Geometrija u graditeljstvu

Perić, Josip

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:017757

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-19**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Josip Perić

Geometrija u graditeljstvu

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. Željka Milin Šipuš

Zagreb, rujan 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____ , predsjednik
2. _____ , član
3. _____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Pravčaste plohe **2**
2.1 Razvojne pravčaste plohe 3
2.2 Strikcijska krivulja 4
2.2.1 Primjeri strikcijskih krivulja 6
2.3 Vitopere pravčaste plohe 8
2.3.1 Parametar distribucije, vitoperost 10
2.3.2 Primjena pravčastih ploha u sportskim građevinama . 15

3 Konoidalne plohe **19**
3.1 Primjena konoida u sportskim građevinama 20

4 Rotacijske plohe **21**
4.1 Primjena rotacijskih ploha u sportskim građevinama 27

5 Laméove krivulje. Superelipse **32**
5.1 Primjena superelipsoida u sportskim građevinama 35

6 Translacijske plohe **37**
6.1 Primjena translacijskih ploha u sportskim građevinama 39

7 Kugle i ljuske **43**
7.1 Primjena kugli i ljuski u sportskim građevinama 44

8 Gaussova i srednja zakrivljenost **46**

Literatura **49**

Sažetak **51**

Summary **52**

Životopis **53**

1 Uvod

"Graditelji stvaraju svijet u kojem živimo, oni ostavljaju trajne i neizbrisive tragove u prostoru koji stotinama i tisućama godina svjedoče o minulim civilizacijama, svjedoče ljepotu, sklad i visoke umjetničke domete. Graditeljstvo je djelatnost u koju je ugrađeno najviše ljudskog rada, znanja, umijeća, ljubavi, osjećaja, ljepote i sklada."

Nepoznati izvor

Građevinarstvo je najstarija i najznačajnija grana tehnike koja se bavi poslovima za građenje svih vrsta objekata. Matematika u graditeljstvu je najbitnije oruđe kojim se neki objekti grade, posebno sportski objekti koji u novije vrijeme izgledaju gotovo nemoguće.

Današnje monumentalne i neobične građevine svoj početak vide početkom 20. stoljeća jačanjem industrije. Graditeljstvo je općenito, a posebno u sportskom graditeljstvu, najviše okarakterizirano upotrebom vitoperih pravčastih ploha s dvama sustavima izvodnica, bilo da se koriste kao krovne konstrukcije ili pak zidne konstrukcije.

Ovaj rad se temelji na proučavanju osnovnih vrsta ploha koje se koriste u graditeljstvu. Rad je podijeljen na osnovna svojstva pravčastih ploha, zatim konoidalnih, rotacijskih, translacijskih i na kraju kugle i ljuske te njihova matematička svojstva, a nakon svake cjeline imamo primjenu navedenih ploha u graditeljstvu. Sve te plohe imaju svoju specifičnu primjenu u graditeljstvu bilo da je građevina natkrivena jednom od navedenih vrsta ploha ili sam oblik građevine podsjeća na neku od navedenih ploha.

Slike koje su se koristile u ovom radu nacrtane su pomoću programa *GeoGebra* i *Mathematica*.

2 Pravčaste plohe

Jednoparametarski skup neprekinuto povezanih pravaca nazivamo pravčastom plohom. Pravce toga skupa nazivamo izvodnicama pravčaste plohe.

Ako se svake dvije, neizmjerno blizu, izvodnice plohe sijeku, plohu nazivamo razvojnom, a ako su mimosmjerne, plohu nazivamo vitoperom. Razvojne plohe moguće je razviti u ravninu, dok vitopere nije.

Pravčaste plohe postoje kao razvojne i vitopere. Karakteristika pravčastih ploha, razvojnih, je u činjenici da im je Gaussova zakrivljenost jednaka nuli, tj. geometrijski gledano, moguće je u svakoj točki plohe postaviti pravac koji leži na plohi. U razvojne pravčaste plohe spadaju stošci i valjci te plohe što ih čine tangente prostornih krivulja.

Karakteristika vitoperih pravčastih ploha je ta da je Gaussoova zakrivljenost različita od nule. U tu vrstu ploha spadaju jednoplošni hiperboloid, hiperbolički paraboloid, helikoid te Möbiusova traka. Jedan od načina nastajanja takvih ploha je da su pravčaste plohe sistemi pravaca koji sijeku tri prostorne krivulje. Krivulje nazivamo ravnalicama, a pravce koji ih sijeku izvodnicama pravčaste plohe.

Dakle pravčaste plohe se generiraju pomicanjem pravca preko dviju krivulja. Neka je $c : I \to R$ regularna krivulja, $e = e(u)$ jedinično polje duž krivulje c. Jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju

$$x(u, v) = c(u) + ve(u), u \in I, v \in R,$$

naziva se pravčastom plohom.

Krivulja $c(u)$ je direktrisa ili bazna krivulja plohe koja siječe svaku izvodnicu u jednoj točki, a pravci određeni vektorom smjera $e(u)$ su izvodnice plohe.

Lema 2.1. *Gaussova zakrivljenost pravčaste plohe $M \subset \mathbb{R}^3$ je svugdje nepozitivna.*

Dokaz. Ako je x lokalna karta na S onda je $x_{vv} = 0$, iz čega slijedi $g = 0$. Dokaz slijedi iz teorema gdje su Gaussova zakrivljenost i srednja zakrivljenost dane formulama:

$$K = \frac{-M^2}{EG - F^2} \leq 0.$$

□

2.1 Razvojne pravčaste plohe

Definicija 2.2. *Ako je $S \subset \mathbb{R}^3$ pravčasta ploha, onda vrijedi:*

(i) M je tangentna ploha krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3$ ako se M može parametrizirati kao

$$x(u, v) = c(u) + vc'(u);$$

(ii) M je cilindrična ploha krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3$ ako se M može parametrizirati kao

$$y(u, v) = c(u) + vq$$

gdje je $q \in \mathbb{R}^3$ fiksirani vektor;

(iii) M je konusna ploha krivulje $c : I \to \mathbb{R}^3$ ukoliko se M može parametrizirati kao

$$z(u, v) = p + cv$$

gdje je $p \in \mathbb{R}^3$ fiksiran.

Lema 2.3. *Neka je $c : I \to \mathbb{R}^3$ regularna krivulja čija je zakrivljenost κ svugdje različita od nule. Tangentna ploha je regularna svugdje osim duž krivulje c.*

Dokaz. Za regularnu tangentu krivulju x vrijedi:

$$(x_u \times x_v)(u, v) = (c' + vc'') \times c' = vc'' \times c'.$$

Ako je $x_u \times x_v \neq 0$ tada i $vc'' \times c' \neq 0$ odnosno $c'' \times c'$ je svugdje različit od nule prema tj. lema 2.1 implicira kako je x regularna ploha kad god je $v \neq 0$, dok za $v = 0$ ploha S nije regularna tj. $x(u, 0) = c(u)$. Ova tangentna ploha je singularna duž krivulje c, pa se krivulja c kod tangentnih ploha naziva još i grebenom tih ploha. Greben je evelopa ili ovojnica izvodnica tangentne plohe. Generalizacija grebena su tzv. strikcijske krivulje vitoperih ploha. □

2.2 Strikcijska krivulja

Promotrimo relativne položaje dviju susjednih izvodnica generirane vektorima $e(u)$ i $e(u+\Delta u)$ na pravčastoj plohi $\vec{x}(u,v) = \vec{c}(u) + v\vec{e}(u)$ gdje je vektorsko polje e jedinično. Ako je ploha necilindrična tada su izvodnice mimoilazni pravci u prostoru. Neka je PP' najkraći segment između tih pravaca gdje su $P(u,v)$,$P'(u+\Delta u, v+\Delta v)$ točke na odgovarajućim izvodnicama, a parametri u i v nepoznanice. Udaljenost tih mimoilaznih pravaca odnosno točaka P i P' bit će jednaka duljini njihove zajedničke okomice pa je segment PP' jednak:

$$\begin{aligned} PP' &= OP' - OP \\ &= c(u+\Delta u) + (v+\Delta v)e(u+\Delta u) - c(u) - ve(u) \\ &= c(u) + c'(u)\Delta u + v(e(u) + e'(u)\Delta u) + \Delta v(e(u) + e'(u)\Delta u) - c(u) - ve(u) \\ &= c'(u)\Delta u + ve'(u)\Delta u + \Delta v e(u) + \Delta v \Delta u e'(u) \end{aligned}$$

