Babenko-Becknerov teorem

Perković, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Perković

BABENKO-BECKNEROV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
Doc.dr.sc. Vjekoslav Kovač

Zagreb, lipanj 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima, Veseljku i Višnji

Sadržaj

Uvod

U ovom radu dokazana je jedna od važnijih nejednakosti u Fourierovoj analizi, Babenko-Becknerova nejednakost. Naime, to je poznati rezultat o normi Fourierove transformacije kao linearnog operatora s L^p u L^q, pri čemu su p i q konjugirani eksponenti te je $1 \leqslant p \leqslant 2$. Babenko je proučavao posebni slučaj tog problema kada je q parni cijeli broj. William Beckner je 1975. godine u radu [2] dokazao da se prava vrijednost te norme postiže za Gaussove funkcije. Becknerov originalni dokaz zapravo je vjerojatnosni dokaz jer koristi nizove Bernoullijevih pokusa i konvergenciju prema normalnoj razdiobi.

U Poglavlju 1 definiramo Fourierovu transformaciju funkcija na prostoru L^1 i pokazujemo da je to ograničena linearna transformacija sa L^1 u C_0. Zatim dokazujemo Riemann-Lebesgueovu lemu, odnosno nužan uvjet da bi funkcija bila Fourierova transformacija neke funkcije na prostoru L^1. Uvodimo i pojam konvolucije funkcija na L^1 i pokazujemo da je Fourierova transformacija konvolucije funkcija zapravo umnožak Fourierovih transformacija tih funkcija. Objasnit ćemo vezu između translacije funkcije i množenja njene Fourierove transformacije eksponencijalnom te vezu između diferenciranja funkcije i odgovarajuće operacije na Fourierovoj transformaciji iste. Također, dokazujemo vrlo važan rezutat: Fourierova transformacija Gaussove funkcije je opet svojevrsna Gaussova funkcija. Uslijedit će teorem inverzije i dokaz injektivnosti te transformacije. Na kraju poglavlja definiramo Fourierovu transformaciju funkcija na L^2 prostoru i dokazujemo Plancherelov teorem, tj. činjenicu da se Fourierova transformacija na jedinstveni način može proširiti do unitarnog izomorfizma u L^2.

U Poglavlju 2 definiramo Hermiteove polinome i dokazujemo rekurzivne relacije koje oni zadovoljavaju. Nadalje, pokazujemo da je niz Hermiteovih polinoma $\{H_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ortogonalan u odnosu na Gaussovu mjeru te da je takav niz ortogonalna baza prostora L^2 na $\mathbb{R}$ uz Gaussovu mjeru. Na kraju poglavlja izvodimo formulu za funkciju izvodnicu Hermiteovih polinoma i dokazujemo Mehlerovu formulu.

U Poglavlju 3 konačno dokazujemo Babenko-Becknerovu nejednakost, odnosno da za Fourierovu transformaciju na $\mathbb{R}^n$ i za sve vrijednosti p, $1 \leqslant p \leqslant 2$ vrijedi

$$\|\mathcal{F} f\|_{p'} \leqslant (A_p)^n \|f\|_p,$$

$$A_p = \left[\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Ovdje p' označava konjugirani eksponent od p. Prilikom dokaza zapravo uspostavljamo ekvivalenciju između Babenko-Becknerove nejednakosti i sljedećeg rezultata:
Za $1 < p \leqslant 2$ i $\omega = -i\sqrt{p-1}$ vrijedi

$$T_\omega : L^p(d\mu) \to L^{p'}(d\mu),$$

$$||T_\omega g||_{L^{p'}(d\mu)} \leqslant ||g||_{L^p(d\mu)}.$$

Za $|\omega| < 1$, T_ω je integralni operator na prostoru $L^2(d\mu)$ definiran preko Mehlerove formule, pri čemu je $d\mu$ Gaussova mjera. Zatim promatramo niz Bernoullijevih pokusa i uvodimo odgovarajuću diskretnu vjerojatnosnu mjeru. Koristimo da n-ta konvolucija takve mjere sa samom sobom slabo konvergira prema Gaussovoj mjeri. Nadalje, na prostoru diskretne vjerojatnosne mjere definiramo operator analogan operatoru T_ω na prostoru $L^2(d\mu)$ i pokazujemo dva važna rezultata: nejednakost za dvije točke i nejednakost za produkt operatora. Koristeći rezultat za produkt operatora definiramo novi operator na prostoru simetričnih funkcija i uspostavljamo vezu između Hermiteovih polinoma i simetričnih funkcija. Naposljetku, primjenjujući navedenu vezu i centralni granični teorem dokazujemo spomenuti glavni rezultat ovog rada.

Posebno se zahvaljujem mentoru doc.dr.sc. Vjekoslavu Kovaču na ukazanoj pomoći i strpljenju te mnogim korisnim savjetima tijekom pisanja rada.

Poglavlje 1

Fourierova transformacija

U sljedećim razmatranjima sa E_n ćemo označavati n-dimenzionalni realni euklidski prostor, a njegove elemente sa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Skalarni produkt elemenata $x, y \in E_n$ jest realni broj $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$, norma od $x \in E_n$ je nenegativni broj $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ te sa $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ označavamo Lebesgueovu mjeru u E_n. Bavit ćemo se raznim prostorima funkcija definiranih na E_n. Najjednostavniji primjeri takvih prostora su $L^p = L^p(E_n)$ prostori $(1 \leqslant p < \infty)$, svih izmjerivih funkcija f za koje je

$$\|f\|_p = \left(\int_{E_n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

pri čemu se identificiraju funkcije koje se podudaraju u gotovo svakoj točki, tj. na komplementu nekog skupa mjere 0. Broj $\|f\|_p$ nazivamo L^p *norma* funkcije f. Prostor $L^\infty(E_n)$ sadrži sve esencijalno ograničene funkcije na E_n te za $f \in E_n$ podrazumijevamo da je $\|f\|_\infty$ esencijalni supremum od $|f(x)|$, $x \in E_n$.

1.1 Fourierova transformacija na prostoru L^1

Definicija 1.1.1. *Fourierova transformacija* funkcije $f \in L^1(E_n)$ je funkcija $\hat{f}$ definirana sa

$$\hat{f}(x) = \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \qquad \text{za } x \in E_n.$$

Teorem 1.1.1. *(i) Preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ je ograničena linearna transformacija s $L^1(E_n)$ u $L^\infty(E_n)$ i vrijedi $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.*

(ii) Ako je $f \in L^1(E_n)$, tada je $\hat{f}$ uniformno neprekidna.

Dokaz. (i) Pokažimo prvo da je preslikavanje $f \mapsto \hat{f}$ linearni operator. Neka su $f, g \in L^1(E_n)$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je za $x \in E_n$:

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha f+\beta g})(x) &= \int_{E_n} (\alpha f(t) + \beta g(t)) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \\
&= \alpha \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt + \beta \int_{E_n} g(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \\
&= \alpha \hat{f}(x) + \beta \hat{g}(x).
\end{aligned}$$

Da je $\hat{f}$ ograničen linearan operator slijedi iz

$$|\hat{f}| = \left| \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \right| \leqslant \int_{E_n} |f(t)||e^{-2\pi i x\cdot t}| dt \leqslant \int_{E_n} |f(t)| dt \leqslant \|f\|_1,$$

odnosno $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

(ii) Za $x, h \in E_n$ imamo da je

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &= \left| \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i (x+h) t} dt - \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \right| \\
&= \left| \int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot t} (e^{-2\pi i h t} - 1) f(t) dt \right| \\
&\leqslant \int_{E_n} |e^{-2\pi i x\cdot t}|\, |e^{-2\pi i h t} - 1||f(t)| dt \\
&\leqslant \int_{E_n} |e^{-2\pi i h t} - 1||f(t)| dt.
\end{aligned}$$

Iz Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji i činjenice da je podintegralna funkcija dominirana integrabilnom funkcijom $2|f(t)|$ slijedi

$$\lim_{h\to 0} \int_{E_n} |e^{-2\pi i h t} - 1||f(t)| dt = \int_{E_n} |f(t)| \lim_{h\to 0} |e^{-2\pi i h t} - 1| dt = 0.$$

Dakle, $\hat{f}$ je uniformno neprekidna, a posebno je onda i neprekidna. □

Teorem 1.1.2. *(Riemann-Lebesgue)*
Ako je $f \in L^1(E_n)$, tada $\hat{f}(x) \to 0$ kada $|x| \to \infty$.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo tzv. *Lebesgueovom* indukcijom.
1^0 Pretpostavimo najprije da je $f \in L^1(E_n)$ karakteristična funkcija proizvoljnog n-dimenzionalnog pravokutnika $I \subset E_n$. Neka je $I = [a, b]$, gdje su a, $b \in E_n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a_i \leqslant b_i$ za sve $i = 1, 2, \dots, n$. Drugim riječima,

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

te $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$. Fourierova transformacija funkcije f sada je

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \int_{[a,b]} e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \prod_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x_j t_j} dt_j \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-2\pi i x_j b_j} - e^{-2\pi i x_j a_j}}{-2\pi i x_j}, \qquad x \in E_n\end{aligned}$$

te vrijedi ocjena

$$|\hat{f}| \leqslant \prod_{j=1}^{n} \frac{2}{2\pi |x_j|} = \frac{1}{\pi^n} \frac{1}{|x_1| \cdots |x_j|}.$$

Pustimo li limes po x kada $x \to \infty$ u zadnjoj nejednakosti, slijedi da $|\hat{f}(x)| \to 0$, odnosno $\hat{f}(x) \to 0$.

2^0 Uzmimo sada da je f linearna kombinacija karakterističnih funkcija ograničenih n-dimenzionalnih pravokutnika iz E_n. Neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan i stavimo da je

$$f = \sum_{j=1}^{N} c_j \mathbb{1}_{[a_j, b_j]}$$

pri čemu je za svako $j \in 1, \dots, N$ $[a_j, b_j] \subset E_n$ te $c_j \in \mathbb{R}$. Tada je za proizvoljno $x \in E_n$

$$\hat{f}(x) = \int_{E_n} (\sum_{j=1}^{N} c_i \mathbb{1}_{[a_j,b_j]}(t)) e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \sum_{j=1}^{N} c_j \int \mathbb{1}_{[a_j,b_j]}(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt = \sum_{j=1}^{N} c_j \int_{a_j}^{b_j} e^{-2\pi i x\cdot t} dt.$$

Prema dijelu 1^0 slijedi da puštanjem limesa po x kad $|x| \to \infty$ dobivamo $\hat{f}(x) \to 0$.

Poznata je tvrdnja (vidjeti propoziciju 3.4.3 u knjizi [3]) da su funkcije kao u 2^0 guste u prostoru L^1, odnosno za svaku $f \in L^1(E_n)$ postoji niz funkcija $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ kao u 2^0 takvih da

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_1 = 0.$$

Prema teoremu 1.1.1 znamo da su funkcije $(\hat{g}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ neprekidne i da vrijedi

$$\lim_{k\to\infty} \|\hat{g}_k - \hat{f}_k\|_\infty = 0.$$

Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $\|\hat{g}_k - \hat{f}_k\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$.
Zbog slučaja 2^0 primijenjenog na funkcije $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ postoji $R > 0$ takav da

$$|x| > R \Rightarrow |\hat{g}_k(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Konačno, koristeći nejednakost trokuta, za $|x| > R$ vrijedi

$$|\hat{f}(x)| \leqslant |\hat{f}(x) - \hat{g}_k(x)| + |\hat{g}_k(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Budući da je ϵ proizvoljan, puštanjem limesa po x kad $|x| \to \infty$ u zadnjoj nejednakosti, dobivamo tvrdnju teorema. □

Teorem 1.1.2 daje nužan uvjet da bi funkcija bila Fourierova transformacija neke funkcije iz L^1. Označimo li

$$C_0(E_n) := \{h \colon E_n \to \mathbb{C},\ h \text{ je neprekidna, } \lim_{|x|\to\infty} h(x) = 0\},$$

vidimo da smo teoremima 1.1.1 i 1.1.2 zapravo dokazali da $f \in L^1(E_n)$ implicira $\hat{f} \in C_0(E_n)$.

