$. Tada je

$$d(x, x_0) < r_0.$$

Odaberimo pozitivan realan broj r takav da je

$$d(x, x_0) + r < r_0.$$

Dokažimo da je

$$K(x, r) \subseteq K(x_0, r_0). \tag{2.2}$$

Neka je $y \in K(x, r)$. Tada je $d(y, x) < r$, pa imamo

$$d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r + d(x, x_0) < r_0,$$

dakle $d(y, x_0) < r_0$, što znači da je $y \in K(x_0, r_0)$.

Time smo dokazali da vrijedi (2.2), prema tome, $K(x_0, r_0)$ je otvoren skup. □

Definicija 2.2.4. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Neka je $i \in \mathbb{N}$ te $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$. Za*

$$K(\alpha_i, r)$$

kažemo da je racionalna otvorena kugla u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α), a za

$$\overline{K}(\alpha_i, r)$$

kažemo da je racionalna zatvorena kugla u izračunljivom metričkom prostoru (X, d, α).

Od sad pa nadalje, neka je $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ neka fiksirana rekurzivna funkcija čija je slika jednaka $\mathbb{Q} \cap \langle 0, -\infty \rangle$. Takva funkcija sigurno postoji, naime možemo definirati $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$,

$$q(i) = \frac{e(i,0)+1}{e(i,1)+1}.$$

Tada je q očito rekurzivna funkcija, nadalje očito je $q(i)$ pozitivan racionalan broj, za svaki $i \in \mathbb{N}$, a s druge strane, ako je r pozitivan racionalan broj, onda je $r = \frac{a+1}{b+1}$, za neke $a, b \in \mathbb{N}$, pa je $r = q(2^a \cdot 3^b)$. Dakle, slika od q je $\mathbb{Q} \cap \langle 0, +\infty \rangle$.

Nadalje, neka su $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fiksirane rekurzivne funkcije takve da je

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^2. \tag{2.3}$$

Takve funkcije sigurno postoje, na primjer možemo definirati

$$\tau_1(i) = e(i,0) \text{ i } \tau_2(i) = e(i,1).$$

Očito su tada τ_1 i τ_2 rekurzivne funkcije, vrijedi

$$\{(\tau_1(i), \tau_2(i)) \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}^2,$$

a ako je $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, onda za $i = 2^a \cdot 3^b$ vrijedi $a = \tau_1(i)$, $b = \tau_2(i)$, to jest

$$(a, b) = (\tau_1(i), \tau_2(i)).$$

Dakle, (2.3) vrijedi.

Definicija 2.2.5. *Neka je (X, d, α) izračunljivi metrički prostor. Za $i \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$I_i = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}),$$

te

$$\hat{I}_i = \overline{K}(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}).$$

Uočimo da je I_i racionalna otvorena kugla u (X, d, α), te da je $\hat{I}_i$ racionalna zatvorena kugla u (X, d, α).

No vrijedi i obratno: svaka racionalna otvorena kugla u (X, d, α) je jednaka I_i za neki $i \in \mathbb{N}$, te je svaka racionalna zatvorena kugla u (X, d, α) jednaka $\hat{I}_i$ za neki $i \in \mathbb{N}$.

Dokažimo to.

Neka je B racionalna otvorena kugla u (X, d, α). Tada postoje $j \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ takvi da je

$$B = K(\alpha_j, r).$$

Budući da je slika funkcije q skup svih pozitivnih racionalnih brojeva, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $r = q_k$. Imamo $B = K(\alpha_j, q_k)$. Prema (2.3) postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $(j, k) = (\tau_1(i), \tau_2(i))$, pa je $j = \tau_1(i)$ i $k = \tau_2(i)$. Slijedi

$$B = K(\alpha_j, q_k) = K(\alpha_{\tau_1(i)}, q_{\tau_2(i)}) = I_i.$$

Dakle, $B = I_i$.

Analogno zaključujemo da je svaka racionalna zatvorena kugla oblika $\hat{I}_i$.

Definicija 2.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor, neka je $n \in \mathbb{N}$, te neka su $B_0, ..., B_n$ racionalne otvorene kugle u (X, d, α). Tada za skup*

$$B_0 \cup ... \cup B_n$$

kažemo da je racionalan otvoren skup u (X, d, α).

Napomena 2.2.7. *Uočimo sljedeće:*

U je racionalan otvoren skup u (X, d, α) ako i samo ako postoje $n \in \mathbb{N}$ i $i_0, ..., i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $U = I_{i_0} \cup ... \cup I_{i_n}$.