Kako su Δv i Δu jako mali, posljednji izraz možemo zanemariti, pa nam je segment PP' jednak:

$$PP' = c'(u)\Delta u + ve'(u)\Delta u + \Delta v e(u).$$

Budući je segment PP' okomit na vektore $e(u)$ i $e(u+\Delta u)$, okomit je i na njihovu razliku pa imamo:

$$e(u+\Delta u) - e(u) = e(u) + e'(u)\Delta u - e(u) = e'(u)\Delta u.$$

Kako je segment PP' okomit na vektor $e'(u)$ vrijedi:

$$PP' \cdot e'(u) = 0.$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} 0 &= c'(u)\Delta u \cdot e'(u) + ve'(u)\Delta u \cdot e'(u) + \Delta v e(u) \cdot e'(u) \\ \Rightarrow 0 &= \Delta u(c'(u) \cdot e'(u) + (ve'(u))^2) + \Delta v e(u) \cdot e'(u). \end{aligned}$$

Kako je e jedinično polje, vrijedi $e^2 = 1$ i $e \cdot e' = 0$ dobivamo da je parametar v određen:

$$v = \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2}.$$

Sada dobiveni parametar v uvrstimo u parametrizaciju pravčaste plohe $x(u,v) = c(u) + ve(u)$ i time dobivamo strikcijsku točku. Ona se nalazi u okolini izvodnice generirana vektorom $e(u)$:

$$s(u) = c(u) + \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2} e(u).$$

Definicija 2.4. *Lokus strikcijskih točaka na pravčastoj plohi naziva se strikcijska krivulja.*
Ako se u smatra varijablom u jednadžbi

$$s(u) = c(u) + \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2} e(u)$$

tada postoji strikcijska krivulja. Geometrijsko značenje strikcijske krivulje je takvo da ona okružuje pravčastu plohu duž najužeg dijela i neovisna je o odabiru smjera proizvoljne bazne krivulje $c(u)$.

Lema 2.5. *Neka je $\tilde{x}(u)$ pravčasta ploha koja nije razvojna dana svojom parametrizacijom $\tilde{x}(u)$. Tada $\tilde{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$ ima reparametrizaciju oblika:*

$$x(u, v) = s(u) + ve(u)$$

gdje je $\|e\| = 1$ i $s' \cdot e' = 0$. Krivulja s je strikcijska krivulja od $\tilde{x}(u)$.

Dokaz. Za $e \times e' \neq 0$ i $e = 0$ definirat ćemo reparametrizaciju $\tilde{\tilde{x}}$ od $\tilde{x}$ kao

$$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x}(\frac{v}{\|e(u)\|}) = c(u) + \frac{ve(u)}{\|e(u)\|}.$$

$\tilde{\tilde{x}}$ ma isti trag kao i $\tilde{x}$. Sada traimo krivulju s tako da $s'(u) \cdot e'(u) = 0$, odnosno pišemo

$$s(u) = c(u) + v(u)e(u).$$

Deriviranjem dobivamo:

$$s'(u) = c'(u) + v'(u)e(u) + (v(u)e'(u))(e'(u))$$
$$\Rightarrow s'(u) \cdot e'(u) = c'(u)e'(u) + v'(u)w(u)e'(u) + v(u)e'(u)e'(u).$$

$e \times e' \neq 0$ nikada ne nestaje kao i e', a e i e' su linearno nezavisni vektori. Sada ako v definiramo kao:

$$s(u) = c(u) + \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2} e(u)$$

imamo:

$$s'(u) \cdot e'(u) = 0$$

i definiramo

$$x(u, v) = \tilde{\tilde{x}}(u, v(u) + v).$$

Sada,

$$x(u, v) = c(u) + (v(u) + v)e(u) = s(u) + ve(u)$$

tako da x, $\tilde{x}$ i $\tilde{\tilde{x}}$ imaju isti trag pa x zadovoljava

$$x(u, v) = s(u) + ve(u).$$

□

2.2.1 Primjeri strikcijskih krivulja

a) Helikoid

Parametrizacija helikoida je $x(u,v) = (0,0,bu)+v(\cos u, \sin u, 0)$. Parametar v strikcijske krivulje je :

$$v = \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2}$$

gdje je $c(u) = (0,0,bu)$ i $e(u) = (\cos u, \sin u, 0)$. U ovoj parametrizaciji vrijedi $\|e(u)\| = 1$, pa je

$$c'(u) = (0,0,b),$$

$$e'(u) = (-\sin u, \cos u, 0),$$

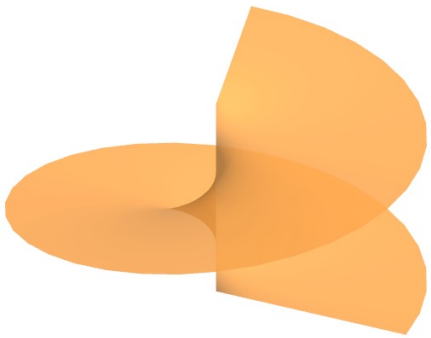
$$e'^2(u) = 1.$$

Pa je prema tome

$$v = \frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'(u)^2} = -\frac{(0,0,b) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)}{1} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Vidimo da je parametar v jednak nuli, pa je $z - os$ strikcijska krivulja helikoida,

$$s(u) = c(u) = (0,0,bu).$$

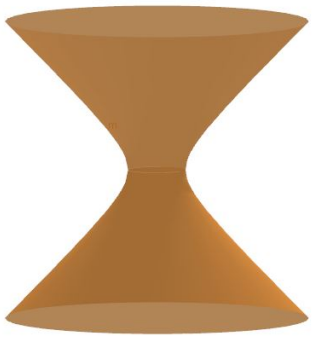


Slika 1: Helikoid

b) Jednoplošni hiperboloid

Parametrizacija jednoplošnog hiperboloida je:

$$x(u,v) = (a\cos u, a\sin u, 0) + v(-a\sin u, \cos u, 0).$$



Slika 2: Jednoplošni rotacijski hiperboloid

Kako je $\|e(u)\| = a^2 \neq 1$, normirat ćemo vektor e:

$$\begin{aligned} e(u) &= \frac{1}{\|(-a\sin u, \cos u, 0)\|}(-a\sin u, \cos u, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(-a\sin u, \cos u, 0) \\ &= (-\sin u, \cos u, \frac{c}{a}) \end{aligned}$$

Zatim deriviramo:

$$\begin{aligned} c'(u) &= (-a\sin u, a\cos u, 0), \\ e'(u) &= (-\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\cos u, -\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\sin u, 0) \\ e'^2(u) &= \frac{a^2}{a^2+c^2}. \end{aligned}$$

Parametar v jednak je:

$$v = \frac{c'(u)\cdot e'(u)}{e'(u)^2} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Pa nam je strikcijska krivulja zapravo kružnica:

$$s(u) = c(u) = (a\cos u, a\sin u, 0).$$

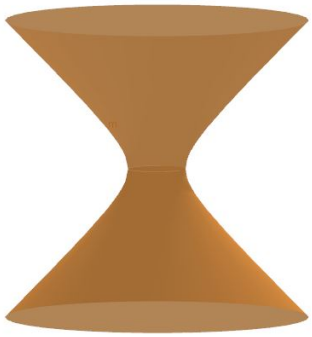
2.3 Vitopere pravčaste plohe

Dok su sve razvojne plohe ujedno i torze što se može vidjeti iz uvjeta torzalnosti $(c'(u), e'(u), e(u)) = 0$ gdje su vektori $c'(u) \times e(u)$ i $e'(u)$ linearno nezavisni vektori, pravčaste plohe kojih su izvodnice netorzalne, ne uzimajući u obzir neke direktne položaje izvodnica, zovu se vitopere pravčaste plohe. Jedne od pravčastih ploha su jednoplošni hiperboloid te hiperbolički paraboloid ili drugim imenom hipar.

Jednoplošni hiperboloid ima dva sistema izvodnica što znači da svakom njezinom točkom prolaze dvije izvodnice. Svaka od tih izvodnica istog sustava je međusobno mimosmjerna dok svaka od njih siječe sve izvodnice drugog sustava. Odaberemo li bilo koje tri izvodnice jednog sustava mogu biti odabrane za direktrise ovog jednoplošnog hiperboloida.