Definicija 1.1.2. *Konvolucija funkcija* $f, g \in L^1(E_n)$, u oznaci $h = f * g$, jest funkcija čija je vrijednost za proizvoljan $x \in E_n$ dana s

$$h(x) = \int_{E_n} f(x-y)g(y)dy.$$

Lako se pokaže da je funkcija $f(x-y)g(y)$ izmjeriva funkcija dvije varijable, x i y.
Iz Fubinijevog teorema o zamjeni integrala direktno slijedi da je $h \in L^1(E_n)$ te da vrijedi $\|h\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Naime,

$$\begin{aligned}
\|h\|_1 &= \int_{E_n} \Big| \int_{E_n} f(x-y)g(y)dy \Big| dx \\
&\leqslant \int_{E_n} \Big(\int_{E_n} |f(x-y)| dx \Big) |g(y)| dy \\
&= \int_{E_n} \Big(\underbrace{\int_{E_n} |f(x)| dx}_{=\|f\|_1} \Big) |g(y)| dy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Nadalje, konvolucija je komutativno i asocijativno preslikavanje. Općenito, funkcija $h = f*g$ definirana je za svaku $f \in L^p(E_n), 1 \leqslant p < \infty$ i $g \in L^1(E_n)$. Vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 1.1.3. *Ako je $f \in L^p(E_n), 1 \leqslant p < \infty$ i $g \in L^1(E_n)$, tada je $h = f*g$ dobro definirana i $h \in L^p(E_n)$. Štoviše, $\|h\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$.*

Dokaz. Očito je

$$|h(x)| = \left| \int_{E_n} f(x-y)g(y)dy \right| \leqslant \int_{E_n} |f(x-y)||g(y)|dy \quad x \in E_n.$$

Traženi rezultat posljedica je nejednakosti Minkowskog za integrale. Naime, primjenom nejednakosti

$$\Big(\int_{E_n} \Big| \int_{E_n} F(x,y)dy \Big|^p dx \Big)^{1/p} \leqslant \int_{E_n} \Big(\int_{E_n} |F(x,y)|^p dx \Big)^{1/p} dy \tag{1.1}$$

na funkciju $F(x,y) = f(x-y)g(y)$, dobivamo

$$\left(\int |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int \left(\int |f(x-y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} |g(y)|dy = \|f\|_p\|g\|_1. \qquad \square$$

Kao jednostavnu posljedicu definicija konvolucije i Fourierove transformacije imamo sljedeći rezultat:

Teorem 1.1.4. *Za $f, g \in L^1(E_n)$ je $\widehat{(f*g)} = \hat{f}\hat{g}$.*

Dokaz. Neka je $x \in E_n$.

$$\begin{aligned}
\widehat{(f*g)}(x) &= \int_{E_n} (f*g)(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt = \int_{E_n} \Big(\int_{E_n} f(t-y)g(y)dy \Big) e^{-2\pi i x\cdot t}dt \\
&= \int_{E_n} g(y)e^{-2\pi i x\cdot y} \Big(\int_{E_n} f(t-y)e^{-2\pi i x\cdot(t-y)}dt \Big) dy \\
&= \int_{E_n} g(y)e^{-2\pi i x\cdot y} \Big(\int_{E_n} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt \Big) dy \\
&= \int_{E_n} g(y)e^{-2\pi i x\cdot y} \hat{f}(x)dy \\
&= \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned} \qquad \square$$

Mnoge važne operacije matematičke analize imaju vrlo jednostavnu vezu s Fourierovom transformacijom. Sljedeća propozicija daje vezu između translacije funkcije i njene Fourierove transformacije.

Propozicija 1.1.5. *Neka je τ_h translacija funkcije za vektor $h \in E_n$, odnosno*

$$\tau_h g(x) = g(x - h), \qquad x \in E_n.$$

Tada za svaku $f \in L^1(E_n)$ vrijedi:

(i) $\widehat{\tau_h f}(x) = e^{-2\pi i x h}\hat{f}(x)$,

(ii) $\tau_h \hat{f}(x) = (\widehat{e^{2\pi i t h} f(t)})(x)$.

Dokaz. (i) Imamo:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau_h f}(x) &= \int_{E_n} (\tau_h f)(t) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \\
&= \int_{E_n} f(t-h) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \\
&= \int_{E_n} (f(t-h) e^{-2\pi i x(t-h)}) e^{-2\pi i x h} dt \\
&= e^{-2\pi i x h}\hat{f}(x).
\end{aligned}$$

(ii) Za dokaz druge jednakosti računamo:

$$\begin{aligned}
\tau_h \hat{f}(x) = \hat{f}(x-h) &= \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i t(x-h)} dt \\
&= \int_{E_n} f(t) e^{-2\pi i t x} e^{2\pi i t h} dt = \\
&= \int_{E_n} (e^{2\pi i t h} f(t)) e^{-2\pi i x\cdot t} dt \\
&= (\widehat{e^{2\pi i t h} f(t)})(x).
\end{aligned}$$

□

Kroz sljedeći teorem obrazložit ćemo vezu diferenciranja i Fourierove transformacije.

Teorem 1.1.6. *Pretpostavimo da je $f \in L^1(E_n)$ i $x_k f(x) \in L^1(E_n)$, pri čemu je x_k k-ta koordinatna funkcija, $k = 1 \ldots n$. Tada je $\hat{f}$ diferencijabilna i vrijedi*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = (-2\pi i t_k \widehat{f(t))}(x), \qquad x \in L^1(E_n).$$

Dokaz. Neka je $h = (0, \cdots, h_k, \cdots, 0), h \in E_n$ ne-nul vektor duž k-te koordinatne osi. Zbog relacije (ii) iz propozicije 1.1.5 imamo

$$\frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = \frac{\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot t}(e^{-2\pi iht} - 1) f(t)dt}{h_k} = \widehat{\left(\frac{e^{-2\pi ith} - 1}{h_k} f(t)\right)}(x), \qquad x \in E_n.$$

Nadalje, vrijedi da je

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{e^{-2\pi ith} - 1}{h_k} = -2\pi i t_k. \tag{1.2}$$

Označimo li $\theta = 2\pi t_k h_k$, imamo sljedeću ocjenu :

$$\begin{aligned} |e^{-i\theta} - 1| &= \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta} \\ &= \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2|\sin\frac{\theta}{2}| \leqslant 2\frac{|\theta|}{2} = |\theta|. \end{aligned}$$

Odavde slijedi da je

$$\left|\frac{e^{-2\pi i t_k h_k} - 1}{h_k}\right| \leqslant 2\pi |t_k|.$$

Konačno, prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi

$$\lim_{h_k \to 0} \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = (\widehat{-2\pi i t_k f}(t))(x).$$

Obzirom da su sve parcijalne derivacije od $\hat{f}$ neprekidne, zaključujemo da je $\hat{f}$ štoviše i neprekidno diferencijabilna funkcija. □

Definicija 1.1.3. Za funkciju $f \in L^p(E_n)$ kažemo da je *diferencijabilna u L^p normi po k-toj varijabli* ako postoji funkcija $g \in L^p(E_n)$ takva da

$$\left(\int_{E_n} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x)\right| dx\right)^{1/p} \to 0$$

kad $h_k \to 0$. Funkciju g nazivamo parcijalnom derivacijom od f po k-toj varijabli u normi L^p.

Teorem 1.1.7 tvrdi da je Fourierova transformacija funkcije pomnožena s k-tom koordinatnom funkcijom jednaka (do na multiplikativnu konstantu) Fourierovoj transformaciji parcijalne derivacije funkcije po k-toj koordinati.

Teorem 1.1.7. *Ako je $f \in L^1(E_n)$ i g parcijalna derivacija od f po k-toj varijabli u L^1 normi, tada je*

$$\hat{g}(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x), \qquad x \in E_n.$$

Dokaz. Prema propoziciji 1.1.5 (i) je

$$\hat{g}(x) - \hat{f}(x)\frac{e^{2\pi i x h} - 1}{h_k} = \widehat{\left(g(t) - \frac{f(t+h) - f(t)}{h_k}\right)}(x), \qquad x \in E_n$$

pa prema teoremu 1.1.1 (i) slijedi

$$\left\|\hat{g}(x) - \hat{f}(x)\frac{e^{2\pi i x h} - 1}{h_k}\right\|_{\infty,x} \leqslant \left\|g(t) - \frac{f(t+h) - f(t)}{h_k}\right\|_{1,t} \to 0,$$

kada $h \to 0$. S druge strane, po formuli (1.2) dobivamo

$$\left\|\hat{f}(x)\frac{e^{2\pi i x h} - 1}{h_k} - 2\pi i x_k \hat{f}(x)\right\|_{\infty,x} \to 0.$$

□

Naredni teorem računa Fourierovu transformaciju Gaussovih funkcija i prilagodili smo ga iz knjige [5].

Teorem 1.1.8. *Za svaki $\alpha > 0$ vrijedi*

$$\int_{E_n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi i t y} dy = \alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|t|^2/\alpha}.$$

Dokaz. Izračunajmo najprije vrijednost integrala za $t = 0$.

$$\begin{aligned} I_{\alpha,n} &= \int_{E_n} e^{-\pi|y|^2} dy = \int_{E_n} e^{-\pi\alpha(y_1^2 + \cdots + y_n^2)} dy_1 \ldots dy_n \\ &= \left(\int_{E_n} e^{-\pi\alpha y_1^2} dy_1\right) \cdots \left(\int_{E_n} e^{-\pi\alpha y_n^2} dy_n\right) \\ &= I_{\alpha,1}^n \end{aligned}$$

Vrijednost integrala $I_{\alpha,2}$ računamo prelaskom na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} I_{\alpha,2} &= \int_{E_2} e^{-\pi\alpha|y|^2} dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\pi\alpha r^2} r dr d\phi = 2\pi \int_0^\infty e^{-\pi\alpha r^2} r dr = \left[u = r^2, du = 2rdr\right] \\ &= \pi \int_0^\infty e^{-\pi\alpha u} du = -\frac{1}{\alpha} e^{-\pi\alpha u}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Sada imamo
$$I_{\alpha,1} = \sqrt{I_{\alpha,2}} = \alpha^{-1/2}$$
pa je potom
$$I_{\alpha,n} = \sqrt{I_{\alpha,1}^n} = \alpha^{-n/2}.$$
Stavimo da je
$$I(t) = \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2} e^{-2\pi ity} dy, \qquad t \in E_1.$$
Derivirajmo sada izraz $I(t)$ te iskoristimo formulu za parcijalnu integraciju:
$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2} \frac{d}{dt}(e^{-2\pi ity}) dy = \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2}(-2\pi iy) e^{-2\pi ity} dy \\
&= \frac{i}{\alpha} \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2}(-2\pi\alpha y) e^{-2\pi ity} dy = -\frac{i}{\alpha}\int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2} \frac{d}{dy}(e^{-2\pi ity}) dy \\
&= -\frac{i}{\alpha} \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y^2}(-2\pi it) e^{-2\pi ity} dy = -\frac{2\pi t}{\alpha} I(t).
\end{aligned}$$
Dobivamo diferencijalnu jednadžbu s početnim uvjetom:
$$I'(t) = -\frac{2\pi t}{\alpha} I(t),$$
$$I(0) = \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$
Iz
$$\frac{d}{dt}(I(t)e^{\pi t^2/\alpha}) = I'(t)e^{\pi t^2/\alpha} + I(t)\frac{2\pi t}{\alpha}e^{\pi t^2/\alpha} = -\frac{2\pi t}{\alpha}I(t)e^{\pi t^2/\alpha} + I(t)\frac{2\pi t}{\alpha}e^{\pi t^2/\alpha} = 0,$$
zaključujemo da je $I(t)e^{\pi t^2/\alpha}$ konstanta, odnosno
$$I(t)e^{\pi t^2/\alpha} = I(0)e^0 = \alpha^{-\frac{1}{2}}.$$
Slijedi da je
$$I(t) = \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi t^2/\alpha}.$$
Konačno, za $t \in E_n, t = (t_1, \ldots, t_n)$ dobivamo
$$\begin{aligned}
\int_{E_n} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi(t_1y_1+\cdots+t_ny_n)} dy_1 \ldots dy_n &= \prod_{j=1}^n \int_{E_1} e^{-\pi\alpha y_j^2} e^{-2\pi it_jy_j} dy_j = \prod_{j=1}^n \alpha^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi t_j^2/\alpha} \\
&= \alpha^{-\frac{n}{2}} e^{-\pi|t|^2/\alpha}.
\end{aligned}$$
□