Poglavlje 3

Svojstvo efektivnog pokrivanja

Fiksirajmo sada neke rekurzivne funkcije $\sigma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ i $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da je

$$\{(\sigma(i,0), ..., \sigma(i, \eta(i))) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$ (takve funkcije postoje prema propoziciji 1.5.9.).

Koristit ćemo slijedeće oznake. Za $i, j \in \mathbb{N}$ umjesto $\sigma(i, j)$ ćemo pisati $(i)_j$, a umjesto $\eta(i)$ ćemo pisati $\bar{i}$. Dakle,

$$\{((i)_0, ..., (i)_{\bar{i}}) \mid i \in \mathbb{N}\}$$

je skup svih konačnih nizova u $\mathbb{N}$.

Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo

$$J_j = I_{(j)_0} \cup ... \cup I_{(j)_{\bar{j}}}.$$

Uočimo da je J_j racionalan otvoren skup u (X, d, α) za svaki $j \in \mathbb{N}$. Obratno, svaki racionalan otvoren skup u (X, d, α) je jednak J_j, za neki $j \in \mathbb{N}$.

Naime, ako je U racionalan otvoren skup u (X, d, α), onda postoji $n \in \mathbb{N}$ i $i_0, ..., i_n \in \mathbb{N}$ takvi da je $U = I_{i_0} \cup ... \cup I_{i_n}$.

Imamo da je $(i_0, ..., i_n)$ konačan niz u $\mathbb{N}$, pa postoji $j \in \mathbb{N}$ takav da je

$$((j)_0, ..., (j)_{\bar{j}}) = (i_0, ..., i_n).$$

Slijedi $\bar{j} = n, (j)_0 = i_0, ..., (j)_{\bar{j}} = i_n$. Stoga je

$$I_{i_0} \cup ... \cup I_{i_n} = I_{(j)_0} \cup ... \cup I_{(j)_{\bar{j}}} = J_j.$$

Dakle, $U = J_j$.

Neka su $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$. Tada postoje jedinstvene funkcije $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ takve da je

$$f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Za $f_1, ..., f_n$ kažemo da su komponentne funkcije od f. Za funkciju f kažemo da je rekurzivna ako su njene komponentne funkcije $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ rekurzivne.

Propozicija 3.0.8. *Neka su $k, n, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka su $S_1, ..., S_n$ rekurzivni podskupovi od $\mathbb{N}^k$ takvi da za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ postoji jedinstveni $i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $x \in S_i$. Neka su $f_1, ..., f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ rekurzivne funkcije, te neka je $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^l$ funkcija definirana s*

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Tada je funkcija F rekurzivna.

Dokaz. Neka su $F^1, ..., F^l$ komponentne funkcije od F te neka su za $i \in \{1, ..., n\}$ $f_i^1, ..., f_i^l$ komponentne funkcije od f_i, dakle

$$f_i(x) = (f_i^1(x), ..., f_i^l(x)),$$

za svaki $x \in \mathbb{N}^k$. Za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$(F^1(x), ..., F^l(x)) = \begin{cases} (f_1^1(x), ..., f_1^l(x)), & \text{ako je } x \in S_1 \\ . \\ . \\ . \\ (f_n^1(x), ..., f_n^l(x)), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Stoga za svaki $j \in \{1, ..., l\}$ i za svaki $x \in \mathbb{N}^k$ vrijedi

$$F^j(x) = \begin{cases} f_1^j(x), & \text{ako je } x \in S_1 \\ . \\ . \\ . \\ f_n^j(x), & \text{ako je } x \in S_n \end{cases}.$$

Iz propozicije 1.3.14. slijedi da su funkcije $F^1, ..., F^l$ rekurzivne. Prema tome, F je rekurzivna funkcija. $\square$

3.1 Rekurzivno prebrojivi skupovi

Definicija 3.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$. Za S kažemo da je rekurzivno prebrojiv skup ako je $S = \emptyset$ ili ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ takva da je*

$$\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\} = S.$$

Primjer 3.1.2. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada je $\mathbb{N}^k$ rekurzivno prebrojiv skup. Naime, neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana s*

$$f(i) = (e(i, 1), ..., e(i, k)).$$

Komponentne funkcije of f su očito rekurzivne, pa je i f rekurzivna funkcija.

Neka su $x_1, ..., x_k \in \mathbb{N}$. Definirajmo

$$i = p_1^{x_1} \cdot ... \cdot p_k^{x_k}.$$

Tada je $f(i) = (x_1, ..., x_k)$. Iz ovoga zaključujemo da je

$$\{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}^k.$$

Prema tome, $\mathbb{N}^k$ je rekurzivno prebrojiv skup.