Jednoplošni rotacijski hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ koji nastaje rotacijom hiperbole oko njene imaginarne osi ili rotacijom pravca oko osi s kojom je taj pravac mimosmjeran dan je i parametarski:

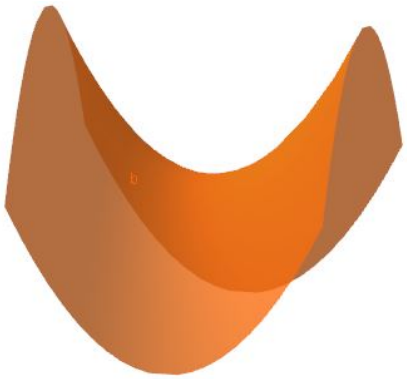
$$x(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c).$$



Slika 3: Jednoplošni rotacijski hiperboloid

Hipar ili hiperbolički paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ je kao pravčasta ploha dan parametarski:

$$x(u.v) = (au, 0, u^2) + v(a, \pm b, 2u).$$



Slika 4: Hiperbolički paraboloid, hipar

Ukoliko ovu plohu rotiramo u prostoru, dobit ćemo jednadžbu $z = axy$, odnosno parametarski: $x(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, i, u)$, a pravčasta ploha s parametrizacijom $x(u, v) = c(u) + ve(u)$ nije cilindrična ploha ako su vektori $e(u)$ i $e'(u)$ linearno nezavisni, odnosno ako je zadovoljen uvjet $e(u) \times e'(u) \neq 0$. Takva pravčasta ploha koja nije cilindrična i čije su izvodnice paralelne nekoj fiksnoj direkcijskoj ravnini naziva se konoidalnom plohom, odnosno Catalanovom plohom.

2.3.1 Parametar distribucije, vitoperost

Lema 2.6. *Neka je S pravčasta ploha i neka je dana svojom lokalnom parametrizacijom. Ploha je regularna kad god je $v \neq 0$ ili kad je $v = 0$ i $\delta(u) \neq 0$. Gaussova zakrivljenost dana je s:*

$$K = -\frac{\delta^2(u)}{(\delta^2(u) + v^2)^2},$$

gdje je $\delta(u)$ funkcija

$$\delta(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\rho} = \frac{(c', e, e')}{e'^2}$$

Dokaz. Pravčasta ploha dana je parametrizacijom $\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u)$, a Gaussova zakrivljenost dana je izrazom:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{W^2}. \tag{1}$$

Raspišimo izraz za Gaussovu zakrivljenost.

$$\mathbf{x}_u = c'(u) + ve'(u),\ \mathbf{x}_v = e'(u)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = c''(u) + ve''(u),\ \mathbf{x}_{uv} = e'(u),\ \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Dakle, fundamentalne veličine prvog i drugog reda su:

$$E = \mathbf{x}_u^2 = c'^2 + 2ve'c' + v^2e'^2 = 1 + v^2e'^2,$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = c'e + ve' \cdot e' = c'e,$$

$$G = \mathbf{x}_v^2 = e^2.$$

$$N = \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = 0$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{W}\det(\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) = \frac{1}{W}\det(e', c' + ve', e) \\ &= \frac{1}{W}[\det(e', c', e) + \det(e', ve', e)] \\ &= \frac{1}{W}[\det(e', c', e)]. \end{aligned}$$

Budući da je $N = 0$, ne moramo računati L.
Iz (1) slijedi:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{M^2}{W^2} = -\frac{\frac{(\det(c', e, e'))^2}{W^2}}{W^2}.$$

Dakle,

$$K = -\frac{\det^2(c', e, e')}{\Big((1 + v^2\, e'^2) - c'^2\, e^2\Big)^2}. \tag{2}$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= \frac{\det^2(c', e, e')}{\Big(e'^2\Big)^2} = \frac{\Gamma(c', e, e')}{\Big(e'^2\Big)^2} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} c' \cdot c' & c' \cdot e & c' \cdot e' \\ e \cdot c' & e \cdot e & e \cdot e' \\ e' \cdot c' & e' \cdot e & e' \cdot e' \end{vmatrix}}{\Big(e'^2\Big)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & c' \cdot e & 0 \\ e \cdot c' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e'^2 \end{vmatrix}}{\Big(e'^2\Big)^2} \\
&= \frac{e'^2\Big(1 - (c'e)^2\Big)}{\Big(e'^2\Big)^2} = \frac{1 - (c'e)^2}{e'^2}.
\end{aligned}$$

U nazivniku trebamo dobiti izraz $\delta^2 + v^2$, pa pogledajmo čemu je on jednak:

$$\delta^2 + v^2 = \frac{1 - (c'e)^2}{e'^2} + v^2 = \frac{1}{e'^2}\Big[1 - (c'e)^2 + e'^2\, v^2\Big]. \tag{3}$$

Iz jednakosti (3) slijedi

$$\Big[1 - (c'e)^2 + e'^2\, v^2\Big] = e'^2\,(\delta^2 + v^2),$$

što prepoznajemo u nazivniku iz (2).

Vrijedi:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\det^2(c', e, e')}{\left[e'^2\left(\delta^2 + v^2\right)\right]^2} \\ &= -\frac{\det^2(c', e, e')}{\left(e'^2\right)^2} \cdot \frac{1}{\left(\delta^2 + v^2\right)^2} \\ &= -\delta^2 \cdot \frac{1}{\left(\delta^2 + v^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Time smo dobili ono što smo i trebali dokazati:

$$K = -\frac{\delta^2(u)}{\left(\delta^2(u) + v^2\right)^2}.$$

□

Neke strikcijske krivulje i parametar distribucije:

1. Parametrizacija hiperboličkog paraboloida kao pravčaste plohe je

   $$\mathbf{x}(u, v) = (u, 0, 0) + v(0, 1, u).$$

   Vidimo da je $c(u) = (u, 0, 0)$ bazna krivulja. U ovom primjeru vrijedi $\|e(u)\| \neq 1$, pa ćemo morati normirati vektor e.

   $$e(u) = \frac{1}{\| (0, 1, u) \|} (0, 1, u) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} (0, 1, u)$$

   Vrijedi:

   $$\begin{aligned} c'(u) &= (1, 0, 0) \\ e'(u) &= \left(0, -\frac{u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ e'^2(u) &= \frac{1}{(1 + u^2)^2} \end{aligned}$$

Parametar v strikcijske krivulje je:

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)} = \frac{0}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} = 0$$

Budući da je $v = 0$, strikcijska krivulja je pravac (x-os):

$$\mathbf{s}(u) = c(u) = (u, 0, 0).$$

Odredimo parametar distribucije:

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & \frac{1}{\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}} & \frac{u}{\left(1+u^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & \frac{-u}{\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1+u^2)}$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{\frac{1}{1+u^2}}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} = 1 + u^2.$$

Dakle, parametar distribucije hiperboličkog paraboloida nije konstantan i iznosi $1 + u^2$.

2. Parametrizacija helikoida je $\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, bu) + v(\cos u, \sin u, 0)$.

Parametar v strikcijske krivulje je:

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)}$$

gdje je $c(u) = (0, 0, bu)$ i $e(u) = (\cos u, \sin u, 0)$. U ovoj parametrizaciji vrijedi $\|e(u)\| = 1$.

$$c'(u) = (0, 0, b)$$

$$e'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

$$e'^2(u) = 1$$

Prema tome,

$$v = -\frac{c'(u) \cdot e'(u)}{e'^2(u)} = -\frac{(0, 0, b) \cdot (-\sin u, \cos u, 0)}{1} = -\frac{0}{1} = 0.$$

Parametar v jednak je nuli, pa je strikcijska krivulja helikoida z-os,

$$\mathbf{s}(u) = c(u) = (0, 0, bu).$$

Odredimo sada parametar distribucije:

$$(c', e, e') = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ \cos u & \sin u & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 \end{vmatrix} = b\,(\cos^2 u + \sin^2 u) = b$$

$$\delta = \frac{(c', e, e')}{e'^2} = \frac{b}{1} = b.$$

Dakle, parametar distribucije je konstantan i jednak b.