Teorem 1.1.9. *Ako su $f, g \in L^1(E_n)$, tada je*

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{E_n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Dokaz. Tvrdnju dobivamo primjenom Fubinijevog teorema.

$$\begin{aligned}
\int_{E_n} \hat{f}(x)g(x)dx &= \int_{E_n} \left(\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot t} f(t)dt \right) g(x)dx \\
&= \int_{E_n} \left(\int_{E_n} e^{-2\pi i x\cdot t} g(x)dx \right) f(t)dt \\
&= \int_{E_n} f(t)\hat{g}(t)dt.
\end{aligned}$$

□

Teorem 1.1.10. *Neka je $\phi \in L^1(E_n)$ takva da je $\int_{E_n} \phi(x)dx = 1$ i neka je za svako $\epsilon > 0$ $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$. Ako je $f \in L^p(E_n), 1 \leqslant p < \infty$ ili $f \in C_0(E_n) \subset L^\infty(E_n)$, tada vrijedi*

$$\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \to 0 \quad kada \quad \epsilon \to 0.$$

Dokaz. Neka je $f \in L^p(E_n), 1 \leqslant p < \infty$. Vrijedi

$$\int_{E_n} \phi_\epsilon(t)dt = \int_{E_n} \epsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\epsilon})dt = \left[x_j = \frac{t_j}{\epsilon}, dt_j = \epsilon dx_j\right] = \int_{E_n} \phi(x)dx = 1.$$

Nadalje,

$$(f * \phi_\epsilon)(x) - f(x) = \int_{E_n} f(x-t)\phi_\epsilon(t)dt - \int_{E_n} f(x)\phi_\epsilon(t)dt = \int_{E_n} [f(x-t) - f(x)]\phi_\epsilon(t)dt.$$

Iskoristimo sada nejednakost Minkowskog za integrale:

$$\begin{aligned}
\|f * \phi_\epsilon - f\|_p &\leqslant \int_{E_n} \left(\int_{E_n} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{-n}|\phi(\frac{t}{\epsilon})|dt \\
&= [t \mapsto \epsilon t, dt \mapsto \epsilon dt] \\
&= \int_{E_n} \left(\int_{E_n} |f(x-\epsilon t) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |\phi(t)|dt.
\end{aligned}$$

Izraz

$$\left(\int_{E_n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \omega_{p,f}(h) = \omega(h), \qquad h \in E_n,$$

poznat je kao L^p *modul neprekidnosti* funkcije$f$. Primjenom nejednakosti Minkowskog vidimo da je ω ograničena funkcija:

$$\begin{aligned}\omega(h) &= \left(\int_{E_n} |f(x+h) - f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left(\int_{E_n} |f(x+h)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E_n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant 2\|f\|_p.\end{aligned}$$

Primijetimo da još jedino treba pokazati $\omega(h) \to 0$ kada $h \to 0$. Naime, nakon toga će primjenom Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji u varijabli t slijediti $\|f * \phi_\epsilon - f\|_p \to 0$ kada $\epsilon \to 0$.

Neka je sada f neprekidna funkcija koja iščezava izvan kompaktnog skupa K, odnosno f ima kompaktni nosač. Tada je f uniformno neprekidna, odnosno

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in E_n)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon).$$

U terminima funkcije ω to bi značilo

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)\Big(|h| < \delta \Rightarrow \omega(h) < \left(\int_K \epsilon^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < P(K)^{\frac{1}{p}}\epsilon\Big),$$

gdje $P(K)$ označava površinu kompaktnog skupa K izvan kojeg f iščezava. Dakle, doista vrijedi $\omega(h) \to 0$ kada $|h| \to 0$.

Sada koristimo činjenicu da su neprekidne funkcije s kompaktnim nosačima guste u $L^p(E_n)$ za $1 \leqslant p < \infty$. Dakle, za svaku $f \in L^p(E_n)$, $1 \leqslant p < \infty$ postoji niz neprekidnih funkcija s kompaktnim nosačem $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ takvih da je

$$\lim_{k \to \infty} \|g_k - f\|_p = 0.$$

Uzmimo $\epsilon > 0$. Postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $\lim_{k\to\infty} \|g_k - f\|_p < \frac{\epsilon}{3}$. Primijenimo li prethodni slučaj na g_k znamo da $\omega_{g_k}(h) \to 0$ kada $|h| \to 0$, $h \in E_n$, odnosno

$$(\exists \delta > 0)(|h| < \delta \Rightarrow |\omega_{g_k}(h)| < \frac{\epsilon}{3}).$$

Konačno, koristeći nejednakost Minkowskog, dobivamo

$$\begin{aligned}
|\omega_f(h) - \omega_{g_k}(h)| &= \left| \left(\int_{E_n} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{E_n} |g_k(x+h) - g_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
&\leqslant \left(\int_{E_n} |f(x+h) - g_k(x+h) - f(x) + g_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{E_n} |f(x+h) - g_k(x+h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{E_n} |f(x) - g_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \frac{2\epsilon}{3},
\end{aligned}$$

pa je za $|h| < \delta$

$$|\omega_f(h)| \leqslant |\omega_f(h) + \omega_{g_k}(h)| + |\omega_{g_k}(h)| < \epsilon.$$ □

Tvrdnja za $f \in C_0(E_n)$ slijedi analogno, koristeći činjenicu da su neprekidne funkcije s kompaktnim nosačem guste i u prostoru $C_0(E_n)$ s normom $\| \cdot \|_\infty$.

Propozicija 1.1.11.

(i) Ako je za $a \in \mathbb{R}, a > 0$ *i* $t \in E_n$, $g(t) = f(at)$, *tada vrijedi* $\hat{g}(x) = \frac{1}{a^n}\hat{f}(\frac{x}{a})$.

(ii) Neka je $h \in E_n$ *i* $g(t) = e^{-2\pi i t \cdot h} f(t)$. *Tada je* $\hat{g}(x) = \hat{f}(x-h)$.

(iii) Neka je $h \in E_n$ *i* $g(t) = f(t+h)$. *Tada je* $\hat{g}(x) = \hat{f}(x)e^{2\pi i x \cdot h}$.

Dokaz.

(i) Imamo:

$$\begin{aligned}
\hat{g}(x) &= \int_{E_n} g(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \\
&= \int_{E_n} f(at) e^{-2\pi i x \cdot t} dt \\
&= [u = at, du = a^n dt] \\
&= \int_{E_n} f(u) e^{-2\pi i a^{-1} x \cdot u} a^{-n} du \\
&= \frac{1}{a^n} \hat{f}(\frac{x}{a}).
\end{aligned}$$

(ii) Tvrdnja slijedi iz (ii) propozicije 1.1.5.

(iii) Tvrdnja slijedi iz (i) propozicije 1.1.5. stavimo li $-h$ umjesto h. □

Teorem 1.1.12. *(Teorem inverzije) Ako su f i $\hat{f}$ obje integrabilne, tada je*

$$f(x) = \int_{E_n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt$$

za gotovo svaki $x \in E_n$.

Dokaz. Po pretpostavci je $\hat{f} \in L^1(E_n)$ pa je po teoremu o dominiranoj konvergenciji

$$\int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t} \hat{f}(t) dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{E_n} e^{-\pi\epsilon^2 |t|^2 + 2\pi i x \cdot t} \hat{f}(t) dt.$$

Neka je $g(t) = e^{-\pi\epsilon^2|t|^2 + 2\pi i x \cdot t} = e^{2\pi i x \cdot t} f_1(t)$, $t \in E_n$. Iz propozicije 1.1.11 (iii) je

$$\hat{g}(y) = \int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t} f_1(t) e^{-2\pi i y t} dt = \int_{E_n} f_1(t) e^{-2\pi i (y-x) t} dt = \hat{f}_1(y - x),$$

a iz propozicije 1.1.11 (i) te teorema 1.1.8, zbog $f_1(t) = e^{-\pi\epsilon^2 t^2}$ imamo:

$$\hat{f}_1(y - x) = \frac{1}{\epsilon^n} e^{-\frac{\pi}{\epsilon^2}(y-x)^2}$$

za $x, y \in E_n$. Iz teorema 1.1.9 imamo sljedeći rezultat:

$$\int_{E_n} e^{-\pi^2\epsilon^2|t|^2 + 2\pi i x \cdot t} \hat{f}(t) dt = \int_{E_n} \epsilon^{-n} e^{-\frac{\pi}{\epsilon^2}|x-y|^2} f(y) dy = (\phi_\epsilon * f)(x),$$

pri čemu je

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(\frac{x}{\epsilon}).$$

Pustimo li limes po ϵ kad $\epsilon \to 0$ u gornjoj jednakosti, zbog teorema 1.1.10. dobivamo

$$\lim_{\epsilon \to 0} (\phi_\epsilon * f)(x) = f(x)$$

po L^1 normi, odnosno

$$\int_{E_n} e^{2\pi i x \cdot t} \hat{f}(t) dt = f(x) \quad \text{g.s.}$$

Naime i lijeva i desna strana su funkcije jednake istom limesu, s jedne strane izračunatom po točkama, a s druge strane po normi $\| \cdot \|_1$. Takve dvije funkcije moraju biti jednake g.s. □

Korolar 1.1.1. *Ako su $f_1, f_2 \in L^1(E_n)$ i $\hat{f}_1(x) = \hat{f}_2(x)$ za sve $x \in E_n$, tada je $f_1(t) = f_2(t)$ za gotovo svaki $t \in E_n$.*

Dokaz. Pretpostavimo $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$ za neke $f_1, f_2 \in L^1(E_n)$. Sada je

$$\widehat{(f_1 - f_2)} = \hat{f}_1 - \hat{f}_2 = 0 \in L^1(E_n).$$

Iskoristimo teorem inverzije na funkciju $f_1 - f_2$:

$$(f_1 - f_2)(x) = \int_{E_n} \widehat{(f_1 - f_2)}(t)e^{2\pi i x\cdot t}dt = 0, \quad \text{za g.s. } x \in E_n,$$

odnosno $f_1(t) = f_2(t)$ za gotovo sve $t \in E_n$. □

1.2 Fourierova transformacija na prostoru L^2

Integral koji definira Fourierovu transformaciju nije definiran u Lebesgueovom smislu za općenite funkcije prostora $L^2(E_n)$, no Fourierova transformacija će još uvijek biti prirodno definirana na $L^2(E_n)$. Ako uz integrabilnost pretpostavimo da je f kvadratno integrabilna, tada će $\hat{f}$ također biti kvadratno integrabilna.