Propozicija 3.1.3. *Neka je $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, te neka je $S \subseteq \mathbb{N}^k$ rekurzivan skup. Tada je S rekurzivno prebrojiv skup.*

Dokaz. Ako je $S = \emptyset$, tvrdnja je jasna.

Pretpostavimo da je S neprazan. Odaberimo $a \in S$. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija iz prethodnog primjera.

Neka je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$ funkcija definirana s $h(i) = a$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Uočimo da je h rekurzivna funkcija.

Neka je

$$T = \{i \in \mathbb{N} \mid f(i) \in S\}.$$

Tvrdimo da je T rekurzivan skup.

Neka je $i \in \mathbb{N}$. Vrijedi $\chi_T(i) = \chi_S(f(i))$, pa je

$$\chi_T(i) = \chi_S(f_1(i), ..., f_k(i)),$$

za svaki $i \in \mathbb{N}$, pri čemu su $f_1, ..., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ komponentne funkcije od f. Stoga je funkcija χ_T rekurzivna kao kompozicija rekurzivnih funkcija. Dakle, T je rekurzivan skup.

Definirajmo funkciju $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^k$,

$$g(i) = \begin{cases} f(i), & \text{ako je } f(i) \in S \\ a, & \text{ako } f(i) \notin S \end{cases}$$

Uočimo da je

$$g(i) = \begin{cases} f(i), & \text{ako je } i \in T \\ h(i), & \text{ako je } i \in T^{c} \end{cases}.$$

Stoga je g rekurzivna funkcija (propozicija 3.0.8.). Za svaki $i \in \mathbb{N}$ je očito $g(i) \in S$.

Obratno, neka je $s \in S$. Tada je $s \in \mathbb{N}^k$, pa postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $f(i) = s$ (prethodni primjer). Imamo

$$g(i) = f(i) = s.$$

ZAKLJUČAK:

$$\{g(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = S.$$

Prema tome, S je rekurzivno prebrojiv skup. □

3.2 Svojstvo efektivnog pokrivanja

Definicija 3.2.1. *Neka je (X, d, α) izračunljiv metrički prostor. Kažemo da (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja ako je skup*

$$\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid \hat{I}_i \subseteq J_j\}$$

rekurzivno prebrojiv.

Definicija 3.2.2. *Neka je (X, d) metrički prostor, $K \subseteq X$, te $\mathcal{U}$ neprazna familija otvorenih skupova u (X, d) takva da je*

$$K \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Za $\mathcal{U}$ kažemo da je otvoreni pokrivač skupa K u metričkom prostoru (X, d).

Definicija 3.2.3. *Neka je (X, d) metrički prostor te $K \subseteq X$. Kažemo da je K kompaktan skup u metričkom prostoru (X, d) ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od K u (X, d) postoje $n \in \mathbb{N}$ i $U_0, ..., U_n \in \mathcal{U}$ takvi da je*

$$K \subseteq U_0 \cup ... \cup U_n.$$

Definicija 3.2.4. *Neka je (X, d, α) izračunljivi metrički prostor. Neka je $a \in X$. Kažemo da je a izračunljiva točka u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$d(a, \alpha_{f(k)}) < 2^{-k}$$

za svaki $k \in \mathbb{N}$

Za niz (x_i) u X kažemo da je izračunljiv u (X, d, α) ako postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je

$$d(x_i, \alpha_{F(i,k)}) < 2^{-k}$$

za sve $i, k \in \mathbb{N}$.

Definicija 3.2.5. *Za metrički prostor (X, d) kažemo da ima kompaktne zatvorene kugle ako za svaki $x \in X$ i za svaki $r > 0$ vrijedi da je $\overline{K}(x, r)$ kompaktan skup u (X, d).*

Za izračunljiv metrički prostor (X, d, α) kažemo da ima kompaktne zatvorene kugle ako (X, d) ima kompaktne zatvorene kugle.

Sad ćemo navesti jedan rezultat koji daje dovoljne uvjete da bi izračunljivi metrički prostor imao svojstvo efektivnog pokrivanja. Dokaz ovog teorema može se naći u [2], korolar 5.6.

Teorem 3.2.6. *Neka je (X, d, α) izračunljivi metrički prostor koji ima kompaktne zatvorene kugle, neka je a izračunljiva točka u ovom prostoru te neka je (x_i) izračunljiv niz u ovom prostoru. Pretpostavimo da postoji rekurzivna funkcija $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ takva da je*

$$K(a, M) \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq F(M,k)} K(x_j, 2^{-k})$$

za sve $M, k \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$.