2.3.2 Primjena pravčastih ploha u sportskim građevinama

Primjena razvojnih pravčastih ploha u suvremenoj građevini raste u svakom segmentu. Geometrijskom manipulacijom postižu se najvelebnija djela današnjih sportskih građevina te ih mnogi arhitekti koriste u projektiranju, a građevinari u izgradnji tih upečatljivih zdanja.

Možda najpoznatiji primjer takve plohe je Londonski stadion, tzv. Wembley koji je izgrađen na mjestu starog stadiona i trenutno je najskuplji stadion ikad izgrađen. Luk ovog stadiona je iskrivljena parabola pričvršćena u betonski pod iznad sjevernog (zapadnog) dijela stadiona. Taj luk inače drži krov stadiona iznad sjeverne (zapadne) tribine stadiona izgledom nalik na dvoplošni rotacijski paraboloid čime ću se pozabaviti nešto kasnije.

Slika 5: Wembley

Slika 6: Sydney olimpijski park

Ovaj velebni stadion sagrađen za olimpijske igre u Sydneyu 2000. godine je jedan od najvećih olimpijskih stadiona ikad sagrađenih. Svoju ideju u izgradnji dobio je od dvije najpoznatije građevine grada Sydney-a, Harbour Bridge i Opera House, a krov stadiona podržavaju prepoznatljive bijele čelične rešetke svaka dugačka 295 metara to je pola duljine njihovog mosta. Tako izgrađen krov je dobar primjer hiperboličkog paraboloida ili hipara.

Slika 7: Olimpijski velodrom, London

Olimpijski Velodrom u Londonu ili Olimpijsko biciklističko trkalište je sportski objekt koji i izgledom podsjeća na biciklističku stazu, a sami krov ove građevine je također lijepi primjer sedlaste plohe.

Slika 8: Telstra

Još jedan primjer vitopere pravčaste plohe je stadion Telstra u Australiji. Pravci na krovnoj konstrukciji ovoga stadiona nam uz oblik sedlaste plohe govore da se i tu radi o pravčastoj plohi krovne konstrukcije. Ovo je višenamjenski sportski stadion na kojem se odigravaju razne sportske igre poput, ateletike, kriketa, Speedwey-a, australskog nogometa, ragbija te pravog nogometa.

Slika 9: Leiria

Nakon obnove, ovaj stadion u Portugalu je dobio krov koji podsjeća na sedlastu plohu. Također pravci koji su vidljivi na krovnoj konstrukciji govore da se tu očito radi o pravčastoj plohi.

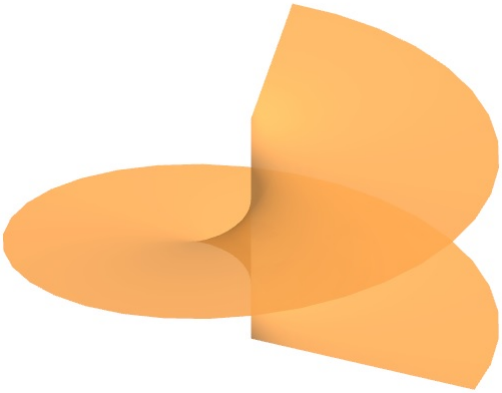
3 Konoidalne plohe

One pravčaste plohe kojima su izvodnice paralelne s ravninom nazivamo konoidalne plohe, a konoidi su one konoidalne plohe kojima izvodnice sijeku jedan pravac.

Kako direktrise konoida mogu biti i parabola i dva pravca od kojih je jedan beskonačno daleki pravac odnosno dvije parabole i jedan beskonačno daleki pravac, disrekcijska ravnina je paralela s osi parabole što znači da se beskonačno daleki pravac i parabola sijeku, pa iz opće teorije proizlazi da je ta ploha, konoida, 3. stupnja.

Konoida je generirana pravcem koji se giba po fiksnoj osi i istovremeno rotira oko nje. Takvom translacijom i rotacijom pravca okomitog na os oko te osi s tim da je brzina translacije proporcionalna brzini rotacije nastaje konoid koji nazivamo uspravni helikoid koji je kao pravčasta ploha dan parametrizacijom:

$$x(u, v) = (0, 0, bu) + v(a \cos u, \sin u, 0).$$



Slika 10: Helikoid

3.1 Primjena konoida u sportskim građevinama

Slika 11: Berlin sportska dvorana

Zatvorena sportska dvorana u kojoj se najčešće održavaju utrke bicikala i dio je većeg objekta koji uključuje i bazen. Uz biciklizam tu se održavaju i drugi sportovi poput atletike, tenisa, jahanja, sportskog odgoja i raznih koncerata, dok je bazen mjesto za razne vodene aktivnosti. Ova arena je poznata po svojoj najvećoj čeličnoj krovnoj konstrukciji u Europi s promjerom 142 metra, a samim izgledom podsjeća na kružni cilindar što nam spada i pod konoide i pod translacijske plohe.

4 Rotacijske plohe

Neku plohu nazivamo rotacijskom ako ona nastaje rotacijom neke krivulje oko čvrste osi tj. nekog pravca. Krivulju koja rotira nazivamo generatrisom plohe, os oko koje krivulja rotira osi rotacije. Kružnice rotacije, jer svaka ravnina koja je okomita na os rotacije u presjeku daje kružnicu, nazivamo paralelama rotacijske plohe gdje im pravac oko kojeg se rotira zajednička os rotacije, a središta su im na rotacijskoj osi.

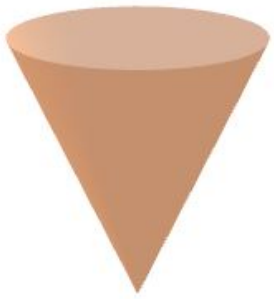
Ukoliko tu rotacijsku plohu presiječemo ravninom koja sadrži os rotacije, dobit ćemo krivulju koju nazivamo meridijanom te su svi meridijani rotacijske plohe međusobno sukladni. Svaki taj meridijan se zapravo sastoji od dva polumeridijana koji su međusobno simetrični obzirom na os rotacije te svaka rotacijska ploha može nastati i rotacijom jednog polumeridijana oko te iste osi rotacije, a rotacijske plohe kojima su polumeridijani pravci su rotacijski stožac i rotacijski valjak odnosno kružni cilindar.

Definicija 4.1. *Preslikavanje* $x : [0, 2\pi] \to R^3$ *definirano sa*

$$x(u, v) = (x(u) \cos v, x(u) \sin v, z(u))$$

je lokalna parametrizacija (karta).

Rotacijski stožac je dan parametarski $x(u, v) = (u \cos v, u \sin v, au)$ i on nastaje rotacijom pravca koji s rotacijskom osi ima jednu zajedničku točku.



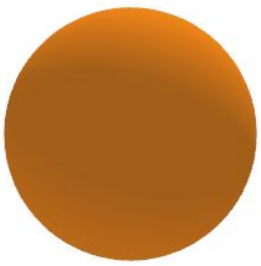
Slika 12: Rotacijski stožac

Kružni cilindar dan je parametarski s $x(u, v) = (R\cos v, R\sin v, u)$ i nastaje rotacijom pravca paralelnog s osi rotacije i na udaljenosti R od osi.

Slika 13: Kružni cilindar

Još neki poznatiji predstavnici rotacijskih ploha od kojih se mnogim barem dijelovi tih ploha, koriste u građevini, a posebno i u sportskoj radi ljepšeg dočaravanja samog objekta su i sfera, rotacijski paraboloid, hiperboloid, elipsoid te torus.

Sfera je dana parametarski $x(u, v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\cos v, R\cos u)$, a ona nastaje rotacijom polukružnice oko svog promjera.



Slika 14: Sfera

Torus je rotacijska ploha koja nastaje rotacijom kružnice u xz-ravnini oko z osi. Ako os rotacije ne dodiruje kružnicu ploha ima oblik prstena i naziva se prstenasti torus ili samo torus. U slučaju da je os rotacije tangenta kružnice tada se ta ploha još zove i trnoliki torus, dok u slučaju kada za os rotacije imamo tetivu kružnice dobivamo vretenasti torus.