Sljedeći teorem tvrdi da je Fourierova transformacija ograničen linearan operator na gustom podskupu $L^1 \cap L^2$ od $L^2(E_n)$, odnosno da postoji njegovo jedinstveno ograničeno proširenje $\mathcal{F}$ na $L^2(E_n)$.

Teorem 1.2.1. *Ako je $f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$, tada je $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{X} = \{f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)\}$. Budući da $f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ povlači $\hat{f} \in L^\infty(E_n)$,slijedi da je $\mathcal{X} \subset L^2(E_n)$, a lako se vidi da je $\mathcal{X}$ gust u $L^2(E_n)$. Neka su $f, g \in \mathcal{X}$ i stavimo da je $h = \overline{\hat{g}}$. Prema teoremu 1.1.12 slijedi

$$\hat{h}(\zeta) = \int_{E_n} e^{-2\pi i x\zeta}\overline{\hat{g}}(x)dx = \overline{\int_{E_n} e^{-2\pi i x\zeta}\hat{g}(x)dx} = \overline{g}(\zeta).$$

Primijenjujući teorem 1.1.9 slijedi da je

$$\int_{E_n} f(x)\overline{g}(x)dx = \int_{E_n} f(x)\hat{h}(x)dx = \int_{E_n} \hat{f}(x)h(x) = \int_{E_n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)dx.$$

Odavde slijedi da $\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ čuva skalarni produkt u L^2, a u slučaju da uzmemo $g = f$ slijedi da je $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Dakle, $\mathcal{F}|_{\mathcal{X}}$ se može proširiti do izomorfizma na $L^2(E_n)$.
Preostaje još pokazati da se takvo proširenje podudara s $\mathcal{F}$ na $L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$.
Naime, ako je $f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ i $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, slično kao u dokazu teorema 1.1.12 imamo da je $f*g_t \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ prema teoremu 1.1.3, a zbog

$$\widehat{(f*g_t)}(\epsilon) = e^{-\pi t^2|\epsilon|^2}\hat{f}(\epsilon)$$

i ograničenosti od $\hat{f}$ imamo da je $f*g_t \in L^1(E_n)$. Stoga, $f*g_t \in \mathcal{X}$. Štoviše, $f*g_t \mapsto f$ u L^1 i L^2 normama, odnosno $\widehat{(f*g_t)} \mapsto \hat{f}$ uniformno u L^2 normi, pa tvrdnja slijedi.

□

Funkciju $\mathcal{F}$ nazivamo Fourierova transformacija na $L^2(E_n)$ te koristimo sljedeću notaciju $\hat{f} = \mathcal{F}f$ za svaku $f \in L^2(E_n)$. Općenito, ako je $f \in L^2(E_n)$, gornja definicija Fourierove transformacije zapravo upućuje na postojanje niza $(h_k, k \in \mathbb{N}_0)$ u $L^1 \cap L^2$ koji konvergira prema f u L^2 normi te se $\hat{f}$ postiže kao limes niza $(\hat{h_k}, k \in \mathbb{N}_0)$ u L^2. Prikladno je zato odabrati niz $(h_k, k \in \mathbb{N}_0)$ za koji je

$$h_k(t) = \begin{cases} f(t), & |t| \leqslant k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Dakle, $\hat{f}$ je L^2 limes funkcija $(\hat{h_k}, k \in \mathbb{N}_0)$ definiranih s

$$\hat{h_k}(x) = \int_{|t|\leqslant k} f(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt = \int_{E_n} h_k(t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt$$

za sve $k \in N_0$ i $x \in E_n$.

Kako je $\mathcal{F} : L^2(E_n) \mapsto L^2(E_n)$ izometrija vrijedi sljedeći rezultat:

Teorem 1.2.2. *$\mathcal{F}$ je unitaran operator na $L^2(E_n)$.*

Dokaz. Budući da je $\mathcal{F}$ izometrija, slika ovog operatora je zatvoren podskup u $L^2(E_n)$. Stoga, stavimo da je

$$\mathcal{R} = \{\mathcal{F}(f) : f \in L^2(E_n)\}.$$

Pretpostavimo da je $\mathcal{R} \subset L^2(E_n)$, tj. da slika nije jednaka cijeloj kodomeni. Tada postoji $g \in L^2(E_n)$ takva da je za svako $f \in L^2(E_n)$

$$\int_{E_n} \hat{f}(x)g(x)dx = 0,$$

ali $||g||_2 \neq 0$.Naime, naprosto treba uzeti ne-nul funkciju g iz ortogonalnog komplementa slike, koji je netrivijalan po našoj pretpostavci; vidjeti Rieszov teorem o projekciji, odjeljak 3.2 u knjizi [6]. Sada je prema teoremu 1.1.9 za svako $f \in L^2(E_n)$

$$\int_{E_n} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{E_n} \hat{f}(x)g(x)dx = 0,$$

što implicira da je $\hat{g} = 0$ gotovo svuda u $L^2(E_n)$, a to je kontradikcija s $||\hat{g}||_2 = ||g||_2 \neq 0$.

□

Teoremi 1.2.1 i 1.2.2 zajedno daju Plancherelov teorem:

Teorem 1.2.3. *Ako je $f \in L^1(E_n) \cap L^2(E_n)$ tada je $\hat{f} \in L^2(E_n)$, te se $\mathcal{F}|_{L^1(E_n)\cap L^2(E_n)}$ može na jedinstven način proširiti do unitarnog izomorfizma na $L^2(E_n)$.*

Kao jednostavan rezultat prethodnih razmatranja navodimo sljedeći rezultat:

Korolar 1.2.1. *Neka je $g \in L^2(E_n)$. Tada vrijedi*

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x), \qquad x \in E_n.$$

Mi smo iskazali i dokazali samo one rezultate u vezi Fourierove transformacije koji će nam trebati u kasnijem tekstu. Više povezanog materijala se može naći u knjigama [4] i [8].

Poglavlje 2

Hermiteovi polinomi

2.1 Definicija i osnovna svojstva

Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ima fundamentalnu ulogu u teoriji vjerojatnosti. U kontekstu vjerojatnosnog prostora, stavimo $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ i neka je P vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}$ generirana funkcijom distribucije

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Vjerojatnosna mjera generirana sa F naziva se *Gaussova mjera*. Štoviše, integrand $e^{-\frac{x^2}{2}}$ ima još neka zanimljiva svojstva. Naime, njegova Fourierova transformacija je ista ta funkcija, samo malo "rastegnuta", odnosno

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-2\pi ixt} dt = \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 x^2}.$$

To se vidi iz teorema 1.1.8 uz $n = 1$ i $\alpha = \frac{1}{2\pi}$.

U ovom poglavlju ćemo se baviti nizom specijalnih polinoma, koje je definirao još P. S. Laplace, a detaljno ih je proučavao P. L. Čebišev. C. Hermite ih je sredinom 19. stoljeća opisao kao nove te se od tada nazivaju njegovim imenom.

Definicija 2.1.1. *Hermiteov polinom* stupnja n, $n \in \mathbb{N}_0$, definiran je s

$$H_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x + iy)^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Izraz (2.1) naziva se *Gaussovom integralnom formulom*. Lako se pokaže da su polinomi $H_n(x)$ definirani s (2.1) polinomi stupnja n u varijabli x. Navest ćemo prvih 11 Hermiteovih polinoma:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1,\\
H_1(x) &= x,\\
H_2(x) &= x^2 - 1,\\
H_3(x) &= x^3 - 3,\\
H_4(x) &= x^4 - 6x + 3,\\
H_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x,\\
H_6(x) &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15,\\
H_7(x) &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,\\
H_8(x) &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105,\\
H_9(x) &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945,\\
H_{10}(x) &= x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945.
\end{aligned}$$

Propozicija 2.1.1. *Niz Hermiteovih polinoma* $(H_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *zadovoljava rekurzivnu relaciju*

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Dokaz. Primjenjujući relaciju (2.1) i parcijalnu integraciju, imamo:

$$\begin{aligned}
H_{n+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x+iy)^{n+1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x+iy)^{n} (x+iy) e^{-\frac{y^2}{2}} dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x+iy)^{n} x e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x+iy)^{n} iy e^{-\frac{y^2}{2}} dy\\
&= xH_n(x) + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(-(x+iy)^n e^{-\frac{y^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} n(x+iy)^{n-1} i e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right)\\
&= xH_n(x) - \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x+iy)^{n-1} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\\
&= xH_n(x) - nH_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.1.2. *Za svako* $n \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Dokaz. Označimo

$$P_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo najprije da P_n zadovoljava relaciju (2.2) iz propozicije 2.1.1. Naime, deriviramo li $e^{-\frac{x^2}{2}}$ imamo:

$$\frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Primijenimo sada Leibnizovu formulu za n-tu derivaciju umnoška proizvoljnih realnih funkcija f i g, to jest

$$D^{(n)}(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(k)}(f) D^{(n-k)}(g), \qquad n \in \mathbb{N},$$

na funkcije $f = -x$ i $g = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pritom ovdje i u daljnjem tekstu pišemo $D = \frac{d}{dx}$ za operator deriviranja. Za $k \geqslant 2$ je $f^{(k)} = 0$. Stoga je

$$\begin{aligned} D^{(n)}(fg)(x) &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f^{(1)}(x) g^{(n-1)}(x) \\ &= -x \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} - n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Pomnožimo li dobivenu jednakost s $(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}}$ dobivamo da je

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-\frac{x^2}{2}} &= (-1)^{n+2} x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} - (-1)^{n+1} n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} - (-1)^{n-1} n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Dakle, P_n zadovoljava relaciju (2.2), to jest

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Primijetimo da je u slučaju $n = 0$

$$P_0(x) = (-1)^0 e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 = H_0(x),$$

a u slučaju $n = 1$ vrijedi

$$P_1(x) = (-1)^1 e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{-\frac{x^2}{2}} = x = H_1(x).$$

Kao posljedica dokazanog i propozicije 2.1.1 slijedi $P_n = H_n$ za svaki n, a to dokazuje traženu formulu. $\square$

Odavde imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 2.1.3. *Za svako $n \in \mathbb{N}$*

$$H_n^{'}(x) = nH_{n-1}(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Za $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ proizvoljne, primjenjujući relaciju (2.3) i Leibnizovu formulu, najprije izračunajmo

$$\begin{aligned}
(-1)^n DH_n(x) &= D(e^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= xe^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{(n+1)} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&= xe^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} (-xe^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= xe^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{(k)}(-x) D^{(n-k)}(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= (D^{(k)}(-x) = 0, k \geqslant 2) \\
&= xe^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \left[\binom{n}{0} D^{(0)}(-x) D^{(n)}(e^{-\frac{x^2}{2}} + \binom{n}{1} D(-x) D^{(n-1)}(e^{-\frac{x^2}{2}}) \right] \\
&= xe^{\frac{x^2}{2}} D^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \left[-xD^{(n)} e^{-\frac{x^2}{2}} - nD^{(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \\
&= -ne^{\frac{x^2}{2}} D^{(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Pomnožimo li dobivenu jednakost s $(-1)^n$ dobivamo:

$$DH_n(x) = n(-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} D^{(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} = n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^{(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} = nH_{n-1}(x).$$

□

2.2 Ortogonalnost, funkcija izvodnica i Mehlerova formula

U nastavku ćemo pokazati još nekoliko zanimljivih svojstava Hermiteovih polinoma. Prvo od njih jest ortogonalnost.