Tada (X, d, α) ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

Primjer 3.2.7. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ te neka je $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s*

$$d((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}.$$

Za d kažemo da je euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$.

Može se pokazati da je d zaista metrika na $\mathbb{R}^n$ (dokaz te činjenice može se pronaći u [4]*).*

Neka je α niz u $\mathbb{R}^n$ definiran s

$$\alpha(i) = \left((-1)^{e(i,0)} \frac{e(i, 1)}{e(i, 2) + 1}, ..., (-1)^{e(i,3n-3)} \frac{e(i, 3n - 2)}{e(i, 3n - 1) + 1}\right).$$

Očito je $\alpha(i) \in \mathbb{Q}^n$, za svaki $i \in \mathbb{N}$.

S druge strane, neka je $x \in \mathbb{Q}^n$. Tada postoje $a_0, a_1, ..., a_{3n-1} \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$x = \left((-1)^{a_0} \frac{a_1}{a_2 + 1}, ..., (-1)^{a_{3n-3}} \frac{a_{3n-2}}{a_{3n-1} + 1}\right).$$

Neka je $i = p_0^{a_0} \cdot p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_{3n-1}^{a_{3n-1}}$. Tada je

$$e(i, 0) = a_0 , e(i, 1) = a_1 , ..., e(i, 3n - 1) = a_{3n-1}$$

pa je

$$\alpha(i) = \left((-1)^{a_0} \frac{a_1}{a_2 + 1}, ..., (-1)^{a_{3n-3}} \frac{a_{3n-2}}{a_{3n-1} + 1}\right),$$

to jest $\alpha(i) = x$. *Prema tome,*

$$\{\alpha(i) \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}^n.$$

Može se pokazati da je $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ *izračunljiv metrički prostor (*[2]*). Za* $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ *kažemo da je izračunljiv euklidski prostor.*

Nadalje, koristeći prethodni teorem, može se pokazati da $(\mathbb{R}^n, d, \alpha)$ *ima svojstvo efektivnog pokrivanja (*[2] *- primjer 5.7.).*

Bibliografija

[1] Vuković, M.: *"Izračunljivost"*, skripta, Zagreb, lipanj 2009.

[2] Burnik, K.:*"Izračunljivost 1-mnogostrukosti"*, doktorska disertacija, 2015.

[3] Brattka, V., Presser, G.: *"Computability on subsets of metric spaces"* Theoretical Computer Science, 2003.

[4] Sutherland, W. A.: *"Introduction to metric and topological spaces"*, Oxford University Press, 1975.

Sažetak

Koristeći pojmove iz izračunljivosti kao što su rekurzivne funkcije i rekurzivni skupovi definirali smo izračunljiv metrički prostor. Unutar takvih prostora promatrali smo racionalne otvorene skupove, definirali rekurzivno prebrojive skupove te iskazali svojstvo efektivnog pokrivanja. Osim samog iskaza, pokazali smo primjer izračunljivog metričkog prostora koji ima svojstvo efektivnog pokrivanja.

Summary

Using computability terms like computable functions and computable sets we have defined computable metric spaces. In those we have been observing propertries of rational open sets, defined recursively enumerable sets and finally, stated the effective covering property. Except stating, we have demonstrated an example of computable metric space with the effective covering property.

Životopis

Rođen sam 24.4.1987. godine u Bjelovaru, gdje sam pohađao *IV. osnovnu školu* od 1994. do 2002. i *Gimnaziju Bjelovar*, opći smjer, od 2002. do 2006. godine. Tokom tih godina bavio sam se raznim aktivnostima poput fotografije, kiparstva, likovne umjetnosti, dramske umjetnosti, te sam oduvijek volio gledati filmove i čitati knjige, što je sve dio mog života i dan danas, u većoj ili manjoj mjeri.

2006. godine upisao sam *Prirodoslovno matematički fakultet* u Zagrebu, gdje sam se isprva okušao u *Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika; smjer: inženjerski*, a potom sam se 2008. godine prebacio na *Preddiplomskom sveučilišnom studiju Matematika; smjer: nastavnički*. 2013. godine upisao sam *Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika; smjer: nastavnički*. Tokom studiranja stjecao sam radno iskustvo na raznim mjestima, uključujući videoteku, gradilište, skladište, učionicu, pomoć pri učenju, i slično.