Kao takva ploha, torus ima "rupu" te ako označimo sa c radijus od centra te "rupe" što je zapravo središte unutarnje kružnice koja je dana parametarski $c(v) = (s + r\cos v, 0, r\sin v)$ do centra torusa, a s a radijus torusa dolazimo do njegove parametrizacije:

$$\begin{aligned} x(u,v) &= (s + r\cos v)\cos u \\ y(u,v) &= (s + r\cos v)\sin u \\ z(u,v) &= r\sin v \end{aligned}$$

gdje su u, v iz $[0, 2\pi]$.

Slika 15: Torus

Paraboloide, hiperboloide te elipsoide možemo dobiti rotacijom čunjosječnica oko osi.

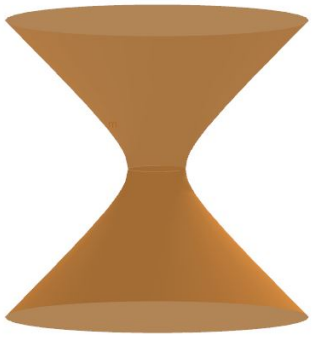
Rotacijski paraboloid nastaje rotacijom parabole oko svoje osi, a njegova jednadžba glasi:

$$z = a(x^2 + y^2).$$

Slika 16: Rotacijski paraboloid

Rotacijski hiperboloid
- jednoplošni rotacijski nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = 1$ oko z-osi, a njegova jednadžba je:

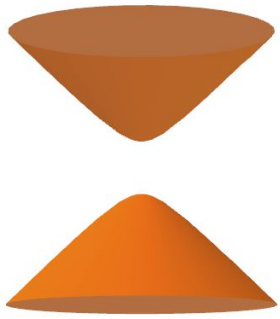
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Slika 17: Jednoplošni rotacijski hiperboloid

- dvoplošni rotacijski nastaje rotacijom hiperbole $y^2 - z^2 = -1$ oko z-osi, a njegova jednadžba je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



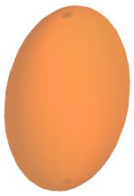
Slika 18: Dvoplošni rotacijski hiperboloid

Poznajemo u sportskim građevinama još i izduženi te posebno spljošteni rotacijski elipsoid.

Izduženi rotacijski elipsoid nastaje rotacijom elipse oko svoje glavne osi, a njegova jednadžba je:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdje je $a^2 < c^2$.



Slika 19: Izduženi rotacijski elipsoid

Spljošteni rotacijski elipsoid nastaje rotacijom oko svoje sporedne osi, a njegova jednadžba glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gdje je $a^2 > c^2$.

Slika 20: Spljošteni rotacijski elipsoid

4.1 Primjena rotacijskih ploha u sportskim građevinama

Slika 21: Papp Laszlo Budapest Sportarena

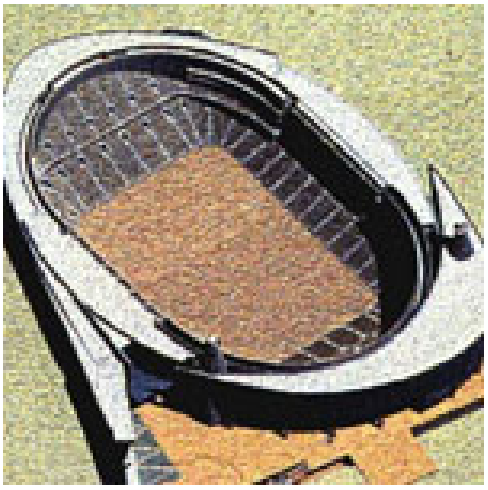
Najveća sportska dvorana u Mađarskoj prima 12.500 gledatelja, domaćin svjetskog prvenstva u atletici, hrvanju, rukometu, košarci, hokeju na ledu, itd. Oblik ove dvorane podsjeća na rotacijski elipsoid iako ne u njenom cijelom obliku, no može se vidjeti, iz tlocrta posebno, kako se ovdje radi o krivulji koja je najsličnija elipsi, a kako se radi o zaobljenoj građevini možemo zaključiti da je to djelomično spljošteni elipsoid.

Slika 22: Miyagi

Iako ovaj japanski stadion možemo svrstati i u pravčaste plohe, zbog njenog spljoštenog oblika, ukoliko zamislimo da je krov pune građe, možemo primijetiti da će ovaj stadion poprimiti oblik "spljoštene sfere" što onda spada pod rotacijske plohe.

Slika 23: Aveiro

Ovaj stadion je stariji oblik stadiona sa slike 9. Iz tlocrta se lako primjećuje da je vanjski rub ovog stadiona krivulja elipse, pa bi stoga ovaj stadion također mogli svrstati u rotacijske plohe kao elipsoid.

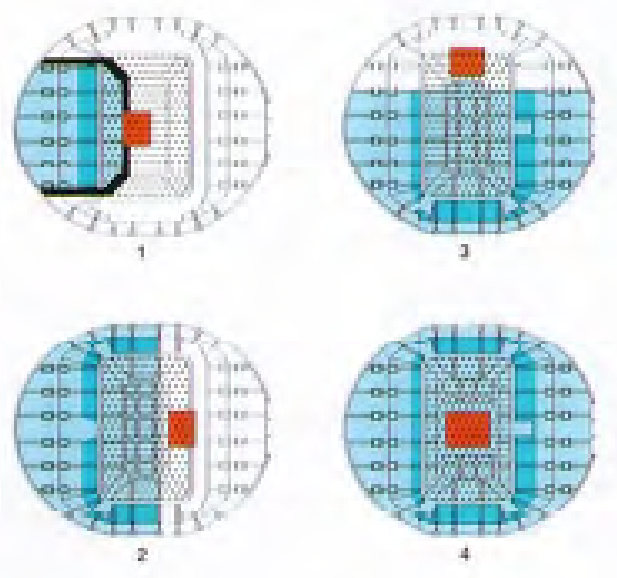


Slika 24: Saitama Super Arena

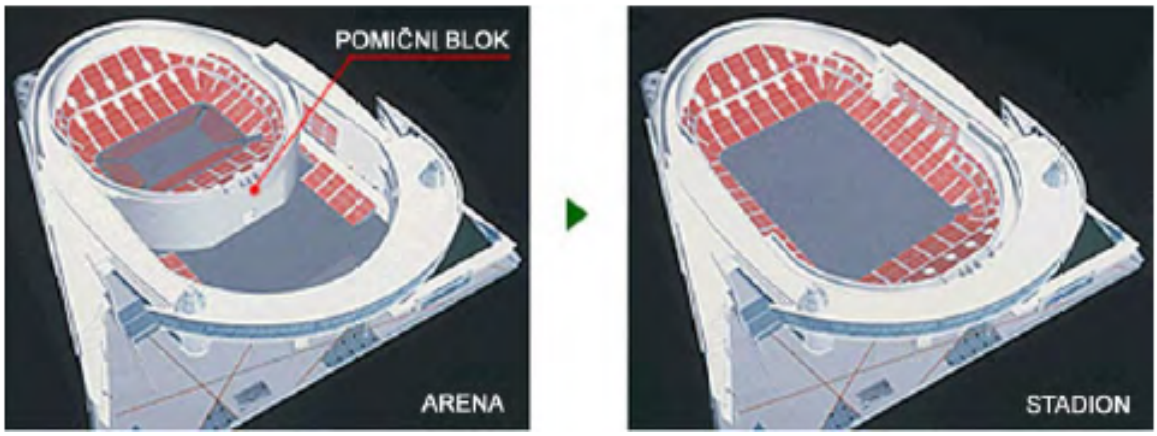
Prvotni oblik ove Saitama Super Arene u Japanu je imao vanjski rub kao elipsu te bi ga se zbog takvog oblika mogao svrstati u rotacijske plohe kao elipsoid. Ovaj stadion je sagrađen jo 2000-te godine, a danas izgleda kao na slici 25.

Slika 25: Saitama Super Arena

Ovaj stadion prima od 5.000 pa sve do 37.000 gledatelja. Iako je novi stadion više oblog oblika te bi se mogao svrstati pod superelipse, zbog prvotnog oblika stadiona, a i mogućnosti da se ovaj stadion može transformirati iz stadiona oblika arene kao na slici 26 do stadiona kakve najčešće danas srećemo (slika 27), ipak ovaj stadion svrstavam u rotacijske plohe.