Teorem 2.2.1. *Niz $(H_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je skup ortogonalnih funkcija u $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$, odnosno*

$$\int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{mn},$$

pri čemu je težina $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$ *a* δ_{mn} *označava tzv.* Kroneckerovu delta-funkciju, *tj.* $\delta_{mn} = 1$ *ako je* $m = n$, *dok je* $\delta_{mn} = 0$ *za* $m \neq n$.

Dokaz. Neka je $m \leqslant n$. Primjenjujući parcijalnu integraciju i relaciju (2.4) slijedi

$$\begin{aligned}
\langle H_m, H_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} H_m(x)(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} H_m(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{\mathbb{R}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dH_m(x)}{dx} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} m \int_{\mathbb{R}} H_{m-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Nakon m-te parcijalne integracije dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{2\pi}} m! \int_{\mathbb{R}} H_0(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{\sqrt{2\pi}} m! \int_{\mathbb{R}} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= n! \delta_{mn}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} n! \delta_{mn}.$$

□

Hermiteovi polinomi tvore ortogonalnu bazu Hilbertovog prostora za funkcije koje zadovoljavaju

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) dx < \infty,$$

u kojem je skalarni produkt definiran preko integrala

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$$

pri čemu je, kao i ranije, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Teorem 2.2.2. *Niz* $\{H_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *je ortogonalna baza prostora* $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$, *tj. to je potpun ortogonalan sustav.*

Dokaz. U ortogonalnim sustavima, potpunost je ekvivalentna činjenici da je nul-funkcija jedina funkcija u $L^2(\mathbb{R}, w(x)dx)$ ortogonalna na sve funkcije sustava, vidjeti [6]. Budući da je linearna ljuska Hermiteovih polinoma prostor svih polinoma, potrebno je pokazati da ako je za svako $n \geqslant 0$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)x^n e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

tada $f = 0$.

Definirajmo funkciju $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{zx-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Funkcija $e^{zx-\frac{x^2}{2}}$ uniformno je dominirana na svakom kompaktnom podskupu od $\mathbb{C}$, odnosno

$$\left|e^{zx-\frac{x^2}{2}}\right| \leqslant e^{|z||x|-\frac{x^2}{2}} \in L^2(\mathbb{R}), \qquad \text{za svako } z \in \mathbb{C}$$

pa je F dobro definirana. Štoviše, F je holomorfna, kao integral holomorfnih funkcija. Pretpostavimo sada da je $\langle H_n, f\rangle = 0$ za svako $n \geqslant 0$. Budući da je za $m \in \mathbb{N}$, x^m linearna kombinacija od $H_0, H_1, \ldots, H_m$, imamo:

$$\begin{aligned} F^{(m)}(0) &= \int_R f(x) \left(\frac{d}{dz}\right)^m \bigg|_{z=0} e^{zx-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_R f(x)x^m e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \langle x^m, f\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Slijedi da je $F \equiv 0$. Za proizvoljno $t \in \mathbb{R}$ je

$$\begin{aligned} F(-it) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right) e^{-itx} dx \\ &= \mathcal{F}(f(x)e^{-\frac{x^2}{2}})(t/2\pi). \end{aligned}$$

Odavde je $\mathcal{F}(f(x)e^{-\frac{x^2}{2}}) \equiv 0$. Prema korolaru 1.1.1 vrijedi $f(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ gotovo sigurno, a kako je $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, slijedi $f = 0$ gotovo sigurno. Stoga je ortogonalni komplement (vidjeti poglavlje 3 u [6]) linearne ljuske Hermiteovih polinoma

$$span[H_n, n \geqslant 0]^{\perp} = \{0\}$$

□

Izvedimo sada izraz za eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza Hermiteovih polinoma. Neka je

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n.$$

Koristeći formulu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) b^n = f(a+b)$$

za razvoj u Taylorov red od $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2}}$, $a = x$ i $b = -t$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
F(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} t^n \\
&= e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}} (-t)^n \\
&= e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \\
&= e^{xt - \frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Ovo je upravo izraz za $F(x,t)$ kakav smo željeli. Iz teorema 1.1.8 odmah slijedi rezultat

$$e^{-\frac{\zeta^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta - \frac{x^2}{2}} dx, \qquad \zeta \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Uvrstimo li (2.5) u (2.3), za $\zeta \in \mathbb{R}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
H_n(\zeta) &= e^{\frac{\zeta^2}{2}} \left(-\frac{d}{d\zeta} \right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\zeta - \frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\zeta^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n e^{-ix\zeta - \frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n e^{-\frac{(x-i\zeta)^2}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Dobiveni izraz naziva se *integralna reprezentacija* Hermiteovih polinoma.

Sada, za proizvoljne ζ, $\mu \in \mathbb{R}$, primjenjujući teorem 1.1.8 i integralnu reprezentaciju, slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(\zeta) H_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n (-iy)^n e^{-\frac{(x-i\zeta)^2}{2} - \frac{(y-i\mu)^2}{2}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-i\zeta)^2}{2}-\frac{(y-i\mu)^2}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-txy)^n}{n!}\right)dxdy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-i\zeta)^2}{2}-\frac{(y-i\mu)^2}{2}-txy}dxdy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-i\zeta)^2}{2}-itx\mu+\frac{t^2x^2}{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-i\mu+tx)^2}{2}}dxdy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(1-t^2)x^2}{2}+\frac{\zeta^2}{2}-ix(\zeta-t\mu)}dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\frac{\zeta^2}{2}-\frac{(\zeta-t\mu)^2}{2(1-t^2)}}.
\end{aligned}$$

Jednakost

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(\zeta)H_n(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}e^{\frac{t\zeta\mu}{1-t^2}-\frac{t^2(\zeta^2+\mu^2)}{2(1-t^2)}} \tag{2.6}$$

nazivamo *Mehlerova formula*.

Poglavlje 3

Babenko-Becknerov teorem

Teorem 3.0.3. *Neka je* $1 < p \leqslant 2$ *i* $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *Fourierova transformacija pri čemu je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*. Tada vrijedi:*

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \leqslant (A_p)^n \|f\|_p, \tag{3.1}$$

gdje je $A_p = \left[\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}} \right]^{\frac{1}{2}}$.

Prilikom dokaza teorema, najprije ćemo razmatrati slučaj $n = 1$. Naime, Fourierova transformacija neke funkcije na $\mathbb{R}^n$ svodi se na produkt jednodimenzionalnih operatora, a rezultat za n dimenzija će potom slijediti primjenom leme 3.1.2., koju ćemo dokazati u nastavku.

3.1 Nejednakost za dvije točke i produkt operatora

Neka su $(H_m, m \in \mathbb{N}_0)$ Hermiteovi polinomi s pripadajućom Gaussovom mjerom

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \qquad x \in \mathbb{R},$$

to jest

$$H_m(x) = \int_{\mathbb{R}} (x + iy)^m d\mu(y), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prema poglavlju 2, funkcija izvodnica za Hermiteove polinome je

$$e^{-\frac{t^2}{2} + xt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m H_m(x). \tag{3.2}$$

Za $|\omega| < 1$ definirajmo operator T_ω sa

$$T_\omega : H_m \mapsto \omega^m H_m, \qquad m \in \mathbb{N}_0.$$

Lako se vidi da vrijedi $T_{\omega_1} T_{\omega_2} = T_{\omega_1 \omega_2}$. Operator T_ω se može zapisati kao integralni operator na $L^2(d\mu)$ definiran preko Mehlerove formule, čija jezgra je

$$T_\omega(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - \omega^2}} e^{-\frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2(1-\omega^2)} + \frac{\omega xy}{1-\omega^2}}, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Za $g \in span[H_m, m \in N_0]$ vrijedi:

$$(T_\omega g)(x) = \int T_\omega(x, y) g(y) d\mu(y).$$

Dokažimo tu činjenicu. Naime, svaki polinom možemo prikazati kao linearnu kombinaciju Hermiteovih polinoma. Dovoljno je gledati one polinome g koji su konačne linearne kombinacije Hermiteovih funkcija. Takve funkcije su guste u L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Uzmimo g iz linearne ljuske prvih $n + 1$ Hermiteovih polinoma, tako da po raspisu u ortogonalnoj bazi vrijedi

$$g = \sum_{m=0}^{n} \frac{\langle g, H_m \rangle}{\langle H_m, H_m \rangle} H_m.$$

Zbog ortogonalnosti Hermiteovih polinoma, odnosno teorema 2.2.1, i definicije operatora T_ω imamo:

$$\begin{aligned}
(T_\omega g)(x) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{\langle g(x), H_m(x) \rangle}{\langle H_m(x), H_m(x) \rangle} T_\omega H_m(x) \\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\int g(y) H_m(y) d\mu(y) \right) \omega^m H_m(x) \\
&= \int \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{\omega^m}{m!} H_m(x) H_m(y) \right) g(y) d\mu(y) \\
&= \int T_\omega(x, y) g(y) d\mu(y).
\end{aligned}$$

Stoga, u slučaju $n = 1$ teorem 3.0.3 ekvivalentan je sljedećem teoremu:

Teorem 3.1.1. *Za* $1 < p \leqslant 2$ *i* $\omega = -i\sqrt{p - 1}$ *vrijedi*

$$T_\omega : L^p(d\mu) \to L^{p'}(d\mu),$$

$$||T_\omega g||_{L^{p'}(d\mu)} \leqslant ||g||_{L^p(d\mu)}. \tag{3.3}$$

Promatrajmo nejednakost 3.3 za polinome g, tj. polinome koji su konačna linearna kombinacija Hermiteovih funkcija. Tada za slučaj $n = 1$ i funkcije

$$f(x) = g(\sqrt{2\pi p}x)e^{-\pi x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

jednostavnom zamjenom varijabli postižemo ekvivalenciju između teorema 3.0.3 i teorema 3.1.1. Doista, relacija (3.3) eksplicitno se može zapisati kao

$$\left\{ \int \left| T_\omega(x,y)g(y)d\mu(y) \right|^{p'} d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left\{ \int |g(x)|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

Na lijevoj strani uvedimo zamjenu:

$$x = \sqrt{2\pi p'}u,$$

$$y = \sqrt{2\pi p}v,$$

$u, v \in \mathbb{R}$. U tom slučaju, za $\omega = -i\sqrt{p-1}$ vrijedi

$$\begin{aligned} T_\omega(x,y) &= (1 - (-i\sqrt{p-1})^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(-i\sqrt{p-1})^2 2\pi(p'u^2+pv^2)}{2(1-(-i\sqrt{p-1})^2)} + \frac{(-i\sqrt{p-1})2\pi uv\sqrt{pp'}}{1-(-i\sqrt{p-1})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{(p-1)\pi(p'u^2+pv^2)}{p} - i\sqrt{\frac{p^2p'-pp'}{p^2}}2\pi uv} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\pi(p'u^2+pv^2) - \frac{\pi}{p}(p'u^2+pv^2) - \sqrt{\frac{pp'-p'}{p}}2\pi iuv} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\pi(p'u^2+pv^2) - \frac{\pi p'u^2}{p} - \pi v^2 - 2\pi iuv}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} (T_\omega g)(x) &= \int \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\pi(p'u^2+pv^2) - 2\pi iuv - \pi v^2 - \frac{\pi p'u^2}{p}} g(\sqrt{2\pi p}v) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\pi pv^2} \sqrt{2\pi p}dv \\ &= \int e^{\pi p'u^2 + \pi pv^2 - 2\pi iuv - \pi v^2 - \frac{\pi p'u^2}{p} - \pi pv^2} g(\sqrt{2\pi p}v)dv \\ &= \int e^{\pi u^2(p' - \frac{p'}{p}) - 2\pi iuv - \pi v^2} g(\sqrt{2\pi p}v)dv \\ &= \int e^{\pi u^2 - \pi v^2 - 2\pi iuv} g(\sqrt{2\pi p}v)dv, \end{aligned}$$

a odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}
\|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\mu)} &= \left\{ \int \left| \int e^{\pi u^2 - \pi v^2 - 2\pi i u v} g(\sqrt{2\pi p} v) dv \right|^{p'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\pi p' u^2} \sqrt{2\pi p'} du \right\}^{\frac{1}{p'}} \\
&= [p'^{\frac{1}{p'}}]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int \left| \int e^{\pi u^2 - \pi v^2 - 2\pi i u v - \pi u^2} g(\sqrt{2\pi p} v) dv \right|^{p'} du \right\}^{\frac{1}{p'}} \\
&= [p'^{\frac{1}{p'}}]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int \left| \int e^{-2\pi i u v} g(\sqrt{2\pi p} v) e^{-\pi v^2} dv \right|^{p'} du \right\}^{\frac{1}{p'}} \\
&= [p'^{\frac{1}{p'}}]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{F} f\|_{L^{p'}}.
\end{aligned}$$