Slika 26: Saitama - oblik



Slika 27: Saitama - transformacija

Slika 28: Montreal

Montreal's Olympic Stadium's koji se nalazi u olimpijskom parku Maisonneuve sagrađen za olimpijske igre 1976. godine, a njegov dovršetak je bio tek 80-tih godina. Ovaj prekrasan stadion podsjeća na spljošteni rotacijski elipsoid pa se stoga uvrštava u rotacijske plohe.

5 Laméove krivulje. Superelipse

Ime Laméove krivulje dolazi od francuskog matematičara Pére de Gabriel Léon Baptiste Lamé rođenog 22. srpnja 1975. godine. On je generalizirao jednadžbu elipsi i time dao jednadžbu superelipsi ili Laméovih krivulja.

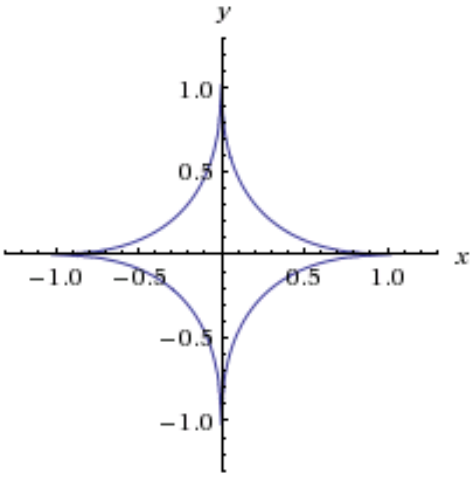
Definicija 5.1. *Laméove krivulje (superelipse) su krivulje koje zadovoljavaju jednadžbu*

$$|\frac{x}{a}|^n + |\frac{y}{b}|^n = 1,$$

pri čemu su a, b i n pozitivni brojevi, a parametri a i b označavaju duljine poluosi te krivulje.

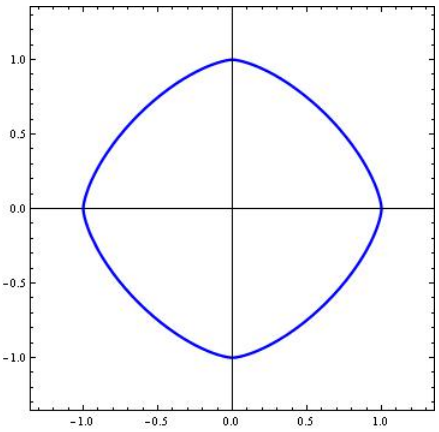
U ovisnosti o parametru n superelipse mogu biti raznih oblika:

(i) Ako je $n \in < 0, 1 >$, tada naša superelipsa izgleda kao zvijezda s četiri kraka.



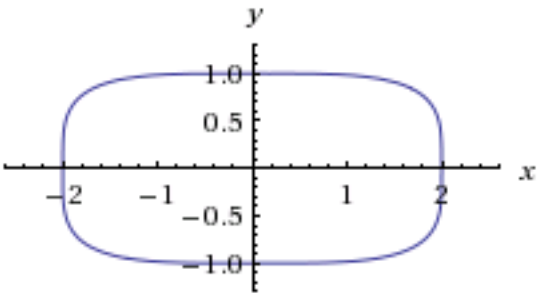
Slika 29: Superelipsa kao zvijezda s četiri kraka

(ii) Ako je $n \in < 1, 2 >$ naša superelipsa također ima vrhove $(\pm a, 0)$ i $(0, \pm b)$, a stranice su joj konveksnog oblika.



Slika 30: Superelipsa sa stranicama konveksnog oblika

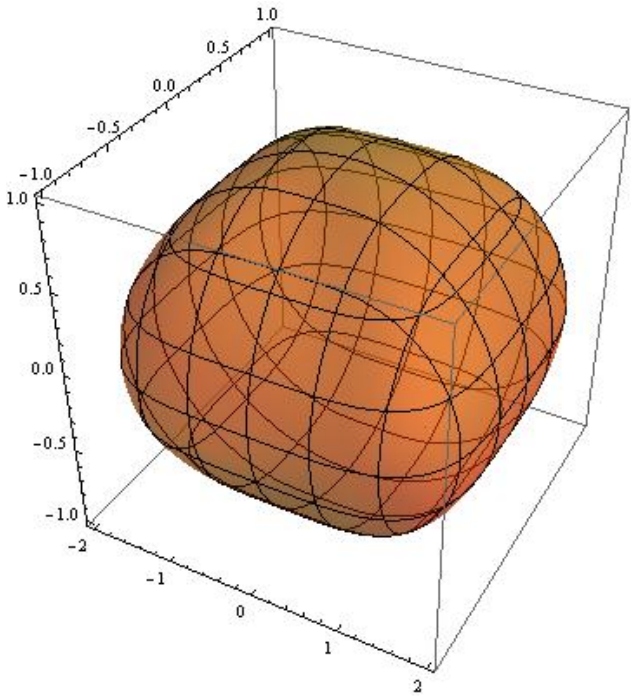
(iii) Ako je $n > 2$, tada superelipsa ima oblik pravokutnika sa zaobljenim vrhovima.



Slika 31: Superelipsa kao pravokutnik sa zaobljenim vrhovima

Poznavajući Laméove krivulje, danski pjesnik i znanstvenik Piet Hein otkriva superelipsoide koji se često koriste u sportskom graditeljstvu, posebno u konstrukciji većih stadiona i arena. Superelipsoidi nastaju rotiranjem superelipsi oko svojih osi. Tako i najčešći oblici stadiona nastaju jednadžbom:

$$|\sqrt{\frac{x^2+y^2}{a^2}}|^n + |\frac{z}{b}|^n = 1$$



Slika 32: Superelipsoid

5.1 Primjena superelipsoida u sportskim građevinama

Superelipsoide možemo dobiti rotacijom superelipsa ili općenitije kao zadane jednadžbom:

$$(|\frac{x}{a}|^r + |\frac{y}{b}|^r)^{\frac{n}{r}} + |\frac{z}{c}|^n = 1.$$

Slika 33: Arena Zagreb

Arena Zagreb, najveća sportska arena u Hrvatskoj sagrađena je 2008. godine za potrebe održavanja 21. Svjetskog rukometnog prvenstva. To je višenamjenska dvorana predviđena za održavanje sportskih, kulturnih, poslovnih i zabavnih manifestacija. Obavijena je s 86 zakrivljenih rebara raznih visina te svojim oblikom podsjeća na oblu plohu ili superelipsoid.

Slika 34: Allianz Arena

Allianz Arena je jedan od najmodernijih stadiona na svijetu smješten u sjevernom dijelu Munchena. Allianz Arena je primjer najvećeg projekta tekstilne građevine čija je ukupna površina pokrova i fasade 66.500 m^2. Pokrov je od transparentnog materijala dok je fasada od bijelog translucentnog koji sadrži specijalnu rasvjetu tijela koja osvjetljavaju Arenu u tri različite boje, crvenu, bijelu i plavu.

Slika 35: Santiago Bernabeu, Madrid

Stadion najtrofejnijeg nogometnog kluba na svijetu u kojem danas igraju hrvatski igrai Luka Modrić i novopečeni igrač Mateo Kovačić nalazi se u Španjolskoj u glavnom gradu Madridu te je taj stadion jedan od najpoznatijih, najljepših i najprestižnijih stadiona na svijetu.

6 Translacijske plohe

Ploha je translacijska ili klizna ako ona nastaje gibanjem tj. klizanjem jedne krivulje po drugoj. Takvo gibanje krivulje se može opisati na sljedeći način. Neka su c_1 i c_2 dvije regularne krivulje koje se sijeku u točki T. Ako se točka T pomakne u položaj T_{c_1} tada se krivulja c_2 translacijom za vektor $T\vec{T}_a$ preslika u položaj c_{2c_1}. Kada točka T poprimi sve položaje točke T_{c_1}, krivulje c_{2c_1} formiraju kliznu plohu. Ista krivulja nastaje i obrnutim klizanjem tj. klizanjem krivulje c_2 po c_1. Takve krivulje nazivamo i generatornim krivuljama klizne plohe ili generatrisama plohe.

Parametarski oblik translacijske plohe s parametrima u i v dana je:

$$x(u, v) = c_1(u) + c_2(v)$$

Da bi ovaj skup točaka bio regularna ploha nužno je da tangencijalni vektori krivulja ne budu kolinearni, odnosno $c_1' \times c_2' \neq 0$. Zbog same činjenice da translacijska ploha nastaje gibanjem jedne krivulje po drugoj njezina primjena u graditeljstvu čini ju vrlo zanimljivom i praktičnom posebno u natkrivanju građevina.

Slika 36: Kružni cilindar

Navedimo nekoliko primjera translacijskih ploha. Kružni cilindar je translacijska ploha koja nastaje gibanjem po kružnici ili obratno, rotacijski paraboloid te eliptički i hiperbolički paraboloid koji nastaju gibanjem jedne parabole po drugoj. Rotacijski paraboloid, ukoliko uvedemo parametre $u = x$ i $v = y$, dobit ćemo parametarsku jednadžbu

$$(x, y, z) = (u, v, au^2 + av^2).$$

Slika 37: Rotacijski paraboloid

Ovdje se može vidjeti da je zapravo rotacijski paraboloid i translacijska ploha koja nastaje translacijom jedne parabole $c_1 = (u, 0, au^2)$ iz xz-ravnine duž druge parabole $c_2 = (0, v, av^2)$ koja je nalazi u yz-ravnini. Hipar je, kao i rotacijski paraboloid, također i translacijska ploha.

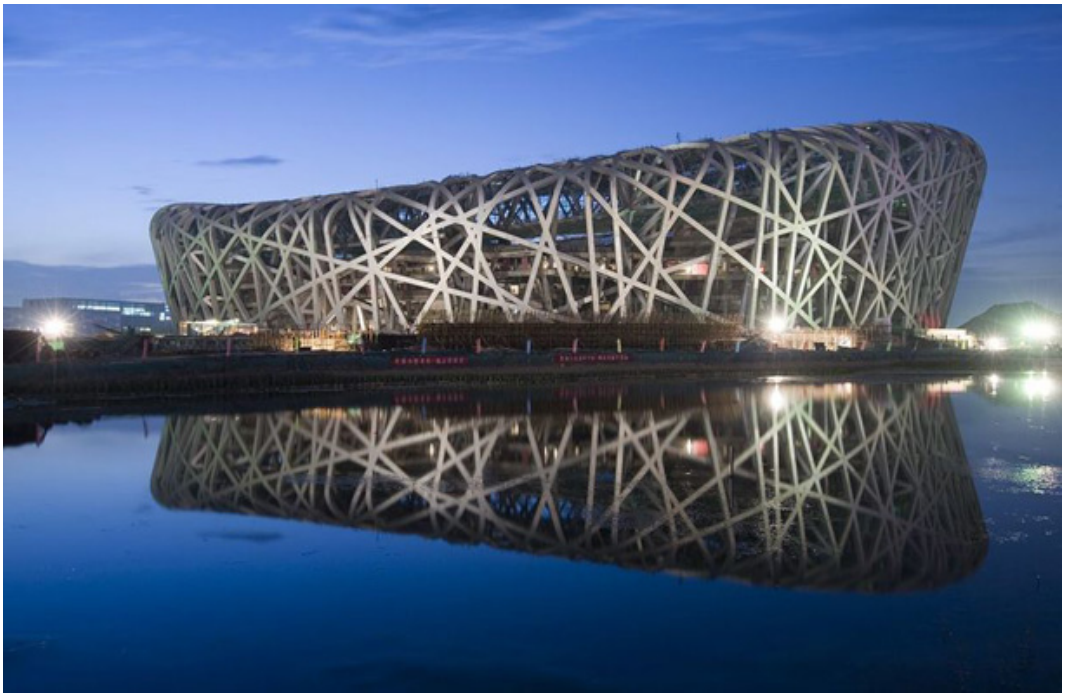
6.1 Primjena translacijskih ploha u sportskim građevinama

Slika 38: Komazawa

Komazawa Olimpijski park je sportski objekt koji je izgrađen za Olimpijadu 1964. godine te se u tom objektu nalaze kompleksi za odbojku, nogomet i biciklizam. Građevina na slici je sagrađena upravo za odbojku.

Slika 39: Seagaia Ocean Dome

Seagaia Ocean Dome ili japanski vodeni park je najveći zatvoreni vodeni park na svijetu otvoren 1993. godine. Vidimo kako je ovaj vodeni park također valjkastog oblika što također spada u translacijske plohe.



Slika 40: Ptičje gnijezdo

Nacionalni stadion u Pekingu poznat kao i "Ptičje gnijezdo" je stadion napravljen za Olimpijske igre u Pekingu 2008. godine. Stadion je zamišljen kao veliki brod koji stvara osebujan dojam i s udaljenosti i iz daljine. Jedinstvena je građevina u svijetu zbog svoje nepravilne čelične mrežaste kontrukcije teške 80.000 tona, a u svom najširem dijelu ima promjer od 343 metra. Konstrukciju građevine čini unutarnji stup crvene boje dok vanjski čelični okviri koji okruuju zgradu na udaljenosti od 15 m čine njezin plašt.

Slika 41: San Siro, Milan

San Siro ili Stadion Gioseppe Meazza je nogometni stadion u talijanskom gradu Milanu. Na tom stadionu igraju dva možda i najpoznatija kluba Italije, Milan i Inter, u kojem igraju i igrali su neki naši veliki nogometaši. Kako znamo da su neke od translacijskih ploha i kružni cilindar, iako ovaj stadion podsjeća i na rotacijsku plohu, zbog izrazito mnogo velebnih stupova cilindričnog oblika koje su vanjske strane stadiona i potporni su stupovi krova i ostalih dijelova tribina ovaj stadion spada i pod translacijkse plohe.

Slika 42: Aspire Tower

Aspire Tower je 300 metara visoki neboder u obliku tornja u katarskom glavnom gradu Dohi te je dio kompleksa Doha Sports City. Odličan je primjer jednoplošnog rotacijskog hiperboloida i postao je simbol Azijskih igara koje su se održale 2006. godine. Kao glavni građevinski materijal u izgradnji se koristio armirani beton dok je vanjski dio zgrade prekriven čeličnom konstrukcijom od 3452 zasebna elementa koja je noću tokom Azijskih igara bila osvijetljena jarkim LED svijetlima. Donji dio tornja ima promjer 70 metara, srednji najuži dio oko 27 metara dok je vrh, koji je "presjeen kosom ravninom" oko 45 metara. Ta kosa ravnina kao presjek daje elipsu koja je ujedno i krov ovog tornja.

7 Kugle i ljuske

Ljuska je zakrivljena plošna konstrukcija koja preuzima vanjska djelovanja primarno membranskim djelovanjem, a primjeri ljuske su kupole, bačvaste ljuske, hiperbolični paraboloid, jednoplošni paraboloid, konoidi, stožaste ljuske, ljuske od sapunice i ojačane ljuske.

Kugla se kao geometrijski najjednostavniji dvostruko zakrivljen geometrijski oblik često pojavljuje u građevini, posebno u natkrivanju, odnosno kod svodova i nadvišenja.

Kupole nastaju tako da se neke kamene kupole oblika kugle izvode nad kvadratičnim tlocrtom. Opisna kupola je ona kupola kojoj je promjer kugle jednak dijagonali kvadrata, dok je kod kupola s trompama promjer kugle kraći od dijagonale kvadrata ili pravokutnika.

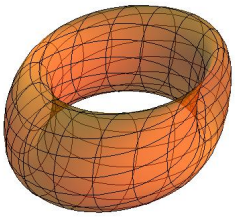
Najznačajnija takva kupola kod koje je promjer polukugle veći od dijagonale pravokutnika naziva se češka kupola. Ta kupola je i translacijska kupola jer nastaje translacijom kružnica paralelnih s odreenom ravninom.