Uvedemo li na lijevoj strani nejednakosti (3.4) zamjenu $x = \sqrt{2\pi p} u$, imamo:

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^p(d\mu)} &= \left\{ \int |g(x)|^p d\mu(x) \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int |g(\sqrt{2\pi p} u)|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\pi p u^2} \sqrt{2\pi p} du \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= [p^{\frac{1}{p}}]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int |g(\sqrt{2\pi p} u) e^{-\pi u^2}|^p du \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&= [p^{\frac{1}{p}}]^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\mu)} \leqslant \|g\|_{L^p(d\mu)}$$

je ekvivalentno sa

$$\|\mathcal{F} f\|_{L^{p'}} \leqslant A_p \|f\|_{L^p},$$

pri čemu je $A_p = \left[\frac{p^{\frac{1}{p}}}{p'^{\frac{1}{p'}}} \right]^{\frac{1}{2}}$. Budući da su funkcije poput f guste u L^p prostorima $(1 < p < \infty)$, teoremi 3.0.3 i 3.1.1 su ekvivalentni. Nejednakost (3.3) iz teorema 3.1.1 će biti dokazana ukoliko koristeći centralni granični teorem pokažemo da je Gaussova mjera $d\mu$ slabi limes nekih vjerojatnosnih mjera za koje ćemo znati direktno provjeriti analognu nejednakost. Pretpostavimo da je zadan niz Bernoullijevih slučajnih pokusa, odnosno, neka je $d\nu(x)$ diskretna vjerojatnosna mjera s težinom $\frac{1}{2}$ u točkama $x = \pm 1$ te neka je $d\nu_n(x)$ n-ta konvolucije mjere $d\nu(\sqrt{n} x)$ sa samom sobom. To po definiciji znači upravo

$$\int h(x) d\nu_n(x) = \int h(x_1 + \cdots + x_n) d\nu(\sqrt{n} x_1) \ldots d\nu(\sqrt{n} x_n)$$

za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tada $d\nu_n$ konvergira ka $d\mu$ u $C_0(\mathbb{R})^*$, što znači da za svaku ograničenu neprekidnu funkciju $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \int h(x) d\nu_n(x) = \int h(x) d\mu(x).$$

Drugim riječima, niz distribucija (ν_n) konvergira slabo prema μ, pri čemu se *slaba konvergencija* definira kao gore, što je uobičajeno u teoriji vjerojatnosti. Rezultat koji to garantira je tzv. *centralni granični teorem*, vidjeti [7]. Štoviše, momenti od $d\nu_n$ će konvergirati momentima od $d\mu$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int x^k d\nu_n(x) = \int x^k d\mu(x)$$

za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. To bi slijedilo iz definicije slabe konvergencije kada bismo mogli uzeti $h(x) = x^k$, ali ta funkcija nije ograničena. Ipak u članku [1] (vidjeti teorem 1) je dana nadogradnja centralnog graničnog teorema, koja upravo govori o konvergenciji momenata uz izvjesne uvjete na ν, koji su ovdje svakako zadovoljeni.

Produkt mjera $d\nu(\sqrt{n}x_1)\cdots d\nu(\sqrt{n}x_n)$ je diskretna mjera, tj. svaka koordinata od $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ može poprimiti samo dvije vrijednosti, $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$. Sve funkcije nad ovakvim prostorom mjere će biti polinomi stupnja najviše jedan u svakoj od n varijabli x_i. Na prostoru mjere $d\nu$ definiramo operator C, koji je analogan operatoru T_ω na prostoru mjere $d\mu$ sa

$$T_\omega : aH_0 + bH_1 \mapsto aH_0 + \omega bH_1,$$
$$C : a + bx \mapsto a + \omega bx.$$

Sada ćemo pokazati da je C ograničeni linearni operator s $L^p(d\nu)$ u $L^{p'}(d\nu)$ s normom jedan. Ovaj rezultat je autor od [2] nazvao *nejednakost dvije točke*. Navodimo ga kao sljedeću lemu.

Lema 3.1.1. *(Nejednakost za dvije točke)*
$C : a + bx \mapsto a + \omega bx$ je ograničen linearan operator norme jedan sa $L^p(d\nu)$ u $L^{p'}(d\nu)$, pri čemu je $\omega = -i\sqrt{p-1}$, $1 < p \leqslant 2$ te $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Drugim riječima, za sve kompleksne brojeve a i b vrijedi

$$\left(\frac{|a + \omega b|^{p'} + |a - \omega b|^{p'}}{2}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(\frac{|a + b|^p + |a - b|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.5}$$

Dokaz. Tvrdnju je dovoljno pokazati za $a = 1$ i proizvoljan kompleksan broj b. Naime, inače možemo podijeliti cijelu nejednakost s a i primijeniti dokazano na $\frac{b}{a}$. Uvrstimo li zamjenu $a = 1$ i $b = \xi + i\eta$ dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} |a + \omega b| &= |1 - i\sqrt{p-1}(\xi + i\eta)| = |1 + \eta\sqrt{p-1} - i\xi\sqrt{p-1}| \\ &= \sqrt{(1 + \eta\sqrt{p-1})^2 + \xi^2(p-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a - \omega b| &= |1 + i\sqrt{p-1}(\xi + i\eta)| = |1 - \eta\sqrt{p-1} + i\xi\sqrt{p-1}| \\ &= \sqrt{(1 - \eta\sqrt{p-1})^2 + \xi^2(p-1)} \end{aligned}$$

$$|a+b| = |1+\xi+i\eta| = \sqrt{(1+\xi)^2+\eta^2}$$

$$|a-b| = |1-\xi-i\eta| = \sqrt{(1-\xi)^2+\eta^2}$$

Na taj način se željena nejednakost tranformira u:

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{[(1+\eta\sqrt{p-1})^2+\xi^2(p-1)]^{p'/2}+[(1-\eta\sqrt{p-1})^2+\xi^2(p-1)]^{p'/2}}{2}\right\}^{1/p'}\\ &\leqslant\left\{\frac{[(1+\xi)^2+\eta^2]^{p/2}+[(1-\xi)^2+\eta^2]^{p/2}}{2}\right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

Obzirom da su ξ i η ionako proizvoljni realni brojevi, možemo η zamijeniti s

$$\tilde{\eta} = \eta\sqrt{p-1} = \frac{\eta}{\sqrt{p'-1}},$$

pri čemu smo koristili $(p-1)(p'-1) = 1$, a tražena nejednakost postaje

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{[(1+\tilde{\eta})^2+\xi^2(p-1)]^{p'/2}+[(1-\tilde{\eta})^2+\xi^2(p-1)]^{p'/2}}{2}\right\}^{1/p'}\\ &\leqslant\left\{\frac{[(1+\xi)^2+(p'-1)\tilde{\eta}^2]^{p/2}+[(1-\xi)^2+(p'-1)\tilde{\eta}^2]^{p/2}}{2}\right\}^{1/p}.\end{aligned}$$

Praktičnije će nam biti u daljnjem opet pisati η umjesto $\tilde{\eta}$. Definirajmo sada funkciju $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sa

$$G(\xi,\eta) = \frac{\left\{\frac{[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{\frac{p'}{2}}+[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{\frac{p'}{2}}}{2}\right\}^{\frac{1}{p'}}}{\left\{\frac{[(1+\xi)^2+(p'-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}+[(1-\xi)^2+(p'-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}}{2}\right\}^{\frac{1}{p}}}.$$

Za dokaz od (3.5) dovoljno će biti dokazati da je

$$G(\xi,\eta)\leqslant 1,\qquad \xi,\eta\in\mathbb{R}.$$

Trebat ćemo dva posebna slučaja nejednakosti Minkowskog: za realne brojeve a_1, a_2, b_1, b_2 vrijedi

$$(|a_1+b_1|^q+|a_2+b_2|^q)^{1/q}\leqslant(|a_1|^q+|a_2|^q)^{1/q}+(|b_1|^q+|b_2|^q)^{1/q}\quad\text{ako je } q\geqslant 1,$$

odnosno

$$(|a_1+b_1|^q+|a_2+b_2|^q)^{1/q}\geqslant(|a_1|^q+|a_2|^q)^{1/q}+(|b_1|^q+|b_2|^q)^{1/q}\quad\text{ako je } 0<q\leqslant 1.$$

Koristit ćemo ih za $q = \frac{p'}{2} \geqslant 1$, odnosno $q = \frac{p}{2} \leqslant 1$. Primjenjujući te nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{[(1+\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{\frac{p'}{2}}+[(1-\eta)^2+(p-1)\xi^2]^{\frac{p'}{2}}}{2}\right\}^{\frac{2}{p'}}\\ &\leqslant \left[\frac{|1+\eta|^{p'}+|1-\eta|^{p'}}{2}\right]^{\frac{2}{p'}}+(p-1)\xi^2\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{[(1+\xi)^2+(p'-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}+[(1-\xi)^2+(p'-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}}{2}\right\}^{\frac{2}{p}}\\ &\geqslant \left[\frac{|1+\xi|^{p}+|1-\xi|^{p}}{2}\right]^{\frac{2}{p}}+(p'-1)\eta^2.\end{aligned}$$

U drugoj nejednakosti znak se mijenja jer je $\frac{p}{2} \leqslant 1$. Odavde slijedi

$$G(\xi,\eta) \leqslant \left\{\frac{\left[\frac{|1+\eta|^{p'}+|1-\eta|^{p'}}{2}\right]^{\frac{2}{p'}}+(p-1)\xi^2}{\left[\frac{|1+\xi|^{p}+|1-\xi|^{p}}{2}\right]^{\frac{2}{p}}+(p'-1)\eta^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Pokazat ćemo da vrijedi

$$\left(\frac{|1+\eta|^{p'}+|1-\eta|^{p'}}{2}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant [1+(p'-1)\eta^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

te

$$[1+(p-1)\eta^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\frac{|1+\xi|^{p}+|1-\xi|^{p}}{2}\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.7}$$

odakle zaključujemo da je

$$\left\{\frac{\left[\frac{|1+\eta|^{p'}+|1-\eta|^{p'}}{2}\right]^{\frac{2}{p'}}+(p-1)\xi^2}{\left[\frac{|1+\xi|^{p}+|1-\xi|^{p}}{2}\right]^{\frac{2}{p}}+(p'-1)\eta^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Stoga je

$$G(\xi,\eta) \leqslant 1, \qquad \xi,\eta \in \mathbb{R},$$

pa tvrdnja vrijedi. □

U nastavku ćemo koristeći elementarnu minimizaciju pokazati da relacije (3.6) i (3.7) zaista vrijede. Primijetimo najprije da će nejednakost

$$\left[\frac{|1+y|^m + |1-y|^m}{2}\right]^{\frac{1}{m}} \leqslant \sqrt{1+(m-1)y^2} \tag{3.8}$$

za $0 < y < 1$ i $m > 2$ implicirati i slučaj za $y > 1$ ukoliko podijelimo sa y. Pokazat ćemo da (3.8) vrijedi za fiksno $m > 2$ i $y \in \langle 0, 1\rangle$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(y) = \frac{\left[\frac{|1+y|^m+|1-y|^m}{2}\right]^{\frac{1}{m}}}{\sqrt{1+(m-1)y^2}}.$$

Neka je sada $\phi(y) = \ln(f(y))$, odnosno

$$\phi(y) = \frac{1}{m}\ln\left\{\frac{(1+y)^m + (1-y)^m}{2}\right\} - \frac{1}{2}\ln[1+(m-1)y^2]$$

za $y \in \langle 0, 1\rangle$ i $2 \leqslant m < \infty$. Derivirajmo funkciju ϕ:

$$\begin{aligned}
\phi'(y) &= \frac{1}{m}\frac{2}{(1+y)^m + (1-y)^m}[m(1+y)^{m-1} + m(1-y)^{m-1}]\frac{1}{2} \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{1+(m-1)y^2}2(m-1)y \\
&= [(1+y)^m + (1-y)^m]^{-1}[(1+y)^{m-1} - (1-y)^{m-1}] - (m-1)y[1+(m-1)y^2]^{-1} \\
&= [(1+y)^m + (1-y)^m]^{-1}[1+(m-1)y^2]^{-1}\Delta(y),
\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}
\Delta(y) &= [(1+y)^{m-1} - (1-y)^{m-1}][1+(m-1)y^2] - y(m-1)[(1+y)^m + (1-y)^m] \\
&= (1+y)^{m-1} + (m-1)y^2(1+y)^{m-1} - (1-y)^{m-1} - (m-1)y^2(1-y)^{m-1} \\
&\quad - (m-1)y(1+y)^m - (m-1)y(1-y)^m \\
&= (1+y)^{m-1}[1+(m-1)y^2 - (m-1)y(1+y)] \\
&\quad - (1-y)^{m-1}[1+(m-1)y^2 + (m-1)y(1-y)] \\
&= (1+y)^{m-1}[1-(m-1)y] - (1-y)^{m-1}[1+(m-1)y].
\end{aligned}$$

Da bismo saznali predznak od $\phi'(y)$ dovoljno je saznati predznak od $\Delta(y)$. Imamo da je

$$\begin{aligned}\Delta'(y) &= (m-1)(1+y)^{m-2}[1-(m-1)y] - (1+y)^{m-1}(m-1)\\ &+ (m-1)(1-y)^{m-2}[1+(m-1)y] - (1-y)^{m-1}(m-1)\\ &= (1+y)^{m-2}[(m-1)-(m-1)^2y+(1+y)(m-1)]\\ &- (1-y)^{m-2}[-(m-1)-(m-1)^2y+(1-y)(m-1)]\\ &= (1+y)^{m-2}[(m-1)-(m-1)^2y-(m-1)-(m-1)y]\\ &- (1-y)^{m-2}[-(m-1)-(m-1)^2y+(m-1)-(m-1)y]\\ &= (1+y)^{m-2}[-m(m-1)y] - (1-y)^{m-2}[-m(m-1)y]\\ &= -m(m-1)y[(1+y)^{m-2}-(1-y)^{m-2}].\end{aligned}$$

Budući da je $\Delta(y)$ neprekidna funkcija na intervalu $\langle 0,1\rangle$ i $\Delta'(y) < 0$ te

$$\Delta(0) = 0,$$

prema elementarnom rezultatu iz analize zaključujemo da je ona padajuća te je pogotovo $\Delta(y) < 0$ na $\langle 0,1\rangle$. Odavde slijedi da je $\phi'(y) < 0$. Kako je

$$\phi(0) = 0,$$

dobivamo da je $\phi(y) < 0$. Dakle, nejednakost (3.8) doista vrijedi. Za $1 < m < 2$ nejednakost (3.8) samo mijenja predznak a slijedi iz istog računa.

Definirajmo operatore

$$C_{n,k} : a + bx_k \mapsto a + \omega bx_k, \qquad n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

pri čemu su a i b funkcije u preostalih $n-1$ varijabli. Neka je

$$K_n = C_{n,1}\cdots C_{n,n},$$

produkt (tj. kompozicija) tih n operatora.

Lema 3.1.2. *(Produkt operatora) Neka su T_1 i T_2 linearni operatori te pretpostavimo da su T_1 i T_2 integralni operatori s nekim jezgrama, npr. definirani preko Mehlerove formule. Ako*

$$\begin{aligned}T_1 &: L^p(d\rho_1) \longrightarrow L^q(d\lambda_1), \qquad \|T_1\| \leqslant 1,\\ T_2 &: L^p(d\rho_2) \longrightarrow L^q(d\lambda_2), \qquad \|T_2\| \leqslant 1,\end{aligned}$$

pri čemu su $d\rho_i$ i $d\lambda_i, i \in \{1,2\}$ σ-konačne mjere, tada za $p \leqslant q$ imamo

$$T_1T_2 : L^p[d\rho_1 d\rho_2] \longrightarrow L^q[d\lambda_1 d\lambda_2], \qquad \|T_1T_2\| \leqslant 1.$$

Dokaz. Budući da su norme operatora T_1 i T_2 ograničene s jedan, za T_1, odnosno T_2 vrijedi:

$$f \in L^p(d\rho_i), \|T_i f\|_q \leqslant \|f\|_p \implies \int |T_i f|^q d\rho_i \leqslant \left(\int |f|^p d\lambda_i \right)^{\frac{q}{p}}, \qquad i = 1, 2.$$

Primijenimo li još (1.1) na funkciju $F(x_1, x_2) = (T_1 T_2 f)(x_1, x_2)$, imamo:

$$\begin{aligned} \left\{ \int \int |T_1 T_2 f(x_1, x_2)|^q d\lambda_1 d\lambda_2 \right\}^{\frac{1}{q}} &\leqslant \left\{ \int d\lambda_2(x_2) \left[\int |(T_2 f)(y_1, x_2)|^p d\rho_1(y_1) \right]^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left\{ \int d\rho_1(y_1) \left[\int |(T_2 f)(y_1, x_2)|^q d\lambda_2(x_2) \right]^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left\{ \int \int |f(y_1, y_2)|^p d\rho_1(y_1) d\rho_2(y_2) \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo

$$\|T_1 T_2 f\|_{L^q(d\lambda_1 d\lambda_2)} \leqslant \|f\|_{L^p(d\rho_1 d\rho_2)},$$

pa tvrdnja vrijedi. □

Iz lema 3.1.1 i 3.1.2 slijedi da je operator

$$K_n : L^p[d(\sqrt{n}x_1) \cdots d(\sqrt{n}x_n)] \longrightarrow L^{p'}[d(\sqrt{n}x_1) \cdots d(\sqrt{n}x_n)]$$

ograničen linearan operator s normom jedan. Restrikcija $\overline{K_n}$ operatora K_n na prostor simetričnih funkcija u n varijabli će također biti linearni operator norme jedan.

3.2 Simetrične funkcije i centralni granični teorem

Prostor simetričnih funkcija nad produktnom mjerom $d(\sqrt{n}x_1) \cdots d(\sqrt{n}x_n)$ ćemo označavati sa X_n. Funkcije

$$\phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n) = l! \sigma_l(x_1, \ldots, x_n)$$

čine ortogonalnu bazu prostora $L^2[X_n]$. Funkcije σ_l, $1 \leqslant l \leqslant n$ su *elementarne simetrične funkcije* u n varijabli i definirane su sa

$$\sigma_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1 < \ldots < m_l} x_{m_1} \cdots x_{m_l}, \qquad 1 \leqslant m_l \leqslant n.$$

Generatorska funkcija za elementarne simetrične funkcije dana je s

$$\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n; t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k t) = \sum_{l=0}^{n} t^l \sigma_l(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!} t^l \phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n). \qquad (3.9)$$

Stavimo li $x = x_1 + \cdots + x_n$, pri čemu je $(x_i)^2 = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$, vrijedi sljedeća veza između funkcija izvodnica (3.2) i (3.9):

$$T(x_1 + \cdots + x_n; t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \mathcal{T}\left[x_1, \ldots, x_n;\ \sqrt{n}\operatorname{th}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

i

$$\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n; t) = e^{\frac{1}{2}\left[\sqrt{n}\operatorname{Arth}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^2} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} T\left[x_1 + \cdots + x_n,\ \sqrt{n}\operatorname{Arth}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Prva jednakost slijedi zbog :

$$\begin{aligned} T(x_1 + \ldots + x_n; t) &= e^{-\frac{t^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} e^{t x_k} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \prod_{k=1}^{n} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) + x_k \sqrt{n}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right] \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \left[\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \prod_{k=1}^{n}\left[1 + x_k t \operatorname{th}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Druga jednakost će slijediti ako uvrstimo supstituciju

$$u = \sqrt{n}\operatorname{th}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Odavde je

$$t = \sqrt{n}\operatorname{Arth}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)$$

pa imamo

$$\mathcal{T}[x_1, \ldots, x_n; t] = e^{\frac{t^2}{2}} \left[\operatorname{ch}\left(\operatorname{Arth}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)\right]^{-n} T\left[x_1, \ldots, x_n,\ \sqrt{n}\operatorname{Arth}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right].$$

Računamo:

$$\operatorname{Arth}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{u}{\sqrt{n}}}{1 - \frac{u}{\sqrt{n}}}\right) = \ln\sqrt{\frac{\sqrt{n} + u}{\sqrt{n} - u}}, \qquad |u| < |\sqrt{n}|.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}\left(\operatorname{Arth}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right) &= \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u}} + \sqrt{\frac{\sqrt{n}-u}{\sqrt{n}+u}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u} + 1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u}}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-u}}{\sqrt{\frac{\sqrt{n}+u}{\sqrt{n}-u}}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-u^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{n}}} = \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

pa jednakost vrijedi. Diferenciranjem možemo izraziti $\phi_{n,l}$ kao linearnu kombinaciju Hermiteovih polinoma $H_k(x_1 + \cdots + x_n), 0 \leqslant k \leqslant l$. Štoviše,vrijedi

$$\phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n) = H_l(x_1 + \cdots + x_n) + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{[\frac{l}{2}]} a_{l,r} H_{l-2r}(x_1 + \cdots + x_n) \tag{3.10}$$

pri čemu su koeficijenti $a_{l,r}$ ograničeni u odnosu na n za fiksno l. Pokažimo da jednakost (3.10) zaista vrijedi. U poglavlju 2 smo vidjeli da iz Gaussove integralne formule (2.1) za Hermiteove polinome lako slijedi rekurzivna relacija (2.2), odnosno za $1 \leqslant l \leqslant n$ je

$$\begin{aligned}
H_l &= xH_{l-1}(x) - (l-1)H_{l-2}(x) \\
&= H_1(x)H_{l-1}(x) - (l-1)H_{l-2}(x).
\end{aligned}$$

Za funkcije $\phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi sljedeća rekurzivna relacija

$$\phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n) = \phi_{n,1}(x_1, \ldots, x_n)\phi_{n,l-1}(x_1, \ldots, x_n) - \frac{l-1}{n}[n-(l-2)]\phi_{n,l-2}(x_1, \ldots, x_n), \tag{3.11}$$

što bi u terminima elementarnih simetričnih funkcija bilo

$$l\sigma_l(x_1, \ldots, x_n) = \sigma_1(x_1, \ldots, x_n)\sigma_{l-1}(x_1, \ldots, x_n) - \frac{1}{n}[n-(l-2)]\sigma_{l-1}(x_1, \ldots, x_n). \tag{3.12}$$