Njezina parametrizacija je:

$$x(u, v) = (a\cos u, b\cos v, a\sin u + b\sin v).$$

Dok je njezina jednadžba dana s:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(a^2 - x^2)(b^2 - y^2).$$

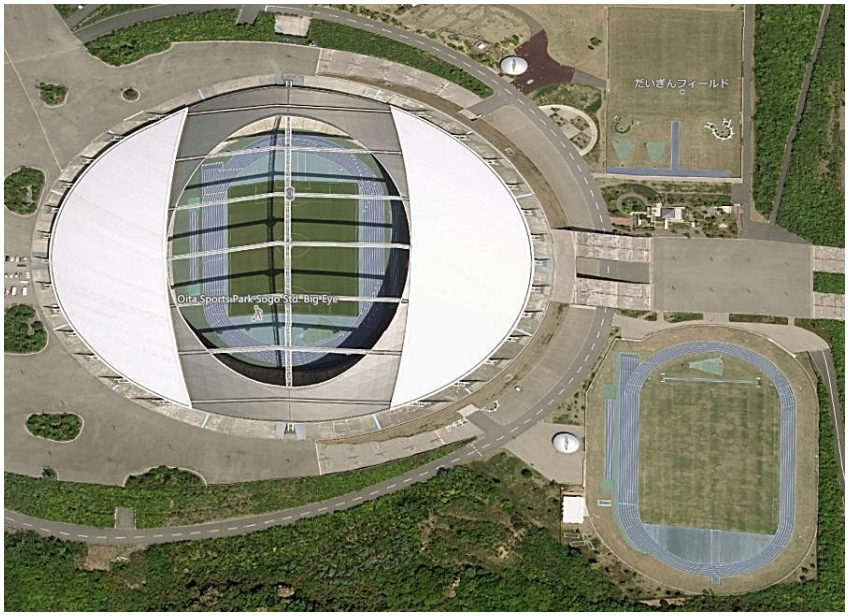


Slika 43: Češka kupola

7.1 Primjena kugli i ljuski u sportskim građevinama

Slika 44: Palazzetto dello sport

Palazzetto dello Sport je zatvorena arena koja se nalazi u Rimu izgrađena za ljetne Olimpijske igre 1960. godine. Arena je izgrađena s rebrastim betonskim ljuskama promjera 61 m i 1620 montažnih betonskih komada.



Slika 45: Oita

Oita stadion je višenamjenski stadion u Japanu. Najznačajnije na ovom stadionu je to što se krovna kupola pokreće sustavom vuče žice.

Slika 46: Mexico city sports palace

Mexico city sports palace je zatvorena arena koja se nalazi u gradu Mexico City sagrađena za olimpijske igre 1968. godine. Ova prekrasna arena je odličan primjer kupole kao jednog od kuglastih ploha.

8 Gaussova i srednja zakrivljenost

Neka je S (orijentirana ploha) i neka je $S_p : T_pS \to T_pS$ operator oblika plohe od S.

Definicija 8.1. *Gaussova zakrivljenost plohe S u točki p je funkcija $K : S \to R$ definirana s*

$$K(p) = detS_p.$$

Srednja zakrivljenost S u točki p je funkcija $H : S \to R$ definirana s

$$H(p) = \frac{1}{2} trS_p.$$

Propozicija 8.2. *Neka je $x : U \to R^3$ karta za plohu S, dok su E, F, G, L, M i N fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu x. Tada su Gaussova i srednja zakrivljenost dane formulama*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Gaussova i srednja zakrivljenost imaju veliku ulogu u graditeljstvu, tj. važno je radi li se o plohi konstantne zakrivljenosti, $K = const.$ ili o minimalnoj plohi gdje je $H = 0$.

Odredimo pojedine klase tih ploha te Gaussou i srednju zakrivljenost sljedećih ploha, tj. pokažimo da se u tim navedenim plohama radi o plohama konstantne zakrivljenosti ili o minimalnoj plohi.

i) Sfera:

$$x(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\cos v, R\cos u),$$

gdje su $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$, R polumjer.

$$\begin{aligned} E &= R^2\sin^2 v \quad F = 0 \quad G = R^2 \\ L &= R\sin^2 v \quad M = 0 \quad N = r \\ K = H &= \frac{R^3\sin^2 v - 0 + R^2\sin^2 v}{2R^4\sin^2 v} = \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Vidimo da je Gaussova zakrivljenost jednaka srednoj zakrivljenosti sfere i da ona iznosi za bilo koji polumjer R, $\frac{1}{R}$.

ii) Katenoid:

$$x(u,v) = (\cosh u\cos v, \cosh u\sin v, u),$$

gdje su $u \in R$, $v \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} E &= \sinh^2 + u = \cosh^2 u \quad F = 0 \quad G = \cosh^2 u \\ L &= 1 \quad M = 0 \quad N = -1 \\ K &= -\frac{1}{\cosh^4 u} \qquad H = \frac{-\cosh^2 u - 0 - \cosh^2 u}{2\cosh^4 u} = 0. \end{aligned}$$

iii) Kružni cilindar:

$$x(u,v) = (R\cos v, R\sin v, u)$$

$$\begin{aligned} &E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = R^2 \\ &L = 0 \qquad M = 0 \qquad N = R \\ &K = 0 \qquad\qquad H = \frac{1}{R} = 0. \end{aligned}$$

Literatura

[1] A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Third Edition*, Chapman and Hall/CRC, 2006.

[2] H. Brauner, W. Kickinger, *Geometrija u graditeljstvu*, Školska knjiga, Zagreb , 1980.

[3] Ž. Milin Šipuš, *Geometrija ploha*, skripta, PMF, Zagreb

[4] Ž. Milin Šipuš, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, skripta, PMF, Zagreb

[5] Pravčaste plohe, dostupno na `http://www.grad.hr/itproject_math/Links/sonja/pravcaste/opce/opce.html` (svibanj 2015.)

[6] Rotacijske plohe, dostupno na `http://www.grad.hr/sgorjanc/Links/perspektiva/predavanja/rotacijske/rotacijske.html` (lipanj 2015.)

[7] Translacijske plohe, dostupno na `http://www.grad.hr/sgorjanc/Links/perspektiva/predavanja/translacijske/translacijske.html` (srpanj 2015.)

[8] Pravčaste plohe, dostupno na `http://www.fsb.unizg.hr/geometrija.broda/400/420/gb421.htm` (svibanj 2015.)

[9] Specijalne inženjerske građevine, dostupno na `http://seminar.tvz.hr/materijali/materijali16/16A07.pdf` (lipanj 2015.)

[10] Fugatawa Yukio, *GA (Global Architecture): Contemporary Architecture 09: Sports*, A. D. A. Edita Tokyo Co., Ltd., Tokyo, 2007.

[11] B. Koružnjak, *Zgrade za sport*, skripta, Arhitektonski fakultet, dostupno na `http://www.arhitekt.unizg.hr/nastava/skripta/KoruznjakB_Zgrade20za20sport_saC5BEeci.pdf` (kolovoz 2015)

[12] Superelipsoid, dostupno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Superellipsoid` (srpanj 2015.)

[13] Superelipse, dostupno na
`https://en.wikipedia.org/wiki/Superellipse` (srpanj 2015.)

[14] Z. Ščepanović, *Geometrijski oblici u arhitekturi*, diplomski rad, dostupno na
`http://digre.pmf.unizg.hr/4112/1/diplomski-v2.pdf`
(kolovoz 2015.)

[15] Slike nabavljene pomoću *Google* tražilice

Sažetak

Ključni pojmovi ovoga rada su opisani pomoću poznatih ploha. Kao što smo mogli primijetiti najznačajnije plohe korištene u građevini, posebno sportskoj, su pravčaste plohe koje su ujedno i najjednostavnije za izgradnju bilo kojeg dijela sportskih objekata. Široku primjenu imaju translacijske plohe te posebno superelipsoidi koji generaliziraju rotacijske plohe dok se u novije vrijeme susrećemo sve više s kombinacijom svih ploha spomenutih u radu.

Summary

Key terms in this diploma thesis are surfaces and buildings described by well known surfaces. The surfaces were investigated based on differential geometry. We noticed that the most significant surfaces used in construction, particularly in sports construction, are ruled surfaces which are also the simplest one for building any part of sports facilities. Translational surfaces are widely applied, particularly superelipsoids and, in particular, surfaces obtained by rotating a superellipse. We have recently encountered also surfaces of more and more combinations that appear in architecture.

Životopis

Zovem se Josip Perić. Rođen sam 18.11.1987. godine u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započinjem u Područnoj školi Stupnik 1994. godine i nastavljam u Osnovnoj koli Lučko, a zatim upisujem IX. gimnaziju u kojoj sam maturirao 2006. godine. Iste godine upisao sam preddiplomski sveučilišni studij matematike, a 2008. godine upisujem preddiplomski studij matematike, smjer: nastavnički, koji završavam 2012. godine. Isti smjer odabirem i za diplomski studij koji završavam 2015. godine.