Da bismo pokazali relaciju (3.12) koristit ćemo generatorsku funkciju (3.9):

$$\mathcal{T}(x_1, \ldots, x_n; t) = \prod_{k=1}^{n}(1 + x_k t) = \sum_{l=0}^{n} t^l \sigma_l(x_1, \ldots, x_n).$$

Dalje vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) = \sum_{k=1}^{n} x_k \mathcal{T}(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n;t) = \sum_{l=0}^{n} t^{l-1} l\sigma_l(x_1,\dots,x_n),$$

$$\sigma_1(x_1,\dots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) = \sum_{k=1}^{n} x_k(1+x_k t)\mathcal{T}(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n;t)$$

pri čemu je $\sigma_1(x_1,\dots,x_n) = x_k$, $k = 1,\dots,n$. Odavde slijedi da je

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1,\dots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 t\mathcal{T}(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n;t) \\
&= \frac{1}{n}t\sum_{k=1}^{n}\mathcal{T}(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n;t)
\end{aligned}$$

jer je $(x_k)^2 = \frac{1}{n}$, $k = 1,\dots,n$. Primijetimo da je

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_l(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n) = (n-l)\sigma_l(x_1,\dots,x_n), \tag{3.13}$$

to jest, zbog simetrije, lijeva strana mora biti višekratnik od $\sigma_l(x_1,\dots,x_n)$. Za $n \geqslant l$ u razvoju od $\sigma_l(x_1,\dots,x_n)$ ima $\binom{n}{l}$ sumanada, a da bismo našli konstantu $n-l$ stavimo da su vrijednosti x_i jednake za sve $i = 1,\dots,n$. Sada iz (3.13) imamo:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1,\dots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(x_1,\dots,x_n;t) \\
&= \frac{1}{n}t\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n} t^l\sigma_l(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n) \\
&= \frac{1}{n}t\sum_{l=0}^{n} t^l\sum_{k=1}^{n}\sigma_l(x_1,\dots,\hat{x}_k,\dots,x_n) \\
&= \frac{1}{n}t\sum_{l=0}^{n} t^l(n-l)\sigma_l(x_1,\dots,x_n) \\
&= \frac{1}{n}t\sum_{l=0}^{n-1} t^l(n-l)\sigma_l(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}$$

Usporedimo sada koeficijente uz potencije od t. Naime,iz

$$\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t)-\frac{1}{n}t\sum_{l=0}^{n-1}t^l(n-l)\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}(x_1,\ldots,x_n;t)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{l=0}^{n}t^l\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)-\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}t^{l+1}(n-l)\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=\sum_{l=0}^{n}t^{l-1}l\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{l=0}^{n}t^l\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)-\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n}t^l(n-l+1)\sigma_{l-1}(x_1,\ldots,x_n)$$
$$=\sum_{l=0}^{n}t^{l-1}l\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{l=0}^{n}\left[\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)-\frac{n-l+1}{n}\sigma_{l-1}(x_1,\ldots,x_n)\right]t^l$$
$$=\sum_{l=0}^{n}t^{l-1}l\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{l=0}^{n+1}\left[\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_{l-1}(x_1,\ldots,x_n)-\frac{n-l+2}{n}\sigma_{l-2}(x_1,\ldots,x_n)\right]t^{l-1}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}t^{l-1}l\sigma_l(x_1,\ldots,x_n)$$

slijedi:

$$\sigma_1(x_1,\ldots,x_n)\sigma_{l-1}(x_1,\ldots,x_n)-\frac{1}{n}[n-(l-2)]\sigma_{l-2}(x_1,\ldots,x_n)=l\sigma_l(x_1,\ldots,x_n),\ 1\leqslant l\leqslant n.$$

Dakle, pokazali smo da (3.12) vrijedi, a prema definiciji od $\phi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n)$ vrijedi i (3.11). Eksplicitnim računanjem imamo da je

$$\begin{aligned}
\phi_{n,0}(x_1,\ldots,x_n)&=H_0(x_1,\ldots,x_n),\\
\phi_{n,1}(x_1,\ldots,x_n)&=H_1(x_1,\ldots,x_n),\\
\phi_{n,2}(x_1,\ldots,x_n)&=H_2(x_1,\ldots,x_n),\\
\phi_{n,3}(x_1,\ldots,x_n)&=H_3(x_1,\ldots,x_n)+\frac{2}{n}H_1(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Sada indukcijom po l dokazujemo (3.11) koristeći (3.12). Baza indukcije su naprosto gornji izrazi za $l = 0, 1, 2, 3$. U koraku indukcije uzmimo neki $l \geqslant 4$ te pretpostavimo da tvdnja vrijedi za sve manje nenegativne cijele brojeve. Korištenjem dokazane rekurzije (3.12) i pretpostavke indukcije možemo pisati (pri čemu, malo neprecizno, radi kratkoće izostavljamo varijable):

$$\begin{aligned}
\phi_{n,l} &= H_1(H_{l-1} + \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 1} a_{l-1,r}H_{l-1-2r}) - \frac{l-1}{n}(n-(l-2))(H_{l-2} + \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 1} a_{l-2,r}H_{l-2-2r}) \\
&= H_l + (l-1)H_{l-2} + \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 1} a_{l-1,r}(H_{l-2r} + (l-1-2r)H_{l-2-2r}) - (l-1)H_{l-2} \\
&+ \frac{(l-1)(l-2)}{n}H_{l-2} - \frac{l-1}{n}(1-\frac{l-2}{n})\sum_{r\geqslant 1} a_{l-2,r}H_{l-2-2r} \\
&= H_l + \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 1} a_{l-1,r}H_{l-2r} + \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 2} a_{l-1,r-1}(l+1-2r)H_{l-2r} + \frac{(l-1)(l-2)}{n}H_{l-2} \\
&- \frac{1}{n}\sum_{r\geqslant 2}(l-1)(1-\frac{l-2}{n})a_{l-2,r-1}H_{l-2r}
\end{aligned}$$

Odavde vidimo da (3.12) doista vrijedi uz:

$$a_{l,1} = a_{l-1,1} + (l-1)(l-2)$$

te

$$a_{l,r} = a_{l-1,r} + (l+1-2r)a_{l-1,r-1} - (l-1)(1-\frac{l-2}{n})a_{l-2,r-1}$$

za $r \geqslant 2$. Time je završen korak indukcije. Ograničenost koeficijenata $a_{l,r}$ po n također slijedi direktno iz ograničenosti $a_{l-1,r}$, $a_{l-1,r-1}$, $a_{l-2,r-1}$ po n i iz $0 \leqslant 1 - \frac{l-2}{n} \leqslant 1$.

Funkcije $\phi_{n,l}$ su svojstvene funkcije operatora $\overline{K}_n$:

$$\overline{K}_n : x_{m_1}\cdots x_{m_l} \mapsto \omega^l x_{m_1}\cdots x_{m_l},$$

$$\overline{K}_n\phi_{n,l} = \omega^l \phi_{n,l}$$

te su $\phi_{n,l}$ prirodni analogon Hermiteovih polinoma nad prostorom funkcija $L^2[X_n]$. $\overline{K}_n$ je operator norme jedan sa prostora $L^p[X_n]$ u prostor $L^{p'}[X_n]$. U ranijim razmatranjima smo naveli da svaki polinom g možemo izraziti kao konačnu linearnu kombinaciju Hermiteovih polinoma. Neka je

$$g(x) = \sum_{l=1}^{M} b_l H_l(x).$$

Definirajmo sada odgovarajuće polinome g_n u diskretnim varijablama $x_1, \ldots, x_n$ s

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=1}^{M} b_l \phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n).$$

Tada

$$T_\omega : \sum b_l H_l(x) \mapsto \sum \omega^l b_l H_l(x),$$
$$\overline{K}_n : \sum b_l \phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum \omega^l b_l \phi_{n,l}(x_1, \ldots, x_n).$$

Zbog relacije (3.10)

$$\int |(T_\omega g)(x_1 + \cdots + x_n) - (\overline{K}_n g_n)(x_1, \ldots, x_n)|^{p'} d\nu(\sqrt{n} x_1) \cdots d\nu(\sqrt{n} x_n) \longrightarrow 0$$

kada $n \to \infty$. Iz nejednakosti trokuta slijedi

$$\begin{aligned} &| \|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\nu_n)} - \|\overline{K}_n\|_{L^{p'}[X_n]} | \\ &\leqslant \left\{ \int |(T_\omega g)(x_1 + \cdots + x_n) - (\overline{K}_n g_n)(x_1, \ldots, x_n)|^{p'} d\nu(\sqrt{n} x_1) \cdots d\nu(\sqrt{n} x_n) \right\}^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

U osvrtu na niz Bernoullijevih pokusa rečeno je da će momenti u odnosu na $d\nu_n$ konvergirati prema momentima u odnosu na $d\mu$. Štoviše, uzimanjem linearnih kombinacija momenata dobivamo da $d\nu_n$ konvergira slabo prema $d\mu$ u odnosu na polinomijalne funkcije h iz definicije, a obzirom da je g polinom vrijedi:

$$\lim \|\overline{K}_n g_n\|_{L^{p'}[X_n]} = \lim \|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\nu_n)} = \|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\mu)}.$$

Ponovno, zbog relacije (3.10) imamo

$$\lim \|g_n\|_{L^p[X_n]} = \|g\|_{L^p(d\mu)}.$$

Kako je $\overline{K}_n$ norme jedan, imamo

$$\|\overline{K}_n g_n\|_{L^{p'}[X_n]} \leqslant \|g_n\|_{L^p[X_n]}$$

što implicira da je

$$\|T_\omega g\|_{L^{p'}(d\mu)} \leqslant \|g\|_{L^p(d\mu)}.$$

Budući da su funkcije poput g guste u L^p prostorima, nejednakost (3.3) vrijedi i time smo pokazali teorem 3.0.3.

Bibliografija

[1] B. von Bahr, *On the Convergence of Moments in the Central Limit Theorem*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 808–818.

[2] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Annals of Mathematics 102 (1975), 159–182.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Springer, New York, 2013.

[4] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, 2001.

[5] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1989.

[6] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza: Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[7] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[8] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.

Sažetak

Ovaj rad iznosi osnove Fourierove analize na realnom pravcu, čiji važni koncepti su Fourierova transformacija i Hermiteovi polinomi. Obrazlaže se kako se u realnoj analizi mogu prikladno iskoristiti rezultati iz teorije vjerojatnosti: centralni granični teorem i slaba konvergencija prema Gaussovoj mjeri. U tu svrhu se dokazuju tzv. nejednakost za dvije točke i rezultat za produkt operatora. Pokazuje se veza između simetričnih funkcija i Hermiteovih polinoma. Naposljetku, koristeći iznesene rezultate dokazuje se Babenko-Becknerova nejednakost.

Summary

This thesis reviews the basic results of the Fourier analysis on the real line, whose important concepts are the Fourier transform and the Hermite polynomials. It elaborates how to apply some results from probability theory to the real analysis: these are the central limit theorem and weak convergence towards the Gaussian measure. With this purpose the so-called two point inequality and result for product of operators are established. The relationship between symmetric functions and Hermite polynomials is also explored. In the end, the Babenko-Beckner inequality is derived from the established results.

Životopis

Rođena sam 10.4.1991. godine u Livnu. U Livnu sam pohađala Osnovnu školu Ivana Gorana Kovačića i Opću gimnaziju Livno. Školovanje sam nastavila u Zagrebu gdje sam 2013. godine završila Preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Pri istom fakultetu upisala sam Diplomski studij Matematičke statistike.